8,0

Compreendendo a Matemática

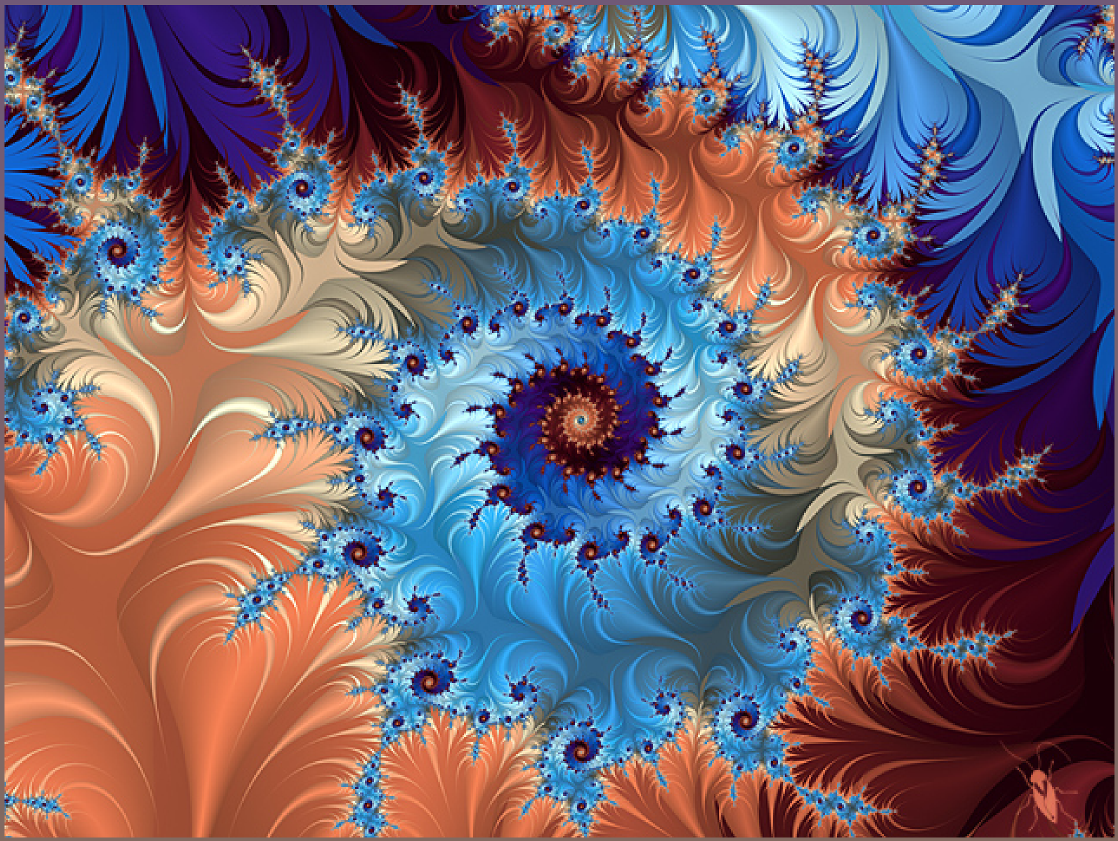
Marília Gigliotti Kerr

Luiz Henrique Guimarães

Vitor Akio Watanabe

Tarik Eduardo Chuery

José Roberto Vieira Junior



3°

Certas confusões entre função (polinomial) e polinômio: por exemplo uma função tem zeros, e apenas os zeros de polinômios chamam-se raízes.
Algumas explicações demasiado extensas que poderiam ser resumidas.
O conjunto de Mandelbrot é uma atividade excelente, mas algumas das etapas preparatórias poderiam ter sido distribuídas entre as seções anteriores (por exemplo, convergência de sequências ao falar de |z| etc)

Este trabalho foi desenvolvido para a disciplina MA225 - Análise de Livros e Materiais Didáticos oferecida pelo IMECC - Unicamp, e consiste de um capítulo de livro didático sobre números complexos.

O grupo se preocupou em apresentar os conceitos com o devido rigor matemático, mas de maneira suficientemente simples para o entendimento de estudantes do Ensino Médio. Também nos preocupamos com a contextualização e aplicação da teoria de modo que os possíveis leitores vejam sentido no aprendizado, dedicando toda uma seção para os fractais. Depois desta seção também há uma proposta de atividade no Geogebra para que os estudantes possam construir fractais usando um computador.

Além disso, tendo em vista que o público-alvo são estudantes do 3º ano do Ensino Médio, adicionamos exercícios de prática e memorização ao longo das seções, e incluímos uma lista de exercícios de vestibular no final do capítulo.

Grupo C

Produção e edição de conteúdo

José Roberto Vieira Júnior (140712)

Marília Gigliotti Kerr (183883)

Tarik Eduardo Chuery (177349)

Vitor Akio Watanabe (188303)

Layout

Luiz Henrique Guimarães (009220)

Agradecimentos:

Henrique N. Sá Earp

Beatriz F. Litoldo

Campinas, Junho de 2020

Guia de recursos visuais

Entenda como são feitos os destaques neste livro:

.1 Definição (Novo Conceito): *Introdução a uma nova ideia ou conceito matemático essencial para o desenvolvimento do tema.*

Observações

Síntese
~~Sintetização~~ de alguns conceitos apresentados, dicas e informações adicionais para aprofundamento no conteúdo.

Revisão de conceitos aprendidos em capítulos anteriores.

Exemplos

Demonstração de resolução de problemas e aplicação de algoritmos.

Exercícios

Momento para prática de técnicas e conhecimentos recém aprendidos.

Conteúdo

Capítulo 1

Números Complexos

Neste capítulo, você vai aprender sobre um conjunto de números chamado de *Números Complexos*. Dentro desse conjunto existem números que chamamos, historicamente, de *imaginários*. Esses dois nomes podem nos remeter a coisas *difíceis* e que *não existem*, mas isso está muito longe da verdade!

Os números complexos são apenas mais um conjunto de números que precisamos utilizar para resolver certos tipos de problemas, sendo eles puramente matemáticos ou da "vida real". Eles contam com operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, e assim como você aprendeu essas operações para os números Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais, vai aprender também para os Complexos!

"Mas, então, por que chamamos esses números de *imaginários*?", você pode estar se perguntando. O responsável por este termo é o filósofo e matemático René Descartes (1596-1650)!

Na época em que esses números passaram a ser necessários para resolver problemas matemáticos ainda em aberto (mais especificamente, as soluções para equações polinomiais de terceiro grau), havia muito desconforto por parte dos matemáticos em trabalhar com números negativos. Os números complexos envolvem algo ainda mais "tabu"na época, as raízes quadradas de números negativos! Por não enxergar uma interpretação física para esse tipo de número, apesar de eles aparecerem naturalmente na matemática, muitos se recusaram a levá-los a sério como soluções, incluindo Descartes, que os chamou de "imaginários". Infelizmente, o nome acabou se tornando oficial e até hoje nos referimos a esses números dessa forma.

Hoje em dia, no entanto, sabemos que os números negativos e suas raízes quadradas são tão úteis e importantes quanto os outros. Além disso, como você vai aprender na seção "Plano de Argand-Gauss", existe uma interpretação geométrica para os números "imaginários". Eles podem ser aplicados a outras áreas da matemática, como a trigonometria, mas também são úteis no estudo de eletromagnetismo, mecânica quântica, entre outros.

Portanto, não deixe os nomes te enganarem e entre neste capítulo com a mente aberta para aprender sobre este novo conjunto de números!

A Um novo conjunto de números

Quantas raízes reais cada função polinomial possui?

Lembre-se que as **raízes de uma função** são os valores de x para os quais $f(x) = 0$.

Função	Raízes Reais	Grau	Número de Raízes Reais
$f(x) = x^2 - 1$	$x_1 = 1$ e $x_2 = -1$	2	2
$f(x) = (x-1)^2$	$x_1 = 1$ e $x_2 = 1$	2	2
$f(x) = x^3 - 1$	$x = 1$	3	1
$f(x) = x^2 + 11$	Não possui	2	0

Você já aprendeu que toda função polinomial $f(x)$ de grau n com ~~suas~~ n raízes: x_1, x_2, ... , x_n, pode ser escrita como o produto $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$, onde a é o valor que multiplica o termo de maior grau do polinômio.

Função	Grau	Raízes	Produto ... de monômios?
$f(x) = 4x^2 - 8x + 4$	2	$x_1 = 1$, $x_2 = 1$	$4(x-1)(x-1)$
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	3	$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$	$1(x-1)(x-2)(x-3)$

Isto só é possível quando a quantidade de raízes, iguais ou distintas (como na primeira e na segunda função da tabela acima, respectivamente), é igual ao grau ~~da função.~~ Veja que o produto é claramente diferente do valor da função quando o grau do polinômio é diferente da quantidade de raízes:

Função	Grau	Raízes	Produto
$f(x) = 2x^3 - 2$	3	$x_1 = 1$	$2(x-1)$
$f(x) = -6x^5 - 24x^3$	3	$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$	$-6(x-0)(x-0)(x-0)$

Repare que as duas últimas funções da primeira tabela e as duas últimas funções apresentadas acima não têm quantidade de raízes reais igual ao número do grau da função. Por quê? Será que não existem outras raízes para estes casos? Não há forma de escrever estas funções como o produto indicado?

Neste capítulo, você aprenderá sobre o *Conjunto dos Números Complexos* e sobre as raízes não reais de funções polinomiais chamadas **raízes complexas**.

A1 A função $f(x) = x^2 + 1$

Vamos encontrar as raízes da função $f(x) = x^2 + 1$:

$$f(x) = 0 \implies x^2 + 1 = 0 \implies x^2 = -1 \implies x = \pm\sqrt{-1}$$

Ao chegar a esta etapa, como os possíveis valores de x são raízes quadradas de um número negativo, você está acostumado a dizer que **"não existe solução nos reais"** ~~ou até **"não convém"**~~.

vamos assumir

Agora, a partir da seguinte definição, ~~você perceberá~~ que estas raízes, que não são números reais, existem e podem ser calculadas.

A.1 Definição (Unidade Imaginária): *A* ***Unidade Imaginária i*** *é definida como*

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

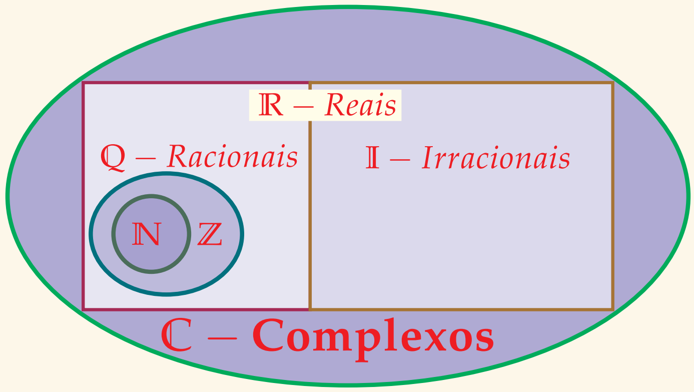
Neste caso, diremos que $\boldsymbol{x_1} = \sqrt{-1} = i$ e $\boldsymbol{x_2} = -\sqrt{-1} = -i$ são as raízes complexas ~~da função~~ $f(x) = x^2 + 1$ (ou que $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{-i}$ são as **soluções complexas** da equação $x^2 + 1 = 0$).
do polinômio

Observações

1. As raízes complexas que não são reais não são representadas nos gráficos de suas funções no plano cartesiano. exemplo?
2. Como $i = \sqrt{-1}$, então temos $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$.

A2 A forma algébrica

O *Conjunto dos Números Complexos*, ou *Números Imaginários*, é denotado por $\mathbb{C}$. O conjunto dos números reais está contido nele, isto é, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



A.2 Definição (Forma Algébrica): *Todo número complexo z pode ser expresso como*

$$\boxed{z = a + bi}$$

onde a e b são números reais. ...e $i=\sqrt{-1}$

Esta maneira de escrever é única e é chamada de **forma algébrica**, ou forma binomial, do número complexo.

A.3 Definição (Parte Real e Parte Imaginária): *Dado o complexo* $z = a + bi$:

- *O valor a é chamado* ***parte real*** *e escreve-se* $Re(z) = a$.
- *O valor b é chamado* ***parte imaginária*** *e escreve-se* $Im(z) = b$.

Ao lado temos alguns exemplos de números complexos onde destacamos a *parte real* (a) e a *parte imaginária* (b) da *forma algébrica*:

Exemplos

a) $z = 3 + 4i \longrightarrow a = 3 \quad \text{e} \quad b = 4$

b) $z = -\sqrt{2} + \frac{5}{7}i \longrightarrow a = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{5}{7}$

c) $z = \pi - 2{,}5i \longrightarrow a = \pi \quad \text{e} \quad b = -2{,}5$

d) $z = 193 \longrightarrow a = 193 \quad \text{e} \quad b = 0$

e) $z = -2i \longrightarrow a = 0 \quad \text{e} \quad b = -2$

seria melhor usar Re(z) e Im(z)

Os exemplos a seguir são complexos que **não** estão em sua forma algébrica.

... você consegue escrevê-los na forma algébrica?

Exemplos

a) $z = i^2$ b) $z = \sqrt{5} + \frac{7}{i}$ c) $z = -3\sqrt{3i}$ d) $z = 2(1+i)$

Observações

1. Nos exemplos acima, os três primeiros números não estão representados na forma algébrica porque o termo i não se apresenta da forma adequada. O primeiro exemplo apresenta i elevado à segunda potência, o segundo mostra i no denominador, e o terceiro mostra i dentro da raiz quadrada. No quarto caso, não é possível determinar a parte real e a imaginária sem realizar operações, portanto também não está em sua forma algébrica.

z=Re(z)

2. Os **números reais** são números complexos da forma $z = a$, com $b = 0$. O número zero faz parte dos números reais, pois $Re(0) = 0$ e $Im(z) = 0$.
3. Os números imaginários que apresentam a forma $z = bi$, com $b \neq 0$ e $a = 0$, são ditos **imaginários puros**.

z=i.Im(z)

Exercícios

1) Indique quais complexos estão na forma algébrica:

a) $z = 4 - i + 2i$

b) $z = \dfrac{3}{2} - \sqrt{11}\, i$

c) $z = \dfrac{i}{i}$

d) $z = 47$

e) $z = i\sqrt{2}$

2) Determine a parte real de cada número:

a) $z = -i + 3$

b) $z = \dfrac{\pi i}{3}$

c) $z = \dfrac{5}{2} - 2^3 i$

3) Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Todo número real z é da forma $z = a$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

b) Todo número real é complexo, mas nem todo complexo é real.

c) O número $z = \sqrt{7} - i$ apresenta parte real igual a $\sqrt{7}$ e parte imaginária igual a $-i$.

d) O número $z = i^2$ é imaginário puro, pois apresenta a unidade i na sua forma algébrica.

A3 Operações aritméticas

Algumas operações entre números complexos são definidas de forma similar às operações entre números reais. Sejam $\boldsymbol{a + bi}$ e $\boldsymbol{c + di}$ dois números complexos, temos:

A.4 Definição (Operações com Número Complexos):

- ***Adição:*** $(a+bi)+(c+di) = \boldsymbol{(a+c)+(b+d)i}$
- ***Subtração:*** $(a+bi)-(c+di) = \boldsymbol{(a-c)+(b-d)i}$
- ***Multiplicação:*** $$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(c+di) &= a\cdot c + a\cdot di + bi\cdot c + bi\cdot di \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= \boldsymbol{(ac-bd)+(ad+bc)i}\end{aligned}$$

Repare que no caso da soma e da subtração, operamos apenas parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária.

Observações

1. Recomendamos não memorizar a fórmula da multiplicação acima, basta realizar os cálculos da mesma forma que se faz com expressões algébricas, porém calculando as potências de i para deixar na forma algébrica final.
2. A operação de divisão entre números complexos será apresentada posteriormente.

Abaixo apresentamos alguns exemplos de como operar números complexos com relação à adição, subtração e multiplicação.

Exemplos

a) $(2+4i)+(-1+3i) = (2-1)+(4+3)i = 1+7i$

b) $(\sqrt{2}-i)-(5-7i) = (\sqrt{2}-5)+(-1+7)i = (\sqrt{2}-5)+6i$

c) $(1+3i)(-1+2i) = -1+2i-3i+3i\cdot 2i = -1+2i-3i+6i^2 = -1-i+6(-1) = -7-i$

d) $(3+4i)(3-4i) = 3^2-(4i)^2 = 9-16i^2 = 9-16(-1) = 9+16 = 25$

Exercícios

4) Calcule $z+w$, $z-w$ e $z\cdot w$ em cada caso:

a) $z=3i$ e $w=2\sqrt{3}-i$

b) $z=2-i$ e $w=2+i$.

c) $z=-\dfrac{5}{3}+2i$ e $w=-4\sqrt{2}-i+i^2$.

5) Encontre o valor de $x\in\mathbb{R}$ para que:

a) $z=1-x+i$ seja igual a $2x+i$.

b) $z=-4x-3+5i$ seja um número imaginário puro.

c) $z=-2x+\dfrac{3x-2}{5}i$ seja um número real.

6) Escreva os seguintes números na forma algébrica:

a) $z=(4+i)(-2-i)$

b) $z=i(1-i+2i^2)$

c) $z=\sqrt{7}i(5-3i)(5+3i)$

A4 Conjugado de um número complexo

O conjugado de um número complexo é um número obtido a partir da imposição do sinal oposto da parte imaginária do número complexo. Desta forma a parte real permanece com o mesmo sinal e a parte imaginária é a simétrica no conjugado.

A.5 Definição (Conjugado ~~do Complexo~~):

*O **conjugado** do complexo $z=a+bi$ é o número $\boldsymbol{a-bi}$, denotado por $\overline{z}$.*

Tem-se $Re(z)=a$ e $Im(z)=b$, enquanto que $Re(\overline{z})=a$ e $Im(\overline{z})=-b$.

Seguem alguns exemplos para se obter o conjugado de um número complexo.

Exemplos

a) $z=3+i\longrightarrow\overline{z}=3-i$

b) $z=2\sqrt{5}i\longrightarrow\overline{z}=-2\sqrt{5}i$

c) $z=-\pi-2i\longrightarrow\overline{z}=-\pi+2i$

d) $z=42\longrightarrow\overline{z}=42$

Propriedades do Conjugado dos Números Complexos

1) Se $z = a + bi$, então:

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2(-1) \\ &= \boldsymbol{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

oportunidade de ensinar lzl

2) Se z for igual a $\bar{z}$, então:

$$\begin{aligned} z &= \bar{z} \\ \Longrightarrow \quad a+bi &= a-bi \\ \Longrightarrow \quad b &= -b \\ \Longrightarrow \quad b &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Isto é, $\boldsymbol{z = a}$ e $\boldsymbol{\bar{z} = a}$.

3) Se z e w são números complexos, então:

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z-w} &= \bar{z} - \bar{w} \\ \overline{zw} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

Observações

Podemos então concluir a partir das propriedades que:

1. A multiplicação de um complexo pelo seu conjugado é um número real;
2. Se um número complexo z é igual ao seu conjugado $\bar{z}$, então este número é um número real;
3. "O conjugado da adição de dois números complexos é a adição dos conjugados de cada número". Esta mesma frase também é verdadeira quando trocamos o termo "adição" por "subtração" ou "multiplicação".

Exercícios

7) Determine os conjugados dos números a seguir:

a) $z = 7 + \sqrt{3}i$

b) $z = 341$

c) $z = i(i-1)$

d) $z = (5\sqrt{2} + 2i)(4 - \sqrt{6}i)$

8) Mostre que $z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z)$ e $z - \bar{z} = 2 \cdot Im(z)$. (Dica: Escreva $z = x + yi$, encontre seu conjugado e realize a operação indicada entre eles).

9) Seja z um número complexo. Sabendo-se que $Re(z) = 6 - 2 \cdot Re(\bar{z})$ e $3 \cdot Im(z) = (4 - \sqrt{5}i)(4 + \sqrt{5}i) + 4 \cdot Im(\bar{z})$, determine z. (Dica: Escreva $z = x + yi$ e encontre seu conjugado).

A5 Divisão entre números complexos

Já sabemos como realizar a divisão de um número real por outro. Vejamos agora como seria a divisão do complexo $z = a + bi$ pelo real $c \neq 0$:

$$\frac{z}{c} = \frac{a+bi}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}i$$

Exemplos

a) $\dfrac{-6+2i}{2} = -\dfrac{6}{2} + \dfrac{2}{2}i = -3 + i$

b) $\dfrac{5-6i}{4} = \dfrac{5}{4} - \dfrac{6}{4}i = \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{2}i$

Para efetuar uma divisão de um número complexo (real ou não) por um complexo não real, transformaremos esta divisão em outra, de um complexo por um real.

Desta forma, a maneira como iremos efetuar a divisão entre complexos será igualá-la à divisão de um complexo por um real. Mas como fazer isto?

Na seção anterior, aprendemos que o produto de um complexo pelo seu conjugado resulta em um número real. Usaremos esta informação para transformar a divisão inicial em uma nova, com o denominador sendo o produto do denominador anterior pelo seu conjugado. Isto é:

A.6 Definição (Divisão de Complexos): *Se $z = a + bi$ e $w = c + di \neq 0$:*

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

$$\boxed{\frac{z}{w} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}}$$

Exemplos

a)
$$\begin{aligned}\frac{1-i}{2i} &= \frac{1-i}{2i}\cdot\frac{-2i}{-2i}\\ &= \frac{(1-i)(-2i)}{2i(-2i)}\\ &= \frac{-2i+2i^2}{2^2}\\ &= \frac{-i+(-1)}{2}\\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\frac{2+i}{-1+3i} &= \frac{2+i}{-1+3i}\cdot\frac{-1-3i}{-1-3i}\\ &= \frac{(2+i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}\\ &= \frac{-2-6i-i-3i^2}{(-1)^2+3^2}\\ &= \frac{-2-7i-3(-1)}{1+9}\\ &= \frac{1-7i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i\end{aligned}$$

Propriedades de Divisão e Potenciação de números complexos

A **potenciação** de números complexos é semelhante a de números reais:

1) Se z e $w \neq 0$ são números complexos, então: $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

2) Se z é um número complexo e n é um número natural, então:

$$z^n = z \cdot z \cdot ... \cdot z \text{ (n vezes)} \qquad \text{e} \qquad z^{-n} = \frac{1}{z^n}.$$

Exemplo: $(1+i)^2 = (1+i)(1+i)$. Não confunda $(1+i)^2$ com $(1^2 + i^2)$!!!

3) Se z é complexo e m e n são números inteiros, então:

$$z^n \cdot z^m = z^{n+m} \qquad \text{e} \qquad \frac{z^n}{z^m} = z^n \cdot z^{-m} = z^{n-m}.$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} (3-i)^3(3-i)^2 &= (3-i)^{3+2} \\ &= (3-i)^5 \end{aligned}$$

4) Se z e w são complexos e n é um número inteiro, então:

$$z^n \cdot w^n = (zw)^n \qquad \text{e} \qquad \frac{z^n}{w^n} = \left(\frac{z}{w}\right)^n.$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} (2i)^4(1+i)^4 &= [(2i)(1+i)]^4 \\ &= [2i + 2i^2]^4 \\ &= [-2+2i]^4 \end{aligned}$$

Exercícios

10) Efetue as seguintes operações:

a) $\dfrac{21+6i}{7}$

b) $\dfrac{-i}{i^3}$

c) $\dfrac{5-4i}{2-8i}$

d) $\dfrac{3+9i}{(2-i)^2}$

e) $\dfrac{(10+3i)-(6-2i)}{(-4+2i)-(7+2i)}$

11) Mostre que se $z = a + ai$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então $\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^2 = -1$.

12) Quais os valores de $z \in \mathbb{C}$ para que

$$\frac{z\overline{z}}{i} + (z - \overline{z})i + [Re(z)]^2$$

seja real?

A6 O curioso número i

Já vimos que $\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$ e $\boldsymbol{i^2 = -1}$. Isso nos diz que pode haver potências que são números reais e imaginários puros. Pensando nisso, qual será o valor das demais potências de i? Será que conseguimos calcular potências mais altas, como i^{20}, ou mais baixas, como i^{-15}, apenas sabendo o que é i e i^2?

recurso de destaque?

Utilizando a propriedade 3 $\left(z^{n+m} = z^n \cdot z^m \text{ e } z^n \cdot z^{-m} = \dfrac{z^n}{z^m}\right)$ da seção anterior, vamos calcular alguns valores das potências de i ~~e ver os resultados que aparecem~~:

$i^1 = \sqrt{-1} = \boldsymbol{i}$	$i^0 = i^{4-4} = \dfrac{1}{1} = \mathbf{1}$
$i^2 = \mathbf{-1}$	$i^{-1} = i^{3-4} = \dfrac{i^3}{i^4} = \dfrac{-i}{1} = \boldsymbol{-i}$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = \boldsymbol{-i}$	$i^{-2} = i^{2-4} = \dfrac{i^2}{i^4} = \dfrac{-1}{1} = \mathbf{-1}$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = \mathbf{1}$	$i^{-3} = i^{1-4} = \dfrac{i}{i^4} = \dfrac{i}{1} = \boldsymbol{i}$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = \boldsymbol{i}$	$i^{-4} = i^{0-4} = \dfrac{i^0}{i^4} = \dfrac{1}{1} = \mathbf{1}$
$i^6 = i^2 \cdot i^4 = -1 \cdot 1 = \mathbf{-1}$	$i^{-5} = i^{-1-4} = \dfrac{i^{-1}}{i^4} = \dfrac{-i}{1} = \boldsymbol{-i}$

Olhando para as duas listas de potências, encontramos 4 valores que se repetem:

$\boldsymbol{-i}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\mathbf{-1}$
i^{-5}	i^{-4}	i^{-3}	i^{-2}
i^{-1}	i^0	i^1	i^2
i^3	i^4	i^5	i^6

O padrão que parece haver é $i^n = i^{n+4}$. Veja que esta propriedade é verdadeira:

$$\boldsymbol{i^{n+4} = i^n \cdot i^4 = i^n \cdot 1 = i^n}$$

As potências de $\boldsymbol{i}$ se repetem a cada 4 unidades no expoente.

Exemplos

a) $\boldsymbol{i^{12} = i^8 = i^4 = i^0 = 1}$ b) $\boldsymbol{i^{-17} = i^{-13} = i^{-9} = i^{-5} = i^{-1} = i^3 = -i}$

Observação

Podemos calcular rapidamente o valor de i^n, em que n é um número inteiro, aplicando o mesmo método que utilizamos para calcular o resto numa divisão. Veja abaixo como fazer e o motivo disto ser possível.

Todo número natural n pode ser escrito como $n = q \cdot d + r$, em que o divisor $d \neq 0$, o quociente q e o resto r são naturais e $0 \leq r < d$. Desta forma, se n é natural, temos:

$$i^n = i^{q \cdot d + r} = (i^d)^q \cdot i^r$$

Se considerarmos $d = 4$, ou seja, efetuar a divisão de n por 4, ficamos com:

$$i^n = (i^d)^q \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$$

Ou seja, o valor de i^n, com n natural, é igual ao valor de i elevado ao valor do resto de n por 4.

Caso o valor de n seja negativo, podemos efetuar a divisão como se n fosse positivo. Ao aplicar o método, utilizaremos o quociente e o resto, mas com valores negativos. Veja nos exemplos abaixo.

Exemplos

a) $i^{-32} = i^{4(-8)} = 1^{-8} = 1$

$$\begin{array}{r|l} 32 & \underline{\ 4\ } \\ \underline{-32} & 8 \\ 0 & \end{array} \longrightarrow -32 = 4 \times (-8) + 0$$

b) $i^{30} = i^{28+2} = i^{4 \cdot 7} \cdot i^2 = i^2 = -1$

$$\begin{array}{r|l} 30 & \underline{\ 4\ } \\ \underline{-28} & 7 \\ 2 & \end{array} \longrightarrow 30 = 4 \times (7) + 2$$

c) $i^{-2003} = i^{-2000-3}$
$= i^{4(-500)} \cdot i^{-3} = i^{-3} = -i$

$$\begin{array}{r|l} 2003 & \underline{\ 4\ } \\ \underline{-20} & 500 \\ 003 & \end{array} \longrightarrow -2003 = 4 \times (-500) - 3$$

Exercícios

13) Calcule as seguintes potências:

a) i^{67}

b) i^{1136}

c) i^{-193}

d) i^{-911}

14) Efetue as seguintes operações:

a) $(3 - i)(5 - 4i^3)$

b) $(-8i^{-42})(-3i^{18})^2 + (36i^{51})(2i^{37})$

c) $\dfrac{5 - 2i}{i^3} + \dfrac{4 - 7i}{2i^6}i$

15) Determine o valor de

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + ... + i^{2020}$$

.

A7 Solução de equações quadráticas

Vamos relembrar o **método de resolução de equações de 2º grau** antes dos complexos:

1. Escrevemos a equação quadrática na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c sendo números reais e $a \neq 0$.
2. Calculamos o discriminante $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.
3. Se $\Delta \geq 0$, encontramos as raízes $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$. Se $\Delta < 0$, dizemos que não existe solução real para a equação.

Agora que conhece um pouco sobre os números complexos, sabe que quando $\boldsymbol{\Delta < 0}$ **existe solução complexa**. Veja alguns exemplos de resolução de equações quadráticas.

Exemplos

a) $\boldsymbol{x^2 - x = -1}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \\
&\Longrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\
&\qquad = 1 - 4 = -3 \\
&\Longrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1} \\
&\qquad = \frac{1 \pm \sqrt{3i^2}}{2} \\
&\qquad = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \\
&\qquad = \boldsymbol{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}
\end{aligned}$$

b) $\boldsymbol{\frac{3}{2}x^2 = -(2x+1)}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1 = 0 \\
&\Longrightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 \\
&\qquad = 4 - 6 = -2 \\
&\Longrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-2}}{2 \cdot \frac{3}{2}} \\
&\qquad = \frac{-2 \pm \sqrt{2i^2}}{3} \\
&\qquad = \frac{-2 \pm \sqrt{2}i}{3} \\
&\qquad = \boldsymbol{\frac{-2}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i}
\end{aligned}$$

A8 Montando as funções sabendo as raízes

Já lembramos no início do capítulo que toda função polinomial $f(x)$ de grau n pode ser escrita como $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$, onde a é o coeficiente do termo de maior grau e x_1, x_2, ..., x_n são as raízes da função. Esta maneira de escrever pode ser feita mesmo com as raízes sendo complexas.

Exemplos

a) Se $f(x)$ tem grau 3, o coeficiente do termo de maior grau é 2 e suas raízes são 2, i e $-i$, então:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x-2)(x-i)[x-(-i)] \\ &= (2x-4)(x-i)(x+i) \\ &= (2x-4)(x^2-i^2) \\ &= (2x-4)(x^2+1) \\ &= 2x^3+2x-4x^2-4 \\ &= 2x^3-4x^2+2x-4 \end{aligned}$$

b) Se $f(x)$ tem grau 4, o coeficiente do termo de maior grau é -1 e suas raízes são i, $-i$, $\sqrt{2}i$ e $-\sqrt{2}i$, então:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x-i)[x-(-i)](x-\sqrt{2}i)[x-(-\sqrt{2}i)] \\ &= -(x-i)(x+i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i) \\ &= -(x^2-i^2)(x^2-(\sqrt{2}i)^2) \\ &= -(x^2+1)(x^2+2) \\ &= -x^4-2x^2-x^2-2 \\ &= -x^4-3x^2-2 \end{aligned}$$

A9 Reduzindo o grau de polinômios

Como encontrar as raízes de funções polinomiais de grau maior que 2? Como você já aprendeu no capítulo anterior, podemos dividir um polinômio de grau maior por um de grau menor. Caso as raízes do polinômio divisor sejam também raízes do outro, o quociente será um polinômio e o resto será igual a 0. Este procedimento pode ser feito para polinômios com raízes reais ou complexas!

Exemplos

a) $\dfrac{4x^3-8x^2-4x+8}{x-1}$

$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & -8x^2 & -4x & +8 & x-1 \\ \cline{5-5} -4x^3 & +4x^2 & & & 4x^2-4x-8 \\ \cline{1-2} & -4x^2 & -4x & +8 & \\ & +4x^2 & -4x & & \\ \cline{2-4} & & -8x & +8 & \\ & & +8x & -8 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

b) $\dfrac{x^3-3x^2+4x-12}{x-2i}$

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x^2+4x-12 & x-2i \\ \cline{2-2} -x^3+2x^2i & x^2+2xi-3x-6i \\ \cline{1-1} +2x^2i-3x^2+4x-12 & \\ -2x^2i \qquad -4x & \\ \cline{1-1} -3x^2 \qquad -12 & \\ +3x^2-6xi & \\ \cline{1-1} -6xi-12 & \\ +6xi+12 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Veja no exemplo b) acima como é realizada a divisão de polinômios quando há a presença da unidade imaginária i em um deles. Quando o termo de maior grau do numerador estiver acompanhado com a unidade i, tente "desaparecer" com ele antes do termo de maior grau que não estiver com o i.

Desta forma, se souber uma das raízes de um polinômio em x, digamos x_i, basta dividir o polinômio por $x - x_i$ para reduzir o grau do polinômio e facilitar o processo de encontrar as demais raízes. Quando conseguir reduzir para um polinômio do 2º grau, basta aplicar a fórmula de Bháskara.

Exemplos

a) Seja $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
Fazendo $x = 1$, obtemos $f(1) = 0$, ou seja, $x = 1$ é raíz de $f(x)$.

$$\Longrightarrow \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 1} = x^2 - x - 6$$

Aplicando a fórmula de Bháskara em $x^2 - x - 6 = 0$:

$$\Longrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \Longrightarrow x_1 = 3 \text{ e } x_2 = -2.$$

Logo as raízes de $f(x)$ são -2, 1 e 3.

- esclareça que o método depende de intuir uma primeira raiz por inspeção.
- seria bom oferecer exemplos com esta primeira raiz distinta, para não dar a entender que só dá certo com x=1.

b) Seja $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.
Fazendo $x = 1$, obtemos $f(1) = 0$, ou seja, $x = 1$ é raíz de $f(x)$.

$$\Longrightarrow \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 1$$

Aplicando a fórmula de Bháskara em $x^2 + 1 = 0$:

$$\Longrightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 2i}{2} \Longrightarrow x_1 = i \text{ e } x_2 = -i.$$

Logo as raízes de $f(x)$ são 1, i e $-i$.

Exercícios

16) Encontre as raízes das funções:

a) $x^2 - 2x + 2$

b) $x^2 - 4x + 8$

c) $5x^2 + 6x + 2$

17) Determine as raízes das funções:

a) $f(x) = x^3 + 9x$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

18) Efetue as seguintes divisões de polinômios:

a) $\dfrac{2x^3 - 4x^2 - 16x}{x + 2}$

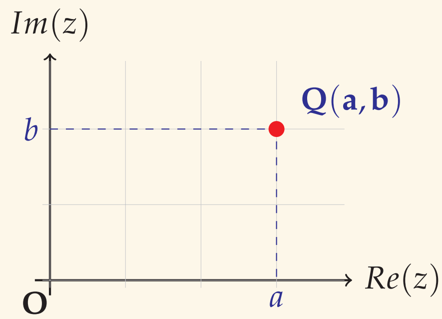
b) $\dfrac{x^3 - 7x^2 + 25x - 175}{x - 5i}$

B Plano de Argand-Gauss

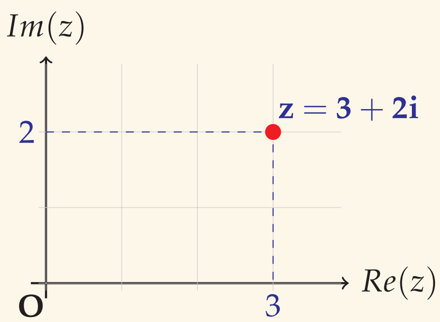
O plano de *Argand-Gauss*, também conhecido como **plano complexo**, é a representação geométrica do conjunto dos números complexos. Foi através de estudos relacionados aos matemáticos *Wessel*, *Argand* e *Gauss*, que muitos resolveram associar os números a e b de um complexo a coordenadas de um ponto no plano, criando assim uma representação geométrica para os complexos. ?

partes real e imaginária

Podemos associar a cada número complexo $\boldsymbol{z = a + bi}$ um ponto no plano, representando sua parte real (a) no eixo horizontal, ou **eixo real**, e sua parte imaginária (b) no eixo vertical, ou **eixo imaginário**.



Assim como no estudo de funções, um número complexo $z = a + bi$ pode ser representado no plano de Argand-Gauss através de um par ordenado $\boldsymbol{(a,b)}$.



O par ordenado (a,b) é chamado de **afixo** de z.

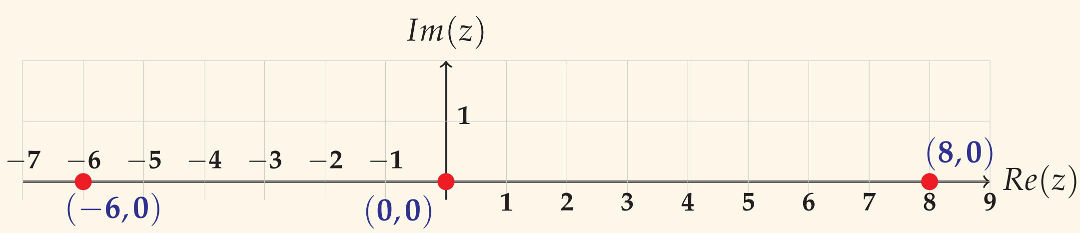
Dessa forma, o afixo de $z = 3 + 2i$ é o par ordenado $(3,2)$, e pode ser representado como no gráfico ao lado.

Afixos Reais

Se um afixo pertence ao eixo das abscissas temos a representação de um número real, pois a sua parte imaginária é nula. No exemplo abaixo representamos 3 afixos reais.

Exemplos

a) $(-6,0) = -6 + 0i = -6$ b) $(0,0) = 0 + 0i = 0$ c) $(8,0) = 8 + 0i = 8$



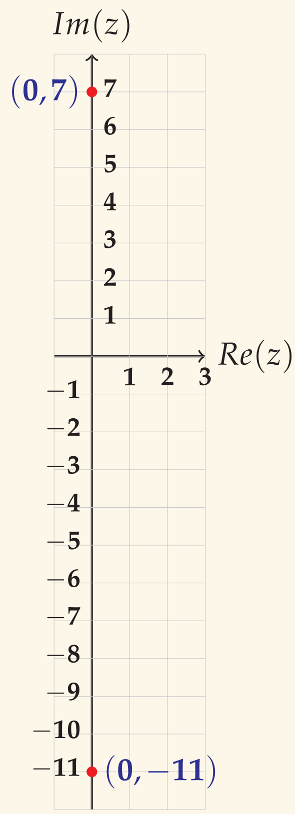
Veja que todos os três afixos pertencem ao eixo das abscissas, por isto a ordenada é zero, o que indica que a parte imaginária do número complexo é nula, ou seja, temos a representação de três números reais.

Os números reais não precisam de um plano para serem representados graficamente. Eles podem ser representados em uma reta real.

Afixos Imaginários Puros

Afixos Imaginários Puros são afixos pertencentes ao eixo das ordenadas.

No gráfico ao lado temos os afixos de dois números imaginários puros.



Exemplos

a) $(0,7) = 0 + 7i = 7i$

b) $(0,-11) = 0 - 11i = -11i$

Por pertencerem ao eixo das ordenadas, a parte real dos números complexos representados por estes afixos é nula, por isto temos um número imaginário puro.

Note que embora o afixo $(0,0)$ tenha abscissa nula ele é real, pois a sua ordenada também é nula.

Este afixo foi visto acima, já que se trata de um afixo real.

Afixos Imaginários

No exemplo abaixo temos cinco afixos. Todos estes cinco afixos representam números imaginários quem contêm uma parte real e uma parte imaginária não nulas.

Exemplos

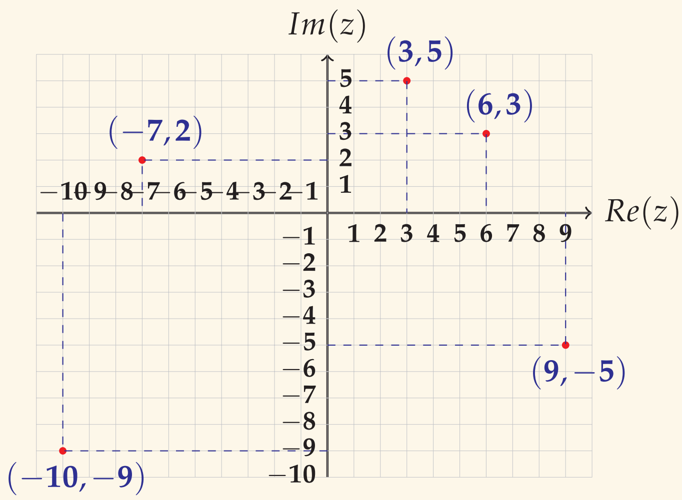
a) $(3,5) = 3 + 5i$

b) $(6,3) = 6 + 3i$

c) $(-7,2) = -7 + 2i$

d) $(-10,-9) = -10 - 9i$

e) $(9,-5) = 9 - 5i$

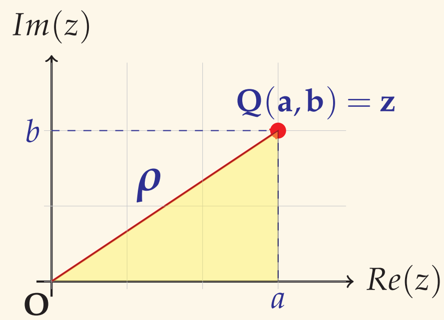


B1 Módulo de um número complexo

B.1 Definição (Módulo dos Complexos): *O **módulo** de um número complexo é determinado pela distância entre o afixo deste e a origem do plano complexo.*

Na figura ao lado podemos notar que o módulo de z é determinado pelo segmento de reta $\boldsymbol{\rho}$.

Com base no plano representado vamos calcular a distância ρ, entre os pontos $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{Q}$. Observe que basta aplicarmos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo.



Dessa forma temos: $\rho^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

Essa distância $\boldsymbol{\rho}$ é chamada **módulo** de um número complexo e é representada por $|\boldsymbol{z}|$.

Exemplos

Calculando o módulo de $\boldsymbol{z = 3 + 4i}$

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \rightarrow |z| = 5$$

Propriedades do Módulo dos Números Complexos

Sejam $z = a + bi$, $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$

1) $\boldsymbol{|z| \geq 0}$

Como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, sabemos que uma raíz quadrada não admite valores negativos, logo $|z| \geq 0$.

2) $\boldsymbol{|z| = 0}$ **se, e somente se** $\boldsymbol{z = 0 + 0i}$

Para que $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$, temos que $a^2 + b^2 = 0 \rightarrow a^2 = -b^2 \rightarrow a = b = 0$, pois nenhum número elevado ao quadrado pode assumir valor negativo, logo ambos devem ser 0.

3) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Sabemos que $\bar{z} = a - bi$, logo $z \cdot \bar{z} = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$. já feito antes

Também sabemos que $|z|^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2 = a^2 + b^2$, portanto obtemos o resultado esperado.

4) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$

Sabemos que $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2)^2 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)^2}$

Então, $\sqrt{(a_1 a_2)^2 - 2(a_1 a_2 \cdot b_1 b_2) + (b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2)^2 + 2(a_1 a_2 \cdot b_1 b_2) + (a_2 b_1)^2}$

Dessa forma, $\sqrt{a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2)}$

Portanto, $\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = |z_1 \cdot z_2|$

Pelo lado direito temos:

$|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ e $|z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$

Multiplicando, temos $\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$

Podemos concluir que $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Sabemos que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$

Multiplicando o numerador e o denominador por $\overline{z_2}$ temos

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Realizando a multiplicação no numerador temos que

$$\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Agora vamos aplicar o módulo na fração encontrada:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left[\frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}\right]^2 + \left[\frac{(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_2^2 + b_2^2}\right]^2}$$

Aplicando a potência nas frações, obtemos o mesmo denominador para ambas e podemos fazer a soma das mesmas obtendo o seguinte:

$$\sqrt{\left[\frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}\right]^2 + \left[\frac{(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_2^2 + b_2^2}\right]^2} = \sqrt{\frac{(a_1a_2 + b_1b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_2^2 + b_2^2)^2}}$$

A soma no numerador já resolvemos na propriedade anterior. Então obteremos:

$$\sqrt{\frac{(a_1a_2 + b_1b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_2^2 + b_2^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}{(a_2^2 + b_2^2)^2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}}$$

Pelo lado direito temos:

$$|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{e} \quad |z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

Montando a fração que temos no lado direito, obtemos o resultado desejado:

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$$

6) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Esta propriedade é demonstrada a partir da desigualdade geométrica. ?

Exercícios

19) Calcule os módulos nos números complexos abaixo:

a) $z = -5 + 12i$

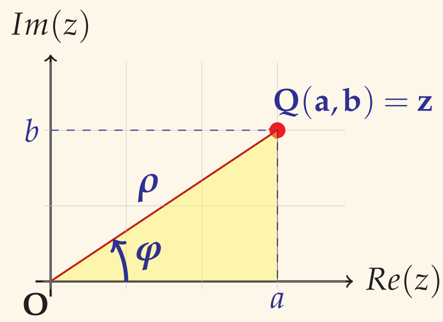
b) $z = 6 + 8i$

c) $z = 3 - 2i$

20) Calcular $|(3 + 4i)(5 - 12i)|$.

B2 Argumento de um número complexo

O **argumento** de um número complexo é determinado pelo ângulo formado pelo segmento de reta ρ e pela semirreta $\overline{Ox}$. Na figura a seguir podemos notar que o argumento de z é determinado pelo ângulo $\boldsymbol{\varphi}$.



Utilizando das razões trigonométricas, podemos encontrar os valores para o seno e o cosseno do argumento principal de z.

$$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\varphi} = \frac{b}{|z|} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\varphi} = \frac{a}{|z|}$$

As igualdades acima determinam a unicidade do argumento principal, pois determinam os quadrantes de $\boldsymbol{\varphi}$.

Exemplos

Vamos calcular o argumento principal de $\boldsymbol{z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$.
Para calcularmos o argumento principal precisamos primeiro do módulo $|z|$ de z:

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Agora que sabemos qual o módulo de z, vamos calcular o seno e o cosseno do argumento principal dele:

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, analisando o círculo trigonométrico, podemos concluir que $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercícios

21) Calcule o argumento principal dos seguintes números complexos:

a) $z = \sqrt{3} + i$

b) $z = 1 - i\sqrt{3}$

c) $z = -3\sqrt{3} + 3i$

22) Determine o argumento principal de

$$(2+3i)\left(\frac{5-i}{13}\right)$$

B3 A forma polar de um número complexo

Sabemos que um número complexo z tem sua forma algébrica $z = a + bi$. Como já vimos acima, também sabemos que z tem um módulo $|z|$ e um argumento principal φ. Utilizando todos os resultados que já conhecemos vamos construir a **forma polar** do número complexo z:

Sabemos que

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} \iff b = |z| \cdot \sin\varphi$$

E também sabemos que

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \iff a = |z| \cdot \cos\varphi$$

Substituindo os resultados obtidos acima, temos que

$$z = a + bi = |z| \cdot \cos\varphi + i \cdot |z| \cdot \sin\varphi$$

Colocando $|z|$ em evidência, temos então

$$\boldsymbol{z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)}$$

Esta é a forma polar (ou **trigonométrica**) do número complexo z. Utilizaremos esta para tratar principalmente de potenciações e radiciações de números complexos.

B4 Propriedades operacionais da forma polar

Nas seções anteriores vimos como operar os números complexos em sua forma algébrica, porém, em alguns momentos, utilizar a forma algébrica para resolver alguns problemas pode dar muito trabalho.

Desta forma, para facilitar os cálculos, vamos aprender como operar os números complexos na forma polar.

Multiplicação

Suponha que tenhamos dois números complexos em suas formas polares:

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ e } z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Vamos efetuar a multiplicação de z_1 por z_2: figura?

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Então, fazendo a distributiva, obtemos:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)$$

Fazendo o agrupamento de parcelas que tenham o número imaginário como fator comum, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1)]$$

Lembre-se que

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1$$

Por fim, utilizando a fórmula de soma de arcos do seno e do cosseno acima, temos o resultado final:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Logo, podemos ver que ao multiplicarmos dois números complexos, o módulo do produto de z_1 por z_2 é justamente o produto dos módulos. Assim como o argumento principal do produto é a soma dos argumentos dos fatores.

Exemplos

Dados $\boldsymbol{z_1 = 5(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)}$ e $\boldsymbol{z_2 = 3(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}$

$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 3(\cos(30^\circ + 45^\circ) + i\sin(30^\circ + 45^\circ)) = 15(\cos(75^\circ) + i\sin(75^\circ))$$

Divisão

figura?

Considerando os mesmos números complexos anteriores z_1 e z_2 em suas formas polares, vamos dividir o primeiro pelo segundo e vejamos o que obtemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração pelo conjugado de z_2, obtemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} \cdot \frac{|z_2|(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{|z_2|(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}$$

Aplicando a distributiva, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2)^2 + (\sin\varphi_2)^2}$$

Fazendo o agrupamento das parcelas com o número imaginário como fator comum, obtemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1)}{(\cos\varphi_2)^2 + (\sin\varphi_2)^2}$$

Agora, utilizando o teorema de subtração de arcos no numerador e a relação fundamental da trigonometria no denominador, conseguimos chegar ao resultado final:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Logo, podemos ver que ao dividirmos dois números complexos, o módulo do quociente de z_1 por z_2 é justamente o quociente dos módulos. Assim como o argumento principal do produto é a diferença dos argumento principal do dividendo pelo argumento principal do divisor.

Exemplos

Dados $\mathbf{z_1 = 10(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)}$ e $\mathbf{z_2 = 2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{2}(\cos(180^\circ - 45^\circ) + i\sin(180^\circ - 45^\circ)) = 5(\cos(135^\circ) + i\sin(135^\circ))$$

Potenciação

figura?

Agora, vamos pensar em como seria fazer a potência de um número complexo.

Já sabemos o resultado se multiplicarmos dois números complexos, e sabemos que $z^2 = z \cdot z$, vamos fazer uma análise mais aprofundada deste caso:

$$z \cdot z = |z| \cdot |z| (\cos(\varphi + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi))$$

Logo, temos o seguinte:

$$z^2 = |z|^2 (\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi))$$

Agora, para z^3 utilizaremos a seguinte estratégia:

$$z^3 = z \cdot z^2$$

Sabemos que o $|z^2| = |z|^2$ e que o argumento principal de z^2 é 2φ, então, a multiplicação de z^2 por z será:

$$z^2 \cdot z = |z| \cdot |z^2| (\cos(\varphi + 2\varphi) + i \sin(\varphi + 2\varphi) = |z|^3 (\cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi))$$

E para cada inteiro n a que elevarmos um número complexo, utilizando sempre a mesma estratégia de forma análoga, obteremos o seguinte resultado:

B.2 Definição (1° Fórmula de Moivre):

$$\boxed{z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))}$$

Exemplos

Dados $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}\right)$, calcule z^{10}.

$$\begin{aligned} z^{10} &= \left(2\sqrt{2}\right)^{10} \cdot \left[\cos\left(10 \cdot \frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(10 \cdot \frac{5\pi}{4}\right)\right] \\ &= 2^{10} \cdot 2^5 \left(\cos\frac{25\pi}{2} + i \sin\frac{25\pi}{4}\right) \\ &= 2^{15} \left(\cos\frac{25\pi}{2} + i \sin\frac{25\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Radiciação

Agora, como poderíamos pensar em calcular a raiz de um número complexo?

Dizemos que z_w é a raiz enésima de um número complexo z se, e somente se, $(z_w)^n = z$.

Exemplos figura?

a) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ é uma raiz cúbica de 1, pois $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1$

Vamos resolver $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$:

Para isso, vamos calcular o módulo e o argumento do número complexo, e então faremos a potenciação:

$$\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \text{ e } \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como o cosseno é negativo e o seno é positivo, o ângulo procurado está no segundo quadrante e é simétrico a 60°, por ter os valores dos módulos de seno e cosseno igual aos valores de seno e cosseno de 60°. Assim, sabemos que $\theta = 120°$.

Como já sabemos o valor do módulo e do argumento podemos calcular a forma polar do número complexo e então realizar a potência:

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 \cdot (\cos 120° + i\sin 120°)$$

Fazendo a terceira potência, obtemos:

$$1^3 \cdot (\cos(3\cdot 120°) + i\sin(3\cdot 120°)) = \cos 360° + i\sin 360° = 1 + 0i = 1$$

$$1^3 \cdot (\cos(3\cdot 120°) + i\sin(3\cdot 120°)) = \cos 360° + i\sin 360° = 1 + 0i = 1$$

b) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ é uma raiz cúbica de 1, pois $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1$

Este caso é bastante semelhante ao primeiro, faça em casa.

Podemos notar que a raiz cúbica de 1 aceita três resultados, os dois do exemplo acima e o próprio número. No geral, temos que um número complexo não nulo tem n raízes enésimas distintas.

Vamos ver um exemplo de como calcular a raiz quadrada de -4:

Suponha que $z = a + bi$, com a e b reais, seja uma raiz quadrada de -4.

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = -4$$

Para dois números complexos serem iguais, as partes reais de ambos devem ser iguais e as partes imaginárias também. Logo, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -4 \\ 2ab = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -4 \\ ab = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema, temos que $a = 0$ ou $b = 0$.

Suponha $b = 0$, então temos: $\quad a^2 = -4$

Como a é um número real, não podemos considerar esta solução, logo assumimos que $a = 0$:

$$-b^2 = -4 \to b^2 = 4 \to b = \pm 2$$

Desta forma, sabemos que as raízes quadradas de -4 são $2i$ e $-2i$.

Vimos como calcular a raiz quadrada de um número complexo. Porém, este método não se aplica para raízes de índice maior que 2. Para esses casos, utilizaremos o seguinte resultado:

Seja $z_w = |z_w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ uma raiz enésima de z, onde $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, portanto, sabemos que $(z_w)^n = z$.

Logo, $\quad \boldsymbol{(z_w)^n = |z_w|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$

Do resultado desta equação conseguimos concluir que $|z_w| = \sqrt[n]{|z|}$

Logo, o número real $|z_w|$ é igual a raiz enésima do número real $|z|$. Além disso, conseguimos concluir também outro resultado:

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Que nos leva ao seguinte sistema: $\begin{cases} \cos(n\theta) = \cos\varphi \\ \sin(n\theta) = \sin\varphi \end{cases}$

Logo, concluímos que $\quad n\theta = \varphi + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Desta ultima equação, podemos concluir que $\theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Substituindo na forma polar de z_w, temos que:

B.3 Definição (2° Fórmula de Moivre):

$$\boldsymbol{z_w = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]}$$

Exemplos

Calcular as raízes cúbicas de $\boldsymbol{z = -27}$.
Para isso, vamos encontrar o módulo e o argumento:

$$|-27| = \sqrt{(-27)^2} = \sqrt{27^2} = 27$$

$$\cos\varphi = \frac{-27}{27} = -1 \quad \text{e} \quad \sin\varphi = \frac{0}{27} = 0$$

Sabemos pelos ângulos notáveis que o ângulo com essas características é $\varphi = \pi$.

$$-27 = 27 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$$

Pela 2ª Fórmula de Moivre, vamos calcular as 3 raízes que estamos buscando:

Para $\boldsymbol{k = 0}$ temos $\boldsymbol{z_0} = \sqrt[3]{27} \cdot \left(\cos\dfrac{\pi + 0}{3} + i\sin\dfrac{\pi + 0}{3}\right) = 3 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

Para $\boldsymbol{k = 1}$, temos $\boldsymbol{z_1} = \sqrt[3]{27} \cdot \left(\cos\dfrac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi + 2\pi}{3}\right) = 3 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = 3(-1) = -3$

Para $\boldsymbol{k = 2}$, temos $\boldsymbol{z_2} = \sqrt[3]{27} \cdot \left(\cos\dfrac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi + 4\pi}{3}\right) = 3 \cdot \left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$

Exercícios

23) Faça a multiplicação e divisão dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 6 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

a) $z_2 = 3 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

24) Calcular as seguintes potências:

a) $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z^3$

b) $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \qquad z^4$

c) $z = -2 - 2i\sqrt{3}, \qquad z^4$

C O Caos Padronizado dos Fractais

Você já viu imagens como a da Figura 1.1, em que parece que podemos dar zoom eternamente sem nunca deixar de ver detalhes e mais detalhes? Elas são o que chamamos de **fractais**, que têm como característica principal a "autossimilaridade". Isso significa que essas imagens possuem partes com o mesmo formato do todo.

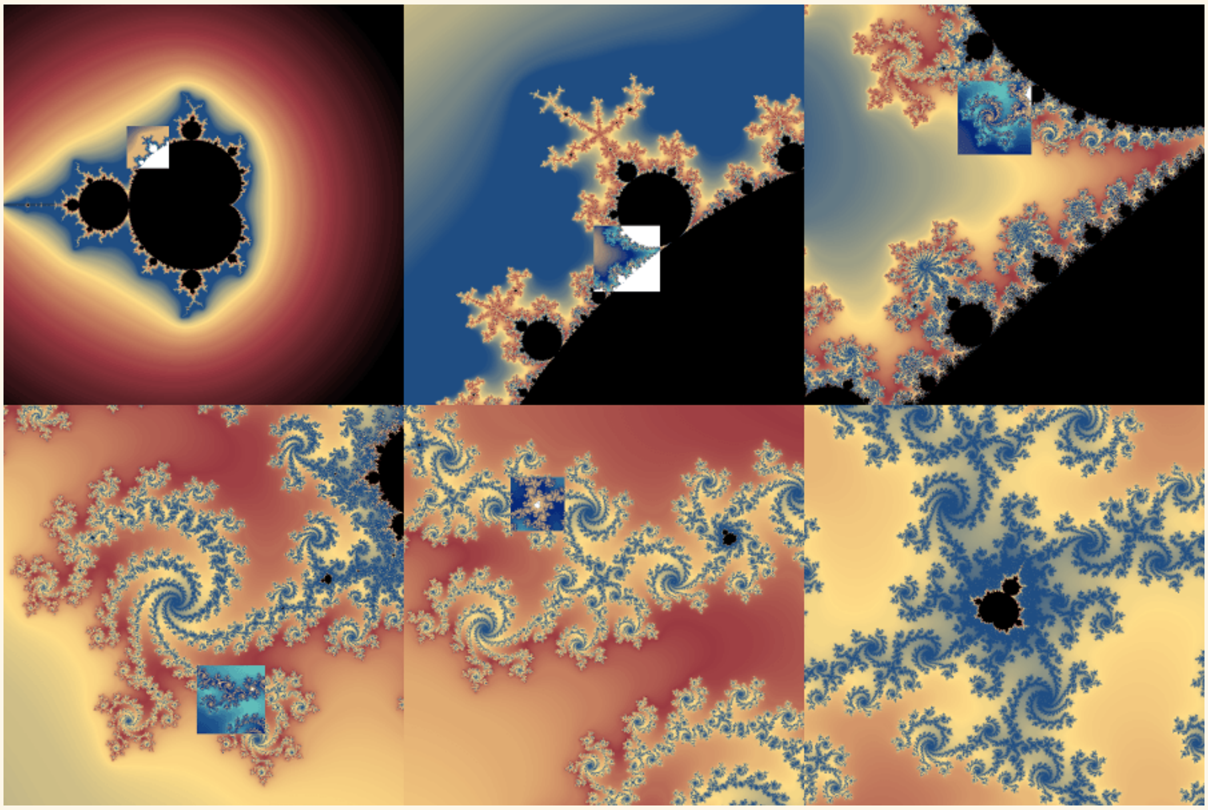


Figura 1.1: Ampliações sucessivas no Conjunto de Mandelbrot

Além de gerar imagens impressionantes, o estudo de fractais contribui para diversas áreas. Na geografia, por exemplo, sabe-se que o solo se comporta similarmente a um fractal, e entender esse comportamento pode ajudar a prevenir catástrofes. Outra aplicação dos fractais é na computação gráfica, pois eles ajudam a criar imagens de filmes e video-games com texturas complexas parecidas com o que encontramos na vida real.

Um dos fractais mais conhecidos é o **Conjunto de Mandelbrot**, nomeado em homenagem ao matemático *Benoit Mandelbrot* (1924-2010), um dos maiores contribuidores ao estudo de fractais. As figuras 1.1 e 1.2 são partes da representação gráfica deste conjunto, ou seja, são formadas pelos pontos no plano de *Argand-Gauss* que pertencem a este conjunto.

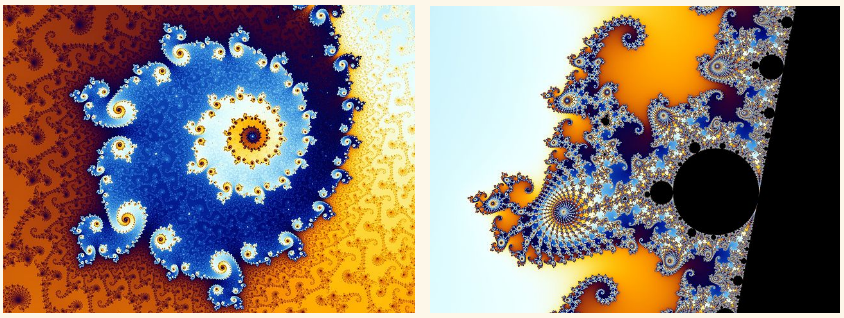


Figura 1.2: Partes do Conjunto de Mandelbrot

Antes de apresentar a definição do Conjunto de Mandelbrot, vamos relembrar o que são sequências e aprender um pouco mais sobre elas.

C1 Sequências

Uma sequência é um conjunto de números que são dispostos em uma ordem, onde cada número é chamado de termo. O termo é escrito na forma a_n, sendo n a sua posição.

Este livro contará os termos a partir do zero, então as sequências serão como esta: $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$.

~~Algumas~~ sequências possuem uma regra de formação, ou seja, um ponto de partida (a_0) e uma **fórmula** que nos diz como seguir a partir dali. sequência definida por recorrência?

As sequências podem ser finitas ou infinitas. Os números Naturais, por exemplo, formam uma sequência infinita, pois é um conjunto de números ordenados que não chegam a um fim.

No entanto, há diferentes tipos de sequências infinitas.

Em alguns casos, à medida que o subíndice dos termos (ou seja, o "n" de a_n) vai aumentando, o valor dos termos parece se aproximar de um número específico. Pense, por exemplo, no que acontece com a sequência $a_n = \dfrac{1}{n}$ à medida que aumentamos n. O valor de a_n vai ficando cada vez menor, **tendendo** a zero (porém nunca chegando lá, pois sabemos que não se divide por zero).

Por outro lado, podemos ter sequências que não se aproximam a um valor específico à medida que aumentamos o subíndice, ou seja, elas vão apenas crescer ou decrescer em direção ao infinito. Neste caso, dizemos que a sequência **tende ao infinito**.

~~Para ilustrar melhor, vamos apresentar dois exemplos: uma sequência que tende ao infinito e outra que não tende ao infinito.~~

Exemplos

a) Vamos retomar o exemplo do conjunto dos números Naturais. Sua lei de formação é:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = n$$

o que nos dá a sequência {0, 1, 2, 3, ...}. Como o termo seguinte a algum a_n é sempre $a_{n+1} = n + 1$, a sequência nunca vai parar de crescer, pois está sempre sendo somado 1 a cada passo. Portanto, a sequência formada pelos números naturais **tende ao infinito**.

b) Agora, considere a sequência

$$a_0 = 0$$

$$a_n = (a_{n-1})^2 - 1$$

o que nos dá {0, -1, 0, -1, 0, ...}. Assim, vemos que a sequência está sempre "presa"entre os números 0 e -1, logo **não tende ao infinito**.

C2 O conjunto de Mandelbrot

Agora, tendo aprendido sobre números complexos e sequências, você poderá entender como são formadas as imagens do Conjunto de Mandelbrot!

C.1 Definição (Conjunto de Mandelbrot): *No plano complexo, definimos o Conjunto de Mandelbrot como o conjunto de todos os pontos C para os quais a sequência abaixo não tende ao infinito:*

$$Z_0 = 0$$

$$Z_n = (Z_{n-1})^2 + C$$

onde Z_k e C são números complexos.

Assim, como mostra o primeiro quadro da Figura 1.1, a representação gráfica desta sequência no plano complexo é como uma “ilha” na qual todos os elementos do conjunto estão situados. Apesar de a ilha parecer fechada, como em qualquer fractal (e uma ilha de verdade!), se ampliarmos sucessivamente a imagem nas fronteiras, nunca vamos parar de ver mais detalhes e mais elementos do conjunto.

Note que, se considerássemos apenas os números reais na definição da sequência sem incluir os números complexos, não veríamos nada de interessante, apenas pontos em uma reta!

Uma regra que pode nos ajudar a descobrir quais são os números que pertencem ou não ao conjunto é a seguinte: dado um valor para C, **quando o módulo de algum resultado da iteração é $|Z_k| > 2$, sabemos que a sequência acima vai tender ao infinito**, e podemos concluir que C não pertence ao Conjunto de Mandelbrot.

por quê?

Exemplo

Para verificar se o número $\boldsymbol{C = 1}$ pertence ao conjunto de Mandelbrot, por exemplo, fazemos da seguinte forma:

$$Z_0 = 0$$
$$Z_1 = (Z_0)^2 + C = 0 + 1 = 1$$
$$Z_2 = (Z_1)^2 + C = 1 + 1 = 2$$
$$Z_3 = (Z_2)^2 + C = 4 + 1 = 5$$

Veja que, como $|5| > 2$, podemos concluir já no terceiro passo que o caso particular com $C = 1$ tende ao infinito (pela regra dada acima). Vamos fazer mais algumas iterações para saber o que acontece em seguida:

$$Z_4 = (Z_3)^2 + C = 25 + 1 = 26$$
$$Z_5 = (Z_4)^2 + C = 676 + 1 = 677$$

Assim, podemos ver que a sequência realmente não vai parar de crescer, o que significa, por definição, que o número 1 não pertence ao **Conjunto de Mandelbrot**.

Problema

25) Verifique se os seguintes números complexos pertencem ou não ao **Conjunto de Mandelbrot**, utilizando uma calculadora quando necessário:

a) -1

b) i

c) $0{,}7 + 0{,}7i$

Você conseguiria pensar em mais algum número diferente destes que pertença ao conjunto?

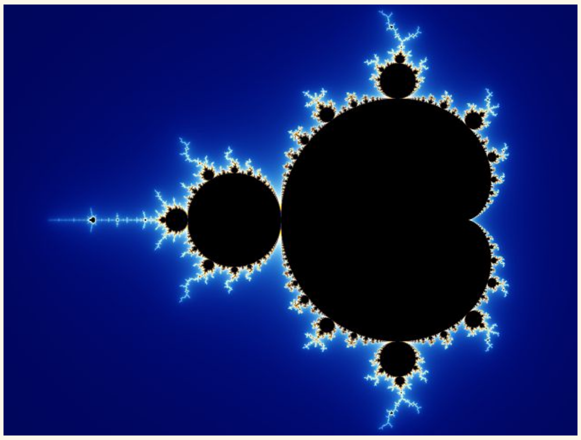


Figura 1.3: Representação gráfica do **Conjunto de Mandelbrot** no plano complexo

Referências

A) Créditos das figuras: **Figura 1.1** - *Malin Christersson*; **Figura 1.2 e 1.3** - *Wolfgang Beyer* com o programa Ultra Fractal 3.

B) Partes do texto: `https://super.abril.com.br/mundo-estranho/o-que-sao-fractais/`

D Geogebrando

Vamos novamente exercitar uma atividade com o *Geogebra*. Desta vez iremos construir figuras fractais e observar alguns conhecimentos que adquirimos neste capítulo.

D1 Atividade 1 - Números complexos

Escreva na ferramenta de comandos:

1. $p1 = 6 + 2i$
2. $p2 = 4 + 4i$
3. $z1 = p1 + p2$
4. Esse valor se parece com o que ja foi calculado?
5. Caso mova $p1$ o que acontece? E $p2$?
6. Escreva $vetor(z1)$
7. O que se observa?
8. Faça o mesmo para a subtração, multiplicação e divisão, comente o que se observa.

D2 Atividade 2 - Afixo Z

Criaremos agora dois controles deslizantes, com os nomes de a e b.

Escreva na ferramenta de comandos:

1. Ir nas preferência no canto superior direito, depois em objetos, algebra e alterar as coordenadas para "números complexos"
2. $z = a + b * i;$
3. $vetor(z)$ e mudar o nome do vetor para $\|Z\|$;

4. Utilizando a ferramenta "Circunferência de centro e raio" para fazer uma circunferência de centro (0,0) e raio z;

5. colocar o ponto **C** na intersecção da circunferência com o eixo das abscissas.

6. Construir com a ferramenta "Ângulo", o ângulo entre os pontos COZ.

7. ocultar os objetos "C", "circunferência";

8. Utilizar a ferramenta de "Texto" para escrever:

   a) $z = z \rightarrow z = a + bi$ (em vermelho)

   b) $z = (a^2 + b^2)^{1/2} = \sqrt{j}$ (em azul)

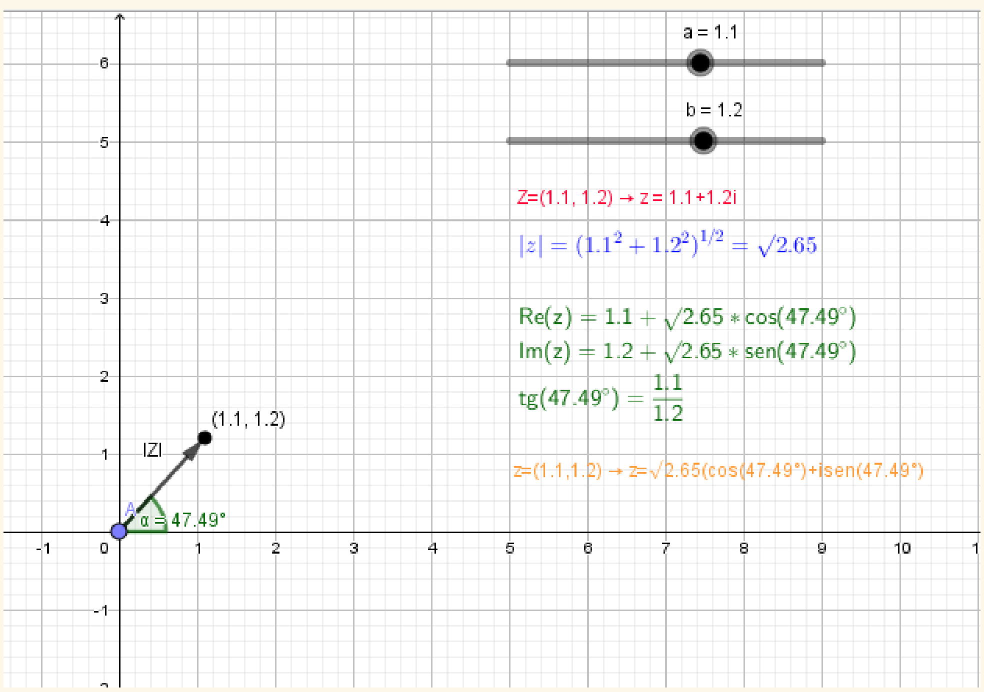
   c) $Re(z) = a + \sqrt{j} * cos\alpha$ (em verde)

   d) $Im(z) = b + \sqrt{j} * sen\alpha$ (em verde)

   e) $tg(\alpha) = \frac{a}{b}$ (em verde)

   f) $z = (a,b) \rightarrow z = \sqrt{jcos(\alpha) + i * sen(\alpha)}$ (em amarelo)

A tela deve apresentar uma figura semelhante a esta abaixo:

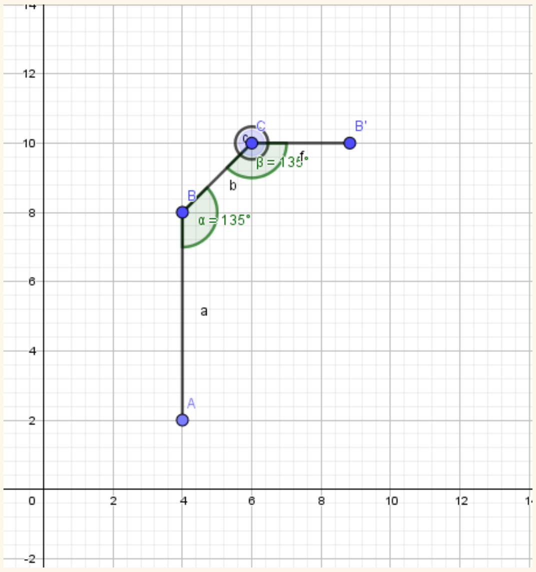


9. Utilizando o programa que você acabou de criar, calcule:

   a) $z = 2 + 3i$ **b)** $z = -4 + 4i$ **c)** $z = -3i$

D3 Atividade 3 - Montando um Fractal

Vamos relembrar o conceito de “Criar uma nova ferramenta” com o Geogebra.



1. Crie 3 pontos: A, B e C, sendo eles não colineares;
2. Crie os segmentos $\overline{AB}$, com nome **a** e $\overline{BC}$ com nome **b**;
3. O segmento $\overline{BC} < \overline{AB}$;
4. Criar o ângulo entre ABC e o chamar de α;
5. Criar um $R = b/a$
6. Utilizando a ferramenta “Circunferência dado centro e raio”, crie a circunferência cujo centro esta em C e raio tem valor de $R * b$.
7. Utilizando a ferramenta “ângulo com amplitude fixa”, clique nos pontos B e depois C e de o valor α para esse ângulo BCB’, α, que já foi criado anteriormente.
8. Utilizando a função “segmento de reta”, criar um segmento $\overline{CB'}$ (como na imagem ao lado).
9. Crie o ponto D, ponto esse que é a interseção entre o segmento criado e a circunferência.
10. Crie o segmento de reta $\overline{CD}$.
11. Oculte os objetos e deixe somente os pontos A, B, C, D e os segmentos que os ligam.
    a) Movendo o ponto A, o que se observa?
    b) Movendo o ponto B, o que se observa?
    c) Movendo o ponto C, o que se observa?
    d) É possível mover o ponto D?

12. Voltar à proporção do item 3.

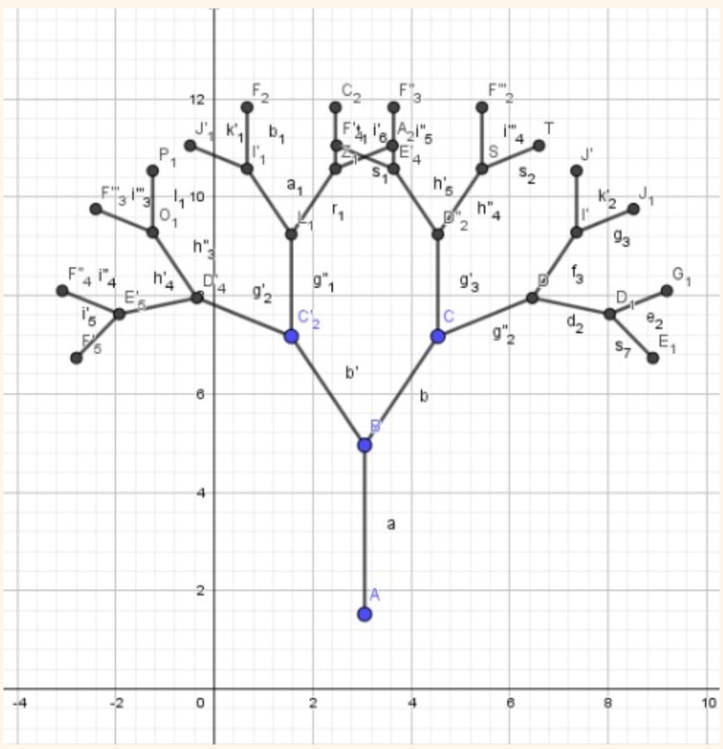
13. Neste momento, devemos criar uma nova ferramenta, na aba de "Criar uma nova ferramenta", selecione "Objetos Finais" os itens: Seg[C,D] e o ponto D, e "Objetos Iniciais" os itens: Ponto A, B e C, e na aba de "Nome do ícone", de o nome de "Galho"

14. Selecione a ferramenta criada (Galho) e clique em 3 pontos (B, C e D para formar o ponto E) e assim realizar o próximo galho da árvore. Na imagem aplicamos três vezes, mas dá para continuar infinitamente criando novos galhos.

15. Para finalizar, utilize a ferramenta "Reflexão em relação a reta" e reflita cada um dos galhos formatando assim a copa da árvore (deixando-a como na imagem abaixo).

16. Voltando às perguntas, o que acontece caso se mova cada um dos pontos?

17. Caso deseje colorir, mude algumas propriedades dos objetos.



Referências

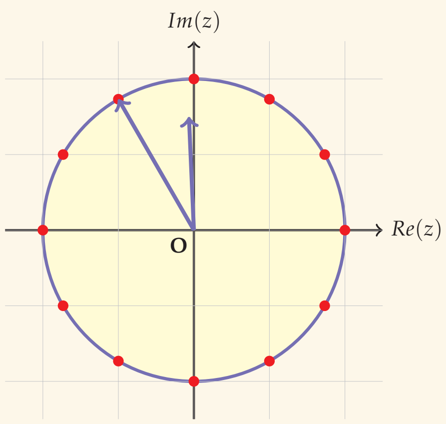
A) `https://www.youtube.com/watch?v=j54DUGvTAZw`

B) `https://www.geogebra.org/m/X6nD64w2`

E Treinando com o vestibular

1. (FGV-2005)

Admita que o centro do plano complexo Argand-Gauss coincida com o centro de um relógio de ponteiros, como indica a figura:



Se o ponteiro dos minutos tem 2 unidades de comprimento, às 11h55 sua ponta estará sobre o número complexo:

(a) $-1+\sqrt{3}i$
(b) $1+\sqrt{3}i$
(c) $1-\sqrt{3}i$
(d) $\sqrt{3}-i$
(e) $\sqrt{3}+i$

2. (FGV-2010) Sendo i a unidade imaginária, então $(1+i)^{20} - (1-i)^{20}$ é igual a:

(a) -1024
(b) $-1024i$
(c) 0
(d) 1024
(e) $1024i$

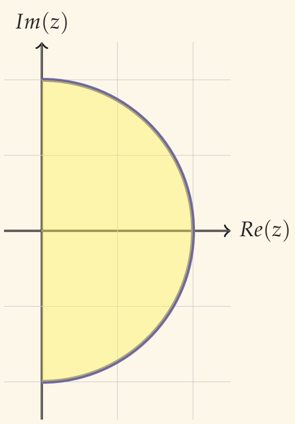
3. (Uneb-1998) Se i é a unidade imaginária, então $i^{25}+i^{39}-i^{108}+i\cdot i^{50}$ é igual a:

(a) $-1-i$
(b) $-1+i$
(c) $1-i$
(d) $1+i$
(e) 0

4. (Ufam-2011) Sejam os números complexos $z=\dfrac{5-12i}{5+12i}$ e $w=1-i$. Então o valor da expressão $|z|+w^8$ será:

(a) 13
(b) 15
(c) 17
(d) 19
(e) 21

5. (Vunesp-2006) A figura representa, no plano complexo, um semicírculo de centro na origem e raio 1. Indique por $Re(z)$, $Im(z)$ e $|z|$ a parte real, a parte imaginária e o módulo de um número complexo $z=x+yi$, respectivamente, onde i indica a unidade imaginária. A única alternativa que contém as condições que descrevem totalmente o subconjunto do plano que representa a região sombreada, incluindo sua fronteira, é:

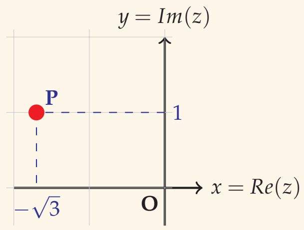


(a) $Re(z)\geq 0$, $Im(z)\geq 0$ e $|z|\leq 1$
(b) $Re(z)\geq 0$, $Im(z)\leq 0$ e $|z|\leq 1$
(c) $Re(z)\geq 0$ e $|z|\geq 1$
(d) $Im(z)\geq 0$ e $|z|\geq 1$
(e) $Re(z)\geq 0$ e $|z|\leq 1$

6. (UEL-1995) Seja o número complexo $z=\dfrac{2\cdot i^{342}}{(1+i)^2}$. A imagem de z no plano complexo é um ponto do plano que pertence ao:

(a) eixo imaginário
(b) eixo real
(c) 2º quadrante
(d) 3º quadrante
(e) 4º quadrante

7. (Fatec-1997) Na figura a seguir, o ponto P é o afixo do número complexo $z=x+yi$ no plano de Argand-Gauss.



É verdade que:

(a) o argumento principal de z é $\dfrac{5\pi}{6}$

(b) a parte imaginária de z é i

(c) o conjugado de z é $\sqrt{3}+i$

(d) a parte real de z é 1

(e) o módulo de z é 4

8. (UNIUBE-2001) Sejam a e b dois números naturais tais que $3 \leq a \leq 20$ e $21 \leq b \leq 40$. Se i é a unidade imaginária dos complexos, ou seja, $i^2 = -1$, então o número de pares ordenados distintos (a, b) tais que $i(i^a + i^b) = 2$ é igual a:

(a) 25

(b) 84

(c) 21

(d) 42

9. (Mack-2004) As representações gráficas dos complexos $1+i$, $(1+i)^2$, -1 e $(1-i)^2$, com $i^2 = -1$, são vértices de um polígono de área:

(a) 2

(b) 1

(c) $\dfrac{3}{2}$

(d) 3

(e) 4

10. (Fuvest-1978) O número complexo $z \neq 0$ e seu inverso $\dfrac{1}{z}$ têm o mesmo módulo. Conclui-se que:

(a) z e $\dfrac{1}{z}$ são conjugados

(b) $z + \dfrac{1}{z} = 1$

(c) Este módulo é 2

(d) z e $\dfrac{1}{z}$ são reais

(e) $z^2 = 1$

11. (ITA-1996) O valor da potência $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$ é:

(a) $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$

(b) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

(c) $\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$

(d) $(\sqrt{2})^{93}i$

(e) $(\sqrt{2})^{93}+i$

12. (UEL-1996) Seja o número complexo $z = x + yi$, no qual x, $y \in \mathbb{R}$. Se $z \cdot (1-i) = (1+i)^2$, então:

(a) $x = y$

(b) $x - y = 2$

(c) $xy = 1$

(d) $x + y = 0$

(e) $y = 2x$

13. (Vunesp-2006) Se a, b, c são números inteiros positivos tais que $c = (a+bi)^2 - 14i$, em que $i^2 = -1$, o valor de c é:

(a) 48

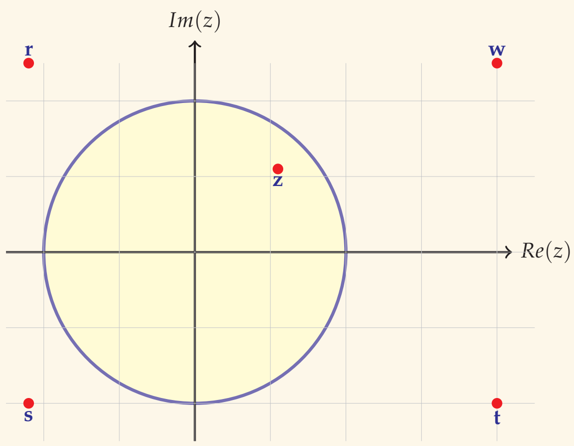
(b) 36

(c) 24

(d) 14

(e) 7

14. (Cesgranrio-1994) A figura mostra, no plano complexo, o círculo de centro na origem e raio 1, e as imagens de cinco números complexos. O complexo $\dfrac{1}{z}$ é igual a:



(a) z

(b) w

(c) r

(d) s

(e) t

15. (UNIFESP-2007) Quatro números complexos representam, no plano complexo, vértices de um paralelogramo. Três dos números são $z_1 = -3-3i$, $z_2 = 1$ e $z_3 = -1 + \left(\dfrac{5}{2}\right)i$. O quarto número tem as partes real e imaginária positivas. Esse número é:

(a) $2+3i$

(b) $3+\left(\dfrac{11}{2}\right)i$

(c) $3+5i$

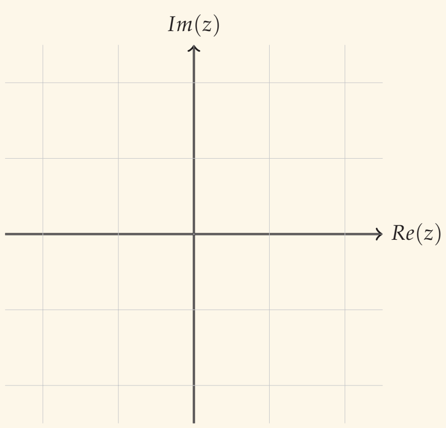
(d) $2+\left(\dfrac{11}{2}\right)i$

(e) $4+5i$

16. (Vunesp-2007) Considere os números complexos $w = 4 + 2i$ e $z = 3a + 4ai$, onde a é um número real positivo e i indica a unidade imaginária. Se, em centímetros, a altura de um triângulo é $|z|$ e a base é a parte real de $z \cdot w$, determine a de modo que a área do triângulo seja 90 cm^2.

17. (Fuvest-2000) (a) Determine todas as soluções, no campo complexo, da equação $\bar{z} = iz^2$, onde i é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$ e $\bar{z}$ é o conjugado de z.

(b) Represente essas soluções no plano complexo, usando o sistema de coordenadas desenhado abaixo.



18. (Fuvest-1997) Sendo i a unidade imaginária ($i^2 = -1$) pergunta-se: quantos números reais a existem para os quais $(a+i)^4$ é um número real?

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

(e) infinitos

19. (UFScar-2005) Sejam i a unidade imaginária e a_n o n-ésimo termo de uma progressão geométrica com $a_2 = 2a_1$. Se a_1 é um número ímpar, então $i^{a_1} + i^{a_2} + i^{a_3} + ... + i^{a_{10}}$ é igual a:

(a) $9i$ ou $-9i$

(b) $-9+i$ ou $-9-i$

(c) $9+i$ ou $9-i$

(d) $8+i$ ou $8-i$

(e) $7+i$ ou $7-i$

20. (Fuvest-1998) Dentre os números complexos $z = a + bi$, não-nulos, que têm argumento igual a $\frac{\pi}{4}$, aquele cuja representação geométrica está sobre a parábola $y = x^2$ é:

(a) $1+i$

(b) $1-i$

(c) $-1+i$

(d) $\sqrt{2}+2i$

(e) $-\sqrt{2}+2i$

21. (Unicamp-1997) Um triângulo equilátero, inscrito em uma circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o ponto do plano associado ao número complexo $\sqrt{3}+i$

(a) Que números complexos estão associados aos outros dois vértices do mesmo triângulo? Faça a figura desse triângulo.

(b) Qual a medida do lado desse triângulo?

Referências

A) Exercícios retirados do site "*Passei direto*" no *link* `https://www.passeidireto.com/arquivo/33864961/complexo`