MS512 - Análise Numérica 1
Lista 10, v1.2

Prof. Maicon Correa

2019-1

Autovalores e Autovetores.

Propriedades: (pode ser interessante demonstrar) Sejam $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e λ_i seus autovalores.

- A matriz A é singular se e somente se $\lambda = 0$ é um autovalor.
- Se matriz A é não singular, então os autovalores de A^{-1} são $1/\lambda_i$.
- A e A^T possuem os mesmos autovalores.
- A matriz αA possui autovalores $\alpha\lambda_i$
- Os autovalores de A^n são λ_i^n, onde n é um inteiro positivo.
- Se A é definida positiva, então $\lambda_i > 0$.
- Os autovalores de $A + \alpha I$ são $\lambda_i + \alpha$.
- Se T é uma matriz triangular, então os autovalores de T são os valores da diagonal principal $t_{11}, \dots, t_{nn}$.
- Se $v_1, \dots, v_k$ são autovetores de A associados a autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, então $v_1, \dots, v_k$ são linearmente independentes.

Atenção: Os três métodos iterativos para cálculo de autovalores e autovetores baseados no método da Potência, que foram estudados, podem ser resumidos nos seguintes passos:

i) Dado q_j, calcule $\tilde{q}_{j+1}$. Esse passo muda para cada um dos métodos, como descrito abaixo:

a) Método da Potência Direta:
$$\tilde{q}_{j+1} = Aq_j.$$

b) Método da Potência Inversa:
$$\tilde{q}_{j+1} = A^{-1}q_j, \text{ ou pela resolução do sistema } A\tilde{q}_{j+1} = q_j.$$

c) Método da Potência Inversa com Deslocamento:
$$\tilde{q}_{j+1} = (A-\rho I)^{-1}q_j, \text{ ou pela resolução do sistema } (A-\rho I)\tilde{q}_{j+1} = q_j.$$

ii) Uma vez obtido $\tilde{q}_{j+1}$, calcule σ_{j+1} como sendo a componente de $\tilde{q}_{j+1}$ *que possui maior valor em módulo* (σ_{j+1} pode ser positivo ou negativo).

iii) Calcule o novo vetor
$$q_{j+1} = \tilde{q}_{j+1}/\sigma_{j+1}.$$

Exercício Extra: Determine para quais valores σ_j converge *em cada um dos métodos* descritos acima.

Resposta: Assumindo que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$, *temos:*

a) Método da Potência Direta: converge para λ_1, *autovalor dominante (maior módulo).*

b) Método da Potência Inversa: converge para $(\lambda_n)^{-1}$, *inverso do autovalor menos dominante (menor módulo).*

c) Método da Potência Inversa com Deslocamento: converge para $(\lambda_i - \rho)^{-1}$, *ou seja, para o inverso de* $\lambda_i - \rho$, *onde* λ_i *é o autovalor cujo valor mais se aproxima do valor do deslocamento* ρ.

Exercício 1. Aplicar o método das potências para calcula o autovetor dominante da matriz $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, com as aproximação inicial $q_0 = [1\ 1]^T$.

Exercício 2. Aplicar o método das potências à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, com as aproximações iniciais: $q_0 = [0\ 1\ 0]^T$ e $v_0 = [0\ 0\ 1]^T$.

Exercício 3. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Aplique o método da potência partindo de $q_0 = [a\ b]^T$ com $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $a \neq b$. Explique por que a sequência gerada não converge.

Exercício 4. Seja $A = \begin{bmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule os autovalores de A e os autovetores associados.

b) Aplique o método da potência partindo de $q_0 = [1\ 1]^T$ e derive uma expressão geral para q_j.

c) Quantas iterações são necessárias para se obter $\|q_j - v_1\|_\infty / \|v\|_\infty < 10^{-6}$?

Exercício 5. Estabeleça valores iniciais q_0 e aplique os métodos da potência e da potência inversa para estimar os autovetores associados aos maior e menor autovalores em módulo das matrizes abaixo. Como critério de parada, utilize $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| < 10^{-3}$. Verifique se o último q_k obtido de fato é uma boa aproximação para o autovetor procurado.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 6. Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\rho \in \mathbb{C}$. Mostre que se v é um autovetor de A associado ao autovalor λ, então v também é autovetor de $(A - \rho I)$, agora associado ao autovalor $(\lambda - \rho)$.

Exercício 7. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2.99 & 0 & 0 \\ 0 & 1.99 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00 \end{bmatrix}.$$

a) Determine os autovalores e os autovetores de A e de A^{-1}.

b) Determine os autovalores de $A - \rho I$ e $(A - \rho I)^{-1}$, para $\rho = 0.99$.

c) Aplique o método das potências direto e inverso para $A - \rho I$, iniciando o processo com $q_0 = [1\ 1\ 1]^T$. Para qual vetor cada uma das sequências converge? Qual sequência converge mais rápido?

d) A partir de $q_0 = [1\ 1\ 1]^T$, aplique a iteração inversa com os valores $\rho = 2$ e $\rho = 3$. Para quais autovetores a sequência converge?