

Jukka Kangasaho • Jukka Mäkinen • Juha Oikkonen •  
Johannes Paasonen • Maija Salmela • Jorma Tahvanainen

# Pitkä matematiikka

## Analyyttinen geometria

**Tarefa 3**



1060019

516.3  
An13  
IMECC

Pitkä Matematiikka (Finlandês)

**GRUPO B**



Ayla Carvalho	RA 164519
Juan Carlos	RA 176725
Lucas Galdino	RA 151197
Mario Cesar Fonseca	RA 981771
Oswaldo Neto	RA 094259

MA 225 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

PROF<sup>o</sup>. DR. HENRIQUE N. SÁ EARP

Trabalho feito como requisito para conclusão da disciplina MA225, compreendendo a tarefa 3 pelo grupo B e seus integrantes listados acima. Aborda a análise do livro *Pitkä Matematiikka 4* - 2015 (Finlandês).

*IMECC - Unicamp*

*Mai 2019*



## Sumário

I	<b>Parte Um</b>	
1	<b>Introdução</b> .....	6
1.1	O Trabalho	6
1.2	A Finlândia	7
1.3	O Ensino na Finlândia	7
2	<b>Metodologia</b> .....	11
2.1	Estrutura (E)	11
2.2	Abordagem Pedagógica (A)	11
2.3	Exercícios (Ex)	12
II	<b>Parte Dois</b>	
3	<b>Análise</b> .....	14
3.1	Sumário de Conteúdos	14
3.2	Estrutura	16
3.2.1	Resumo Estrutura .....	21
3.3	Abordagem Pedagógica	21
3.3.1	Resumo Abordagem .....	24
3.4	Exercícios	24
3.4.1	Progressão dos Exercícios .....	27
3.4.2	Resumo Exercícios .....	28

3.5	Páginas 177 - 187	28
4	Considerações Finais .....	29



# Parte Um

<b>1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>6</b>
1.1	O Trabalho	
1.2	A Finlândia	
1.3	O Ensino na Finlândia	
<b>2</b>	<b>Metodologia</b> .....	<b>11</b>
2.1	Estrutura (E)	
2.2	Abordagem Pedagógica (A)	
2.3	Exercícios (Ex)	



# 1. Introdução

## 1.1 O Trabalho

Neste trabalho nos propomos a analisar um livro estrangeiro de forma a tratar com um olhar crítico as maneiras como a outra cultura pensa, apresenta, organiza, desenvolve e expõe a matemática. Tendo em mente buscar o que poderia ser adaptado em um contexto de livros brasileiros. No caso, analisamos o livro Finlandês *Pitkä Matematiikka 4 - Analyttinen Geometria* (Matemática Longa - Geometria Analítica), da Editora Sanoma Pro.

Para a análise, consideramos algumas seções do livro, que é destinado ao Ensino Médio, e faz parte do currículo Avançado para a Matemática. As seções consideradas abordam os seguintes conteúdos: Coordenadas, Distâncias na Reta (Módulo/Valor Absoluto), Equações de Igualdade e Desigualdade, Sistemas de Coordenadas (Plano Cartesiano e distâncias no plano), Equação da reta, Equação da circunferência, Equação  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ , Inclinação da reta, conteúdos estes compreendidos entre as páginas 7 a 55, além de trechos de uma seção de *Recapitulação dos conteúdos estudados*, dos quais consideramos os trechos que compreendiam os tópicos anteriormente analisados (Valor Absoluto, Equações de Igualdade e Desigualdade, Distância no Plano e Equação do Círculo), seção compreendida entre as páginas 151 a 156, bem como uma seção de Exercícios (Repetindo Tarefas), da página 170.

Tendo em mente que o sistema de ensino Finlandês consiste em uma realidade ainda muito distante daquela com a qual nos deparamos no Brasil, estamos interessados em extrair o máximo que possa vir a ser aproveitado para os livros e outros materiais didáticos brasileiros, de forma a agregar à qualidade e eficiência dos nossos materiais observando as boas práticas e os padrões utilizados pelo livro Finlandês.

Não pretendemos com esta análise fazer uma análise horizontal (comparar o livro estrangeiro com livros nacionais para saber qual é o melhor) nem fazer uma análise vertical (decidir se o livro estrangeiro é bom ou ruim), ou seja, não estamos interessados nem em julgar o mérito do livro estrangeiro e nem em dizer se ele é melhor ou pior que os livros com os quais conhecemos no

Brasil, pretendemos apenas identificar e pontuar as características e padrões que se mostrariam úteis para possíveis adaptações ao que já conhecemos no contexto brasileiro, adaptações essas que seriam para melhor.

Para esta análise, identificamos as competências e habilidades encontradas no livro estrangeiro e tentamos com isso fazer uma tabela que os relacionasse com o que temos disponível tanto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3] quanto na Matriz de Avaliação Processual do Estado de São Paulo [5] para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, respectivamente, de forma a identificar se as possíveis boas práticas e abordagens pedagógicas a serem destacadas no livro Finlandês já estejam previstas na nossa realidade, e, caso não estejam previstas, onde poderiam ser incluídas, se for o caso. Além disso, fizemos um estudo em especial sobre a Finlândia e sobre seu sistema de ensino, de forma a entender melhor a realidade do país e o contexto ao qual o livro está inserido, além, é claro, dos padrões e da abordagem que ele utiliza.

## 1.2 A Finlândia

A Finlândia é um país nórdico situado no norte da Europa, com um total de 5.524.574 habitantes, possuindo uma densidade populacional média de 17 habitantes por quilômetro quadrado, sendo, portanto, o terceiro país mais escassamente povoado da Europa. Possui um IDH de 0,920, sendo o 15º maior do mundo, considerado muito alto.

Em 2018, a Finlândia foi apontada pelas Nações Unidas como o país mais feliz do mundo, segundo o Relatório Anual da Felicidade. O estudo, realizado a pedido da ONU pelo Instituto de Pesquisa da Felicidade [2], leva em conta variáveis como o produto interno bruto (PIB), as ajudas sociais, a expectativa de vida, a liberdade, a generosidade, a ausência de corrupção e a qualidade de vida dos imigrantes. O Brasil aparece na 28ª colocação.

Isso aponta para o fato de que o país apresenta ótimos números em relação à educação, qualidade de vida, ausência de corrupção e PIB. Como exemplo, nos últimos cinco anos do relatório da organização Transparência Internacional sobre o Índice de Percepção da Corrupção, o país não saiu do pódio. [1]

Outro dado interessante é que o relatório Global Gender Gap [6] (“Diferenças globais entre gêneros”) classificou a Finlândia como o segundo país mais igualitário do mundo em 2016. E a revista britânica *The Economist* definiu a Finlândia como o terceiro melhor país do mundo para ser uma mãe que trabalha fora.

Em termos políticos, 42% dos membros do Parlamento são mulheres, uma porcentagem superada por apenas oito países.

Nitidamente, a realidade finlandesa é muito diferente da que vivenciamos no Brasil e, por isso, com tantos índices tão positivos, podemos aprender muitas coisas com esse país, principalmente ao que diz respeito à educação que já foi considerada como a melhor do mundo.

## 1.3 O Ensino na Finlândia

A Finlândia é um dos melhores países do mundo em relação à qualidade da alfabetização, do ensino de aritmética e de ciências.

A educação neste país é gratuita, tem acessibilidade universal e é totalmente financiada pela arrecadação de impostos. Trata-se do quarto país do mundo que mais dinheiro investe em educação por pessoa.

A educação é considerada pelo governo como um dos direitos fundamentais de todos os cidadãos e deve seu sucesso em parte a isto e em parte à grande inclusão de toda a população, independentemente de sexo, idade, nacionalidade, situação econômica ou necessidades especiais [7] .

Apresenta-se como obrigatória dos 7 aos 16 anos. O material escolar é gratuito para os estudantes e os municípios garantem o transporte àqueles que vivem a mais de cinco quilômetros da instituição escolar que frequentam [4].

Os docentes finlandeses são profissionais altamente valorizados e são considerados como um dos pilares fundamentais do sistema educacional. O título de professor confere muito prestígio e os docentes são uma figura de grande autoridade dentro das instituições de ensino e em toda a sociedade.

A docência baseia-se em um sistema de ensino personalizado. A partir dos primeiros anos, intervém-se no processo de aprendizagem de cada aluno, enfatizando a superação de fraquezas e dificuldades que possam existir. Isto garante que os potenciais problemas sejam diagnosticados a tempo e que os diferentes ritmos de aprendizado de cada criança sejam respeitados.

O sistema de avaliação evita a pontuação por meio de números, desestimulando assim a competitividade sem sentido entre os alunos. Não são realizados exames nem são concedidas qualificações até que as crianças estejam no 5º ano, com 11 anos de idade. Os pais recebem relatórios de natureza descritiva a respeito do rendimento do aluno.

Este sistema de ensino fomenta a estreita participação ativa dos pais. As famílias consideram a educação fundamental e a complementam com atividades culturais.

O Ministério da Educação é encarregado da política e gestão de educação em todo o sistema.

## Níveis de Ensino

O sistema de ensino finlandês está dividido em três etapas de educação formal:

### 1. Ensino Fundamental

É obrigatório e comum a todos, com duração de nove anos (dos 7 aos 16).

### 2. Ensino Médio

Tem um enfoque acadêmico (visando ao ingresso na universidade) ou profissional (visando ao mercado de trabalho). Dura de três a quatro anos e não é obrigatório.



### 3. Ensino Superior

Ministrado nas universidades (com enfoque predominantemente acadêmico) e escolas politécnicas (com enfoque prático). Na universidade, são realizados cursos de graduação (três ou quatro anos) e, na sequência, pós-graduações (de dois a três anos).

É comum que as crianças comecem a educação pré-escolar dois anos antes do ingresso no sistema educacional.

Também vale ressaltar que aqueles que não queiram estudar o ensino médio devem fazer um ano extra de ensino fundamental.

#### **Ensino Secundário Superior Profissional**

O governo decide sobre os objetivos gerais do ensino e treinamento vocacional, a estrutura das qualificações e os temas centrais. O Ministério da Educação e Cultura decide sobre os estudos e seu escopo.

O sistema de qualificação do ensino e formação profissional consiste no requisito de qualificação nacional, nos currículos aprovados localmente por cada fornecedor de educação e nos planos de estudo pessoais dos estudantes.

O Conselho Nacional de Educação da Finlândia decide sobre a exigência de qualificação nacional para cada qualificação vocacional, determinando a composição de estudos e objetivos, conteúdos centrais e critérios de avaliação para os módulos de estudo. Também inclui disposições sobre avaliação de estudantes, aconselhamento de estudantes, aprendizagem no local de trabalho, educação especial e treinamento, arranjos educacionais para imigrantes e treinamento de aprendizes. O conteúdo dos currículos locais também é definido no requisito de qualificação nacional.

Os requisitos nacionais de qualificação são elaborados em cooperação com organizações de empregadores, sindicatos, o Sindicato da Educação e sindicatos estudantis. As Comissões Nacionais de Educação e Formação, os órgãos tripartidos locais e outros representantes da vida profissional participam no trabalho curricular como consultores e conselheiros.

#### **Matemática e Ciências Naturais**

##### Objetivos da instrução

Estudos em matemática e ciências naturais aprofundam o conhecimento incluído no programa de ensino básico. Em particular a ênfase é colocada no domínio de conceitos e vocabulário de cada disciplina. Em termos de conhecimento, o domínio dos conteúdos essenciais na educação básica.

O programa é assegurado e os alunos estão preparados para as técnicas de aprendizagem necessárias para estudar matemática e ciências naturais em uma escola secundária superior geral. Durante os estudos, o escopo apropriado do plano de estudos a ser concluído em matemática, física e química é avaliado do ponto de vista do aluno.

## Ambiente de Aprendizagem e Métodos de Trabalho

A consciência linguística relacionada aos métodos de trabalho usados em matemática refere-se a explicar as instruções e fala usadas no ensino e análise de problemas verbais. Na química e física, isso se refere a praticar a definição de conceitos, escrever relatórios e outros gêneros típicos desses assuntos (por exemplo, textos em livros didáticos). Em geografia e biologia, os métodos linguisticamente conscientes incluem exercícios para definir conceitos, interpretar mapas, diagramas e gráficos e produzindo os próprios textos sob orientação.

## Avaliação

O nível e as capacidades iniciais do aluno são considerados na avaliação. Vários métodos de avaliação são empregados. Os alunos são apresentados aos métodos de avaliação normalmente usado em escolas secundárias gerais, tais como testes de curso. Os cursos são avaliados na escala de aprovação / reprovação.

## Objetivos

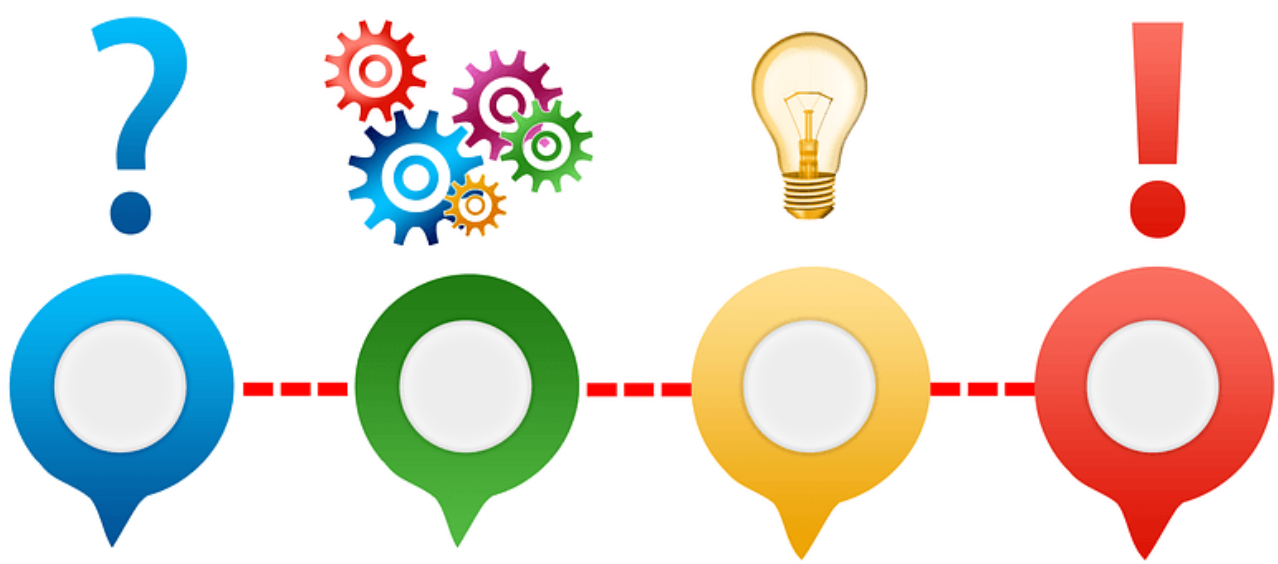
Objetivos do curso são para os alunos:

- Fortalecerem as habilidades matemáticas adquiridas na educação básica e revisar conceitos-chave usado nas matérias;
- Ser capaz de selecionar um programa no ensino secundário superior geral que corresponda ao seu nível de habilidade.

## Conteúdo do Núcleo

- números e cálculos, álgebra, funções, geometria, probabilidade e estatística;
- movimento e força, vibrações e ondas, eletricidade de calor, estruturas naturais;
- ar e água, matérias-primas e produção, natureza e sociedade;
- habilidades em estudar a natureza.

Portanto, não foi encontrado muitas especificações com detalhamento do conteúdo matemático que deve ser estudado e abordado de um modo geral, e não específico de cada vocação que o aluno pode escolher fazer. Para efeito de comparação, resolvemos utilizar o Matriz de Avaliação Processual (MAP) [5] para tentarmos nos aproximar ao máximo possível da BNCC[3] ao que temos na Finlândia.



## 2. Metodologia

### 2.1 Estrutura (E)

Considerando Layout, Sistematização, Recursos Textuais e Não-Textuais do livro Finlandês analisado, quais boas práticas, padrões e recursos encontrados que poderiam ser adaptados a livros brasileiros?

1. **Layout [EL]**  
Olhar o layout do livro (estética); tem um padrão? Parece eficaz e eficiente? Seria adequado no contexto brasileiro?
2. **Sistematização [ES]**  
Olhar a organização do livro; como os conteúdos são apresentados? Há recorrência? Poderia ser utilizado por brasileiros?
3. **Recursos não-textuais [ERN]**  
Olhar as imagens e os recursos não-textuais que o livro apresenta; São úteis? Seguem um padrão aparente? Poderiam ser usados por materiais brasileiros?
4. **Recursos textuais [ERT]**  
Olhar o que está escrito no texto; O uso da língua e o vocabulário é adequado? Por quê? Seria adequado ao nosso contexto?

### 2.2 Abordagem Pedagógica (A)

Considerando a abordagem pedagógica, a forma como apresenta e desenvolve os conteúdos, a teoria e as aplicações, quais boas práticas, recursos e padrões encontrados que podem ser adaptados para a didática brasileira?

1. **Teoria [AT]**  
Olhar a teoria, definições e demonstrações utilizadas; são claras? São objetivas? Quais habilidades contempla (onde está na BNCC)? Se não está presente, é necessário? Onde entraria (ano)? Tal conteúdo seria realmente necessário/agregaria no contexto do Brasil?
2. **Aplicações [AA]**  
Olhar exemplos e problemas apresentados; atendem a proposta aparente dos próprios exem-

plos e/ou do livro? Tem um objetivo claro? Apresenta resoluções dos exemplos e problemas? Apresenta as respostas? Há algum que seria interessante apresentar/usar em nosso contexto?

### 2.3 Exercícios (Ex)

De acordo com os exercícios do livro finlandês, o que podemos aprender com eles para um livro brasileiro?

#### 1. **Organização [ExO]**

Os exercícios apresentados pelo livro finlandês são bem organizados? Poderíamos aplicar a organização proposta em livros brasileiros? De que maneira a organização proposta pelo livro finlandês poderia auxiliar na aprendizagem de um conteúdo da BNCC?

#### 2. **Eficiência [ExE]**

Os exercícios apresentados são eficientes? Desenvolve as habilidades e competências necessárias para a aprendizagem daquele aluno de acordo com a BNCC?

#### 3. **Conexão [ExC]**

Os exercícios estão bem conectados com os conteúdos abordados? Apresentam conexão entre si (progressão)?



# Parte Dois

<b>3</b>	<b>Análise .....</b>	<b>14</b>
3.1	Sumário de Conteúdos	
3.2	Estrutura	
3.3	Abordagem Pedagógica	
3.4	Exercícios	
3.5	Páginas 177 - 187	
<b>4</b>	<b>Considerações Finais .....</b>	<b>29</b>



## 3. Análise

### 3.1 Sumário de Conteúdos

O livro tem 18 capítulos de conteúdos e 1 capítulo de revisão, como segue imagem:

Sisälllys		Conteúdo	
Koordinaatio	7	Sistema de Coordenadas	7
Etäisyys lukusuoralla	11	Distância até a linha de leitura	11
Itseisarvoyhtälöt ja -epäyhtälöt	21	Equações e Equações de Igualdade	21
Tason suoralmainen koordinaatio	28	Sistema de coordenadas retangulares de nível	28
Pistejoukon yhtälö	36	Equação do Conjunto de Pontos	36
Ympyrän yhtälö	41	Equação do círculo	41
Yhtälö $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	48	Equação $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	48
Suoran kulmakertoimen laskeminen	56	Inclinação Direta	56
Kulmakertoimen laskeminen	67	Calculando a inclinação	67
Suoran yhtälö	73	Equação Direta	73
Yhtälö $Ax + By + C = 0$	84	Equação $Ax + By + C = 0$	84
Lineaarinen yhtälöryhmä	91	Grupo de Equações Lineares	91
Ympyrän leikkauspisteitä	103	Intersecções do círculo	103
Suorien kohtisuorus	110	Perpendicularidade de linhas retas	110
Pisteen etäisyys suorasta	122	Distância do ponto de reta	122
Paraabeli	132	Parábola	132
Kompleksitasan yhtälöitä	140	Equações de Nível Complexas	140
Ellipsi ja hyperbeli	146	Elipse e Hyper	146
Kertaus	151	Repetir	151
Kertaustehtäviä	170	Repetir tarefas	170
Tehtäväsarjoja	174	Conjuntos de Tarefas	174
Tehtävien vastaukset	177	Respostas para tarefas	177
Hakemisto	212	Índice Remissivo	212

Figura 3.1: Conteúdos do Livro

Esses conteúdos estão dispostos entre os anos da BNCC [3] e a Matriz de Avaliação Processual de SP [5] como segue a tabela <sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Os espaços em branco são habilidades e conteúdos não encontrado na BNCC ou na MAP-SP do Ensino Fundamental

Tabela de Conteúdos Analisados			
PITKÄ MATEMATIIKKA	BNCC		MAP-SP
Conteúdo	Habilidade	Ano	Ano
Coordenadas	(EF05MA14) (EF05MA15) (EF07MA15)	5° & 7°	5° - 1° bimestre & 8° - 3° bimestre
Distância entre pontos na reta (Módulo)	(EF09MA15)	9°	4° - 1° bimestre & 9° - 3° bimestre
Equações e Equações de Desigualdade (Inequações)	(EF07MA14) (EF08MA08)	7° & 8°	7° - 4° bimestre & 8° - 2° bimestre
Plano Retangular, o sistema de coordenadas	(EF05MA14) (EF05MA15)	5°	5° - 1° bimestre & 8° - 3° bimestre
Equação de retas	(EF06MA16) (EF09MA15)	6° e 9°	7° - 2° bimestre & 8° - 1° bimestre
Equação de circunferência			
Equação $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$			
Inclinação da Reta			3° - 1° bimestre & 9° - 4° bimestre
Kertaus - Revisão			
Módulo			4° - 1° bimestre & 9° - 3° bimestre
Equações de Igualdade e Desigualdade	(EF07MA14) (EF08MA08)	7° & 8°	7° - 4° bimestre & 8° - 2° bimestre
Distância no Plano	(EF09MA15)	9°	
Equação da Circunferência			

### 3.2 Estrutura

[EL] O Livro apresenta de maneira similar a capa, contracapa, primeiras páginas com título, dados referentes ao livro e um texto introdutório direcionado ao leitor com os objetivos e sugestões para utilizar o livro;

Após isso, vem o sumário que também é presente nos livros nacionais;

Depois é introduzido um resumo mais específico da linha a seguir (sistematização do conteúdo) e o tema abordado (Geometria Analítica);

[EL] Na parte voltada ao leitor (página 3), em que se apresenta o livro e seus objetivos, que consistem em possibilitar que o aluno se torne hábil matematicamente considerando a teoria e a prática. Na sequência, o autor descreve a forma com que os conteúdos serão abordados, sempre apresentados por meio de exercícios e/ou exemplos como motivação para só então formalizar os conceitos envolvidos. Por fim, o autor apresenta as duas séries de exercícios disponíveis no livro, sendo a primeira voltada para a compreensão e fixação à qual ele chama de fundamental, onde a maioria dos exercícios reflete os exemplos já apresentados, enquanto a segunda série de exercícios consiste em atividades tanto mais básicas quanto mais exigentes que atendam às necessidades do conteúdo.

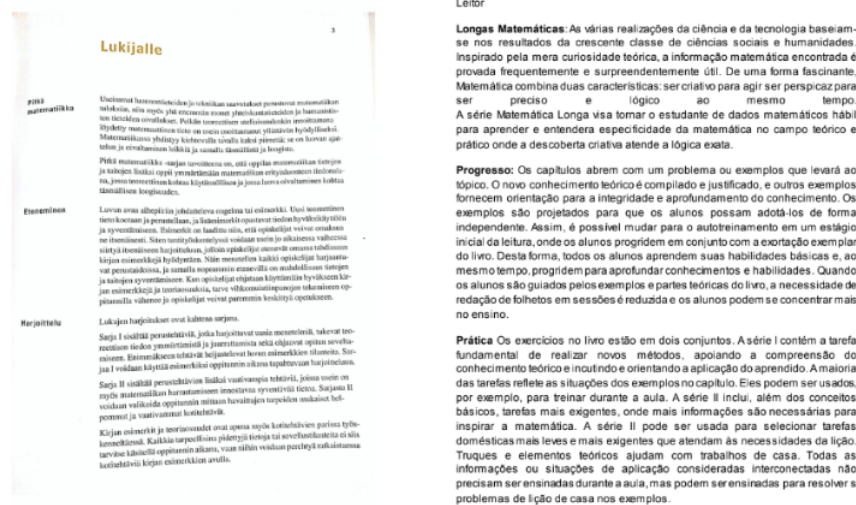


Figura 3.2: Página 3

Na página seguinte, o autor cita os conteúdos que serão abordados em geometria analítica e apresenta ainda uma tabela com as horas a serem gastas em atividades com cada conteúdo que será estudado (a proposta consiste em 28h de atividades).

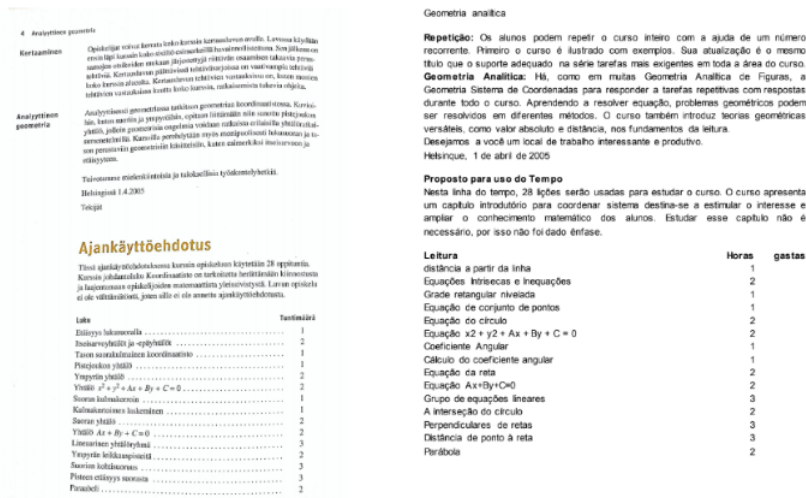


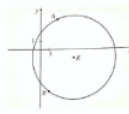
Figura 3.3: Página 4

[EL] O livro expõe o conteúdo sempre utilizando um recuo da margem esquerda, que se por sua vez é bem destacada na cor dourada e fica reservada a expor o texto sobre o que está sendo apresentado. Maneira simples e bem organizada para definir onde começa e termina um problema ou uma solução e uma resposta, por exemplo. Esse padrão é muito eficaz para se procurar um capítulo ou algo dentro dele ou um conteúdo específico, sendo um padrão de layout bem simples, mas muito bem estruturado e utilizado, a qual seria muito útil ao contexto brasileiro, para não poluir demais um livro e ficar difícil de encontrar o que se está procurando.

**Ympyrän yhtälö**

**Ongelma**

Ympyrän keskipiste on  $A(4, -1)$  ja säde 5.  
 a) Erikoisvaikeus: onko  $A(2, 3,5)$  ja  $A(1, -5)$  ympyrällä, ympyrän sisällä tai ympyrän ulkopuolella?  
 b) Etsi se keskipiste  $P(x, y)$  ympyrän keskipisteen  $K$  kanssa, josta  $P(x, y)$  on ympyrällä?

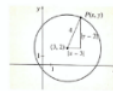


**JOHDANTOESIMERKKI 1**

Ympyrän keskipiste on  $(3, 2)$  ja säde 4. Määritä ympyrän yhtälö.

**Ratkaisu**

Piste  $P(x, y)$  on ympyrällä, jos ja vain jos pisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä  $(3, 2)$  on 4.



Piste  $P(x, y)$  etäisyys keskipisteestä  $(3, 2)$  on  $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$ .  $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 4$  siksi  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ .

Sis piste  $P(x, y)$  on ympyrällä, jos ja vain jos  $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 4$ .

## Conector de Círculo

Problema O centro do círculo é  $K(4, -1)$  e cabeça 5.  
 a) Os pontos  $A(2; 3,5)$  e  $B(1, -5)$  estão no círculo, no lado do círculo ou fora do círculo?  
 b) Expresse a distância do ponto  $P(x, y)$  do ponto médio  $K$ . Como o ponto  $P(x, y)$  está no círculo?

## EXEMPLO INTRODUTÓRIO 1

O centro do círculo é  $(3, 2)$  e a ligação é 4. Faça um círculo Ponto de Solução  $P(x, y)$  está em um círculo se e somente se o ponto no centro do círculo  $(3, 2)$  for 4

A distância do ponto  $P(x, y)$  a partir do ponto médio  $(3, 2)$  é

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

$$= \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

$$= 4 \text{ se } (x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

Então o ponto  $P(x, y)$  é yinpyri se e somente se  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ .

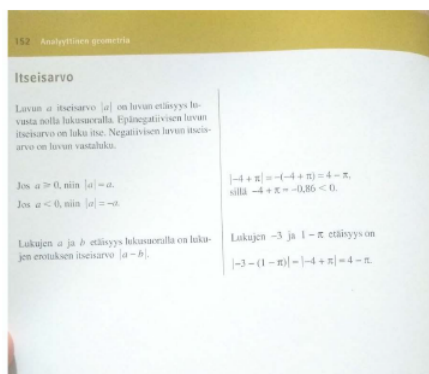
Figura 3.4: Página 41

Acima, um exemplo de Layout de uma das seções de conteúdo (Equação da Circunferência). Abaixo da faixa dourada superior em que se destaca o conteúdo temos um problema (Ongelma), que levanta questões para estimular o pensamento e dar exemplos de como a teoria pode aparecer. Na faixa dourada no centro da página, destaca-se que se trata de um exemplo introdutório (Johdantoesimerkki 1), com a resolução (Ratkaisu) logo abaixo. Conteúdos dispostos de forma simplificada e bem organizada, o que facilita a localização de conteúdos ao longo do livro.

[EL] Já na seção KERTAUS (RECAPITULANDO) do livro, como o próprio nome já sugere, o autor pretende retomar todos os conteúdos abordados ao longo do capítulo, por meio de uma síntese da teoria além de apresentar e explorar métodos de resolução e manipulações matemáticas por meio de exemplos. Há uma breve introdução à seção (página 151), onde o autor apresenta os objetivos da mesma, de forma bem sucinta e objetiva. A seguir, são apresentados os conteúdos (em média uma página por conteúdo), com os principais resultados e fórmulas do lado esquerdo da página, brevemente explicados, além de exemplos do lado direito da página. A linguagem é bem direta mas mesmo assim os exemplos são muito bem detalhados, passo a passo. Esta seção é bem fiel ao seu objetivo de complementar o desenvolvimento de competências e habilidades estudadas previamente, e a objetividade quanto a exposição dos diversos conteúdos revisados facilita a fixação e melhor compreensão das teorias e métodos de resolução estudados.

Os padrões de apresentação e exposição tanto nas seções de conteúdos quanto na de revisão poderiam ser facilmente adotados à livros brasileiros, bem como a linguagem objetiva e sucinta adotada, que são totalmente voltadas à fixação e compreensão das teorias.





### Valor absoluto

O valor absoluto de  $|a|$  é a distância de zero até a linha de leitura. O valor absoluto de um número não negativo é o próprio número. O valor absoluto de um número negativo é o valor do contador de números.

Se  $a \geq 0$  então  $|a| = a$ .

Se  $a < 0$  então  $|a| = -a$ .

A distância dos números  $a$  e  $b$  na reta é o valor absoluto da diferença de números  $|a - b|$ .

$|-4 + \pi| = -(-4 + \pi) = 4 - \pi$   
para  $-4 + \pi = -0,86 < 0$ .

A distância entre  $-3$  e  $1 - \pi$  é  $|-3 - (1 - \pi)| = |-4 + \pi| = 4 - \pi$ .

Figura 3.5: Página 152

Exemplo de Layout (figura acima) da seção de Recapitulação, em que o lado esquerdo é reservado à teoria enquanto o lado direito reservado a exemplo. Há também a faixa dourada superior para destacar o conteúdo revisado.

Além disso, há uma faixa dourada no topo da página que a diferencia das demais (faixa similar às que são utilizadas quando inicia-se um novo tópico, porém mais estreita nesta parte de recapitulação). Este padrão é eficiente e poderia ser aplicado facilmente a livros brasileiros, já que demanda apenas uma escolha editorial. A faixa dourada superior facilita a localização desta seção no livro, e o fato de incluir teoria e prática (por meio dos exemplos) lado a lado e na mesma página enriquecem bastante o material, já que facilita a fixação de conceitos, fórmulas e estratégias de resolução (reforçando habilidades e competências), utilizando pouco espaço e de forma muito bem apresentada, onde não há qualquer tipo de poluição pelo padrão de layout adotado.

Tais padrões podem se mostrar muito úteis considerando o contexto brasileiro, já que contribuem para não poluir demais um livro e de forma que fique fácil de se localizar quando folheando o material.

[ES] É muito interessante como o livro não começa despejando o conteúdo, mas sim, com um problema, utilizando uma linguagem acessível e sucinta, de forma a estimular que o aluno comece a pensar sobre o assunto, para que depois ele venha dar uma definição para aquilo que o aluno já tenha, a essa altura, algo em mente.


O livro apresenta uma divisão entre problemas e exemplos. Os problemas são para motivar o aluno dentro daquilo que ele vai ver durante a seção corrente (acredito que o professor deva resolver em sala com os alunos, já que esses não apresentam solução no livro) e os exemplos são aqueles que ele faz a resolução passo a passo, sendo portanto bem detalhados durante a resolução, o que possibilita enorme clareza e conexão para quando a definição é formalizada e apresentada, já que o aluno já tenha ideias de como e onde pode utilizá-la.

O problema ao início do capítulo ou de uma seção específica, de forma a motivar e iniciar o aluno ao conteúdo que ainda será explanado seria de grande valia considerando o contexto brasileiro, que, muitas vezes, despeja o conteúdo sem ao menos motivar o aluno para o aprendizado daquilo de alguma maneira, não havendo, em geral, uma construção do conhecimento como é feito no livro finlandês.

**Etäisyys lukusuoralla** 11

**ongelma 1** Anna esimerkkejä luvusta, joiden etäisyys luvusta nollla lukusuoralla on yhtä suuri kuin a) luku itse b) luvun vastaluku.

Tärkein esimerkki yksitellettiesta koordinaatistosta on lukusuora.



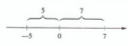
Jokaisista lukusuoran pisteistä vastaa reaaliluku, ja jokaisista reaalilukua vastaa lukusuoran piste.

**Itseisarvon määrittelmä**

Luvun *a* itseisarvo on luvun etäisyys luvusta nollla lukusuoralla.

Luvun *a* itseisarvo merkitään  $|a|$ .

Esimerkiksi luvun 7 itseisarvo on luku 7 itse eli  $|7| = 7$ .  
Luvun  $-5$  itseisarvo on luvun  $-5$  vastaluku 5 eli  $|-5| = 5$ .



Distância na linha de leitura

**Problema 1**  
Dê exemplos de números cuja distância de zero à linha de leitura é igual a a) o próprio número b) o número do número. O exemplo mais importante de um sistema de coordenadas unidimensional é a linha de leitura.

----->

Cada ponto de leitura corresponde ao número real e cada número real corresponde ao ponto da linha de leitura.

**Definição de Valor Próprio**  
O valor absoluto de um número é a distância de um capítulo de um zero a uma linha de leitura.  
O valor absoluto de *a* é  $|a|$ .  
Por exemplo, o valor absoluto do número 7 é o número 7 em si, ou seja,  $|7| = 7$ . O valor absoluto de  $-5$  é o número 5, isto é,  $|-5| = 5$ .

----->

Figura 3.6: Página 11

Exemplo de como é feita apresentação a um conteúdo por meio de problema e posterior definição com a devida explicação. No caso, o problema consiste em dar exemplo de número cujo módulo seja ele mesmo e outro número cujo módulo desconsidere o sinal do mesmo para então apresentar o módulo de um número real como a sua distância à origem.

[ERN] Em cada parte de módulo, há a presença de um gráfico, mesmo que simples, para exemplificar aquilo que foi apresentado. Ou seja, é utilizado mais de um recurso para que o conceito seja formalizado, facilitando assim, a compreensão do aluno. Há também o uso de alguns recursos gráficos que são utilizados para destacar definições e resultados.

[ERN] Nos problemas sempre é apresentado uma figura para facilitar a visualização e no resto, temos vários gráficos para auxiliar na demonstração e na proposta do exercício.

[ERT] A linguagem e o vocabulário utilizados para explicar os conceitos é muito simples, mas não deixa de ser adequada, matematicamente falando, além de se mostrarem bastante objetivos. Mesmo que o vocabulário apresentado seja simplificado ele não peca na demonstração de teoremas ou quando resolvendo algum exercício. Isso pode ser um grande ganho para se aprender a fazer no nosso contexto brasileiro, já que, muitas vezes, há a utilização de uma linguagem que se mostra demasiadamente distante do aluno e que acaba não fazendo sentido para ele. Outras vezes, na tentativa de simplificar, acaba-se errando no rigor matemático.

Portanto, a simplicidade adotada no uso da linguagem e a clareza com que são apresentados os conteúdos no livro Finlandês facilitam bastante a compreensão do texto e apesar de haver pouca contextualização, diferencia-se também neste ponto de livros brasileiros, que por muitas vezes utilizam de contextos impossíveis ou falsas contextualizados para apresentar conteúdos, distanciando ainda mais da realidade dos estudantes.

Tal uso da língua simplificada e objetiva, considerando a linguagem e a tradução do livro Finlandês, pode se mostrar como uma boa prática que poderia ser incorporada em livros de brasileiros devido à clareza e eficiência proporcionadas pelo estilo adotado.

### 3.2.1 Resumo Estrutura

Os modelos de Layout utilizados pelo livro Finlandês se mostram eficientes tanto para a localização dos conteúdos ao longo do material bem como quanto à clareza possibilitada pela simplicidade adotada, além disso, a não poluição decorrente dos modelos de Layout adotados também contribuem bastante para a fluidez dos conteúdos. Tais modelos poderiam ser aplicados facilmente a livros brasileiros, já que demanda apenas uma escolha editorial, e, aliado à utilização quase inexistente de recursos visuais e gráficos fazem com que a leitura seja bem direta e objetiva, sem qualquer poluição visual e de forma a destacar aquilo que se mostra como mais importante para os conteúdos trabalhados, como fórmulas e resultados. Além disso, as faixas douradas no superior das páginas facilitam a localização dos inícios das seções no livro.

A faixa dourada superior facilita a localização da seção de recapitulação no livro, e o fato de incluir teoria e prática (por meio dos exemplos) lado a lado e na mesma página enriquecem bastante o material, já que facilita a fixação de conceitos, fórmulas e estratégias de resolução (reforçando habilidades e competências), utilizando pouco espaço e de forma muito bem apresentada, onde não há qualquer tipo de poluição pelo padrão de layout adotado.

Tais padrões podem se mostrar muito úteis considerando o contexto brasileiro, já que contribuem para não poluir demais um livro e de forma que fique fácil de se localizar quando folheando o material.

Destacamos também que na seção de Revisão, o fato de incluir teoria e prática (por meio dos exemplos) lado a lado e na mesma página enriquecem bastante o material, já que facilita a fixação de conceitos, fórmulas e estratégias de resolução (reforçando habilidades e competências), utilizando pouco espaço. Além disso, poderíamos adaptar para livros brasileiros a simplicidade adotada no uso da linguagem e a clareza com que são apresentados os conteúdos. Com essas escolhas para a produção de livros a clareza de ideias é potencializada o que faz com que a compreensão conceitual e prática dos conteúdos estudados sejam mais fáceis de serem atingidas.

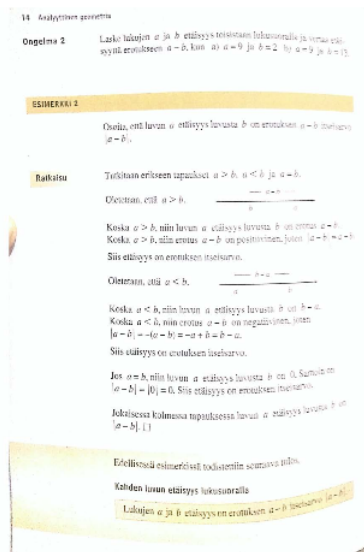
Logo, seções nestes moldes poderiam ser facilmente adaptados aos livros brasileiros agregando bastante à qualidade de livros didáticos, uma vez que tais escolhas e padrões de estrutura deixam a leitura sucinta, objetiva e eficiente, considerando o fato de que nem todos os livros nacionais apresentam seções deste tipo. A clareza das seções e dos conteúdos também se dão pela simplicidade adotada para os recursos visuais, que deixam a leitura fluída e fazem com que não haja qualquer tipo de poluição visual.

## 3.3 Abordagem Pedagógica

[AT] Ele se utiliza de problemas para introduzir e depois exercícios com solução para apresentar e demonstrar um conceito;

Nesse caso, temos livros brasileiros que se utilizam do mesmo artifício mas sempre depois conceituando ou apresentando alguma forma de contextualização do conteúdo, algo que o livro finlandês não fez até a página 55.

[AT] Ele utiliza, dentro do capítulo, exemplos que são demonstrações de teoremas, sendo assim, ele mostra ao aluno os casos em que temos que separar, a organização que precisa ser feita e uma demonstração, não utilizando números, como na maioria dos casos que vemos nos livros brasileiros, mas sim, letras sendo "a" e "b" letras quaisquer, o que ele aborda durante todo o capítulo: "considera  $a = 4$  e  $b = 9$ ", por exemplo. Exemplo 2 da página 14, 5 da página 17.



**Problema 2**  
 Calcule a distância de  $a$  e  $b$  de uma linha de leitura para outra e compare a distância com  $a-b$  quando  $a) a = 9$  e  $b = 2$  b)  $a = 2$  e  $b = 9$ .

**EXEMPLO 2**  
 Prove que a distância  $a$  de  $b$  para o número  $a$  é o valor absoluto da diferença  $a-b$  é  $|a-b|$ .

**Solução**  
 Os casos  $a > b$ ,  $a < b$  e  $a = b$  são examinados separadamente.

Suponha que  $a > b$ .

Desde  $a > b$ , então a distância  $a$  de  $b$  é a diferença  $a-b$ . Como  $a > b$ , a diferença  $a-b$  é positiva, então  $|a-b| = a-b$ .

Então, a distância é o valor absoluto da diferença.

Suponha que  $a < b$ .

Desde  $a < b$ , então a distância  $a$  de  $b$  para  $a$  é  $a-b$ . Como  $a < b$ , a diferença  $a-b$  é negativa, então  $|a-b| = -(a-b) = -a+b = b-a$ .

Então a distância é o valor absoluto da diferença.

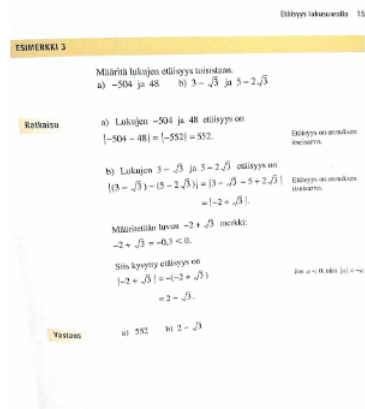
Se  $a = b$ , então a distância  $a$  de  $b$  é  $0$ . Também é  $|a-b| = |0| = 0$ . Assim, a distância é o valor absoluto da diferença.

Em cada um dos três casos, a distância  $a$  do capítulo  $b$  é  $|a-b|$ .

No exemplo anterior, o seguinte resultado foi provado.  
 Distância de dois dígitos para a linha de leitura  
 A distância entre  $a$  e  $b$  é o valor absoluto da diferença  $|a-b|$ .

Figura 3.7: Página 14

Ele demonstra o teorema e, logo em seguida, faz exemplos que utilizem tal teorema para resolver os exercícios. Os teoremas não estão “jogados”. Eles são utilizados, para o aluno praticar aquilo que foi visto anteriormente. Exemplo 3 da página 15, 6 da página 18.



**EXEMPLO 3**  
 Determine a distância entre os números.  
 a)  $-504$  e  $48$       b)  $3-3$  e  $5-23$

**Solução**  
 a) A distância entre os números  $-504$  e  $48$  é  $|-504 - 48| = |-552| = 552$ .  
 Distância é a diferença valor intrínseco.

b) A distância entre os números  $3-3$  e  $5-23$  é  $|(3-3) - (5-23)| = |3-3-5+23| = |-2+3|$ .  
 Distância é a diferença valor intrínseco.

Definindo o dígito de  $-2+3$ :  
 $-2+3 = 0,3 < 0$ .

Então a distância solicitada é  $|-2+3| = -(-2+3) = 2-3$ .  
 Se  $a < 0$  então  $|a| = -a$ .

**Resposta**  
 a)  $552$       b)  $2-3$

Figura 3.8: Página 15

Outro ponto muito positivo que ele utiliza em sua teoria é o resumo que ele dá de tudo o que faz no final. Se ele faz um exemplo, no final, ele resume e põe, por exemplo, o teorema resumida, ou as respostas explícitas. É uma maneira de organizar o conteúdo e uma possibilidade do aluno ver onde ele tem que chegar, sem necessariamente ver o caminho para isso. Exemplo 3 da página 15.

[AT] Na seção de revisão o autor descreve o capítulo todo com um resumo dos conteúdos previamente estudados, repetindo as teorias, bem como os métodos, por meio de exemplos detalhados.

Os resumos são bem objetivos e são expostos com clareza, e os exemplos além de contemplarem tudo o que é apresentado, são bem relacionados com os exercícios propostos logo em sequência, que são apresentados na mesma ordem em que os conteúdos são revistos. Neste momento (dos exercícios propostos), há uma série de tarefas que geralmente são mais exigentes, abordando todo o conteúdo do capítulo.

Seções de caráter revisional não são exclusividade deste livro Finlandês, mas está longe de ser regra em livros brasileiros, considerando o detalhamento e objetividade com que é feito no livro Finlandês. Adaptações de seções deste tipo com essa padronização de exposição direta e objetiva como é feita agregariam bastante a livros brasileiros.

Os objetivos de conhecimento e as habilidades previstas para Matemática na BNCC para os anos finais e as competências e habilidades previstas na Matriz de Avaliação Processual do Estado de São Paulo para o Ensino Médio que são contemplados pelos conteúdos abordados no livro Finlandês analisado são descritos a seguir. Nem todos os conteúdos analisados nesta parte estão previstos em algum momento, ou na BNCC, ou na MAP-SP Ensino Fundamental, e os que aparecem apresentam um certo distanciamento entre os anos previstos para alguns dos conteúdos. Todos fazem parte da formação básica dos nossos estudantes brasileiros, podendo portanto haver uma adaptação na maneira com que tais conteúdos são apresentados (e no caso da seção em questão, revisados) em livros nacionais.

[AA] Se utiliza dos exercícios de maneira teórica e prática fazendo o aluno concluir a resposta e pensar no conceito;

Aqui no Brasil, temos uma sistematização mais burocrática e com pouca multidisciplinaridade o que parece ocorrer mais amplamente na obra finlandesa.

[AA] Ele faz exercícios não somente de maneira numérica, mas também explicativa com texto sempre recuado ao lado direito da página, mostrando ao aluno além de pensar na conta pensar naquilo que ele está fazendo. Exemplo 4 da página 16.

Quando ele utiliza de uma desigualdade para explicar algo, a cada passo ele vai explicitando o que fez deixando mais claro sua pretensão sem termos que ficar descobrindo o que o autor tentou fazer. Exemplo: método 1 da página 23.

**Método 1** Desmorte a equação dupla para suportar a desigualdade.

O valor de  $4x - 3$  deve ser maior que  $-2$  e menor que  $2$ . Resolva as desigualdades.

$| : 4$  Como o divisor  $4$  é positivo, a direção da desigualdade permanece.

As desigualdades podem ser combinadas em uma equação dupla.

O conjunto de soluções também pode ser expresso pela designação do espaço  $1/4,5/4$  D.

**Método 2** Aplique o método de desigualdade de primeira ordem diretamente à equação dupla.

Como o divisor  $4$  é positivo, a direção das desigualdades permanece.

O conjunto de soluções também pode ser expresso pela designação de espaço  $1/4,5/4$  D.

**RESPOSTA**

a)  $-2 < x < 2$  (intervalo  $] -2, 2 [$ )

b)  $1/4 < x < 5/4$  (intervalo  $] 1/4, 5/4 [$ )

Figura 3.9: Página 23

[AA] Com relação aos exemplos apresentados na seção revisão, o objetivo era claro, reforçar e



relembrar habilidades e competências vistas anteriormente. A apresentação de exercícios ao lado da revisão teórica ajuda muito no bom entendimento e fixação dos conteúdos cobertos, e a objetividade na exposição faz com que a revisão seja muito clara e eficaz. Além disso, a teoria e os exemplos resolvidos estão estreitamente relacionados aos exercícios propostos na sequência para a prática dos alunos. Seções deste tipo aparecem em livros brasileiros também, mas não é regra. Agregar seções de revisão com clareza e objetividade da forma como é feito no livro *Finlandês* seriam fáceis de acrescentar em livros brasileiros e agregariam bastante considerando o objetivo de transmitir um conteúdo e desenvolver nos alunos determinadas habilidades e competências.

[AA] Os exemplos resolvidos são todos bem relacionados tanto ao conteúdo visto na seção como nos exercícios propostos que virão no final de cada seção. Os exemplos são bem objetivos, mostrando muita clareza e objetividade, reforçando assim o entendimento do aluno para aquele assunto em questão.

Este tipo de seção poderia ser bem visto em livros brasileiros, já que nem todos os livros brasileiros possuem tal maneira de pensar, agregando seções com clareza através de exemplos e exercícios.

### 3.3.1 Resumo Abordagem

No quesito Abordagem o livro *Finlandês* apresenta clareza e objetividade impressionantes, e a forma de apresentar teoria e exemplos lado a lado fazem com que os objetivos sejam atingidos com eficácia. Tanto a objetividade como a clareza com que são feitas as revisões podem agregar bastante aos livros brasileiros.

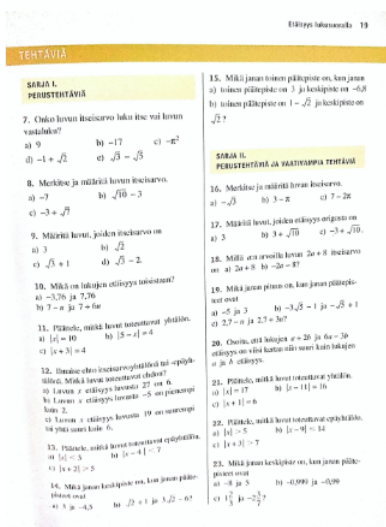
O livro se utiliza dos exemplos e exercícios para apresentar a grande parte da teoria, tornando-o muito prático e direto proporcionando, assim, condições para o aluno concluir a resposta e pensar no conceito ao contrário de muitos livros no Brasil, nos quais temos uma sistematização mais burocrática em que os autores simplesmente despejam teoria e aplicações forçadas dando ao aluno uma única maneira de aprendizado e construção do conhecimento.

## 3.4 Exercícios

[ExO] A organização e disposição dos exercícios propostos na página 170 estão na mesma ordem com que são apresentados na seção de revisão anterior. Há inclusive um título que deixa explícito o conteúdo que é abordado nos exercícios apresentados na sequência. Esta é uma exposição que facilita a localização de exercícios que abordam os conteúdos desejados para revisão.

[ExO] Nos exercícios propostos em cada capítulo, há a divisão em Série I e Série II, sendo a primeira exercícios mais básicos, bem similares a todos os exemplos que ele resolveu no capítulo (exemplos numéricos, não demonstrações). Já o segundo, apresenta exercícios com um grau de dificuldade maior, possuindo alguma coisa a mais que no capítulo não estava explícito ou demonstrações de outros teoremas. Essa organização facilita muito ao professor e ao aluno na hora de resolver os exercícios.

É importante ressaltar que, no início do livro, o autor indica ao professor que a lista de exercícios da Série II não é obrigatório para fazer na sala de aula, fica a cargo do próprio docente. Já os da Série I são obrigatórios. Isso facilita muito para o professor se organizar em sua aula.



SÉRIE 1

- A tarefa básica.
- O valor absoluto do capítulo é uma figura em si ou um valor de contador de capítulo?
  - Marque e especifique o valor absoluto do número.
  - Determine os números com valor absoluto
  - Qual é a distância entre os números?
  - Decida quais números implementarão a equação.
  - Expresse a condição como uma equação ou inequação. Quais figuras preencherão a condição?
  - A distância do capítulo  $x$  ao capítulo 27 é 6.
  - A distância do capítulo  $x$  a  $-5$  é menor que 2.
  - Números  $x$  distância de 19 são maiores ou iguais a 6.
  - Decida o que chamar de desigualdade
  - Qual é o centro da linha quando os pontos finais do segmento são
  - Qual é o segundo ponto final do segmento quando o segmento é
    - o segundo ponto final é 3 e o ponto central é  $-6,8$
    - o segundo ponto final é 1 e o centro é

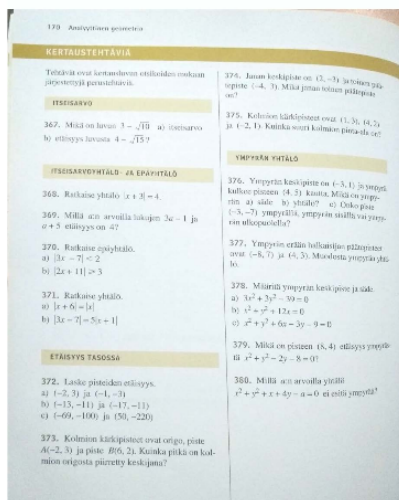
SÉRIE II

- TAREFAS BÁSICAS E TAREFAS AVANÇADAS
- Marque e especifique o valor absoluto do número.
  - Números Mikkiana com distância da origem
  - Que valores de  $a$  são os valores absolutos do número  $2a + 8$
  - O comprimento de Mikkiana é quando os pontos do espinho estão no segmento
  - Mostre que a distância dos números  $a + 2b$  e  $6a - 3b$  é cinco vezes a distância dos números  $a$  e  $b$ .
  - Decida quais números assumirão a liderança
  - Decida quais números implementarão a desigualdade.
  - Qual é o centro da linha quando os pontos finais do segmento são

Figura 3.10: Página 19

Ressaltamos que em todos os capítulos contedistas do livro, os exercícios se apresentam organizados da mesma maneira, com padrão único, sempre aparecendo ao fim do capítulo, após todo o conteúdo já ter sido explanado. Esse padrão apresenta-se com um tópico que começa numa página escrito "Exercícios" nas quais estão divididos nas séries apontadas acima.

No tópico de "Recapitulação", a organização e disposição dos exercícios propostos estão na mesma ordem com que são apresentados na seção de revisão anterior, além disso, para cada conteúdo revisado na seção anterior há ao menos 1 exercício (em geral há 4 ou 5) proposto referente a tal conteúdo. Há, inclusive, um título que deixa explícito o conteúdo que é abordado nos exercícios apresentados na sequência. Esta é uma exposição que facilita a localização de exercícios que abordam os conteúdos desejados para revisão.



Repetindo tarefas

Tarefas são tarefas básicas organizadas de acordo como cabeçalho do refinamento.

Valor absoluto

367. Qual é o valor absoluto de a)  $3 - 10$   
 b) A distância de  $4 - 15$ ?

Equação de igualdade e desigualdade

368. Resolva a equação  $|x + 3| = 4$ .
369. Com os valores de  $3a - 1$  e  $a + 5$  a distância é 4?
370. Resolva a desigualdade.
- a)  $|3x - 7| < 2$   
 b)  $|2x + 11| > 3$
371. Resolva a equação.
- a)  $|x + 6| = |x|$   
 b)  $|3x - 7| = 5|x + 1|$

Distância no plano

372. Calcule a distância entre os pontos.
- a)  $(-2, 3)$  e  $(-1, -3)$   
 b)  $(-13, -11)$  e  $(-17, -11)$   
 c)  $(-69, -100)$  e  $(50, -220)$
373. Pontos triangulares do triângulo são a origem, ponto  $A(-2, 3)$  e ponto  $B(6, 2)$ . Quanto tempo o centro do triângulo é desenhado (AQUÍ eu acho que é: Qual a distância do centro do triângulo à origem)?
374. O centro das emetas é  $(2, -3)$  e o segundo ponto final  $(-4, 3)$ . Qual é o segundo ponto final do versor? **aquiclaramente não rolou a tradução**
375. Os vértices do triângulo são  $(1, 3)$ ,  $(4, 2)$  e  $(-2, 1)$ . Quanto grande é a área do triângulo?

Equação de Círculo

376. O centro do círculo é  $(-3, 1)$  e o círculo passa pelo ponto  $(4, 5)$ . Qual é a) o raio do círculo b) a equação do círculo? c) O ponto  $(-5, -7)$  encontra-se dentro do círculo ou fora do círculo?
377. Os pontos finais de um diâmetro do círculo são  $(-8, 7)$  e  $(4, 3)$ . Crie uma equação para este círculo.
378. Especifique o centro do círculo e o raio.
- a)  $3x^2 + 3y^2 - 30 = 0$   
 b)  $x^2 + y^2 + 12x + 6 = 0$   
 c)  $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 9 = 0$
379. Qual é a distância do ponto  $(8, 4)$  ao círculo  $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ ?
380. Para quais valores a equação  $x^2 + y^2 + x + 4y - a = 0$  não representa um círculo?

Figura 3.11: Página 170

Como mostrado na figura acima, na página que inicia a recapitulação, ele traz cada capítulo do livro destacado, com os exercícios sobre cada um deles

Poderíamos aplicar a organização proposta em livros brasileiros de maneira que facilitasse para o professor na elaboração de sua aula, deixando claro os exercícios que são mais fáceis de fazer, para fixar o conteúdo e os que são mais desafiadores para os alunos. Isso pode servir de motivação para os alunos fazerem os exercícios.

**[ExE]** Julgamos que os exercícios que o livro propõe e a quantidade em que cada um apresenta está muito de acordo com o conteúdo apresentado, sendo suficiente para o aluno colocar em prática seu conhecimento sobre determinado assunto exposto.

É importante ressaltar que uma quantidade exagerada de exercícios pode ser desmotivador para um aluno. Os exercícios no livro finlandês estão na quantidade correta e não há a mais nem a menos do que o aluno precisa. São eficientes.

De acordo com os objetivos de conhecimento e as habilidades previstas para Matemática na BNCC para os anos finais e as competências e habilidades previstas na Matriz de Avaliação Processual do Estado de São Paulo encontradas durante todo o livro, assim como na seção de revisão, os exercícios propostos estão de acordo com tais habilidades e competências.

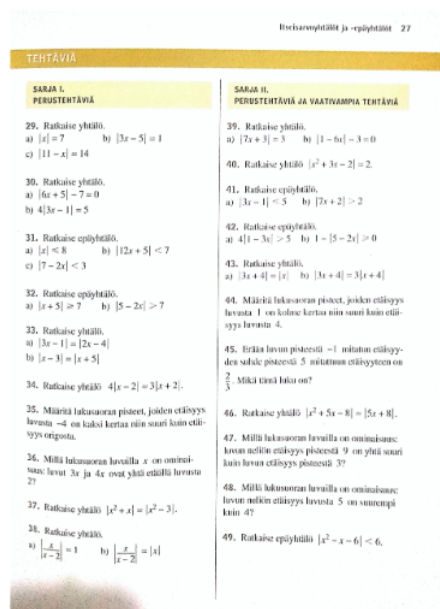
**[ExC]** Todos os exercícios apresentados em cada capítulo analisado estão bem relacionados aos respectivos conteúdos vistos. Não há nada que foge daquilo que foi trazido e proposto durante o capítulo. É impressionante como tudo no livro está conectado. Cada problema, exemplo resolvido e, claro, os exercícios apresentados seguem na mesma linha.

Entre si, também apresentam uma boa progressão, ao que diz respeito à dificuldade de cada exercício.

Considerando a revisão, a conexão dos exercícios com a seção anterior é feita de forma exemplar há, também, relação entre os próprios conteúdos, como por exemplo encontrar a equação de uma circunferência em que são dados apenas os pontos inicial e final de um diâmetro, tendo que encontrar o centro da circunferência e o valor do raio para chegar ao objetivo. Além disso, o nível de dificuldade dos exercícios é progressivo e contribui para o desenvolvimento e melhor fixação dos conteúdos cobertos, dado que todos já foram trabalhados anteriormente.

## 3.4.1 Progressão dos Exercícios

Para exemplificar melhor como ocorre a progressão dos exercícios e mostrar um pouco mais do porque nos chamou tanta a atenção, a seguir será apresentada uma sequência de exercícios, selecionados da página 27 do livro e uma breve descrição:



## SÉRIE I

## Fundamentais

29. Resolva a equação.
30. Resolva a equação.
31. Resolva a desigualdade.
32. Resolva a desigualdade.
33. Resolva a equação.
34. Resolva a equação  $4|x - 2| = 3|x + 2|$ .
35. Determine os pontos da linha de leitura cuja distância de —4 é duas vezes maior que a distância da origem da distância.
36. Qual é o número  $x$  de uma linha de leitura:  $3x$  e  $4x$  são iguais a 2?
37. Resolva a equação  $|x^2 + x| = |x^2 - 3|$
38. Resolva a equação.

## SÉRIE II

## TAREFAS EXPLICATIVAS E AVANÇADAS

39. Resolva a equação.
40. Resolva a equação.
41. Resolva a desigualdade.
42. Resolva a desigualdade.
43. Resolva a equação.
44. Determine os pontos da linha de leitura, a distância do capítulo 1 sendo três vezes a distância do capítulo 4.
45. A relação entre a distância do ponto 5 e a distância medida a partir do ponto 5 é  $2/3$ . O que é essa figura?
46. Resolva a equação.
47. Qual é o número de leitores de uma linha de leitura: a distância de um quadrado de um ponto do ponto 9 é igual à distância de um ponto do ponto 3?
48. Qual é o número de leitores de uma linha de leitura?
49. Resolva a dúvida

Figura 3.12: Página 27

29. Como pode-se ver, começa o exercício com um resolve a equação e itens muito parecidos com os exemplos dados no início do capítulo, com uma incógnita e módulo apenas de um lado da equação;
30. Resolver equações com mais detalhes que a anterior, pois aqui deve-se manipular mais as equações;
31. Entramos em inequações, e aqui, temos inequações básicas, da mesma maneira que a questão 29 com equações;
32. Segue a mesma linha que a 31;
33. Aqui a dificuldade aumenta por conter módulo dos dois lados da equação, entretanto temos apenas um item;
34. Aqui, além de conter módulo em ambos os lados da equação, tem elementos fora do módulo que também precisam ser manipulados, continuando com apenas um item;
35. Para resolver essa questão é necessário extrair a equação do texto e depois resolvê-la, mais uma dificuldade acrescentada, saber interpretar o problema;
36. A mesma ideia que o exercício anterior, porém é necessário trabalhar duplamente com a incógnita e, conseqüentemente, com o módulo que foi trabalhado no capítulo;
37. A resolução da equação aqui, além de envolver equação em ambos os lados, envolve também equação do segundo grau em ambos os lados;
38. Por último, o envolvimento de fração na resolução das equações.

É nítido ver a progressão de dificuldade nesses exercícios, sua conexão também impressiona por terem relação exercícios de dificuldades similares, envolvendo ora equação, ora inequação.

### 3.4.2 Resumo Exercícios

Em suma, os exercícios propostos são muito bem organizados e apresentados, com clara identificação dos conteúdos cobrados principalmente na seção “Recapitulando”.

Tendo em vista os objetivos de conhecimento previstos pela BNCC, os exercícios propostos vistos no livro são eficientes para os alunos, pois desenvolvem todo o capítulo visto no livro, sem fugir do assunto e dando ênfase ao que o aluno deve saber sobre tal assunto.

O livro apresenta exercícios muito bem conectados entre si e uma relação entre os exercícios das seções, fazendo com que o aluno tenha que ter bem formado os conceitos do que foi visto anteriormente para ser capaz de resolver os exercícios de uma seção. Além disso, o nível de dificuldade destes é progressivo e contribui para o desenvolvimento e melhor fixação dos exercícios propostos.

Por esses motivos, tais abordagens podem ser adicionadas a livros brasileiros de forma que agreguem bastante com relação eficácia, considerando o objetivo de reforçar e desenvolver competências e habilidades específicas.

### 3.5 Páginas 177 - 187

(VASTAUKSET = RESPOSTAS) Considerando que trata somente das respostas e gabaritos das questões, coisa que livros brasileiros também costumam apresentar, não há a análise destas páginas.





## 4. Considerações Finais

É importante registrar aqui que nenhum integrante do grupo tinha o mínimo conhecimento de Finlandês e a falta de um arquivo em .pdf tornou a tradução do livro extremamente complicada e exaustiva, nossa salvação foi um site <https://www.onlineocr.net/pt/> que conseguiu extrair da imagem o texto e exportar par arquivo de texto, mesmo que com alguns erros. E trabalhando com as traduções pudemos perceber (com a sugestão do professor) que o Finlandês é uma língua muito lógica e bem estruturada o que pode refletir ou ser reflexo da extrema organização do livro.

Lembrando que analisamos apenas um modelo de livro, portanto não podemos inferir que todos os livros Finlandeses seguem o mesmo padrão.

O ponto principal do livro e o que nos chamou mais a atenção foi sem dúvida sua padronização, sistematização e organização. O padrão e o sequenciamento apresentados nas primeiras páginas é seguido rigorosamente em todo o material, até mesmo as cores (nosso modelo segue uma tonalidade de amarelo) que é usada unicamente até o final.

Nos surpreendeu também a quantidade de espaços em branco nas páginas e a falta de textos ou histórias de contextualização de conteúdos, o que aparece em excesso em livros brasileiros. O livro finlandês mesmo tendo muitos espaços em branco é pequeno e com apenas 245 páginas, sendo bem menos intimidador e pesado, podendo ser facilmente transportados pelos alunos.

Por ter as características citadas acima, o livro em sua didática, se faz muito direto e isso sem ser ou muito rigoroso, não apresenta milhares de contextualizações (as vezes desnecessárias ou irreais nas literaturas brasileiras). É em suma simples, apresenta um exemplo pertencente ao dia-a-dia dos alunos e a partir disso desenvolve a teoria e logo após aplica exercícios, que por sua vez seguem uma progressão de dificuldade muito interessante e não aparecem em quantidade exagerada.

Discutimos que um livro com esses moldes pode proporcionar muito mais independência ao aluno

e talvez exija um papel maior de agente direto por parte do professor no desenvolvimento do conhecimento dos alunos, refletindo um pouco na cultura e na construção do sistema de ensino existente na Finlândia.

Muitas dessas praticas e a organização em si podem ser aplicadas em livros brasileiros, entretanto acreditamos que uma reestruturação e reorganização completa dos conteúdos e objetivos precisariam ser realizadas para a implementação eficaz.

Houve por parte de nosso grupo e um outro que também realizou a análise de um livro finlandês (da mesma coleção), o esforço de entrar em contato com a embaixada finlandesa em busca de materiais sobre a educação, as formas de avaliação e a progressão dos alunos, infelizmente até a conclusão deste trabalho não obtivemos resposta.



## Bibliografia

- [1] *6 indicadores de dar inveja e 3 curiosidades sobre a Finlândia, que comemora 100 anos de independência*. AbnTeX. URL: <https://www.bbc.com/portuguese/internacional-42250927> (ver página 7).
- [2] *As razões que fizeram da Finlândia o lugar mais feliz do mundo*. AbnTeX. URL: [https://brasil.elpais.com/brasil/2018/03/14/internacional/1521026096\\_399451.html](https://brasil.elpais.com/brasil/2018/03/14/internacional/1521026096_399451.html) (ver página 7).
- [3] *Base Nacional Comum Curricular: educação é a base*. 2017 (ver páginas 7, 10, 14).
- [4] *Finnish National Agency for Education*. URL: <https://www.oph.fi/english/> (ver página 8).
- [5] Regina Aparecida Resek Santiago Ghislene Trigo Silveira. *Matriz de Avaliação Processual*. SÃO PAULO, 2016 (ver páginas 7, 10, 14).
- [6] Till Alexander Leopold, Vesselina Ratcheva e Saadia Zahidi. “The global gender gap report 2016”. Em: *World Economic Forum*. 2016 (ver página 7).
- [7] Tarliz Liao e Claudia Glavam Duarte. “O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO FINLANDÊS”. Em: *Revista de Educação, Ciências e Matemática* 5.3 (2015) (ver página 8).