MS512 - Análise Numérica 1
Lista 1, v1.1

Prof. Maicon Correa

2019-1

Sistemas Lineares

Exercício 1. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{m\times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ dada por $B = AX$. Cada elemento (i, j) de B é definido por

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_{kj}.$$

a) Escreva um algoritmo para obter B através do produto $B = AX$.

b) Determine o número total de operações de ponto-flutuantes (flops) necessárias para efetuar o produto AX.

c) Sejam agora A e X matrizes quadradas de dimensão n. Determine o número total de operações de ponto-flutuantes no cálculo de AX para $n = 10$, $n = 20$ e $n = 10^6$.

Exercício 2. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $X \in \mathbb{R}^{m\times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ dada por $B = AX$. Seja uma partição da matriz A em r blocos linhas e s blocos colunas

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}$$

onde cada bloco A_{ij} é uma matriz de n_i linhas e m_j colunas.

a) Verifique que

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = n, \quad \sum_{j=1}^{s} m_j = m$$

b) Seja agora uma partição de X em t blocos colunas, cada um com p_j colunas com $\sum_{j=1}^{t} p_j = p$. Qual deve ser sua partição em blocos linhas para que o produto AX (A particionada) esteja bem definido?

c) Finalmente, determine uma partição conforme para B de forma que a identidade $AX = B$ esteja bem definida.

Exercício 3. *(Substituição para frente ou substituição direta)* Sejam $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz triangular inferior inversível e $b \in \mathbb{R}^n$ um vetor dado e o sistema triangular inferior

$$Gy = b. \tag{1}$$

a) Escreva um algoritmo orientado por linhas para resolver o sistema (1).

b) Escreva um algoritmo orientado por colunas para resolver o sistema (1).

c) Modifique os algoritmos da letra a) e b) para que eles identifiquem o caso em que a matriz G não é inversível.

d) Efetue a contagem de flops dos algoritmos da letra a) e b) e mostre que ambos demandam aproximadamente n^2 operações.

e) Defina diferentes sistemas $Gy = b$ e utilize os algoritmos para sua resolução.

Exercício 4. *(Substituição para trás ou retro-substituição)* Repita o exercício anterior para o sistema triangular superior

$$Ux = y. \tag{2}$$

Exercício 5.

a) Mostre graficamente que as seguintes desigualdades são válidas

$$\int_0^{n-1} x \,\mathrm{d}\, x \le \sum_{i=1}^{n-1} i \le \int_0^{n} x \,\mathrm{d}\, x.$$

b) Resolva as integrais e mostre que

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n) \approx \frac{n^2}{2}.$$

c) Mostre que o mesmo resultado vale para $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$.

Exercício 6. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $X \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $x, y \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Apresente algoritmos, analisando sua complexidade computacional, para as seguintes operações:

a) $\beta = y^T x$.

b) $b = Ax$.

c) $B = AX$.

Exercício 7. *(Fatoração LU, decomposição de Doolittle)* Suponha $A = LU$ com L triangular inferior com diagonal unitária e U triangular superior.

a) Mostre que

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{j} l_{ik}u_{kj}, & j < i, \\ \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kj}, & j \geq i. \end{cases} \tag{3}$$

b) Tome $i = 1$ e varie $j = 1, \dots, n$. Verifique que estas equações determinam a primeira linha de U.

c) Em seguida, supondo $u_{11} \neq 0$, tome $j = 1$ e varie varie $i = 2, \dots, n$. Verifique que estas equações determinam a primeira coluna de L. Com a primeira coluna de L conhecida, tome $i = 2$, varie $j = 2, \dots, n$ e verifique que estas equações determinam a segunda linha de U.

d) Implemente um algoritmo que automatize o procedimento iniciado nas letras b) e c) e realize a fatoração $A = LU$.

e) Apresente uma estimativa para o número total de operações de ponto flutuante deste algoritmo.

f) Enuncie um teorema que apresente uma condição necessária e suficiente para que a matriz A admita uma fatoração na forma $A = LU$. Explique como o algoritmo de letra d) é capaz de identificar se a matriz A admite tal fatoração.

Exercício 8. *(Método de Crout)* Seja $A \in \mathbb{R}^n$ com todas as submatrizes principais não singulares. Apresente um algoritmo para fatorar $A = LU$, onde L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior com 1 na diagonal. Este procedimento é conhecido como método de Crout.

Exercício 9. Seja agora o sistema linear $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz qualquer.

a) Escreva um algoritmo para resolver os sistema utilizando a fatoração LU da matriz A.

b) Apresente uma estimativa para o número total de operações de ponto flutuante deste algoritmo.

c) Implemente o algoritmo na linguagem computacional de sua escolha e teste para diferentes sistemas.

Exercício 10. Seja $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Verificar se A satisfaz as condições da fatoração LU.

b) Decompor A em LU.

c) Utilizar a fatoração LU para calcular o determinante de A.

d) Resolver o sistema $Ax = b$ utilizando a fatoração LU, para os seguintes valores do termo de fonte

$$b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exercício 11. Repita o exercício anterior utilizando o método de Crout.

Exercício 12. Encontre a decomposição $A = LU$ das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

Exercício 13.
Utilize as decomposições $A = LU$ para resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ para $b = (21 \quad 3)^t$ e $b = (1 \quad 0)^t$.

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ para $b = (3 \quad 11 \quad 15)^t$ e $b = (1 \quad 1 \quad 1)^t$.

Exercício 14. Seja um sistema matricial $AX = B$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

a) Verifique que tal sistema pode ser resolvido pela solução de p sistemas auxiliares $Ax_k = b_k$, onde $b_k \in \mathbb{R}^n$ é a $k-$ésima coluna de B.

b) Analise a complexidade computacional na resolução do sistema, através da estratégia da letra a), utilizando eliminação gaussiana em cada um dos p sistemas auxiliares.

c) Qual seria a vantagem de utilizar a fatoração $A = LU$ para a resolução deste sistema? Faça uma análise da complexidade computacional desta abordagem.

d) Caso $p = n$ e $B = I$, quem é a matriz X? Analise a complexidade computacional de sua avaliação, utilizando a estratégia da letra a) e a da letra c).