GABARITO

MS512 - Análise Numérica 1 Prova P1, Turma A, 22/05/2019

Aluno: RA:

- Assinar esta folha.
- Não utilize celular. Mostre os passos utilizados no desenvolvimento. Utilize o verso caso seja necessário.

Boa prova!

Questão 1: Cholesky (4,0 Pontos)

a) Enuncie o *Teorema da Decomposição de Cholesky.* (1,0 pt)

b) Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem posto completo, então a matriz R da fatoração QR de A (onde Q é ortogonal e R é triangular superior com elementos positivos na diagonal) é o fator de Cholesky da matriz A^TA. (1,0 pt)

c) Utilize a fatoração de Cholesky $A = R^TR$ para mostrar que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

é positiva definida. (1,0 pt)

d) Utilizando o fator de Cholesky R calculado na letra b), resolva o sistema $Ax = b$, com $b = (0,\ -8,\ -17)^T$. (1,0 pt)

Resolução:

a) Se* A é positiva definida, então pode ser decomposta, de forma única como $A = R^TR$, onde R é triangular superior com $r_{ii} > 0$.

* $A = R^TR$, R triang. sup.
* $r_{ii} > 0$
* única.

1

b) $A^TA = (QR)^T(QR) = R^TQ^TQR$; como Q é ortogonal $Q^TQ = I \Rightarrow A^TA = R^TR$

0,5

$\boxed{\text{como } r_{ii} > 0}$ (hipótese) e A^TA é positiva definida. (A tem posto completo, logo $\boxed{A^TA \text{ é positiva definida}}$) então R é o fator de Cholesky de A^TA (único pela letra A).

Resolução (continuação da Questão 1):

c) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 18 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & & \\ r_{12} & r_{22} & \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix}}_{R^T} \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ & r_{22} & r_{23} \\ & & r_{33} \end{bmatrix}}_{R}$$

$r_{11} r_{11} = 1 \Rightarrow r_{11} = 1$

$r_{12} r_{11} = 0 \Rightarrow r_{12} = 0$

$r_{13} r_{11} = 1 \Rightarrow r_{13} = 1$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$r_{12} r_{12} + r_{22} r_{22} = 4 \Rightarrow r_{22}^2 = 4 - 0 \Rightarrow r_{22} = 2$

$r_{13} r_{12} + r_{23} r_{22} = 8 \Rightarrow r_{23} = \frac{1}{2}(8 - 0) = 4$

$r_{13} r_{13} + r_{23} r_{23} + r_{33} r_{33} = 18 \Rightarrow r_{33}^2 = 18 - 1 - 16 \Rightarrow r_{33} = 1$

$\Rightarrow$ A é positiva definida

d) $Ax = b \Rightarrow R^T \underbrace{Rx}_{y} = b \quad \begin{cases} R^T y = b \\ Rx = y \end{cases}$

$$R^T y = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ -17 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -4 \\ y_3 = -1 \end{cases}$$

$$Rx = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

GABARITO

Questão 2: QR utilizando Gram-Schmidt (4,0 Pontos)

a) Utilize o processo de Gram-Schmidt para mostrar que se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ possui n colunas linearmente independentes, então pode ser fatorada como $A = QR$, onde Q é uma matriz $m \times n$ cujas colunas formam uma base ortonormal para o espaço $\mathcal{C}(A)$ e R é uma matriz $n \times n$ triangular superior inversível. (2,0 pt).

b) Explique como essa fatoração pode ser usada para encontrar a solução de mínimos quadrados de um sistema sobredeterminado $Ax = b$, com $m > n$. (1,0 pt)

c) Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escreva A como QR onde Q é uma matriz com colunas ortonormais e R é triangular superior. (1,0 pt)

Resolução:

a) a_i : colunas de A ; $a_i \in \mathbb{R}^m$

ortogonalização:

$v_1 = a_1$

$v_2 = a_2 - \dfrac{\langle a_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 \Rightarrow v_i = a_i - \sum_{k=1}^{i-1} \dfrac{\langle a_i, v_k\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle} v_k$

$w_i = v_i / \|v_i\| \Rightarrow$ base ortonormal.

2,0

* Escreve cada coluna a_i em termos da base ortonormal:

$a_i = \langle a_i, w_1\rangle w_1 + \cdots + \langle a_i, w_n\rangle w_n$, de onde

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ w_1 & \cdots & w_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{Q} \begin{bmatrix} \langle a_1, w_1\rangle & \cdots & \langle a_n, w_1\rangle \\ \vdots & 0 & \\ \cancel{\langle a_1, w_n\rangle} & \cdots & \langle a_n, w_n\rangle \end{bmatrix}.$$

$\langle w_i, a_j\rangle = 0$ se $i > j \Rightarrow R$

* R inversível: $x \in \mathbb{R}^n$ solução para $Rx = 0$

Mult. por Q à esquerda: $Q(Rx) = (QR)x = Ax = 0$

2,0

ou seja: $x \in N(A)$. Como A tem posto completo $\dim(N(A)) = 0$ e a única sol. é $x = 0 \Rightarrow Rx = 0 \Rightarrow x = 0$ e R é inversível.

Resolução (continuação da Questão 2):

b) $Ax=b$; $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m>n$. $A=QR$; $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$Q^T(QRx) = Q^Tb \Rightarrow \underbrace{(Q^TQ)}_{\text{colunas ortonormais} \Rightarrow I \in \mathbb{R}^{n \times n}} Rx = Q^Tb$

$\Rightarrow Rx = Q^Tb$ é resolvível, uma vez que R é inversível

$x = R^{-1}(Q^Tb) =$ sol. de mínimos quadrados.

c) $r_{ij} = \langle w_i, a_j \rangle$

$v_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$; $w_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$; $\|v_1\| = \sqrt{9+1+4+4} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$v_2 = a_2 - \langle a_2, w_1 \rangle w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \dfrac{2}{3\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 10/9 \\ -2/9 \\ -2/9 \end{bmatrix}$

$\langle a_2, w_1 \rangle = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(1 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = \dfrac{2}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$v_2 = \dfrac{1}{9} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$; $\|v_2\| = \dfrac{1}{9}\sqrt{36+100+4+4} = \dfrac{\sqrt{144}}{9}$

$\|v_2\| = 4/3$

$w_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \dfrac{1}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/3\sqrt{2} & 5/6 \\ 2/3\sqrt{2} & -1/6 \\ 2/3\sqrt{2} & -1/6 \end{bmatrix}$

$$r_{11} = \langle w_1, a_1 \rangle$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} (3 + 1 + 4 + 4) = \frac{18}{3\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$r_{12} = \langle w_1, a_2 \rangle = \sqrt{2}/3$$

$$r_{22} = \langle w_2, a_2 \rangle = \cancel{\frac{3}{4} (6 \cdot 1 + \ldots + 0 + 0) = \frac{3}{2}}$$

$$= (1/2 \cdot 1 + 5/6 \cdot 1) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

de onde

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ -\sqrt{2}/6 & 5/6 \\ \sqrt{2}/3 & -1/6 \\ \sqrt{2}/3 & -1/6 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{2}/3 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix}}_{R}.$$

GABARITO.

Questão 3: QR utilizando transformações ortogonais (3,0 Pontos)

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) Determine a fatoração $A = QR$ utilizando rotações planas. (1,0 pt)

b) Determine a fatoração $A = QR$ utilizando refletores (transformações de Householder). (1,0 pt)

c) Utilize uma das fatorações $A = QR$ para encontrar a solução de mínimos quadrados do sistema

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1,0\text{pt})$$

Resolução:

a) $c = \dfrac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{3}{5}$ $\qquad s = \dfrac{4}{5}$

$$Q^T = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Q_1^T = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$Q_1^T A = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$ de onde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{R}.$$

Resolução (continuação da Questão 3):

b)

$$Q_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \; \tau = \sqrt{9+16} = 25$$

sinal positivo

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4/(\tau + x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4/(5+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$r = \frac{(\tau + x_1)}{\tau} = \frac{8}{5}$$

$$Q = I - r u u^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} \quad ; \; QA = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{R}$$

$$\Rightarrow A = QR.$$

c) $Ax = b$

$QRx = b$

$Rx = \underbrace{Q^T b}_{c} \Rightarrow$

usando a letra a).

$$Q^T b = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [x] = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1 \\ -1/5 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x = 7/25}$$