MS512 - Análise Numérica 1
Lista 2, v1.0

Prof. Maicon Correa

2019-1

Fatoração de Cholesky

Exercício 1. Defina matriz positiva definida.

Exercício 2. Mostre que se A é positiva definida, então A é não-singular.

Exercício 3. Mostre que se $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é não-singular então a matriz $A = M^T M$ é positiva definida.

Exercício 4. (*Método de Cholesky, formulação baseada em produto interno*) Escreva e implemente um algoritmo para efetuar a decomposição de Cholesky de uma matriz simétrica A, segundo a formulação baseada nas fórmulas

$$r_{ii} = +\sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2} \tag{1}$$

e

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}\right), \quad j = i+1, \ldots, n. \tag{2}$$

Perceba que $\sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}$ pode ser visto como o produto interno $r_i^T r_j$ de dois vetores r_i, $r_j \in \mathbb{R}^{i-1}$. Por esse motivo esse esquema é conhecido como formulação baseada em produto interno.

Exercício 5. Escreva um algoritmo baseado em (1) e (2) que cheque se uma dada matriz A, simétrica, é positiva definida *e que calcule o fator de Cholesky R armazenando R sobre A.*

Exercício 6. (*Método de Cholesky, formulação baseada em produto externo, ou produto tensorial*) Apresente um algoritmo para realizar a decomposição de Cholesky, utilizando a formulação baseada em produto externo ss^T.

Exercício 7. Mostre que os algoritmos da decomposição de Cholesky apresentados nos exercícios anteriores, quando aplicados a uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, executa em torno de $n^3/3$ operações de ponto flutuante.

Exercício 8. Sejam

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 10 & 8 & 4 \\ 8 & 8 & 12 & 10 \\ 4 & 4 & 10 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 32 \\ 26 \\ 38 \\ 30 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que A é positiva definida e calcule o fator de Cholesky, usando tanto a formulação baseada no produto interno quanto a no produto externo.

b) Use a Fatoração de Cholesky, substituições para frente e para trás para resolver o sistema linear $Ax = b$.

Exercício 9. Determine se as matrizes são ou não positivas definidas:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 29 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 10. Para $j = 1, \ldots, n$, seja A_j a submatriz $j \times j$ de A consistindo da interseção das j primeiras linhas e colunas, conhecida como j-ésima submatriz principal de A.

a) Suponha A positiva definida e R seu fator de Cholesky. Mostre que R tem submatrizes principais R_j, $j = 1, \ldots, n$ que são triangulares superiores com elementos positivos na diagonal.

b) Particione a equação $A = R^T R$ adequadamente e mostre que R_j é o fator de Cholesky de A_j, para $j = 1, \ldots, n$.

Exercício 11. Prove que se A é positiva definida, então $a_{ii} > 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

Exercício 12. Seja A positiva definida e considere a partição

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

onde A_{11} e A_{22} são quadradas. Mostre que A_{11} e A_{22} são positivas definidas.

Exercício 13. Mostre que se A e X são $n \times n$, A é positiva definida e X é não-singular, então a matriz $B = X^T A X$ é positiva definida.

Exercício 14. Enuncie e prove o *Teorema da Decomposição de Cholesky.*

Exercício 15. Seja A positiva definida e considere a partição

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

onde A_{11} é $j \times j$ e A_{22} é $k \times k$. Seja $\tilde{A}_{22} = A_{22} - R_{12}^T R_{12}$ a matriz denominada *complemento de Schur* de A_{11} em A.

a) Mostre que

$$\tilde{A}_{22} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

b) Prove que $\tilde{A}_{22}$ é positiva definida.

Exercício 16. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) A é positiva definida.

(ii) Os autovalores de A são positivos.

(iii) Os autovalores das submatrizes principais A_k são positivos.

(iv) Existe uma matriz $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversível tal que $A = R^T R$.