MS512 - Análise Numérica 1
Lista 4, v1.0

Prof. Maicon Correa

2019-1

Matrizes Ortogonais e Fatoração QR

Exercício 1. Mostre que, se $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz ortogonal, então:

a) Q^{-1} é uma matriz ortogonal.

b) $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

c) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

d) $\|Q\|_2 = 1$.

Exercício 2. Mostre que se Q_1 e Q_2 são matrizes $n \times n$, ortogonais, então $Q_1 Q_2$ é uma matriz ortogonal.

Exercício 3. Mostre que se Q é uma matriz ortogonal, então $\det(Q) = \pm 1$.

Exercício 4. Mostre que para todo vetor $x \in \mathbb{R}^2$ existe uma rotação $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $Q^T x = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$ para algum y, e que $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|x\|_2$.

Exercício 5. Mostre que se Q é uma rotação, então $\det(Q) = 1$.

Exercício 6. Utilize a decomposição QR baseada em rotações para resolver os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b$, para $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b$ com $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 7. *(Projetor)* Uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é um projetor se satisfaz $P^2 = P$ (P é idempotente) e será um projetor ortogonal se $P^T = P$ (P é simétrica). Seja $u \in \mathbb{R}^n$ com $\|u\|_2 = 1$ e defina $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ por $P = uu^T$. Mostre que:

a) $Pu = u$.

b) $Pv = 0 \quad$ se $< u, v >= 0$.

c) $P^2 = P$. (P é um projetor)

d) $P^T = P$. (P é um ortoprojetor ou projetor ortogonal)

e) Seja $\mathcal{S}$ o subespaço gerado por u. Mostre que P realiza uma projeção ortogonal sobre $\mathcal{S}$.

f) Determine posto(P).

g) Mostre que $P(\alpha u) = \alpha u$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $Pv = \beta u$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$

h) Seja $w \in \mathcal{S}^\perp$. Determine Pw.

Exercício 8. *(Refletor ou transformação de Householder ou matriz de Householder)*
Seja $u \in \mathbb{R}^n$ com $\|u\|_2 = 1$ e defina $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ por $Q = I - 2uu^T$. Mostre que:

a) $Qu = -u$.

b) $Qv = v \quad$ se $< u, v >= 0$.

c) $Q = Q^T$. (Q é simétrico)

d) $Q^T = Q^{-1}$. (Q é ortogonal)

e) $Q^{-1} = Q$.

Exercício 9. Seja $u \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo e defina $\gamma = \dfrac{2}{\|u\|_2^2}$ e $Q = I - \gamma uu^T$. Mostre que Q é um refletor, satisfazendo:

a) $Qu = -u$.

b) $Qv = v \quad$ se $< u, v >= 0$.

Exercício 10. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq y$ mas $\|x\|_2 = \|y\|_2$. Mostre que existe um único refletor Q tal que $Qx = y$.

Exercício 11. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo qualquer.

a) Mostre que existe um refletor Q tal que

$$Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Caracterize tal refletor, a partir da determinação do vetor u e do número γ tais que $Q = I - \gamma uu^T$.

Exercício 12. Sejam o refletor $Q = I - \gamma uu^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e a matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. O numero de operações na aplicação de Q sobre B, dada por

$$\begin{aligned} QB &= (I - \gamma uu^T)B \\ &= B - uv^T B, \end{aligned}$$

com $v^T = \gamma u^T$, depende da ordem com a qual o produto $uv^T B$ é realizado.

a) Mostre que se computamos $(uv^T)B$, o resultado entre parênteses é uma matriz $n \times n$ e o cálculo total requer algo em torno de $2n^2m$ operações.

b) Mostre que se computamos $u(v^T B)$, o resultado entre parênteses é uma matriz $1 \times m$ e o cálculo total requer algo em torno de $3nm$ operações. Verifique que essa forma de cômputo é mais eficiente que a anterior.

c) Mostre que o cálculo de $QB = B - uv^T B$ requer algo em torno de $4nm$ operações, se a forma mais eficiente é utilizada.

Exercício 13.

a) Encontre um refletor Q que mapeie o vetor $[3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 1]^T$ em um vetor na forma $[-\tau,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]^T$. Escreva Q de duas formas: (i) Na forma $I - \gamma uu^T$ e (ii) como uma matriz completamente montada.

b) Seja $a = [0,\ 2,\ 1,\ -1,\ 0]^T$. Calcule Qa de duas formas: (i) Na forma eficiente usando $I - \gamma uu^T$ e (ii) utilizando a matriz completamente montada Q.

Exercício 14. Refaça o Exercício 6, agora utilizando a decomposição QR baseada em refletores para resolver os sistemas lineares.

Exercício 15. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz não singular, então existe um único par de matrizes $Q, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que Q é ortogonal, R é triangular superior *com elementos da diagonal principal positivos* e $A = QR$.

Exercício 16. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $n > m$ então exitem matrizes $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que Q é ortogonal e $R = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix}$, onde $\hat{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é triangular superior e $A = QR$.

Exercício 17. Utilize o processo de Gram-Schmidt para mostrar que se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ possui n colunas linearmente independentes, então pode ser fatorada como $A = QR$, onde Q é uma matriz $m \times n$ cujas colunas forma uma base ortonormal para o espaço $\mathcal{C}(A)$ e R é uma matriz $n \times n$ triangular superior inversível.

Exercício 18. Refaça o Exercício 6, agora utilizando a decomposição QR baseada no processo de Gram-Schmidt para resolver os sistemas lineares.