MS211 - Cálculo Numérico Prova P2, Turma K, 21/11/2019

Aluno: GABARITO, v1.1 RA:

- Assinar esta folha.
- Não utilize celular. Mostre os passos utilizados no desenvolvimento. Utilize o verso caso seja necessário.

Boa prova!

Questão 1 (3,0 Pontos)

Utilizando o produto interno $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$, determine os coeficientes do ajuste, pelo método dos mínimos quadrados, do polinômio cúbico $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ às seguintes funções $f(x)$, no intervalo $[-1, 1]$:

a) $f(x) = \alpha + x(\beta + \theta x)^2$ (1,0 pt)

b) $f(x) = x^5$ (2,0 pt)

Atenção: Usar teoria antes de fazer as contas!

Resolução da letra a):

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha + x(\beta + \theta x)^2 \\ &= \alpha + x(\beta^2 + 2\beta\theta x + \theta^2 x^2) \\ &= \alpha + \beta^2 x + 2\beta\theta x^2 + \theta^2 x^3 \end{aligned}$$

Como f pertence ao espaço de polinômios de grau ≤ 3, o polinômio cúbico p do ajuste de mínimos quadrados é a própria função f. Logo, igualando os polinômios, temos:

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta^2, \quad a_2 = 2\beta\theta \quad \text{e} \quad a_3 = \theta^2$$

Resolução da letra b):

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2 \quad \text{e} \quad \varphi_3(x) = x^3$$

Como $f(x) = x^5$ é ímpar e o intervalo é simétrico em torno da origem, os coeficientes do ajuste que multiplicam as funções pares φ_0 e φ_2 são nulos.

$$a_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_2 = 0.$$

Com isso, o sistema de equações normais é dado por:

$$\begin{bmatrix} < \varphi_1, \varphi_1 > & < \varphi_1, \varphi_3 > \\ < \varphi_3, \varphi_1 > & < \varphi_3, \varphi_3 > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < \varphi_1, f > \\ < \varphi_3, f > \end{bmatrix}$$

Cálculo dos produtos internos:

$$< \varphi_1, \varphi_1 >= \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \qquad < \varphi_1, \varphi_3 >= \int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$$

$$< \varphi_3, \varphi_1 >=< \varphi_1, \varphi_3 >= \frac{2}{5} \qquad < \varphi_3, \varphi_3 >= \int_{-1}^{1} x^6\mathrm{d}x = \frac{2}{7}$$

$$< \varphi_1, f >= \int_{-1}^{1} x^6\mathrm{d}x = \frac{2}{7} \qquad < \varphi_3, f >= \int_{-1}^{1} x^8\mathrm{d}x = \frac{2}{9}.$$

Resolução (continuação da letra b) da Questão 1):

E temos o sistema normal:

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 2/5 \\ 2/5 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 2/9 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $a_1 = -\dfrac{5}{21} \approx -0.2381$ e $a_3 = \dfrac{10}{9} \approx 1.111$. Com isso, o ajuste é dado pelo polinômio

$$p(x) = -\frac{5}{21}x + \frac{10}{9}x^3.$$

A função original f e o polinômio cúbico p estão ilustrados na Figura 1.

Observação: Caso sejam usadas todas as funções da base, temos o sistema normal

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/7 \\ 0 \\ 2/9 \end{bmatrix}$$

Cuja resolução também fornece

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -\frac{5}{21}, \quad a_2 = 0 \quad \text{e} \quad a_3 = \frac{10}{9}.$$

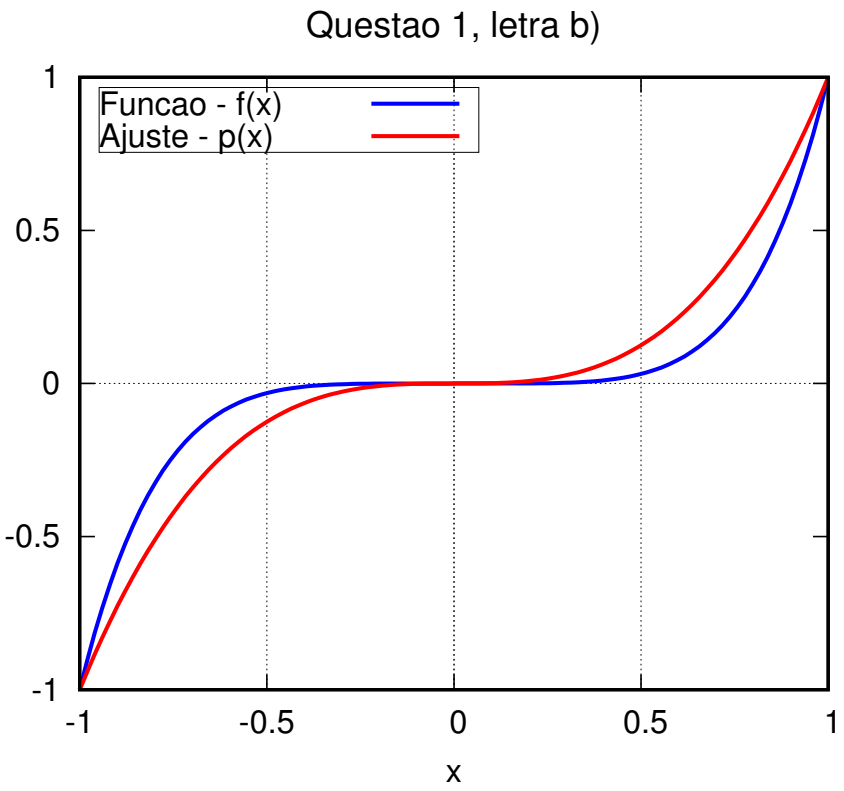

Figura 1: Solução da letra b) da Questão 1.

Questão 2 (3,0 Pontos)

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números reais distintos, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ valores associados e $p_n(x)$ o polinômio de grau $\leq n$ que interpola esses valores, ou seja

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

a) Utilizando o polinômio interpolador quadrático de Lagrange **ou** de Newton, calcular o valor $p_2(0.8)$, a partir da tabela: (2,0 pt)

x	y
0.000	1.000
0.500	1.649
1.000	2.718

b) Vimos em sala que as coordenadas $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ de $p_n(x)$ em termos da base polinomial canônica x^i, $i = 0, 1, \ldots, n$ pode ser determinada pela resolução do sistema $X\mathbf{a} = \mathbf{y}$, onde $X \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ é a matriz de Vandermonde (inversível, uma vez que os x_i são distintos) e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o vetor contendo os dados y_i. Com base neste resultado, mostre que se $q(x)$ é outro polinômio de grau $\leq n$ que satisfaz (1), então $q(x) = p_n(x)$. (1,0 pt)

Resolução da letra a): Pontos:

$$x_0 = 0.0 \quad x_1 = 0.5 \quad x_2 = 1.0 \quad \text{e} \quad y_0 = 1.000 \quad y_1 = 1.649 \quad y_2 = 2.718.$$

Utilizando polinômios de Lagrange: $p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i l_i(x)$, ou seja

$$p_2(0.8) = y_0 l_0(0.8) + y_1 l_1(0.8) + y_2 l_2(0.8), \quad \text{com}$$

$$\begin{aligned} l_0(0.8) &= \frac{(0.8 - x_1)(0.8 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(0.8 - 0.5)(0.8 - 1.0)}{0.5} = -0.12 \\ l_1(0.8) &= \frac{(0.8 - x_0)(0.8 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{0.8(0.8 - 1.0)}{-0.25} = 0.64 \\ l_2(0.8) &= \frac{(0.8 - x_0)(0.8 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{0.8(0.8 - 0.5)}{0.5} = 0.48. \end{aligned}$$

De onde

$$p_2(0.8) = 1.000 \times (-0.12) + 1.649 \times (0.64) + 2.718 \times (0.48) = 2.24.$$

Utilizando a fórmula de Newton: $p_2(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1)$, ou seja

$$p_2(0.8) = d_0 + d_1(0.8 - 0.0) + d_2(0.8 - 0.0)(0.8 - 0.5) = d_0 + 0.8d_1 + 0.24d_2,$$

onde, pela tabela de diferenças divididas, temos:

$$d_0 = y_0 = 1.000, \quad d_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0.649}{0.5} = 1.298$$

$$d_2 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) / (x_2 - x_0) = \frac{2.138 - 1.298}{1.0 - 0.0} = 0.84.$$

De onde:

$$p_2(0.8) = 1.000 + 0.8 \times (1.298) + 0.24 \times (0.84) = 2.24.$$

Resolução da letra b): Escrevendo $q(x)$ em termos da base canônica, temos $X\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{y}$, onde $\tilde{\mathbf{a}}$ é o vetor das coordenadas do polinômio $q(x)$ nesta base. Note que a matriz X e o vetor $\mathbf{y}$ não mudam, uma vez que são dados do problema. Subtraindo, temos: $X(\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{y} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, ou seja: $X(\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{0}$. Como X é inversível, a única solução do sistema é $(\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{0}$, o que implica $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$ e $q(x) = p_n(x)$.

Questão 3 (4,0 Pontos)

A fórmula de Newton-Cotes com três pontos de integração ($i = 0, 1$ e 2), também conhecida como fórmula de 1/3 de Simpson, pode ser escrita na forma

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx I = \sum_{i=0}^{2} w_i f(x_i)$$

onde $x_i = a + ih$, com $h = (b-a)/2$, são os pontos de integração e w_i é o peso associado ao ponto x_i.

a) Mostrar que esta fórmula pode ser escrita como

$$I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \quad \text{(1,0 pt)} \tag{2}$$

b) Sabendo que o comprimento de arco de uma curva de $(a\,, y(a))$ a $(b\,, y(b))$ é dado por:

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\mathrm{d}x$$

utilizar a fórmula (2) para calcular o comprimento de arco da curva $y = \mathrm{sen}(\pi x)$ de $x = 0$ a $x = 1$, utilizando cinco dígitos. (1,0 pt)

c) Repita o cálculo de letra b) utilizando quadratura Gaussiana com dois pontos. (lembrete: $w_0 = w_1 = 1$ e $\xi_1 = -\xi_0 = \sqrt{3}/3$) (2,0 pts)

Resolução da letra a): Sabemos que nas fórmulas de Newton-Cotes os pesos w_i nada mais são do a integral das funções base de Lagrange, no intervalo $[a, b]$:

$$w_i = \int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Usando a propriedade de que $\sum_{i=0}^{2} l_i = 1$, temos que

$$\sum_{i=0}^{2} w_i = (b-a) = 2h, \tag{4}$$

o que nos dá uma primeira relação entre os pesos w_i. Uma vez que os pontos são uniformemente espaçados, podemos usar a simetria das funções base de Lagrange e afirmar que $w_0 = w_2$, o que combinado a (4) fornece:

$$2w_0 + w_1 = 2h. \tag{5}$$

Com isso, basta usar (3) e calcular w_0 *ou* w_1. Optamos por calcular w_0:

$$\begin{aligned} w_0 &= \int_a^b l_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2h^2}\int_0^{2h} (u-h)(u-2h)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}h. \end{aligned}$$

O valor do peso w_2 é obtido pela simetria, $w_2 = w_0 = \frac{1}{3}h$, e o do peso w_1 é calculado pela equação (5), fornecendo $w_1 = \frac{4}{3}h$. Isto nos permite escrever

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx I = \sum_{i=0}^{2} w_i f(x_i) = I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

Resolução da letra b): $y = \sin(\pi x)$, $y' = \pi \cos(\pi x)$.

$$C = \int_0^1 \sqrt{1 + \pi^2 \cos^2(\pi x)}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$$

com

$$f(x) = \sqrt{1 + \pi^2 \cos^2(\pi x)}.$$

Fórmula de Simpson: $h = 0.5$, $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1.0$.

$$f(0.0) = \sqrt{1 + \pi^2 \cos^2(\pi \times 0.0)} = 3.2969$$

$$f(0.5) = \sqrt{1 + \pi^2 \cos^2(\pi \times 0.5)} = 1.0000$$

$$f(1.0) = \sqrt{1 + \pi^2 \cos^2(\pi \times 1.0)} = 3.2969$$

$$C \approx I_S = \frac{0.5}{3}[3.2969 + 4.000 + 3.2969] = 1.7656$$

Resolução da letra c): Relação entre o domínio geométrico e o padrão: $\dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{\xi+1}{2}$.

$$C = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(a + \frac{b-a}{2}(\xi+1)\right) \mathrm{d}\xi$$

ou, fazendo $a = 0$ e $b = 1$:

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}(\xi+1)\right) \mathrm{d}\xi \\
&\approx \frac{1}{2}\left[w_0 f\left(\frac{1}{2}(\xi_0+1)\right) + w_1 f\left(\frac{1}{2}(\xi_1+1)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}(-\sqrt{3}/3+1)\right) + f\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}/3+1)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f\left(0.21132\right) + f\left(0.78868\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2.6687 + 2.6687\right] \\
&= 2.6687.
\end{aligned}$$

Ou seja

$$C \approx I_G = 2.6687$$

Observação: Solução refinada fornece $C = 2.3049$