MS512 - Análise Numérica 1
Lista 3, v1.0

Prof. Maicon Correa

2019-1

Exercícios de Álgebra Linear

Exercício 1. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Os quatro subespaços fundamentais associados a A são:

- Espaço coluna (ou imagem):

$$\mathcal{C}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

- Espaço nulo (ou núcleo):

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

- Espaço linha:

$$\mathcal{C}(A^T) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = A^T y,\ y \in \mathbb{R}^m\right\}.$$

- Espaço nulo à esquerda:

$$\mathcal{N}(A^T) = \left\{y \in \mathbb{R}^m : A^T y = 0\right\}.$$

Chamamos de posto(A) ao número máximo de colunas ou linhas linearmente independentes de A.

a) Mostre que $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{N}(A^T)$ são subespaços do $\mathbb{R}^m$.

b) Mostre que $\mathcal{C}(A^T)$ e $\mathcal{N}(A)$ são subespaços do $\mathbb{R}^n$.

c) Quais são as dimensões de $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{N}(A^T)$?

d) Mostre que $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ se e somente se A tem n colunas linearmente independentes.

e) Apresente uma condição necessária e suficiente para que o sistema $Ax = b$ possua solução.

f) Quando o sistema $Ax = b$ possuirá uma única solução?

Exercício 2. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 9 & -6 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Determine o número $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que, se possível:

a) $\text{posto}(A) = 1$.

b) $\text{posto}(A) = 2$.

c) $\text{posto}(A) = 3$.

Exercício 3. Sejam matrizes $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Mostre que:

a) $\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$.

b) $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(AB)$.

c) Se $AB = 0$ então $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{N}(A)$.

Exercício 4. Determine os quatro subespaços fundamentais, com suas respectivas dimensões, para as seguintes matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 9 & 14 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Neste caso, encontre a solução de $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercício 5. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$. Mostre que:

a) $\text{posto}(A) = n$ se e somente se $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.

a) $\text{posto}(A) = n$ se e somente se A^TA é não-singular.

Exercício 6. Seja $A = vu^T$ para vetores $v, u \in \mathbb{R}^n$. Qual o posto de A? Encontre todos os autovalores e autovetores de A.

Exercício 7. Seja $S = \text{span}\left\{(1,1,1,1)^T, (2,2,0,0)^T, (0,-2,3,1)^T\right\}$.

a) Obtenha uma base ortogonal para S.

b) Obtenha uma base ortonormal para S.

c) Obtenha uma base ortonormal para $S^\perp = \{u : u^Tv = 0,\ \forall\, v \in S\}$.