

$$m = Y_i + b \cdot K_2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

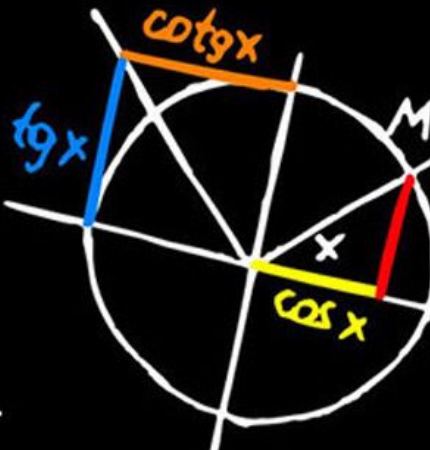
$$-y_i)^2 \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lambda x - y + z = 1$$

$$x + \lambda y + z = \lambda$$

$$x + y + \lambda z = \lambda^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1} + n}{\sqrt[3]{3n^2 + 2n - 1}}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$


# Análise de Livro Italiano

## Grupo C

Cristofer Esaobas Tejeda Obregon RA: 229598

Henrique Wakimoto de Almeida RA: 169663

Leonardo Borges RA: 140744

Leonardo Mingone Zan RA: 172030

Pedro Henrique Cardoso Neves RA: 156977

$$f(x) = 2^{-x} + 1, \epsilon = 0.005$$

$$e^2 - xyz = e; A[0; e; 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2x}{x^2 + 2y^2} = 2 \quad z = \frac{1}{x}$$

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0; \gamma \neq 0$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$y' - \frac{\sqrt{y}}{2} = 0;$$

$$16y^2 - 4z > 0$$

$$(x, 1+x^2, 1)$$

$$\lambda_2 = i\sqrt{14}$$

$$-A_2 = ?$$

Copyright © 2019 John Smith

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*First printing, March 2019*

The background of the top section is a dark grey/black surface covered with various mathematical symbols and diagrams drawn in white and colored chalk. These include triangles with side labels A, B, C, angles like 90° and x, geometric shapes like rectangles and squares, and algebraic expressions such as  $2 \times 2 = 4$ .

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Metodologia</b> .....	<b>5</b>
2.1	Estrutura e apresentação	5
2.2	Abordagem pedagógica	5
2.3	Exercícios	5
<b>3</b>	<b>Sistema educacional italiano</b> .....	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Análise</b> .....	<b>8</b>
<b>4.1</b>	<b>Estrutura e apresentação</b>	<b>8</b>
4.1.1	Organização global do livro .....	8
4.1.2	Recursos de destaque .....	9
4.1.3	Outros recursos não-textuais .....	10
<b>4.2</b>	<b>Abordagem pedagógica</b>	<b>11</b>
4.2.1	Uso de exemplos .....	11
<b>4.3</b>	<b>Exercícios</b>	<b>13</b>
4.3.1	Organização .....	13
4.3.2	Diagnóstico .....	13
<b>5</b>	<b>Conclusão</b> .....	<b>16</b>
	<b>Bibliografia</b> .....	<b>17</b>

# 1. Introdução

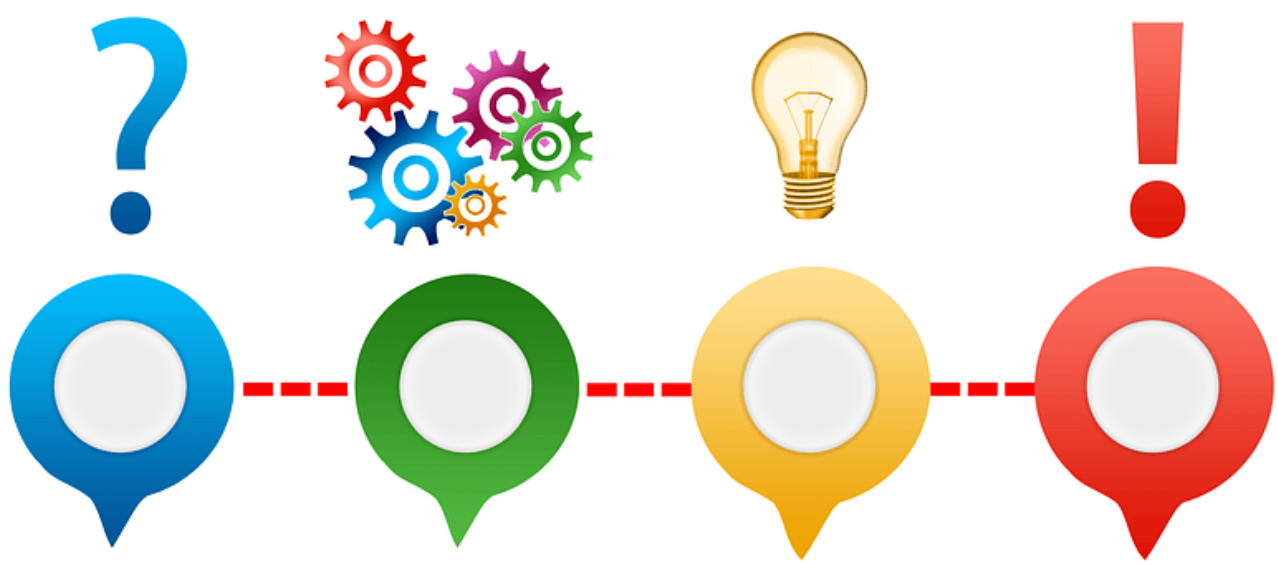
Neste trabalho nos propomos a analisar o livro didático italiano *Nuova matematica: a colori*, de Leonardo Sasso<sup>1</sup>, com o objetivo de capturar boas práticas didáticas e pensar em como essas práticas poderiam ser utilizadas no Brasil.

O capítulo focalizado por nossa análise é o capítulo 4, *Disequazioni goniometriche*, em português, Inequações trigonométricas, e logo de imediato já podemos apontar que esse assunto não é comumente trabalhado nas escolas brasileiras, uma vez que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e então, pela Base Nacional Comum Curricular não pontuam esse conceito como obrigatório.

Analisamos então as quatro seções do capítulo, a saber, *disequazioni goniometriche elementari o a esse riconducibili, disequazioni lineari in seno e coseno, disequazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno e esercizi*, este último subdividido em *sintesi, conoscenze e abilità, riepilogo e approfondimento e verso l'esame* com base na metodologia apresentada a seguir. Além disso, fizemos uma análise global do livro e capítulo em questão, na qual verificamos se a forma como os capítulos do livro e os tópicos do capítulo 4 são organizados pode ser adaptada para o contexto do livro didático brasileiro.

---

<sup>1</sup>Leonardo Sasso é um famoso autor de livros didáticos italiano (<https://deascuola.it/docenti/secondaria-di-secondo-grado/siti-sasso/>)



## 2. Metodologia

A metodologia a seguir é baseada em trabalhos anteriores da disciplina e de acordo com as ocorrências encontradas no livro didático. Assim, todos os tópicos possuem pelo menos uma ocorrência.

Para cada tópico foram feitas as perguntas: é diferente do Brasil? Poderia ser utilizado no Brasil? Caso a resposta de ambas as perguntas fossem "sim", então a ocorrência estaria no presente relatório. Caso contrário, ela não se encontra aqui.

### 2.1 Estrutura e apresentação

1. *Organização global do livro*: Neste tópico, analisaremos a forma que o livro é organizado globalmente, ainda em relação com os seus pré-requisitos e conteúdos subsequentes.
2. *Recursos de destaque*: Analisaremos, para este, de que forma são utilizados os recursos de destaque presentes no livro.
3. *Outros recursos não-textuais*: Analisa o uso de recursos como gráficos, tabelas, entre outros.

### 2.2 Abordagem pedagógica

1. *Uso de exemplos*: Neste tópico, analisamos a forma que os exemplos foram utilizados, principalmente em sua forma processual, mas também estrutural.

### 2.3 Exercícios

1. *Organização*: Analisa de que forma os exercícios foram organizados no capítulo.
2. *Diagnóstico*: Indica tipos diferenciados de exercícios que auxiliam no diagnóstico do aluno quanto ao conteúdo.





### 3. Sistema educacional italiano

A Constituição italiana assegura o direito a todo cidadão à educação gratuita e, assim como ocorre no Brasil, seu sistema de educação também abrange as escolas privadas. A diferença é que as escolas privadas geralmente são para as pessoas que precisam de algum tipo de acompanhamento especial e não são, necessariamente, alternativas a uma educação de qualidade, já encontradas nos colégios públicos italianos. O sistema de educação italiano<sup>1</sup> é dividido em:

*Scuola dell'infanzia*: etapa não obrigatória para crianças de 3 a 6 anos de idade; é equivalente à educação pré escolar no Brasil.

- **Primeiro Ciclo**: etapa obrigatória equivalente ao Ensino Fundamental no Brasil, tem duração de 8 anos e é dividida em:
  - *Scuola Primaria*: compreende os alunos de 6 a 11 anos de idade. As disciplinas oferecidas nesta etapa são: italiano, inglês, história, geografia, matemática, ciências, música, arte e imagem, educação física e tecnologia.
  - *Scuola Secondaria di Primo Grado*: dos 11 aos 14 anos de idade. As disciplinas oferecidas nesta etapa são as mesmas da etapa anterior, com a inclusão da disciplina Segunda Língua Comunitária (que pode ser substituída por mais horas de Inglês e, para os imigrantes, pelo Italiano) e Cidadania e Constituição. Além disso, o ensino religioso (católico) é optativo, podendo o aluno escolher entre algum assunto alternativo, estudo individual assistido ou alterar os horários de entrada e saída. Apesar de gratuito, é previsto uma contribuição de cerca de 30 euros mensais para o almoço das crianças. Ao final do *Primo Ciclo*, os alunos devem fazer uma prova, o "*Esame di Stato*" e, aos 15 anos, decidir por um percurso escolar.
- **Segundo Ciclo**: etapa obrigatória da educação italiana, equivalente ao Ensino Médio das

<sup>1</sup>As informações sobre o sistema educacional italiano foram colhidos dos seguintes sites:

ITALIA. Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca. **Sistema educativo di istruzione e formazione**. Disponível em: <<https://www.miur.gov.it/sistema-educativo-di-istruzione-e-formazione>>. Acessado em 16/05/2019.

PESQUISA ITALIANA. **Você sabe como funciona o sistema de ensino na Itália?** Disponível em: <<https://pesquisaitaliana.com.br/sistema-de-ensino-na-italia/>>. Acessado em 16/05/2019.

UNIVERSIA. **Estrutura do sistema educacional**. Disponível em: <<http://www.universia.com.br/estudar-exterior/italia/sistema-educativo/estrutura-do-sistema-educacional/2389>>. Acessado em 16/05/2019.

escolas brasileiras, estruturada em dois tipos de percursos:

- *Scuola Secondaria di Secondo Grado*: tem duração de 5 anos e é destinado aos estudantes que completaram ao Primeiro Ciclo. Nesta etapa, as escolas são organizadas em *Istituti Tecnici* e *Istituti Professionali* para estudantes de 15 a 19 anos.

#### ***Istituti Tecnici***

Combinando formação teórica e prática, tem duração de cinco anos, sendo os dois primeiros anos comuns ao ramo escolhido e os demais é uma especialização, incluindo estágio. Permite acesso ao ensino superior.

- \* Setor econômico: administração, finança e marketing; turismo;
- \* Setor tecnológico: mecânica, mecatrônica e energia; transporte e logística; eletrônica e engenharia elétrica; informática e telecomunicação; gráfica e comunicação; química, materiais e biotecnologia; moda; agricultura, agronegócios e agroindústria; construção, meio ambiente e território.

#### ***Istituti Professionali***

Oferece uma educação bastante prática e especializada e tem duração de três anos.

- \* Setor de serviços: agricultura e desenvolvimento rural; serviço social e de saúde; serviços de viticultura e hotelaria; serviços comerciais.
- \* Setor industrial e artesanato: produção industrial e artesanal; manutenção e assistência técnica.

#### ***Liceo***

Há ainda uma terceira opção voltada a uma formação teórica nas áreas de artes, ciências humanas ou ciências. Tem duração de cinco anos e permite acesso ao ensino superior.

Ao final da *Scuola Secondaria di Secondo Grado*, todos os alunos devem fazer uma prova, "*Esame di stato*".

A educação superior (etapa não obrigatória) é dividida em três tipos de percursos:

- Cursos oferecidos pelas universidades (Università);
- Cursos oferecidos pelas instituições de Arte, Música e Dança (AFAM);
- Cursos de educação profissionalizante oferecidos pelas Instituições Técnicas Superiores (ITS)

A respeito da cultura escolar italiana, segundo o relato de Luca Guala <sup>2</sup>, italiano baseado em Cagliari, cuja filha está cursando o 2º ano do *Primo Ciclo*, a escola dá muita ênfase em aprender coisas, ou seja, como ele diz "*If Italians are creative it's because Italy, not because school*". Luca também aponta que a escola exige muita tarefa de casa, e sua filha despense de 2 a 4 horas diariamente com tarefas. Por seu relato também notamos que os estudantes italianos vão à escola seis dias por semana, das 8h30min às 13h30min. Além disso, os professores raramente usam computadores em suas aulas e nunca fazem experimentos nas aulas de Ciências, que é sempre deixado para o aluno fazer em casa; também não fazem visitas a lugares históricos. Mas Luca também elogia o ensino de música, no qual sua filha não apenas aprende a tocar um instrumento e a ler partituras, como também desenvolve paixão pela música; os programas de estudo são desafiadores e difíceis, porém bem feitos, escritos numa linguagem compreensível e muitas vezes interessantes; a escola tem boa comunicação com os pais e resolvem os problemas através do diálogo; e incluem as pessoas com deficiência e imigrantes.

Assim, podemos concluir que o sistema de educação italiano oferece maior liberdade de escolha para os seus estudantes, que focalizam desde cedo, aos 15 anos, a carreira que desejam seguir. Um modelo parecido está sendo implementado no Brasil, com a diferença de que a escolha será realizada a partir do segundo ano do Ensino Médio.

<sup>2</sup>Este relato está disponível em: <[https://www.quora.com/What-do-people-think-of-the-Italian-education-system-Why?redirected\\_qid=16221101](https://www.quora.com/What-do-people-think-of-the-Italian-education-system-Why?redirected_qid=16221101)>. Acessado em 16/05/2019.



A análise será feita a partir da metodologia, encontrando boas práticas no livro didático italiano que poderiam ser utilizadas aqui no Brasil. Ela está dividida por tópicos da metodologia, com as ocorrências indicadas e suas explicações, respectivamente.

## 4.1 Estrutura e apresentação

### 4.1.1 Organização global do livro

O livro trás consigo uma divisão adequada dos assuntos, seguindo uma sequência lógica sobre trigonometria, definições sobre equação, função e desigualdade, utilizando a explicação da utilização do seno, cosseno e tangente como suas aplicações na forma trigonométrica, em triângulos retângulos e triângulos quaisquer e seguindo nessa linha de conexão o livro fecha com um capítulo de números complexos mostrando uma progressão com os assuntos que envolvem o arco trigonométrico de uma forma coerente onde o aluno captar os conceitos abordados no livro.

A estrutura do livro é feita de forma sequencial, na qual menciona o tema no capítulo e os subtemas são definidos de forma clara e objetiva no modo de expor e explicar com a utilização de métodos para solucionar os problemas ditos nos temas, e no final do capítulo é feito um resumo e muitos exercícios de vários níveis que tem como objetivo de aprimorar o raciocínio dos conceitos.

A organização dos capítulos é semelhante feita no Brasil com duas grandes ressalvas positivas, a primeira o capítulo sobre números complexos não é visto de forma sequencial com trigonometria nos livros brasileiros, geralmente é um capítulo separado em outro livro e não no mesmo livro, e a segunda é que os livros no ensino médio não abordam um capítulo inteiro sobre rotação e cônicas e sim uma observação dentro de um tópico ou um subtema dentro de um determinado capítulo, e aqui no livro italiano traz uma análise aprofundada sobre esses temas.

Em sua organização estrutural, o livro é iniciado com algo pouco visto nos livros didáticos daqui, que seria falar nas áreas da sociedade e que a matemática está inserida, é um tema bem relevante e que atrai a atenção do leitor.



### 4.1.2 Recursos de destaque

#### Quadros de atenção, observação e precisão

Um recurso de destaque interessante é a utilização das laterais das páginas com quadros de observações. As imagens abaixo mostram alguns exemplos ao longo do livro:

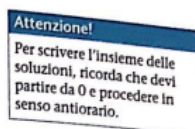


Figura 4.1: Quadro *attenzione*

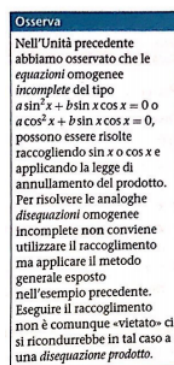


Figura 4.2: Quadro *osserva*

A utilização deste recurso é bem feita, organizada e ocupa um espaço no livro que estaria em branco, além de chamar atenção o espaço usado, assim é difícil de ser ignorado. Ainda, estes quadros trazem dicas e observações importantes para resolver exercícios ou entendimento do conteúdo. É interessante a utilização destes recursos no Brasil, com quadros de dicas, observações e cuidados, algo que é raramente visto nos livros didáticos brasileiros.

#### Resumo antes dos exercícios

Antes de iniciar de fato a seção de exercícios, o livro trás, em um quadro de destaque, um resumo da teoria exposta em cada subcapítulo, que é uma sequência de passos que devem ser realizados para fazer cada tipo de exercício. Esse resumo é chamado de *sintesi*.

Isso é algo não muito visto nos livros brasileiros, dado que, neste livro, os exercícios vem depois de toda teoria do capítulo, enquanto no Brasil, em geral, os exercícios são intercalados com as seções. Além disso, é interessante o uso para o aluno entender a resolução passo-a-passo dos exercícios, ajudando até em seu autodiagnóstico.

**SINTESI**

**Procedimenti risolutivi**

**Disequazioni goniometriche elementari**  
 Si possono risolvere secondo il seguente procedimento:

1. si individua un intervallo di ampiezza uguale al periodo della disequazione;
2. si risolve la disequazione in questo intervallo, utilizzando i grafici di opportune funzioni oppure la circonferenza goniometrica;
3. si completano le soluzioni su tutto l'asse reale tenendo conto della periodicità.

**Disequazioni lineari in seno e coseno**  
 Si possono risolvere utilizzando metodi analoghi a quelli visti per le equazioni lineari in seno e coseno. In particolare è consigliabile risolvere la disequazione secondo il *metodo grafico*. Per esempio, per risolvere la disequazione  $a \sin x + b \cos x + c > 0$  si può procedere così:

1. si pone  $\sin x = Y$  e  $\cos x = X$  e ci si riconduce al sistema:
 
$$\begin{cases} aY + bX + c > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$
2. le soluzioni della disequazione sono gli angoli i cui punti associati sulla circonferenza goniometrica sono le soluzioni di questo sistema.

**Disequazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno**  
 Si trasformano in disequazioni di secondo grado in tangente, dividendo i due membri per  $\cos^2 x$ , supponendo  $\cos^2 x \neq 0$ . Dopo aver risolto la disequazione ottenuta, occorre controllare se i valori esclusi, cioè  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , sono o meno soluzioni della disequazione originaria e, in caso affermativo, aggiungerli all'insieme delle soluzioni trovate.

**Disequazioni frazionarie e disequazioni prodotto**  
 Si possono risolvere secondo il seguente procedimento:

1. si individua in un intervallo di ampiezza uguale al periodo della disequazione;
2. si risolve la disequazione in questo intervallo, procedendo in modo del tutto analogo alle disequazioni algebriche (costruendo cioè la tabella dei segni);
3. si completano le soluzioni su tutto l'asse reale, tenendo conto del periodo della disequazione.

Figura 4.3: Resumo do conteúdo antes dos exercícios

### 4.1.3 Outros recursos não-textuais

#### Recursos gráficos em exercícios

Como o tema do capítulo é "Inequações trigonométricas", o texto traz os gráficos sempre de forma bastante pertinente para o entendimento dos exemplos resolvidos e chama a atenção para eles. Diferentemente dos gráficos usados nos livros nacionais, os gráficos do texto estrangeiro apresentam uma malha, que pode ajudar no seu entendimento. Além disso, a pertinência do uso dos gráficos traz um entendimento mais visual e palpável à matemática, sendo um recurso de extrema importância.

Ainda, o livro utiliza todos os recursos visuais necessários para clarear a resolução do problema, como o "varal" de resolução de inequações, que está presente em todos os exemplos em que é necessário.

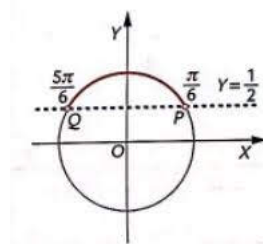


Figura 4.4: Uso da circunferência trigonométrica

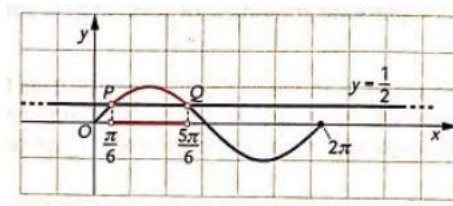


Figura 4.5: Uso do gráfico da função seno

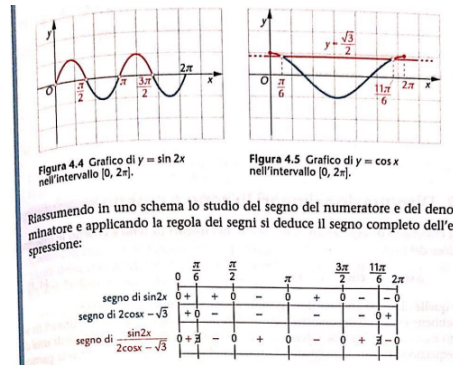


Figura 4.6: Uso de gráficos e do "varal" de sinais

## 4.2 Abordagem pedagógica

### 4.2.1 Uso de exemplos

#### Método de resolução de exemplos variado

Para o estudo das inequações trigonométricas, o texto traz um esquema de três passos que devem ser seguidos para se resolvê-las. Resumidamente, são os seguintes:

1. Escolher um intervalo igual ao período da função a ser estudada;
2. Resolver a inequação no intervalo escolhido;
3. Escrever o conjunto solução da inequação.

E para o passo 2 indica duas possibilidades para o método gráfico: a circunferência trigonométrica ou o gráfico das funções seno, cosseno e tangente.

O interessante aqui é, que além do livro apresentar os dois métodos de resolução, que usam ideias relativamente diferentes, ele resolve os exemplos seguintes com os dois métodos, isto é, um exemplo possui dois jeitos de se resolver. Isto é algo raramente visto no Brasil e tem utilidade imensa, pois mostra ao aluno que não existe um único método de resolução e a matemática é mais aberta que isso, além de abrir possibilidades para o aluno escolher qual método lhe convém mais.

**ESEMPIO** Disequazione del tipo  $\tan x \leq m$   
 Risolviamo la disequazione  $\tan x \leq \sqrt{3}$ .

• 1° metodo: utilizzando la circonferenza goniometrica

- La funzione tangente ha periodo  $\pi$ ; possiamo perciò risolvere preliminarmente la disequazione, per esempio, nell'intervallo  $[0, \pi]$ .
- Consideriamo la circonferenza goniometrica,  $X^2 + Y^2 = 1$ , e tracciamo la retta di equazione  $Y = \sqrt{3}X$ . Essa interseca l'arco della circonferenza goniometrica corrispondente all'intervallo  $[0, \pi]$  nel punto  $P$ , associato all'angolo di misura  $\frac{\pi}{3}$ .

Gli angoli che in  $[0, \pi]$  soddisfano la disequazione sono quelli il cui secondo lato interseca la retta di equazione  $X = 1$  in un punto avente ordinata minore o uguale a  $\sqrt{3}$ . Osservando la fig. 4.1, puoi renderti conto che questa condizione è verificata in corrispondenza degli angoli il cui punto associato appartiene a uno dei due archi colorati in rosso.

La disequazione, nell'intervallo  $[0, \pi]$ , è dunque soddisfatta per:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{\pi}{2} < x \leq \pi$$

Ricorda che la tangente non è definita per  $x = \frac{\pi}{2}$  quindi  $\frac{\pi}{2}$  è un punto che va escluso dalle soluzioni

Figura 4.1 Un angolo il cui punto associato appartiene all'arco  $AP$  interseca la retta  $X = 1$  in un punto di ordinata compresa tra 0 e  $\sqrt{3}$ . Un angolo il cui punto associato appartiene all'arco  $BC$  interseca la retta  $X = 1$  in un punto avente ordinata negativa (quindi minore di  $\sqrt{3}$ ).

- In base alla periodicità della tangente, possiamo concludere che in  $\mathbb{R}$  le soluzioni della disequazione sono:

$$k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \vee \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi$$

• 2° metodo: utilizzando il grafico di  $y = \tan x$

- Come nella risoluzione con l'ausilio della circonferenza goniometrica, risolviamo anzitutto la disequazione  $\tan x \leq \sqrt{3}$  nell'intervallo  $[0, \pi]$ .
- Tracciamo, nell'intervallo prescelto, il grafico di  $y = \tan x$  e quello della retta di equazione  $y = \sqrt{3}$ . Questa interseca il grafico di  $y = \tan x$  nel punto  $P$  la cui ascissa è la soluzione appartenente all'intervallo  $[0, \pi]$  dell'equazione  $\tan x = \sqrt{3}$ , dunque:

$$x_p = \frac{\pi}{3}$$

Le soluzioni della disequazione sono le ascisse dei punti appartenenti agli archi colorati in rosso, costituiti dai punti aventi ordinata minore o uguale a  $\sqrt{3}$ .

La disequazione, nell'intervallo  $[0, \pi]$ , è dunque soddisfatta per:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{\pi}{2} < x \leq \pi$$

Figura 4.7: Exemplo resolvido por dois métodos

### Identificação do método nos exemplos

Antes de começar a resolver cada exemplo, o autor coloca no título do exemplo o método pelo qual este será resolvido. A importância desta abordagem é mostrar ao aluno de que forma será resolvido o exercício e, posteriormente, nos exercícios, fica mais fácil de ser localizado em caso de dúvidas de resolução.

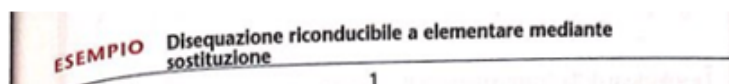


Figura 4.8: UTítulo de um dos exemplos do livro

### Utilização de passos tanto nos exemplos quanto nos exercícios resolvidos

Durante o procedimento para resolver o livro é realmente bastante claro no procedimento, inclusive, divide a resolução do problema em 3 passos fáceis, análise preliminar, substituição e, por último, retorno à variável original. As partes algébrica e operacional são completamente fáceis de acompanhar, pois o livro detalha completamente todos os passos e utiliza uma linguagem entendível para o público. Esta é uma abordagem nunca vista pelo grupo em livros brasileiros.

Risolviamo la disequazione  $\cos 4x \leq \frac{1}{2}$ .

- **Analisi preliminare**  
La disequazione proposta differisce dalle disequazioni elementari che abbiamo risolto negli esempi precedenti perché l'argomento della funzione goniometrica non è  $x$  bensì  $4x$ . Possiamo tuttavia ricondurci ai casi visti in precedenza ponendo  $4x = t$ .
- **Eseguiamo la sostituzione e risolviamo la disequazione che ne scaturisce**  
Eseguito la sostituzione  $4x = t$ , siamo ricondotti alla disequazione elementare:  
$$\cos t \leq \frac{1}{2}$$
Riferendoci per esempio alla circonferenza goniometrica, si trova che questa disequazione è soddisfatta per:  
$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq t \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$
- **Ritorniamo alla variabile  $x$**   
Poiché avevamo posto  $t = 4x$ , la disequazione iniziale sarà soddisfatta in corrispondenza dei valori di  $x$  per cui:  
$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 4x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$
da cui: 
$$\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$$
 Dividendo per 4

Figura 4.9: Utilização de passos no exemplo

## 4.3 Exercícios

### 4.3.1 Organização

A seção de exercícios é separada em três grandes listas de exercícios. A primeira delas é separada em subseções para cada um dos três subcapítulos. A segunda delas é uma lista de resumo sobre inequações trigonométricas e a terceira é uma lista de revisão e aprofundamento.

### 4.3.2 Diagnóstico

#### Exercícios resolvidos

Vale notar que durante a lista, por vezes aparecem dois tipos diferentes de exercícios: *esercizio svolto* (os exercícios resolvidos) e *esercizio guidato* (os exercícios guiados, que fornecem um passo a passo para resolvê-lo). Nos livros brasileiros isto é extremamente raro, e é interessante pois guia o aluno nos métodos de resolução e o ajuda a entender o conteúdo.

57 ESERCIZIO SVOLTO

Risolviamo la disequazione:  $\sin 2x + 2 \cos x \leq 0$ .

$\sin 2x + 2 \cos x \leq 0$  Disequazione data

$2 \sin x \cos x + 2 \cos x \leq 0$  Applicando la formula di duplicazione del seno

$2 \cos x (\sin x + 1) \leq 0$  Raccogliendo 2 cos x

Osserviamo ora che il fattore  $\sin x + 1$  è sempre positivo o nullo poiché, per come è definito il seno di un angolo, risulta  $\sin x \geq -1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .  
Ne discende che l'ultima disequazione scritta equivale a:

$\cos x \leq 0 \vee \sin x = -1$  Dobbiamo includere tra le soluzioni i valori di  $x$  per cui si annulla il fattore  $\sin x + 1$  perché nella disequazione compare il simbolo  $\leq$

In definitiva, dunque:  
$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$
 Chiusura che questa scrittura include anche i valori di  $x$  per cui  $\sin x = -1$

Figura 4.10: *Esercizio svolto*



**ESERCIZIO GUIDATA**

Risolvi il sistema: 
$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} \leq 0 \\ 2 \sin x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

- Per risolvere un sistema di disequazioni goniometriche devi anzitutto risolvere il sistema in un intervallo di ampiezza uguale al periodo del sistema, cioè al minimo comune multiplo dei periodi delle due disequazioni del sistema. Poi puoi completare le soluzioni su tutto l'asse reale tenendo conto della periodicità. Eccetto che per questo fatto, il metodo risolutivo è del tutto analogo a quello dei sistemi algebrici.
- Il periodo del sistema è  $4\pi$  (perché?), quindi puoi risolvere il sistema, per esempio, nell'intervallo  $[0, 4\pi]$ .
- Risolvi nell'intervallo  $[0, 4\pi]$  la prima disequazione del sistema (a tale scopo può essere utile rappresentare la funzione  $y = \sin \frac{x}{2}$  in questo intervallo):  

$$\sin \frac{x}{2} \leq 0 \Rightarrow \dots \leq x \leq \dots$$
- Risolvi nell'intervallo  $[0, 4\pi]$  la seconda disequazione del sistema (a tale scopo può essere utile rappresentare la funzione  $y = 2 \sin x - 1$  in questo intervallo):  

$$2 \sin x - 1 \geq 0 \Rightarrow \dots \leq x \leq \dots \vee \dots \leq x \leq \dots$$
- Rappresenta in uno schema gli insiemi delle soluzioni delle due disequazioni e deduci la loro intersezione. Da esso potrai dedurre che in  $[0, 4\pi]$  il sistema è soddisfatto per:  

$$\dots \leq x \leq \dots$$
- Tenendo conto, infine, del periodo del sistema,  $4\pi$ , puoi scrivere le soluzioni su tutto l'asse reale; se hai svolto i calcoli correttamente troverai che le soluzioni sono:  

$$\frac{33\pi}{6} + 4k\pi \leq x \leq \frac{17\pi}{6} + 4k\pi$$

Figura 4.11: *Esercizio guidato***Prova di verifica**

Após os exercícios do terceiro subcapítulo existe uma *prova di verifica* (prova de verificação). Essa prova funciona como um teste para saber se o aluno deve prosseguir para a próxima lista de exercícios. São dez exercícios e ele deve acertar no mínimo seis deles para prosseguir.

Este tipo de abordagem é útil por dois motivos: testar os conhecimentos do aluno e verificar se ele está habilitado a passar para o próximo "nível" de exercício.

**PROVA DI VERIFICA 1**

**Disequazioni goniometriche**

Risolvi le seguenti disequazioni.

- 1  $2 \cos^2 \frac{x}{2} \geq 3 \cos x + 1 + \sqrt{2}$
- 2  $2 \tan x + 2\sqrt{3} \leq \sqrt{3} - \tan x$
- 3  $\sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$
- 4  $1 - 2 \cos^2 x - \sin x \geq 0$
- 5  $\sin x - 2 \cos x - 1 < 0$
- 6  $1 + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x \geq 0$   
nell'intervallo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- 7 Traccia i grafici delle funzioni  $y = 3 \tan x$  e  $y = -2 \cos x$  nell'intervallo  $[0, 2\pi]$  e determina le coordinate dei loro punti di intersezione. Deduci dal grafico le soluzioni della disequazione  $3 \tan x \leq -2 \cos x$  in tale intervallo.
- 8 Determina per quali valori di  $k$  la disequazione  $\sin x \cos x \geq k$  è verificata per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .
- 9 Traccia il grafico della funzione  

$$y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$$
nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ , dopo aver scritto la sua equazione nella forma  $y = A \sin(x + \varphi)$ . Determina quindi le coordinate dei suoi punti di intersezione con la retta di equazione  $y = 1$  e risolvi graficamente la disequazione  $\sin x - \sqrt{3} \cos x \leq 1$ .
- 10 Fornisci l'esempio:
  - a. di una disequazione della forma  $\sin x \geq m$  che non è soddisfatta da alcun  $x \in \mathbb{R}$ ;
  - b. di una disequazione della forma  $\cos x \leq m$  che è soddisfatta se e solo se  $x = \pi + 2k\pi$ ;
  - c. di una disequazione della forma  $\tan x < m$  che ha tra le sue soluzioni  $\frac{\pi}{3}$ .

1 PUNTO PER OGNI ESERCIZIO RISOLTO CORRETTAMENTE;  
SUFFICIENZA: ALMENO 6 PUNTI  
Le soluzioni sono in fondo al volume

Figura 4.12: *Prova di verifica***Exercícios de resumo**

Após a *prova di verifica*, inicia-se uma segunda lista de exercícios, chamada de *esercizi riassuntivi sulle disequazioni goniometriche* (exercícios de resumo sobre inequações trigonométricas).

Nessa lista, foi possível observar que existem exercícios de todos os subcapítulos anteriores, além de exercícios envolvendo outras ferramentas matemáticas, como módulo, raízes e sistemas, que ainda não haviam sido utilizadas.

Foi possível observar também que dois exercícios dessa lista possuíam o destaque rápido logo após o número e antes do exercício, como é possível observar na figura abaixo.

149 Rápido  $\frac{\cos x - 2}{\sin x - 3} \geq 0$   $[\forall x \in \mathbb{R}]$

150 Rápido  $\frac{\sin x + 2}{(\cos x - 1)^2} \geq 0$   $[\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi\}]$

Figura 4.13: Exercícios rápidos

O interessante aqui é que esta lista junta todos os tipos de exercício que aborda no capítulo, além de mesclar com outras ferramentas, como dito. Este tipo de lista é rara no Brasil.

### Exercícios em inglês

Mais para o final da lista, são feitos exercícios com enunciados em Inglês. Os enunciados são simples, e é útil para que o aluno tenha contato com uma segunda língua, ainda sendo uma interdisciplinaridade com o inglês.

**Esercizi in inglese**

264 **Solve math in English** True or false?

a. The only solution to  $\sin x \leq -1$  in  $[0, 2\pi]$  is  $\frac{3\pi}{2}$ .

b.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c. The solution set to  $4 \sin x \geq 2$  is:  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d. The inequality  $\sin x + \cos x > 0$  is equivalent to  $\tan x + 1 > 0$ .

e. The only solution to  $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  in  $[0, \frac{\pi}{2}]$  is  $\frac{\pi}{4}$ .

265 **Solve math in English**  $\cos x \leq -\frac{1}{2}$  over the interval  $[-\pi, \pi]$ .  $[-\pi \leq x \leq -\frac{2\pi}{3} \vee \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi]$

266 **Solve math in English** Graph both functions in  $[0, 2\pi]$  using the same set of axes:

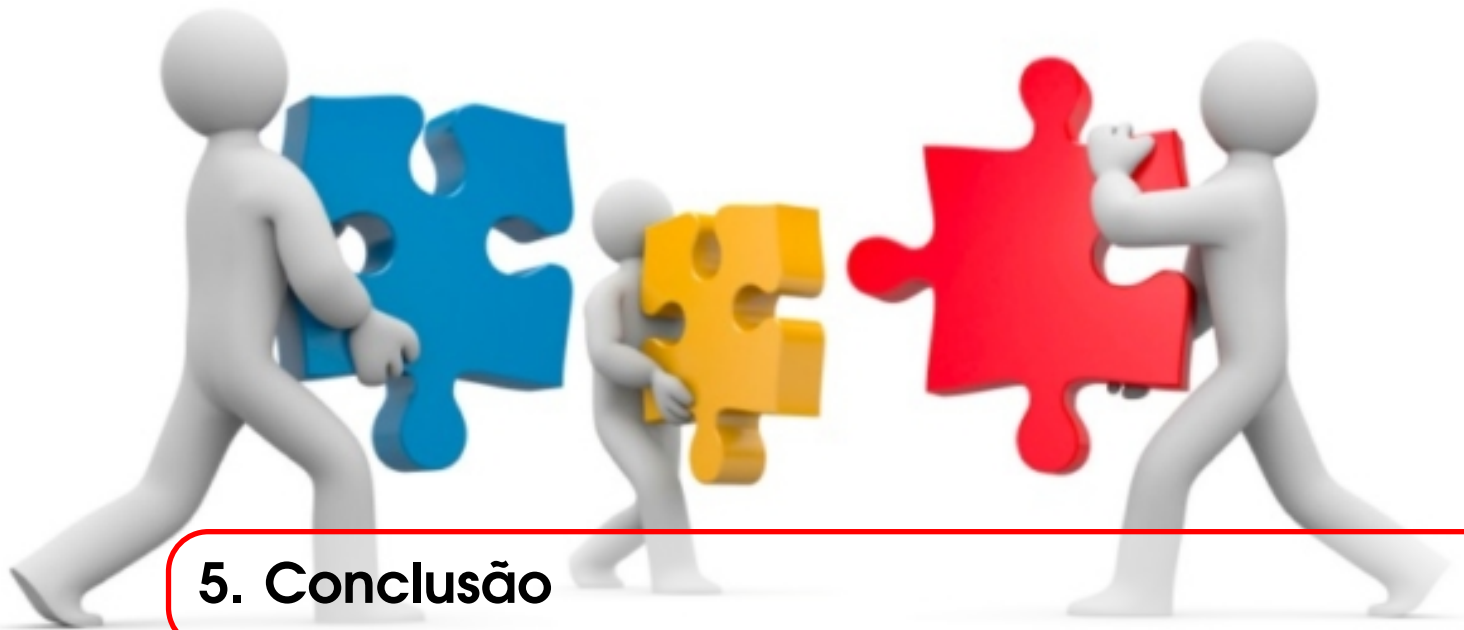
a.  $f(x) = 2 \sin x$

b.  $g(x) = \tan x$

then solve the inequality  $f(x) \geq g(x)$  using the graphs.

$[2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi \vee \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi]$

Figura 4.14: Exercícios em inglês



## 5. Conclusão

A partir da pesquisa quanto ao sistema educacional italiano e à análise do capítulo do livro em questão, o grupo pôde perceber que a diferença da educação italiana e da educação brasileira é grande. Em primeiro lugar, o livro é diferente em toda sua estrutura, abordagens, uso de exemplos, entre outros, todos prontamente justificados culturalmente. Pode-se comparar a abordagem deste livro a um livro de ensino superior brasileiro, de matérias mais básicas como Cálculo 1 ou Geometria Analítica.

Outra diferença foi o fato do conteúdo "Inequações Trigonométricas" não ser especificado na BNCC, a Base Nacional Comum Curricular. Desta forma, o assunto não é obrigatoriamente tratado nas escolas brasileiras, se tornando um conteúdo ímpar. Assim, inseri-lo seria interessante como desafio para os alunos após estudo da trigonometria e de inequações, não sendo necessário incluir o assunto na base. Além de desafio, seria um tema interessante e diferente para uma olimpíada, por exemplo.

Dadas as diferenças entre os livros, o grupo se propôs a coletar divergências úteis para os livros didáticos brasileiros. Assim, apesar de poucas, coletamos algumas importantes que fariam grande diferença, como o resumo antecedendo uma lista de exercícios, os métodos de resolução de exemplos variados, utilização de passos em exemplos e exercícios resolvidos e os tipos diferentes de exercícios apresentados.



## Bibliografia

1. Sasso, Leonardo. Nuova Matematica: a colori, 2012.
2. ITALIA. Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca. Sistema educativo di istruzione e formazione. Disponível em: <<https://www.miur.gov.it/sistema-educativo-di-istruzione-e-formazione>>. Acessado em 16/05/2019.
3. PESQUISA ITALIANA. Você sabe como funciona o sistema de ensino na Itália? Disponível em: <<https://pesquisaitaliana.com.br/sistema-de-ensino-na-italia/>>. Acessado em 16/05/2019.
4. UNIVERSIA. Estrutura do sistema educacional. Disponível em: <<http://www.universia.com.br/estudar-exterior/italia/sistema-educativo/estrutura-do-sistema-educacional/2389>>. Acessado em 16/05/2019.
5. What do people think of the Italian education system? Why? <<https://www.quora.com/What-do-people-think-of-the-Italian-education-system-Why?>>. Acessado em 16/05/2019.