Trilhando a Matemática

1º ano do Ensino Médio

Introdução à Trigonometria

Caio Henrique de Paula Rodrigues
Priscila Coelho Marcelino
Rodrigo Fernandes Mazzini
Tiago Torres Dantas

GRUPO C
Caio Henrique de Paula Rodrigues
Priscila Coelho Marcelino
Rodrigo Fernandes Mazzini
Tiago Torres Dantas

Apresentação do livro

Este livro utiliza de algumas estruturas para auxiliar na organização do livro e também para auxiliar no entendimento do conteúdo.

Você sabia?
Nesta seção apresentaremos algumas curiosidades. Falaremos um pouco sobre a história do conteúdo, falaremos sobre personalidades importantes na ciência, dentre outros.

Exercícios

Os exercícios aqui apresentados aparecerão ao longo do capítulo

Exercícios Complementares

Os exercícios propostos aparecerão apenas no final dos capítulos.

Exercícios Resolvidos

Como o próprio nome indica, nesta seção serão apresentados exercícios juntamente com suas respectivas soluções.

Definições, teoremas e exemplos virão sempre em estruturas como as que seguem:

Teorema

Definição

Exemplo

Algumas estruturas aparecerão como auxiliares nas margens do texto conforme abaixo

Importante ou Atenção
Esta caixa tem a finalidade de chamar atenção do aluno para possíveis erros que ele pode cometer e reforçar ideias importantes sobre o conteúdo.

Lembre-se
Esta caixa tem a finalidade de relembrar alguns conceitos, fórmulas que não foram relembrados no início do capítulo, mas que são extremamente necessários para o aluno conseguir entender determinado conceito.

Os capítulos estão estruturados da seguinte forma:

- **Introdução**
  Iniciaremos o capítulo com algum problema ou situação que servirá de motivação para o conteúdo do capítulo.
- **Revisando...**
  Além da estrutura Lembre-se já indicada, revisaremos parte dos conteúdos que seriam pré-requisitos do capítulo logo após a Introdução. Desta forma é possível revisar os conteúdos com um pouco mais de detalhe.
- Após a revisão seguimos com o conteúdo regular do livro.
- Os exercícios propostos, que aparecem na estrutura indicada acima, sucedem o conteúdo regular.
- **Voltando ao Problema Inicial**
  Finalizamos os capítulos, com a seção Voltando ao Problema Inicial em que resolvemos ou discutimos a situação apresentada na Introdução.

Sumário

1. Trigonometria no triângulo retângulo

1.1 Introdução

Muito se fala, hoje, sobre a inclusão de pessoas com deficiência nos diversos setores da sociedade. Com a finalidade de promover a inclusão dessas pessoas, o governo estabeleceu algumas leis para garantir a participação desses cidadãos na sociedade.

Por exemplo, pensando nas pessoas que se locomovem utilizando cadeira de rodas, uma exigência governamental é que determinados estabelecimentos tenham rampas de acesso.

As rampas, diferentemente das escadas, permitem aos cadeirantes autonomia de locomoção. Porém, dependendo do nível de inclinação da rampa, passar por ela pode ser muito exaustivo ou, até mesmo, inviável. Você já deve ter notado que quanto maior a inclinação da rampa, maior o esforço que deve ser feito para chegar até o topo.

Por estar em um plano inclinado, se o cadeirante não fizer força para subir, sua cadeira começará a descer como se uma força invisível estivesse empurrando a cadeira de volta para a base da rampa.

Fique atento, pois, neste capítulo, você vai aprender o que são razões trigonométricas e, ao final dele, verá como estas nos ajudam a entender a força que empurra o cadeirante para a parte mais baixa da rampa.

Você sabia?
Um dos maiores físicos da atualidade, o britânico Stephen Hawking, que faleceu no dia do π do ano de 2018 (14 de março de 2018) era portador de esclerose lateral amiotrófica (ELA), uma rara doença degenerativa que paralisa os músculos do corpo. Apesar disso, essa doença não atinge as funções cerebrais, embora ainda não tenha cura. Como resultado da paralisia, o físico passou a usar, em 1970, cadeira de rodas para se locomover.
Foram inúmeras as contribuições de Hawking para a ciência, no livro "O Universo numa Casca de Noz" , por exemplo, ele busca apresentar algumas das ideias amplamente discutidas pelos físicos de forma simples, clara e didática.

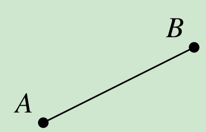
1.2 Revisando...

Notação

Para se trabalhar com objetos geométricos, é importante que esteja bastante claro quais as notações estão sendo usadas para representá-los.

- **Pontos:** Em geral, usaremos letras maiúsculas para representar pontos.
- **Segmentos:** Vamos representar segmentos a partir de suas extremidades, conforme o exemplo abaixo.

Exemplo

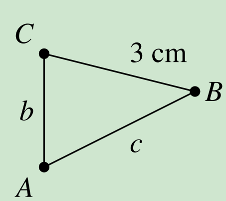


Temos, neste caso, o segmento $\overline{AB}$, cujas extremidades são os pontos A e B.

Atenção
Segmento é diferente de medida de um segmento. Logo, não podemos escrever $\overline{AB} = 3$ cm, neste caso, o que pode acontecer é a medida de $\overline{AB}$ ser 3 cm ($AB = 3$ cm)

Se tirarmos o traço da nossa representação de segmento, estaremos representando a medida de um segmento. No caso acima, uma das formas de representar a medida do segmento $\overline{AB}$ é AB. Por vezes, vamos representar a medida de um segmento por uma letra minúscula.

Exemplo

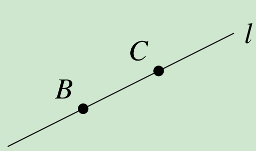


Temos, neste caso, que $BC = 3$ cm. Podemos representar a medida de $\overline{AB}$ por AB ou por c, assim como a medida de $\overline{AC}$ por AC ou b.

Lembre-se
Dois pontos distintos determinam uma única reta

- **Retas:** Podemos representar uma reta a partir de dois pontos distintos que a determine ou usando uma letra minúscula.

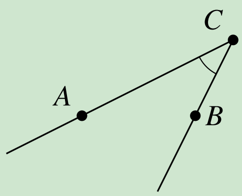
Exemplo



Representamos essa reta por $\overleftrightarrow{BC}$ ou simplesmente por l.

- **Ângulos:** Representamos ângulos usando o seu vértice e dois pontos distintos, cada um em uma das semirretas que compõe o ângulo. Na representação, o vértice deve aparecer sempre no meio e com acento circunflexo.

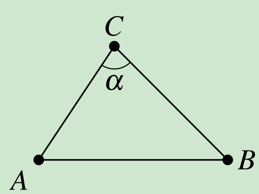
Exemplo



Representamos esse ângulo por $A\widehat{C}B$.

Em geral, usamos uma letra do alfabeto grego para representar a medida de um ângulo, como, por exemplo, α, β, γ.

Exemplo

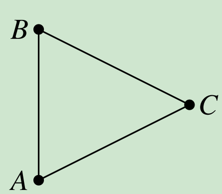


Quando não houver ambiguidades, podemos representar um ângulo usando apenas seu vértice.
Assim podemos dizer que no triângulo ao lado a medida do ângulo $\widehat{C}$ é α.

Atenção
Da mesma forma como em segmentos, não podemos dizer que um ângulo é igual a uma medida, como, por exemplo, $A\widehat{C}B = 60°$, uma vez que o correto é dizer que a medida α de $A\widehat{C}B$ é igual a $60°$ ($\alpha = 60°$). Apesar disso, muitas vezes usaremos a notação α para nos referir tanto ao ângulo $A\widehat{C}B$ quanto a medida α deste ângulo. Isso também acontecerá a um segmento $\overline{BC}$ de medida a, em que usaremos a para nos referir tanto ao segmento quanto à sua medida.

- **Objetos congruentes:** Usaremos o símbolo $\cong$ para representar a congruência entre segmentos ou ângulos.
  Logo se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm mesma medida ($AB = CD$), ou seja, se são congruentes, podemos escrever que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, da mesma forma para ângulos congruentes $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ podemos escrever $\widehat{A} \cong \widehat{B}$.
- **Polígonos:** Representaremos um polígono a partir de seus vértices. Por ser um capítulo de trigonometria o polígono mais frequente será o triângulo.

Exemplo



Chamaremos esse triângulo de triângulo ABC.

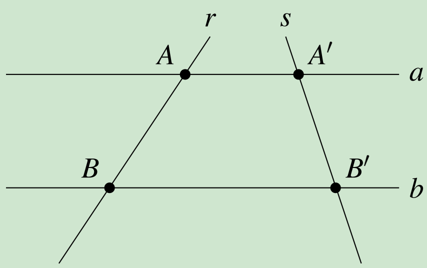
Atenção
Quando escrevemos $\overline{AB} = \overline{CD}$ estamos dizendo que os mesmos pontos que pertencem a $\overline{AB}$ pertencem também a $\overline{CD}$ e vice-versa, ou seja, estamos querendo dizer que eles são o mesmo segmento.
Por isso, cuidado, se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos distintos que têm a mesma medida, eles são congruentes, mas não são iguais. Portanto $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AB} \neq \overline{CD}$.
O mesmo vale para ângulos.

Lembre-se
Retas paralelas: Duas retas distintas que pertencem a um mesmo plano são ditas paralelas entre si se não têm nenhum ponto em comum (não se intersectam).
Reta transversal: Uma reta é dita transversal a duas ou mais retas (feixe de retas) se intersecta essas retas em um ponto.

Segmentos Determinados

Quando uma reta transversal intersecta duas retas paralelas, obtemos dois pontos de intersecção. O segmento cujos extremos são estes dois pontos é chamado de segmento determinado. No exemplo abaixo, as retas a e b determinam um segmento AB na reta transversal r.

Exemplo

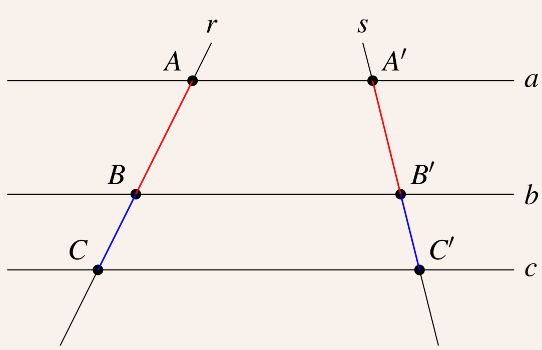


As retas a e b são paralelas.
As retas r e s são transversais.
AB e $A'B'$ são segmentos determinados pelas retas paralelas a e b sobre as retas transversais r e s, respectivamente.

Teorema de Tales

Teorema

Quando um feixe de retas paralelas é interseptado por duas retas transversais, os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais a uma mesma constante de proporcionalidade.



Os segmentos determinados são proporcionais e podemos escrever:

$$AC = k \cdot A'C'$$

$$AB = k \cdot A'B'$$

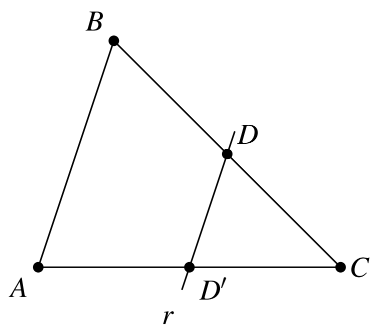
$$BC = k \cdot B'C'$$

Ou utilizando razões como comumente é feito:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Teorema de Tales no Triângulo

Quando uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intersecta outros dois lados do triângulo, nós podemos aplicar o Teorema de Tales. Observe no triângulo ABC que a reta r é paralela ao lado AB.

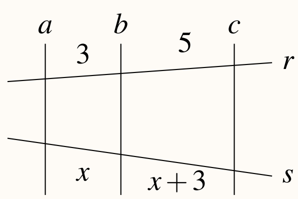


As seguintes igualdades são válidas:

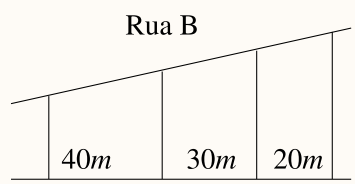
$$\frac{CD}{CD'} = \frac{CB}{CA} = \frac{BD}{AD'}$$

Exercícios

1- Aplique o Teorema de Tales no intuito de determinar o valor de x, sabendo que as retas a, b, c são paralelas



2- Três terrenos têm frente para a rua A e para rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua tem 180 m?



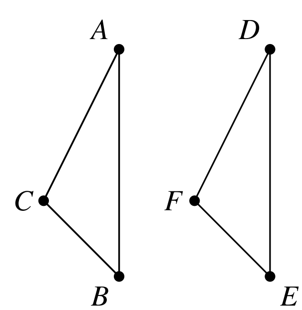
Congruência de Triângulos

Nós aprendemos, em anos anteriores, que dois triângulos são congruentes quando é possível fazer uma correspondência entre seus vértices de modo que os lados e ângulos correspondentes sejam congruentes, ou seja, dados dois triângulos congruentes ABC e DEF, em que o vértice A corresponde ao vértice D, o vértice B corresponde ao vértice E e o vértice C corresponde ao vértice F, as seguintes relações são válidas:

$$AB = DE \qquad A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F$$

$$BC = EF \qquad B\widehat{C}A \cong E\widehat{F}D$$

$$CA = FD \qquad C\widehat{A}B \cong F\widehat{D}E$$



Casos de Congruência

Lembre-se que para decidir se dois triângulos são congruentes, nós podemos fazer uso dos casos de congruência.

Lado- Ângulo-Lado (LAL)

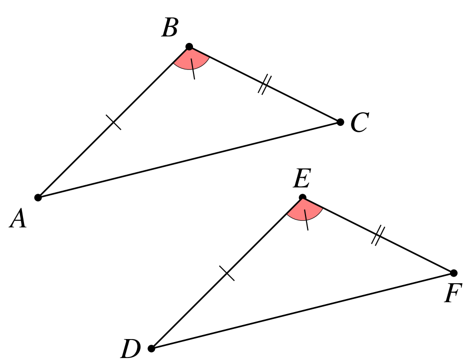
Se é possível fazer uma correspondência entre os vértices de dois triângulos, de tal forma que dois dos pares de lados correspondentes sejam congruentes e os ângulos entre esses lados sejam, também, congruentes, então os triângulos são congruentes.
Dados dois triângulos ABC e DEF, se

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$

$$\widehat{B} \cong \widehat{E}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$

então os triângulos são congruentes.



Ângulo-Lado-Ângulo (ALA)

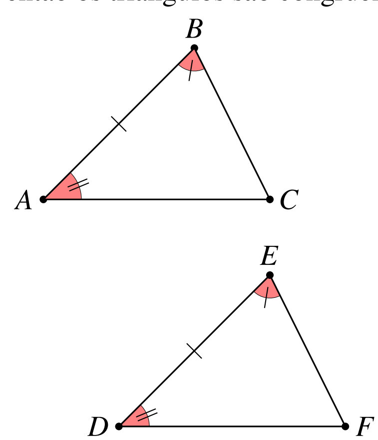
Se é possível fazer uma correspondência entre os vértices de dois triângulos, de tal forma que dois dos pares de ângulos correspondentes sejam congruentes e os lados entre esses ângulos sejam, também, congruentes, então os triângulos são congruentes.
Dados dois triângulos ABC e DEF, se

$$\widehat{A} \cong \widehat{D}$$

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$

$$\widehat{B} \cong \widehat{E}$$

então os triângulos são congruentes.



Lado-Lado-Lado (LLL)

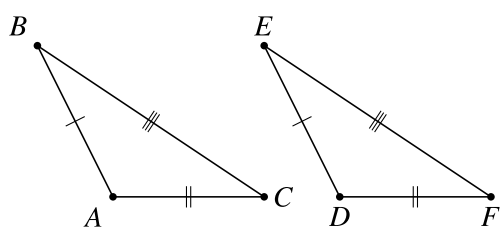
Se é possível fazer uma correspondência entre os vértices de dois triângulos, de tal forma que os três pares de lados correspondentes sejam congruentes, então os triângulos são congruentes.
Dados dois triângulos ABC e DEF, se

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$

$$\overline{CA} \cong \overline{FD}$$

então os triângulos são congruentes.



Lado-Ângulo-Ângulo (LAAo)

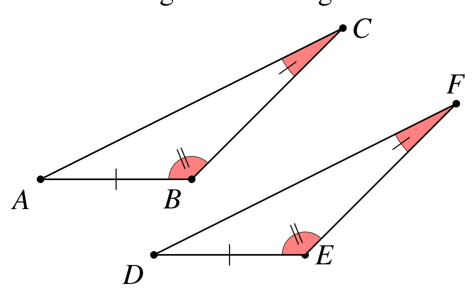
Se é possível fazer uma correspondência entre os vértices de dois triângulos, de tal forma que um dos pares de lados, um dos pares de ângulos adjacentes e o par de ângulos opostos a esses lados sejam congruentes, então os triângulos são congruentes.
Dados dois triângulos ABC e DEF, se

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$

$$\widehat{B} \cong \widehat{E}$$

$$\widehat{C} \cong \widehat{F}$$

então os triângulos são congruentes.



Teorema da Hipotenusa e do Cateto

Dados dois triângulos retângulos, se a hipotenusa e um cateto de um dos triângulos são congruentes com as partes correspondentes do outro, então os dois triângulos são congruentes.
Dados dois triângulos ABC e DEF, se

$$\widehat{B} \text{ e } \widehat{E} \text{ são ângulos retos}$$

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$

$$\widehat{AC} \cong \widehat{DF}$$

então os triângulos são congruentes.

Lembre-se
Ângulo agudo é aquele que tem medida menor do que 90°
Ângulo reto é aquele que mede 90°
Ângulo obtuso é aquele que tem medida maior do que 90°

Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes se existe uma correspondência entre seus vértices, de forma que os ângulos correspondentes sejam congruentes e a razão entre os lados correspondentes sejam iguais entre si. Essa razão k é chamada de razão de semelhança.

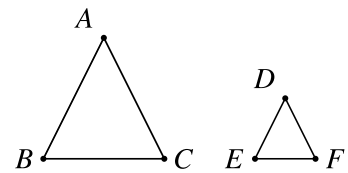
Nos triângulos semelhantes ABC e DEF as seguintes relações são válidas:

$$k = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

$$A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F$$

$$B\widehat{C}A \cong E\widehat{F}D$$

$$C\widehat{A}B \cong F\widehat{D}E$$

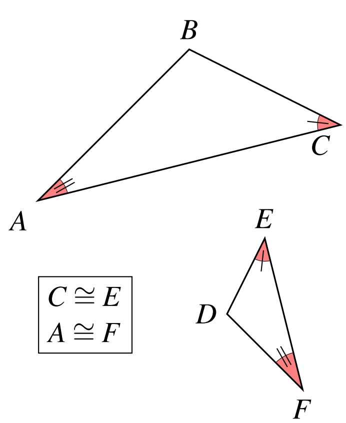


Casos de Semelhança

Lembre-se que, para decidir se dois triângulos são semelhantes, nós podemos fazer uso dos casos de semelhança.

Ângulo-Ângulo (AA)

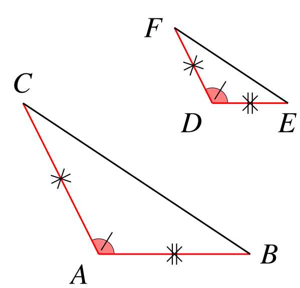
Neste caso, basta olhar dois dos ângulos de dois triângulos, se dois dos ângulos correspondentes forem congruentes então os dois triângulos são semelhantes.



$$\boxed{\begin{array}{c} C \cong E \\ A \cong F \end{array}}$$

Lado-Ângulo-Lado (LAL)

Neste caso, basta olhar dois lados de um triângulo e o ângulo entre estes dois lados. Se no outro triângulo os lados correspondentes são proporcionais e o ângulo entre os lados é congruente, então os dois triângulos são semelhantes.

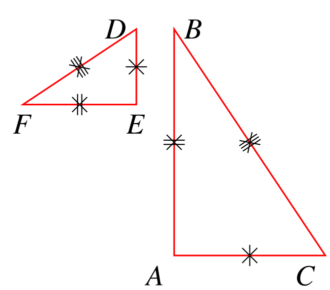


$$\boxed{\begin{array}{c} A \cong D \\ \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{AB}{DE} \end{array}}$$

Lado-Lado-Lado (LLL)

Neste caso, basta olhar os três lados de um triângulo. Se no outro triângulo os lados correspondentes são proporcionais, então os dois triângulos são semelhantes.

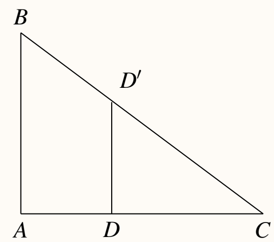
$$\boxed{\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{DF}}$$



Lembre-se
Usamos a notação $//$ para retas paralelas, ou seja, se a reta r é paralela à reta s, podemos escrever $r//s$.

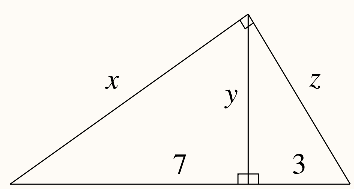
Exercícios

1- Observe os triângulos ABC e $DD'C$ tal que $\overleftrightarrow{DD'}//\overleftrightarrow{AB}$ e assinale V para a afirmação verdadeira e F para a afirmação falsa:



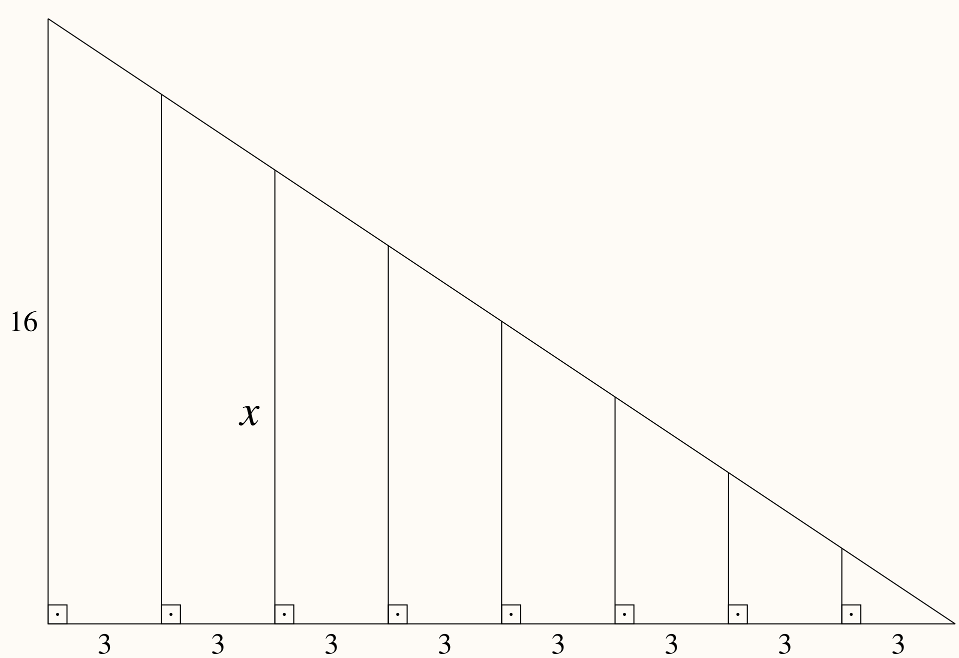
( ) Os triângulos não são semelhantes.
( ) Os triângulos são congruentes
( ) $\dfrac{DD'}{AB} = \dfrac{CD}{AD}$
( ) $\dfrac{DD'}{AB} = \dfrac{CD}{AC}$

2- Usando semelhança de triângulos determine o valor de x, y e z:

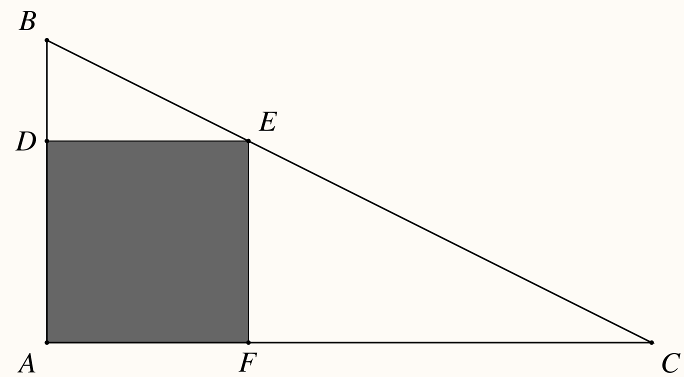


Lembre-se: A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual 180°.

3- Calcule o valor de x:



4- Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, $ADEF$ é um quadrado, $AB = 2$ cm e $AC = 4$ cm. Quanto mede o lado do quadrado?



Triângulos Retângulos e Teorema de Pitágoras

Definição

Num triângulo, o lado oposto a um determinado ângulo é o lado em que nenhuma das extremidades coincide com o vértice do ângulo.

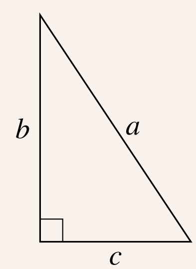
Os triângulos retângulos possuem um ângulo reto. Num triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa, e os outros lados são chamados de catetos.

Importante
Usaremos hipotenusa para nos referir tanto ao lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo quanto à sua medida.
O mesmo ocorrerá com os catetos.

Teorema

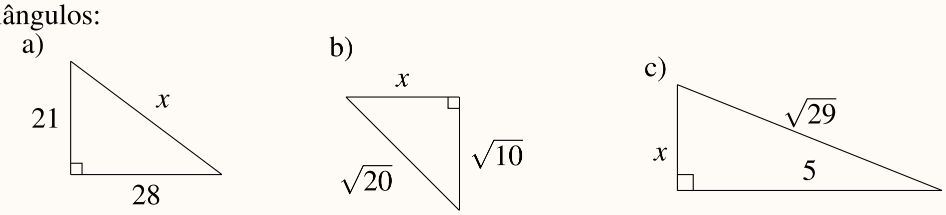
Seja um triângulo retângulo cujas medidas dos lados são a, b e c, sendo a a medida da hipotenusa, a seguinte relação é válida:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

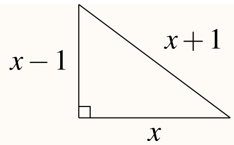


Exercícios

1- Aplicando o teorema de Pitágoras, determine a medida x indicada em cada um dos triângulos:

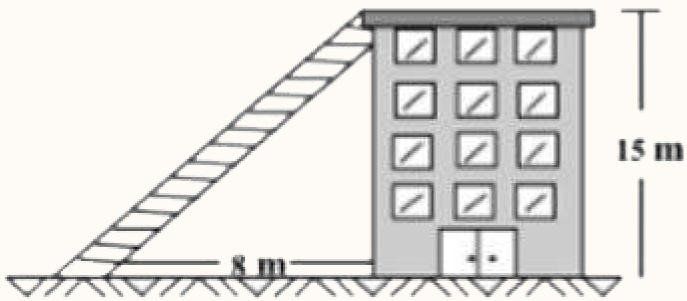


2- Calcule a área do triângulo abaixo:

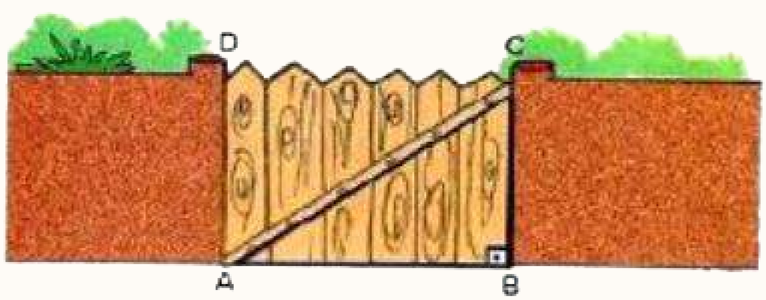


3- Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 14 cm e um dos catetos mede 10 cm. Determine a medida do outro cateto.

4- A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. Qual é o comprimento da escada?



5- O portão de entrada de uma casa tem 4m de comprimento e 3m de altura. Que comprimento teria uma trave de madeira que se estendesse do ponto A até o ponto C?



1.3 Relações Trigonométricas

Você sabia?

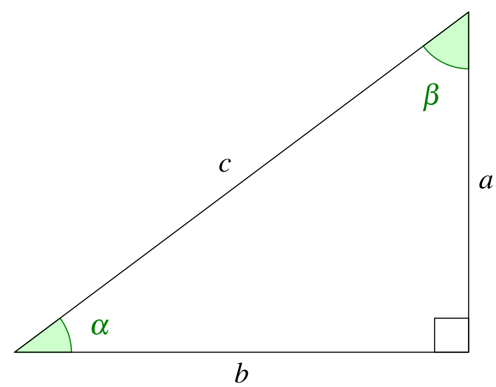
Ao que tudo indica, o início do estudo da trigonometria e a criação do conceito de ângulo se devem aos egípcios e aos babilônios, no entanto, os primeiros a realizarem um estudo mais rigoroso sobre o tema foram os gregos. Os primeiros trabalhos acerca do assunto se creditam ao astrônomo grego Hiparco de Nicéia, que, por volta do ano de 150 a.C., escreveu um tratado em doze livros, em que incluiu a primeira tabela trigonométrica e uma tábua de cordas (tabela que relaciona as cordas com os arcos definidos por elas).

Mas, afinal, o que é a Trigonometria? A palavra Trigonometria vem do grego e é formada pelos radicais: tri (três), gonos (ângulos) e metron (medida), assim: "[...] é um ramo da Matemática que estuda a relação entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo". (GUELLI, 2000, p.8)

Relações Trigonométricas: Seno, Cosseno e Tangente

Lembre-se
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual 180°.

Vamos começar nossos estudos sobre as relações entre os lados de um triângulo retângulo, como o da figura abaixo.



Teorema

Um triângulo retângulo possui um ângulo reto e dois ângulos agudos.

Demonstração:
Um triângulo retângulo, por definição, tem um ângulo reto. Vamos denotar por α e β a medida dos outros dois ângulos deste triângulo. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

Subtraindo β e 90° em ambos os lados da desigualdade, obtemos:

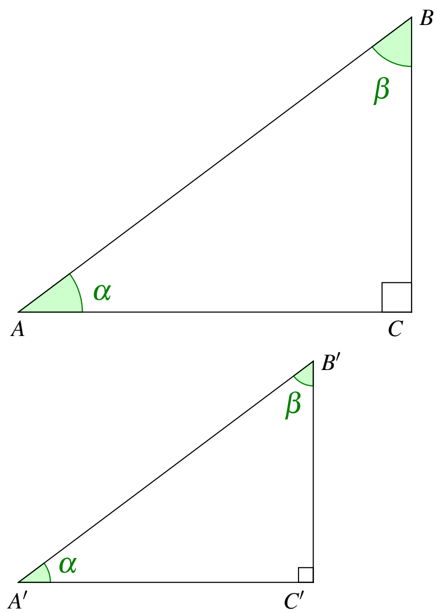
$$\alpha + \beta + 90^\circ - \beta - 90^\circ = 180^\circ - \beta - 90^\circ$$
$$\alpha = 90^\circ - \beta$$

Observe, então, que a medida α deve ser menor do que 90°.
De forma muito semelhante, descobrimos que β é menor do que 90°.
Logo, concluímos que, de fato, um triângulo retângulo possui um ângulo reto e dois agudos.

Definição

Num triângulo retângulo, o cateto oposto a um ângulo agudo é o lado em que nenhuma das extremidades coincide com o vértice do ângulo.
Já o cateto adjacente é o cateto que tem o vértice do ângulo como uma de suas extremidades.

Qualquer triângulo retângulo $A'B'C'$ que também tenha um dos ângulos agudos de medida α é semelhante a este pelo caso de semelhança AA, pois ambos possuem um ângulo reto e um ângulo de medida α.



Como resultado da semelhança de triângulos, temos, portanto:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Seno

Multiplicando a igualdade $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, por $\dfrac{B'C'}{AB}$ podemos escrever:

$$\frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{B'C'}{AB} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{B'C'}{AB}$$

$$\frac{B'C'}{A'B'} = \frac{BC}{AB}$$

Observe, então, que a razão entre as medidas do cateto oposto ao ângulo de medida α e a hipotenusa é constante para qualquer triângulo retângulo que possua um ângulo de medida α.

Desse modo, definimos como seno do ângulo α, denotando por $\operatorname{sen}(\alpha)$, a razão entre as medidas do cateto oposto a α e a hipotenusa.

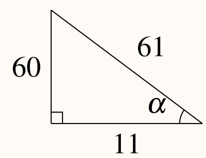
Logo, levando em conta o triângulo inicial, temos a seguinte definição:

Definição

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

Exercícios Resolvidos

Calcule o $\operatorname{sen}(\alpha)$ no triângulo abaixo:



Resolução:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{60}{61}$$
$$\operatorname{sen}(\alpha) = 0,98$$

Cosseno

Analogamente, da igualdade $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$, podemos escrever:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$
$$\frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{A'C'}{AB} = \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{A'C'}{AB}$$
$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$$

Desta vez, concluímos que a razão entre o cateto adjacente a α e a hipotenusa é constante.

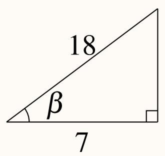
Então, definimos como cosseno do ângulo α, denotando por $\cos(\alpha)$, a razão entre as medidas do cateto adjacente a α e a hipotenusa.

Definição

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

Exercícios Resolvidos

Calcule o $\cos(\beta)$ no triângulo abaixo:



Resolução:

$$\cos(\beta) = \frac{\text{cat. adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{7}{18}$$
$$\cos(\beta) = 0,39$$

Tangente

Por fim, a igualdade $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$, fornece que:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$
$$\frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{B'C'}{AC} = \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{B'C'}{AC}$$
$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

Concluímos que a razão entre o cateto oposto a α e o cateto adjacente a α também é constante.

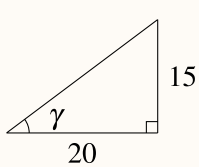
Então, definimos como tangente do ângulo α, denotando por $\operatorname{tg}(\alpha)$, a razão entre as medidas do cateto oposto a α e o cateto adjacente a α.

Definição

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

Exercícios Resolvidos

Calcule o $\operatorname{tg}(\gamma)$ no triângulo abaixo:



Resolução:

$$\text{tg}(\gamma) = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{cat. adjacente}} = \frac{15}{20}$$

$$\text{tg}(\gamma) = 0,75$$

Lembre-se
Se a soma das medidas de dois ângulos é igual a 90°, dizemos que esses dois ângulos são complementares.
Logo, se $\alpha + \beta = 90^\circ$, então α e β são complementares.

Teorema

Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

Demonstração:
Sejam α e β as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo. Usando novamente o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha + \beta + 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ - 90^\circ$$
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Logo, os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

Rapare, ainda, que:
$\text{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$ e que $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$, logo $\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$.
Da mesma forma:
$\text{sen}(\beta) = \frac{b}{c}$ e $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$, logo $\text{sen}(\beta) = \cos(\alpha)$.
Podemos concluir, então, que o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar:
$\text{sen}(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$
Observe, também, que:
$\frac{1}{\text{tg}(\beta)} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \text{tg}(\alpha)$
Podemos concluir que a tangente de um ângulo é igual ao inverso da tangente do seu complementar:
$\text{tg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(90^\circ - \alpha)}$
E, por fim, veja que:

Teorema

Para qualquer ângulo agudo α, vale a seguinte relação:

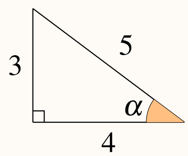
$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Demonstração:
Usando, ainda, o triângulo inicial, temos:

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \text{tg}(\alpha) \tag{1.1}$$

Exercícios

1- Determine $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$:



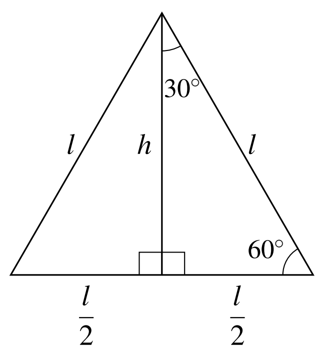
2- Os catetos de um triângulo retângulo medem 5 cm e 12 cm. Calcule o valor do seno de cada ângulo agudo deste triângulo.

3- Se $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{5}{13}$ e $\cos(\alpha) = \dfrac{12}{13}$, calcule $\operatorname{tg}(\alpha)$.

4- Dado que, $\cos(\beta) = \dfrac{15}{17}$ e $\operatorname{tg}(\beta) = \dfrac{8}{15}$, calcule $\operatorname{sen}(\beta)$.

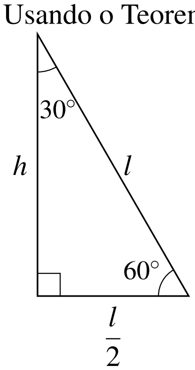
Alguns ângulos importantes

Podemos, agora, calcular os valores do seno, do cosseno e da tangente de certos ângulos. Vamos começar traçando a altura de um triângulo equilátero de lado l.



Observe que, ao traçarmos uma altura, dividimos o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos em que a hipotenusa é um dos lados do triângulo, um dos catetos é a altura e o outro tem a medida igual a $\dfrac{l}{2}$.

Usando o Teorema de Pitágoras, podemos determinar a medida da altura h.



$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$h^2 + \frac{l^2}{4} = l^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Assim podemos calcular as razões trigonométricas dos ângulos de 30° e 60°.

$$\operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

Lembre-se
Um triângulo escaleno não possui lados congruentes.
Um triângulo isósceles possui pelo menos um par de lados congruentes.
Um triângulo equilátero possui todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes.
Como a soma dos ângulos internos é 180° e os três ângulos de um triângulo equilátero têm a mesma medida (são congruentes), concluímos que a medida desses ângulos é igual a $180^\circ \div 3 = 60^\circ$.

Lembre-se
A altura relativa a base de um triângulo isósceles intesecta a base no seu ponto médio.
Um triângulo equilátero é, em particular, isósceles.

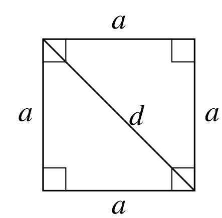
$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{\operatorname{sen}(60^\circ)}{\cos(60^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}(30^\circ) = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(30^\circ) = \operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

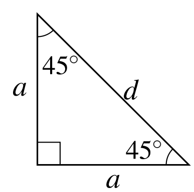
$$\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{1}{\operatorname{tg}(60^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Agora, tomemos um quadrado de lado a e diagonal d. Podemos calcular as razões trigonométricas de um outro ângulo.



Lembre-se
Num triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

A diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos isósceles, em que os catetos medem a e a hipotenusa coincide com a diagonal d do quadrado. Como os ângulos agudos são complementares e congruentes, eles devem medir $90^\circ \div 2 = 45^\circ$. Desse modo, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:



$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2a^2$$
$$d = a\sqrt{2}$$

Portanto podemos concluir que:

$$\operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ) = \frac{\operatorname{sen}(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Tabela 1.1: Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

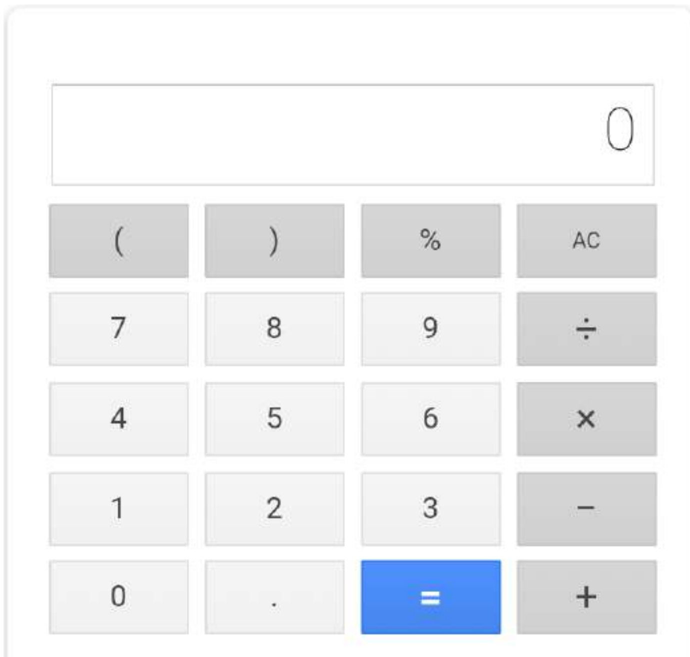
Os ângulos de 30°, 45° e 60° são os mais usados em trigonometria.

Usando a calculadora

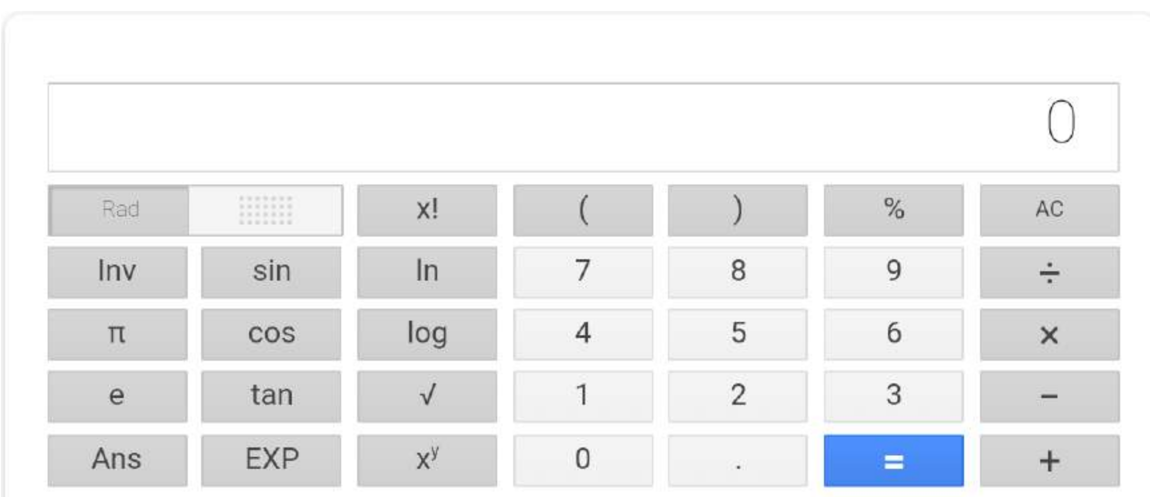
As calculadoras científicas e as calculadoras dos smartphones calculam razões trigonométricas. É possível, também, acessar uma calculadora pelo site do Google, digitando "calculadora", ou pelo link:

https://www.google.com.br/search?q=calculadora&oq=calculadi&aqs=chrome.1.69i57j0l5.3023j0j9&sourceid=chrome&ie=UTF-8.

Ao fazer isso aparecerá na tela do seu celular a seguinte calculadora:



Você pode deixar seu celular na horizontal para expandir as funções da calculadora.

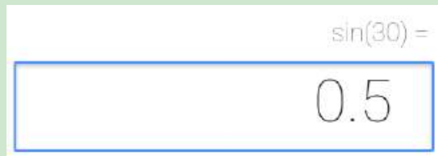


Observe que, na segunda coluna, temos as funções sin, cos, e tan que representam, respectivamente, seno, cosseno e tangente. Note, ainda, que na primeira linha e primeira coluna está escrito Rad e ao lado direito temos um botão. Clicando nesse botão, o Rad é coberto e aparece Deg, que significa que a calculadora está operando em graus (degree).

Desta forma podemos calcular as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de ângulos medidos em graus.

Exemplo

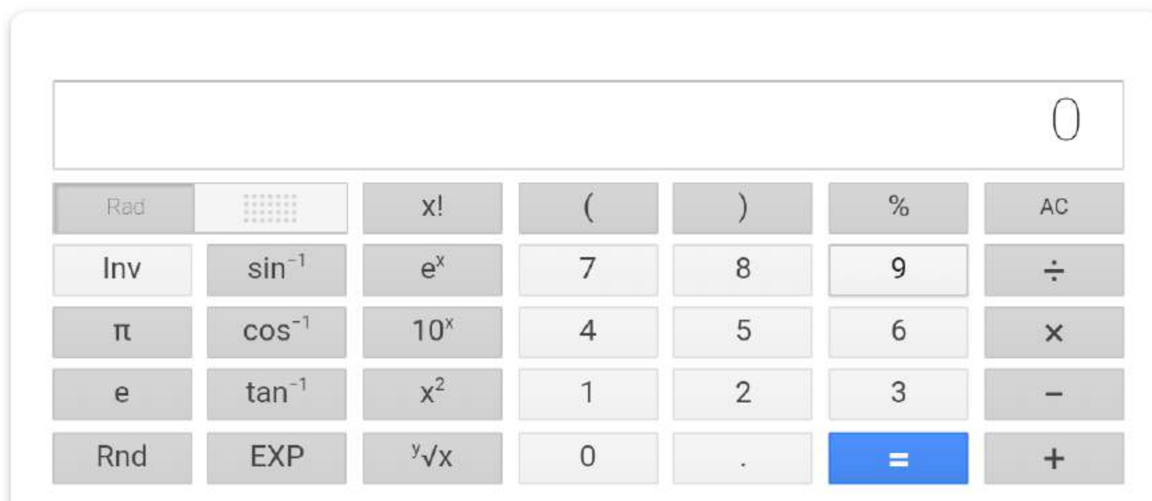
Ao digitarmos as tecla sin, digitarmos o número 30 e clicarmos em =, aparecerá na tela o seno de 30°.



E isso pode ser feito para qualquer ângulo que desejarmos.

As razões trigonométricas de ângulos agudos pertencem ao intervalo (0,1) e, para todo valor x neste intervalo, existe um único ângulo agudo tal que o seu seno é igual a x, o mesmo vale para o cosseno, já para a tangente, temos que, para qualquer valor positivo y, existe um único ângulo agudo tal que a sua tangente é igual a y. Dito isto, é possível saber, através da calculadora, qual o ângulo que tem um determinado seno, um determinado cosseno ou uma determinada tangente igual a certo valor.

Para isto, é peciso clicar no botão Inv. Feito isso, alguns botões das três primeiras colunas vão mudar.

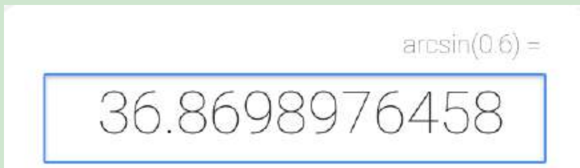


E, então, podemos usar $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ ou $\tan^{-1}$ para descobrir qual o ângulo que tem, respectivamente, seno, cosseno ou tangente igual a determinado valor.

Exemplo

Ao teclarmos $\tan^{-1}$, 1 e = aparecerá:

Conforme já havíamos calculado. E ao digitar $\sin^{-1}$, 0.6 e = aparecerá:



Aproximando para duas casas decimais, temos que o ângulo agudo cujo seno é 0,6 é o ângulo de $36,87°$.

Exercícios

1- Usando uma calculadora determine os valores de:
a) sen 37
b) cos 37
c) tg 58
d) tg 87

Relação Fundamental da Trigonometria

Em muitos problemas de trigonometria é necessário converter o seno de um ângulo no cosseno do mesmo ângulo ou vice-versa. Vamos, utilizando o que foi estudado até agora, mostrar como se faz tal conversão, conhecida como a "Relação Fundamental da Trigonometria".

Importante
Usaremos a notação $\operatorname{sen}^2(x)$ de maneira que $\operatorname{sen}^2(x) = (\operatorname{sen}(x))^2 = \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(x)$. O mesmo vale para cosseno e tangente.

Teorema
Para qualquer ângulo agudo α, temos:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Demonstração:
Do triângulo inicial, temos:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

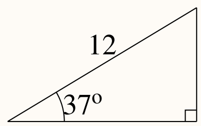
Mas, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, então:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Exercícios

1- Seja α um ângulo tal que o $\cos\alpha = \dfrac{3}{7}$. Determine $\operatorname{sen}\alpha$.

2- Sabendo que o $\operatorname{sen} 37° \approx 0,6$ e que a medida da hipotenusa do triângulo a seguir é 12, determine o valor da $\operatorname{tg} 37°$.



3- Se x é um ângulo agudo e $\cos x = 0,9744$, calcule $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$. Use uma calculadora. Resolva o exercício primeiro sem usar sen^{-1}, $\cos^{-1}$ e tg^{-1}, e depois usando qualquer função da calculadora.

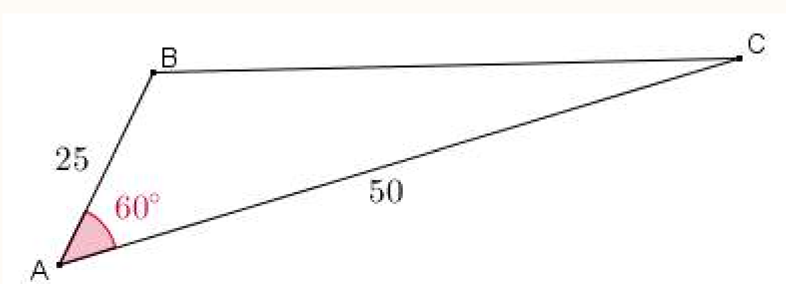
4- Sabendo que $\operatorname{tg}(x) = \sqrt{15}$, calcular $\operatorname{sen}(x)$ e $cos(x)$.

Exercícios Complementares

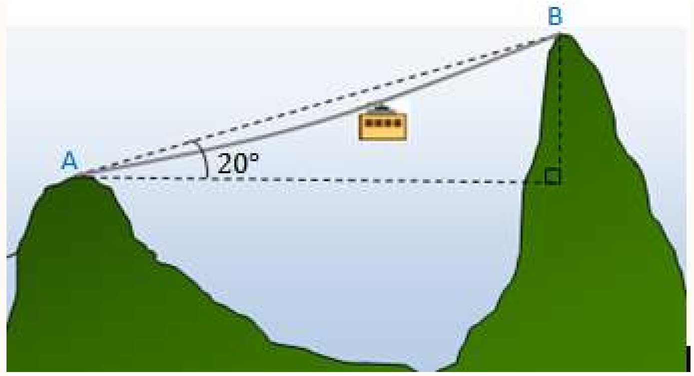
1. Quando o Sol está a 30^o acima do horizonte, um edifício de 100 metros projeta uma sombra de quantos metros?
2. A quantos graus acima do horizonte deve estar o Sol para que um edifício projete uma sombra com o seu tamanho?
3. Do lugar onde me encontro, avisto uma torre segundo um ângulo de $32°$ com a horizontal. Se me aproximo 25 metros da torre, o ângulo é de $50°$. Qual é a altura da torre? Use uma calculadora.
4. Se θ_1, θ_2, θ_3 são ângulos agudos, calcule e complete a tabela abaixo, com valores aproximados. Use uma calculadora. Resolva o exercício primeiro sem usar sen^{-1}, $\cos^{-1}$ e tg^{-1}, e depois usando qualquer função da calculadora.

	θ_1	θ_2	θ_3
seno	0,87		
cosseno		0,14	
tangente			5,56

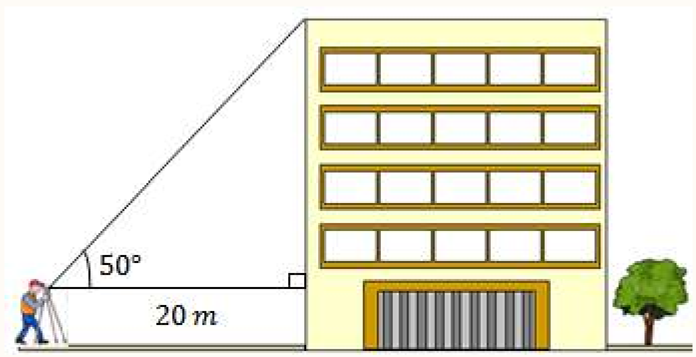
5. Uma escada de 3 metros está apoiada em uma parede. Se o pé da escada está apoiado no chão a uma distância de 1,2 m da parede, qual a medida aproximada do ângulo que a escada forma com o chão? Use uma calculadora.
6. O lado desigual de um triângulo isósceles mede 18 cm e a altura do triângulo relativa a este lado mede 10 cm. Quais as medidas, em graus, dos três ângulos do triângulo em questão? Use uma calculadora.
7. Duas retas tangentes a uma circunferência c de centro O e raio $12cm$, traçadas a partir de um ponto P exterior a c, formam, entre si, um ângulo de 52^o. Qual a distância entre os pontos O e P? Use uma calculadora.
8. Existe algum ângulo de medida θ, de sorte que $sen\theta = \frac{3}{5}$ e $cos\theta = \frac{1}{4}$? justifique sua resposta.
9. Podemos utilizar a trigonometria dos triângulos retângulos para resolvermos problemas cuja modelagem matemática utilize triângulos que não sejam retângulos. Por exemplo, qual é a distância entre os vértices B e C do triângulo abaixo?



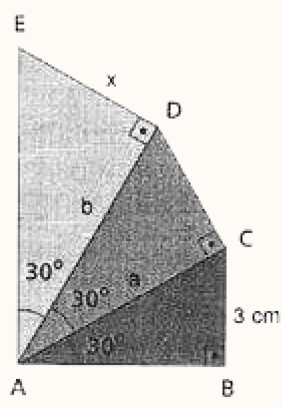
10. A Secretaria de Turismo de uma cidade vai instalar um teleférico ligando os topos de duas montanhas, uma com 872 m e a outra com 761 m de altura, conforme a figura. Os engenheiros responsáveis pelo projeto mediram o ângulo de vértice A e calcularam que o cabo de aço que sustentará o teleférico tem curvatura e, por isso, seu comprimento é 7% maior que a medida do segmento de reta AB. Assim, calcule o comprimento do cabo. Use uma calculadora.



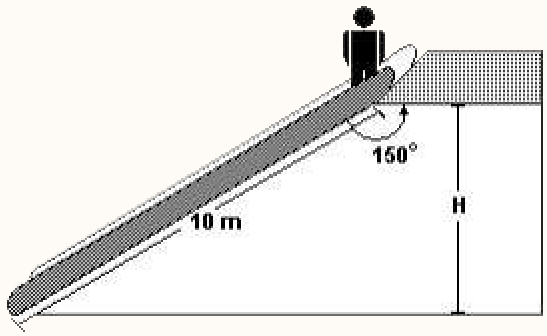
11. Uma pessoa usando um teodolito sob um tripé de $1,75\ m$ de altura que se encontra a $20\ m$ da base de um edifício vê o ponto mais alto dele sob um ângulo de 50^o. Qual a altura aproximada do edifício? Use uma calculadora. Arredonde sua resposta para 2 casas decimais.



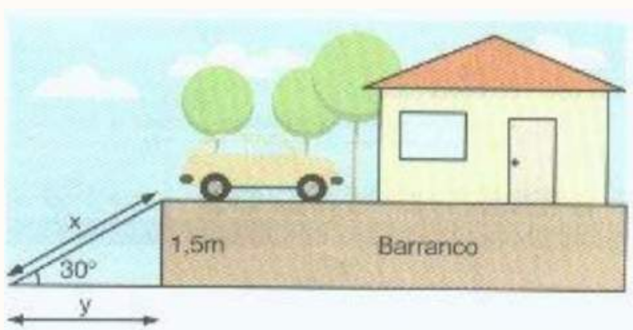
12. Esta figura é formada por três triângulos retângulos que tem ângulos agudos de 30^o. Sabendo que $\overline{BC}$ mede $3cm$, calcule a medida de $\overline{DE}$.



13. (UFPB 2007) Em um shopping, uma pessoa sai do primeiro pavimento para o segundo através de uma escada rolante, conforme a figura a seguir. A altura H, em metros, atingida pela pessoa, ao chegar ao segundo pavimento, vale?



14. Observe a figura e calcule qual o comprimento x da rampa e qual a distância y da base da rampa até o barranco:

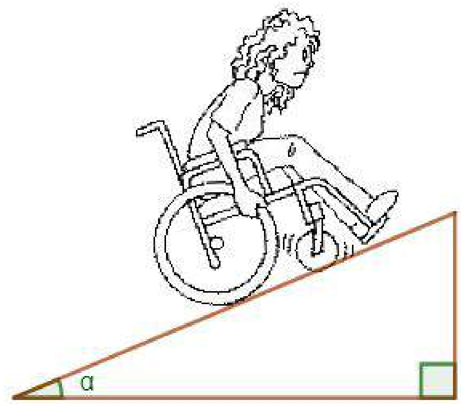


1.4 Voltando ao Problema Inicial

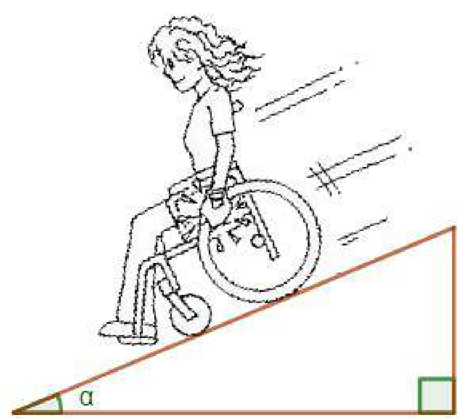
Qual força empurra o cadeirante para base da rampa ?

Agora que você já aprendeu como calcular as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, vamos falar sobre a força que empurra um cadeirante para trás quando ele está subindo a rampa.

Imagine que um cadeirante começa a subir uma rampa sozinho. Ele força a roda até chegar ao topo da rampa.



Na hora de voltar ele não precisa fazer força para descer a rampa, pois uma força invisível o empurra para baixo.



Isaac Newton formulou algumas leis da física que dizem porquê isto acontece. De acordo com as ideias de Newton, o que empurra o cadeirante para baixo é uma força e, neste caso, é conhecida como força gravitacional.

Quando a pessoa está subindo a rampa, a gravidade a empurra para baixo, e, então, a força feita pelo cadeirante sobre a roda deve ser maior do que a força com que a gravidade o empurra para baixo.

Na descida, essa mesma força empurra o cadeirante rampa abaixo e, por isso, ele não precisa fazer esforço para a cadeira andar.

Esta força foi descoberta (deduzida) e conseguimos saber qual o tamanho dela usando a seguinte fórmula:

$$F_g = F_p \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

em que
F_g é a força gravitacional.
F_p é a força peso.
α é o ângulo de inclinação da rampa.

Você sabia?

Força Peso

A força peso é a força que a gravidade faz empurrando a cadeira e o cadeirante contra a rampa. Ela pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$F_p = m \cdot g$$

em que
m é a massa total do cadeirante e da cadeira.
g é aceleração da gravidade igual a aproximadamente $9,81\ m/s^2$.

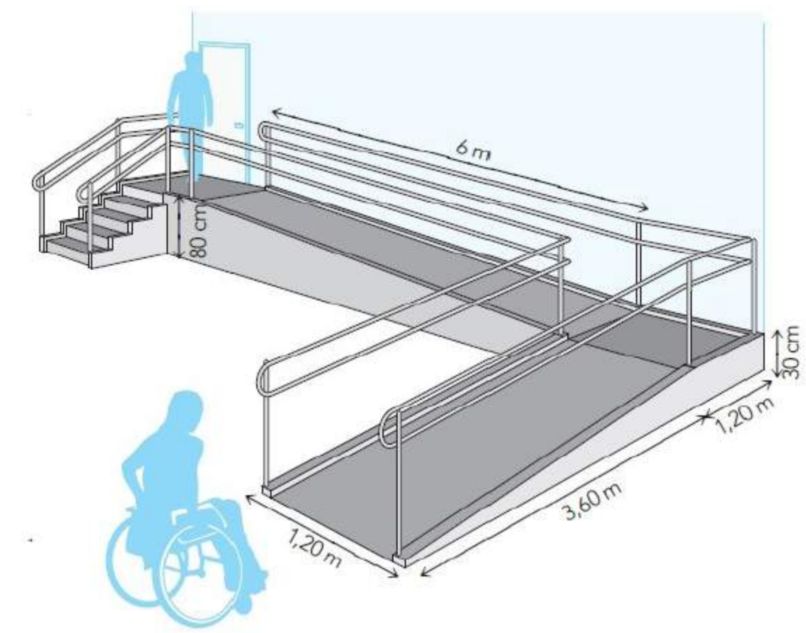
Chamamos de inclinação de uma rampa a razão entre a altura da rampa e o comprimento horizontal da rampa, ou seja, uma rampa cujo ângulo da base mede α tem inclinação $i = \operatorname{tg}(\alpha)$.
A norma que rege as condições de acessibilidade é a NBR 9050. Esta norma apresenta a tabela abaixo de dimensionamento de rampas, com a inclinação admissível em cada segmento. De maneira geral, para inclinações entre 0,0625 e 0,0833, é recomendado que haja áreas de descanso a cada 50 m de percurso.

Desníveis máximos de cada segmento de rampa h (em metros)	Inclinação admissível em cada segmento de rampa i	Número máximos de segmentos de rampa
1,5	até 0,05	sem limite
1,0	$0,05 < i \leq 0,0625$	sem limite
0,8	$0,0625 < i \leq 0,0833$	15

Conforme a tabela acima, a inclinação máxima de uma rampa deve ser 0,0833. Porém, em reformas, quando esgotadas as possibilidades de soluções que atendam integralmente a tabela anterior, é permitido usar inclinações superiores (entre 0,0833 e 0,125), conforme a seguir:

Desníveis máximos de cada segmento de rampa h (em metros)	Inclinação admissível em cada segmento de rampa i	Número máximos de segmentos de rampa
0,2	$0,0833 < i \leq 0,1$	4
0,075	$0,1 < i \leq 0,125$	1

Observe a seguinte situação:



Projeto de uma rampa para uma escada existente

Pergunta: Qual a inclinação de cada uma das rampas que aparecem na imagem? Elas atendem à norma? Qual a força mínima, desconsiderando a influência de qualquer outra força, que um cadeirante precisa exercer para subir cada uma das rampas, sabendo que a massa total do cadeirante, juntamente com a sua cadeira, é de 150 Kg?

Agora que você já sabe um pouco de trigonometria e tem os dados sobre as dimensões de rampa permitidas, você pode contribuir para tornar o mundo mais inclusivo, verificando se as rampas da sua escola, bairro e cidade estão adequadas.

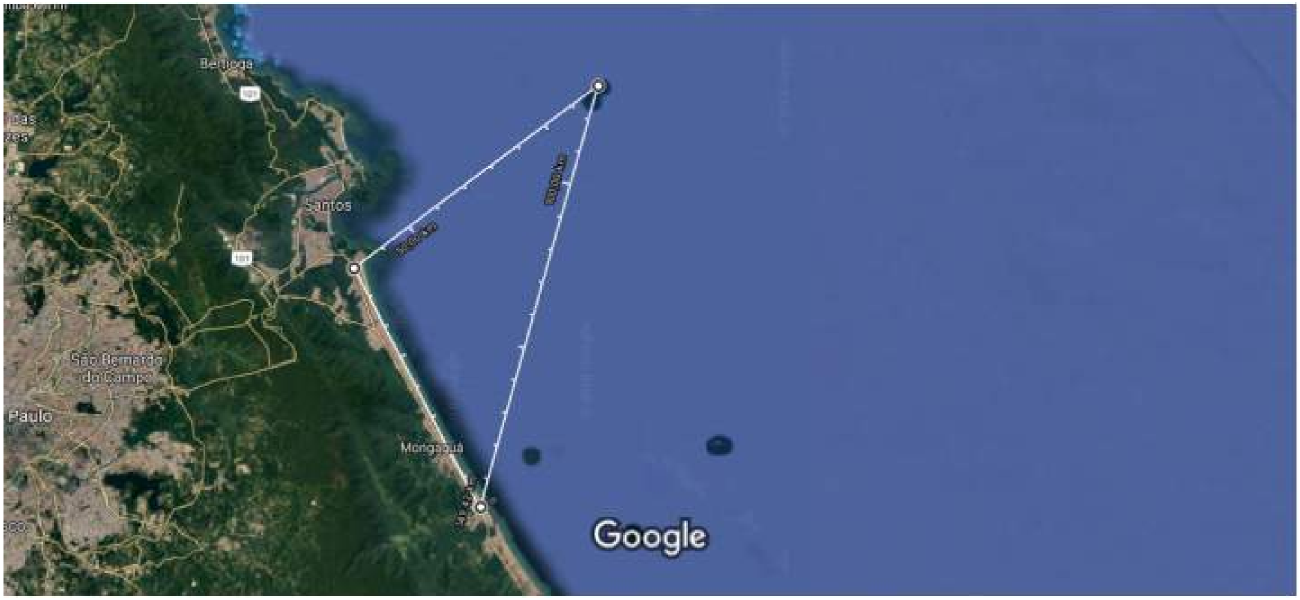
2. Trigonometria num triângulo qualquer

2.1 Introdução

Localizado no litoral Sul paulista, o Parque Estadual Marinho da Laje de Santos é um dos paraísos mais disputados por mergulhadores. Com uma área de 5000 hectares e formado por rochas e corais, esta maravilha possui inimaginável riqueza natural.

Imagine que um mergulhador queira ir de lancha até a Laje de Santos. Para isso, precisa saber a distância que vai percorrer para poder calcular os custos da viagem.

Vamos mostrar, nesse capítulo, um poderoso Teorema matemático que pode solucionar o problema do mergulhador.

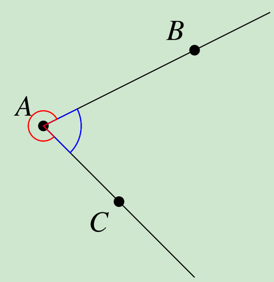


2.2 Revisando...

Notação

- **Ângulos:** Um ângulo é a região compreendida entre duas semirretas de mesma origem. A medida de um ângulo está associada à abertura entre essas duas semirretas. Duas semirretas, de mesma origem, dividem o plano em duas partes. Porém, até agora, quando tratávamos de ângulo nós considerávamos a sua menor "região".

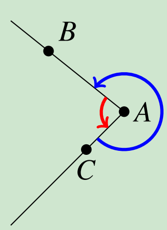
Exemplo



No capítulo 1, quando falávamos em ângulo $B\widehat{A}C$ ou $C\widehat{A}B$ nos referíamos simplesmente ao ângulo de "abertura" menor que 180° como o ângulo azul ao lado.

A partir de agora, vamos considerar, também, ângulos cuja medida sejam maiores do que 180° e, para ficar claro, quando estamos falando de um ou de outro vamos considerar que os ângulos têm uma orientação.
O sentido do ângulo que vamos considerar é o sentido anti-horário.
Adotaremos o seguinte: a medida do ângulo $A\widehat{B}C$ considera a abertura que tem como origem a semirreta $\overrightarrow{BA}$ e segue até a semirreta $\overrightarrow{BC}$, já a medida do ângulo $C\widehat{B}A$ parte de $\overrightarrow{BC}$ e vai até $\overrightarrow{BA}$, sempre no sentido anti-horário.

Exemplo



O ângulo $C\widehat{A}B$ considera a medida da abertura indicada em azul e o ângulo $B\widehat{A}C$ considera a medida da abertura indicada em vermelho. Tendo em vista que uma volta completa tem 360°, temos:

$$\mathrm{m}C\widehat{A}B + \mathrm{m}B\widehat{A}C = 360^\circ$$

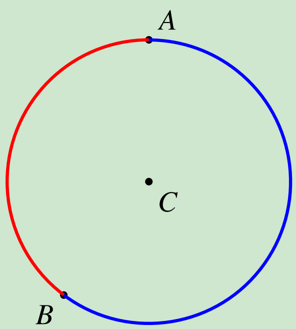
ou ainda,

$$\mathrm{m}C\widehat{A}B = 360^\circ - \mathrm{m}B\widehat{A}C$$

Observação: $\mathrm{m}C\widehat{A}B$ e $\mathrm{m}B\widehat{A}C$ referem-se às medidas dos ângulos $C\widehat{A}B$ e $B\widehat{A}C$, respectivamente.

- **Arco de circunferência** Vamos considerar que os arcos de circunferência também são orientados, ou seja, quando nos referirmos a um arco de circunferência $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ estamos nos referindo ao arco de circunferência que parte de A em sentido anti-horário até o ponto B. Denotaremos por $\mathrm{m}\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ a medida angular do arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$.

Exemplo

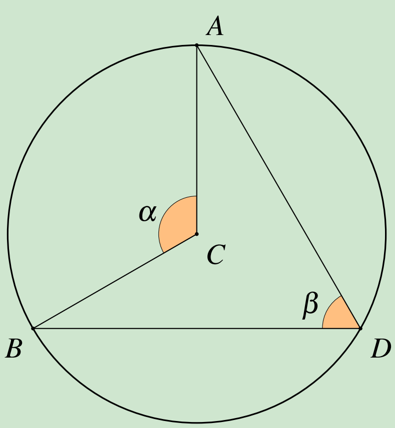


O arco $\overset{\frown}{AB}$ é o arco em vermelho, enquanto que o arco $\overset{\frown}{BA}$ é o arco em azul.

Ângulo Central e Ângulo Inscrito

O ângulo central é o ângulo que determina um arco na circunferência e tem vértice no centro da circunferência. A medida angular de um arco é igual a medida do ângulo central correspondente.
O ângulo inscrito determina um arco na circunferência e seu vértice pertence à circunferência. Um ângulo inscrito tem medida igual à metade da medida do ângulo central correspondente, logo, tem medida igual à metade da medida angular do arco que determina. Por exemplo, α é ângulo central e β é ângulo inscrito:

Exemplo



Na figura ao lado temos as seguintes relações:

$$m\overset{\frown}{AB} = mA\hat{C}B = \alpha$$

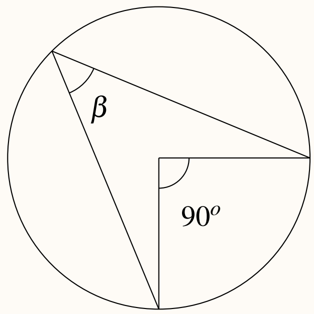
E:

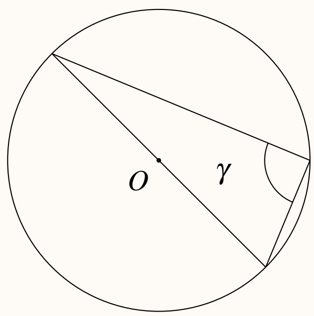
$$mA\hat{D}B = \frac{mA\hat{C}B}{2} = \frac{m\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{\alpha}{2} = \beta$$

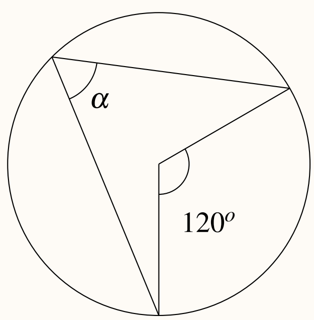
Atenção
Não confundir a medida angular de um arco com comprimento de um arco.
A medida angular de um arco tem como unidade unidades associadas a ângulos, o grau, o radiano, etc.
Já o comprimento tem como unidade uma unidade de comprimento, o metro, o centímetro, etc.

Exercícios

1. Calcule os ângulos α, β e γ marcados nas figuras



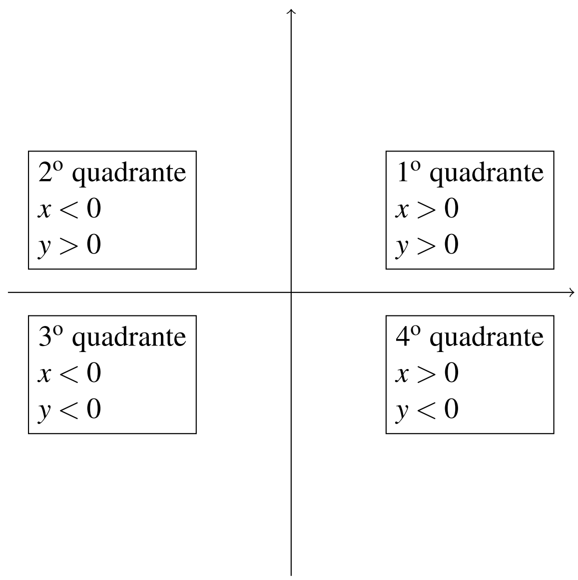




Plano Cartesiano

O plano cartesiano é formado por duas retas orientadas e perpendiculares que divide o plano em quatro regiões e cuja a intersecção é chamada origem do plano cartesiano. A origem corresponde ao zero tanto na reta horizontal x quanto na reta vertical y, a reta das abcissas (reta x) é orientada no sentido de oeste para leste e a reta das ordenadas (reta y) é orientada de sul para norte.

As 4 regiões formadas pelas retas são chamadas de quadrantes.



2.3 Uma nova unidade para ângulos, o radiano

Estamos acostumados a usar como medida de ângulos o grau. Dividindo uma volta completa em 360 partes e tomando uma dessas partes, temos 1°. Vamos ver, agora, uma outra unidade de ângulos, o radiano.

Definição

A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento de um arco de circunferência determinado por este ângulo, quando o mesmo possui vértice no centro da circunferência, e o raio desta mesma circunferência.

Sabendo que o comprimento de uma circunferência (que corresponde ao arco de um ângulo central de 360°) tem medida $C = 2\pi \cdot R$, concluímos que um ângulo de 360° corresponde a:

$$\frac{2\pi \cdot R}{R} = 2\pi \text{ radianos}$$

Ou ainda, podemos dizer que um ângulo de 180° corresponde a π radianos.

Sabendo que as medidas em graus e radianos são proporcionais, podemos converter as medidas dos ângulos de graus para radianos e vice-versa, a partir da proporcionalidade.

$$\frac{x}{180^\circ} = \frac{y}{\pi}$$

Em que x é a medida em graus e y é a medida em radianos.

Obs: Usamos rad como notação para a unidade radianos.

Exercícios

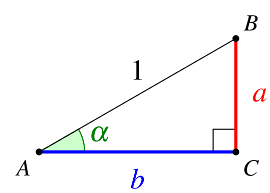
1. Sabemos que a medida de 180^{o} equivale a π radianos. Determine qual valor em radianos equivale a 1^{o}.
2. Calcule as seguintes transformações de medida de ângulo
   (a) 120^{o} em radianos.
   (b) $\frac{2\pi}{7}$ em graus.
   (c) 234^{o} em radianos.

(d) $\dfrac{3\pi}{4}$ em graus.

3. (FUVEST) Quantos graus mede aproximadamente um ângulo de 0,105 radianos? Arredonde sua resposta para uma casa decimal.

2.4 Círculo trigonométrico

Observe o triângulo retângulo abaixo, em que $\overline{AC}$ está na horizontal e a medida do ângulo orientado $C\widehat{A}B$ é α.



Note que a hipotenusa vale 1. Podemos concluir que:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{1} = a$$

e

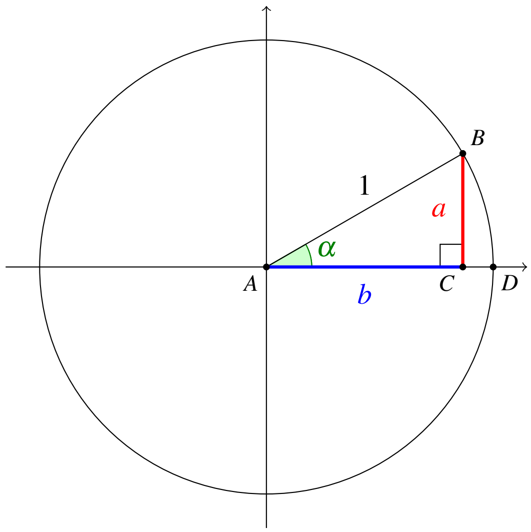
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{1} = b$$

Concluímos que o $\operatorname{sen}(\alpha)$ corresponde à medida do segmento $\overline{BC}$ e que o $\cos(\alpha)$ corresponde à medida do segmento $\overline{AC}$.

Até o momento vimos as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente para um triângulo retângulo, limitando esses conceitos para ângulos agudos ($0° < \alpha < 90°$). Vamos criar uma maneira de expandir esses conceitos para todos os ângulos de uma volta completa, isto é, ângulos entre $0°$ e $360°$, inclusos, mas mantendo duas relações importantes que são:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \qquad\qquad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Com isso em mente, é possível construir uma circunferência de raio 1, no plano cartesiano xOy, com centro na origem. Colocando neste plano cartesiano o nosso triângulo ABC inicial, com o vértice A na origem temos que, como $AB = 1$, o vértice B pertence à circunferência. Temos ainda que o vértice C pertence ao eixo horizontal x.



Definindo $D=(1,0)$, vemos que $D\widehat{A}B = C\widehat{A}B$. Note que, conforme discutido inicialmente a medida $BC = a$, ou seja, a ordenada do ponto B é igual ao seno do ângulo $D\widehat{A}B$ e a medida $AC = b$, abcissa do nosso ponto B, é igual ao cosseno de $D\widehat{A}B$. Desta forma vamos definir:

Definição

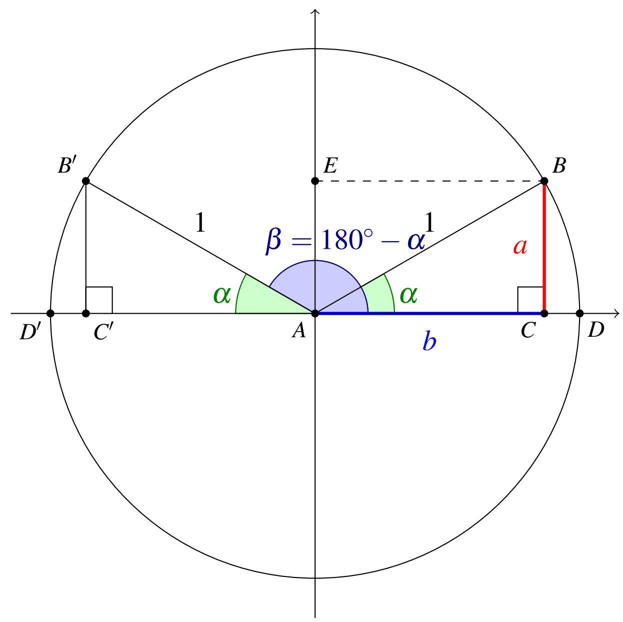
Tome o ponto A na origem do plano cartesiano xOy, $D=(1,0)$ e P de tal forma que $AP = 1$, ou seja, P pertencendo à circunferência de raio 1 centrada em A.

O seno do ângulo orientado $D\widehat{A}P$ de medida α será igual a ordenada do ponto P, o cosseno do ângulo orientado $D\widehat{A}P$ será igual a abcissa do ponto P e $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

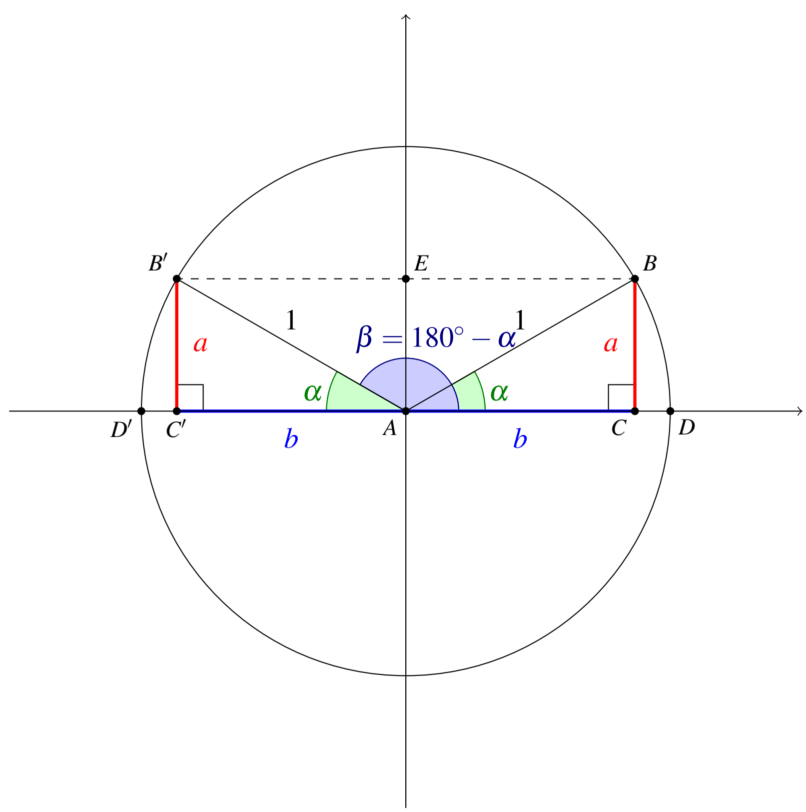
Observe que a definição acima mantém válida não somente que $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, mas, também, mantém válida a relação $\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1$ e, também, mantém os mesmos valores das relações métricas (seno, cosseno e tangente) de ângulos agudos que já havíamos definido no capítulo 1. Além de definir o seno, o cosseno e a tangente para qualquer ângulo de medida $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$.

Seno e cosseno de ângulos do segundo quadrante

Vamos definir $D' = (-1,0)$, tomar um ponto B' no segundo quadrante de tal forma que $\mathrm{m}B'\widehat{A}D' = \alpha$ e a intersecção C' entre a reta perpendicular ao eixo x passando por B' e o eixo x. Observe que $\mathrm{m}(D\widehat{A}B') = 180^\circ - \mathrm{m}(B'\widehat{A}D') = 180^\circ - \alpha$.



Percebemos que os triângulo ABC e $AB'C'$ são congruentes, pelo caso de congruência LAAo, pois possuem um par de lados congruentes ($AB = AB'$), um par de ângulos congruentes ($C\widehat{A}B = D\widehat{A}B \cong B'\widehat{A}D' = B'\widehat{A}C'$) e os ângulos opostos a $\overline{AB}$ e $\overline{AB'}$ congruentes ($\text{m}B\widehat{C}A = \text{m}A\widehat{C'}B' = 90^\circ$). Como consequência disso temos que $B'C' = BC$ e $AC' = AC$.



Assim a abcissa de B' é igual a $AC' = -AC = -\cos(\alpha)$ e a ordenada de B' é igual a $B'C' = BC = \text{ sen}(\alpha)$. Portanto para $0^\circ < \alpha < 90^\circ$:

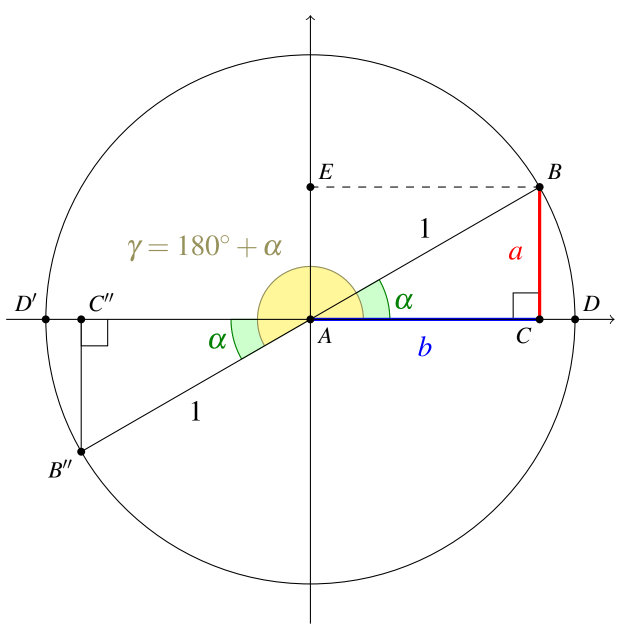
$$\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{ sen}(\alpha)$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

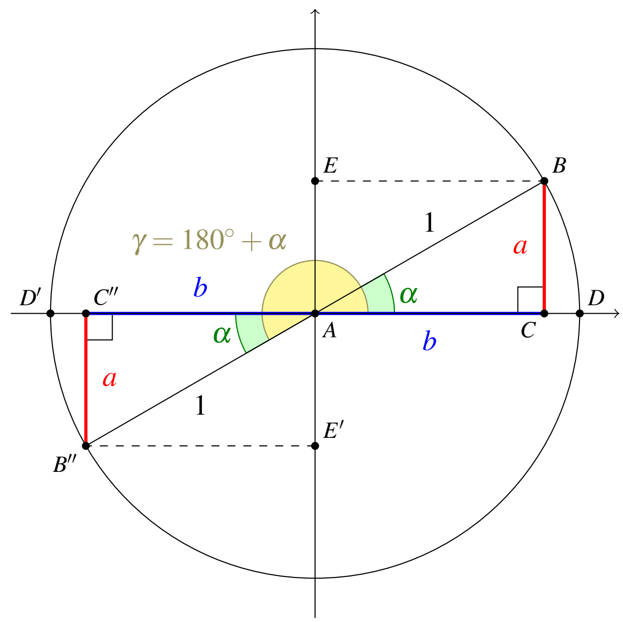
Assim, conhecendo o valor das razões trigonométricas de um ângulo do 1º quadrante ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), podemos calcular o valor das razões trigonométricas do seu suplementar $\beta = 180^\circ - \alpha$, que pertence ao segundo quadrante ($90^\circ < \beta < 180^\circ$).

Seno e cosseno de ângulos do terceiro quadrante

Vamos, agora, traçar a reta $\overleftrightarrow{AB}$, marcar a intersecção B'' desta reta com a circunferência e a intersecção C'' entre a reta perpendicular ao eixo x passando por B'' e o eixo x. Observe que $D'\widehat{A}B''$ é congruente a $D\widehat{A}B$ ($\text{m}D'\widehat{A}B'' = \text{m}D\widehat{A}B = \alpha$), pois são ângulos opostos pelo vértice e daí $\text{m}D\widehat{A}B'' = 180^\circ + \alpha$.



Percebemos que os triângulo ABC e $AB''C''$ são congruentes pelo caso de congruência LAAo, pois possuem um par de lados congruentes ($AB = AB''$), um par de ângulos congruentes ($C\widehat{A}B = D\widehat{A}B \cong B''\widehat{A}D' = B''\widehat{A}C''$) e os ângulos opostos a $\overline{AB}$ e $\overline{AB''}$ congruentes ($\text{m}B\widehat{C}A = \text{m}B''\widehat{C''}A = 90^\circ$). Como consequência disso, temos que $B''C'' = BC$ e $AC'' = AC$.



Assim a abcissa de B'' é igual a $-AC'' = -AC = -\cos(\alpha)$ e a ordenada de B'' é igual a $-B''C'' = -BC = -\operatorname{sen}(\alpha)$. Portanto para $0^\circ < \alpha < 90^\circ$:

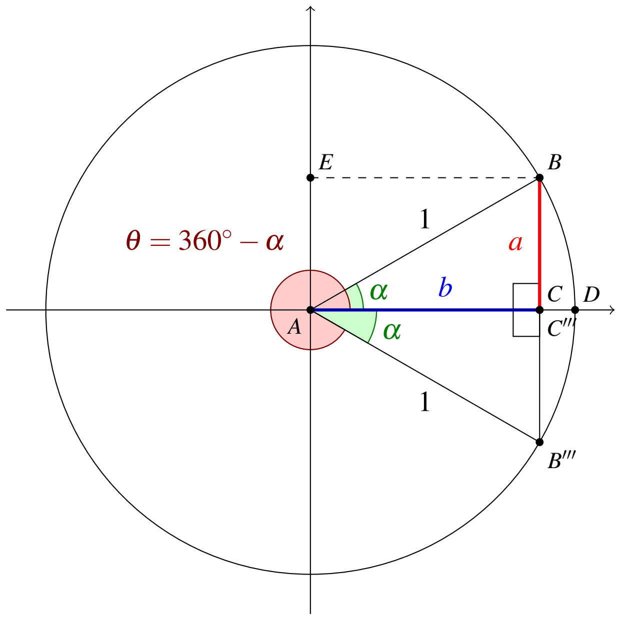
$$\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

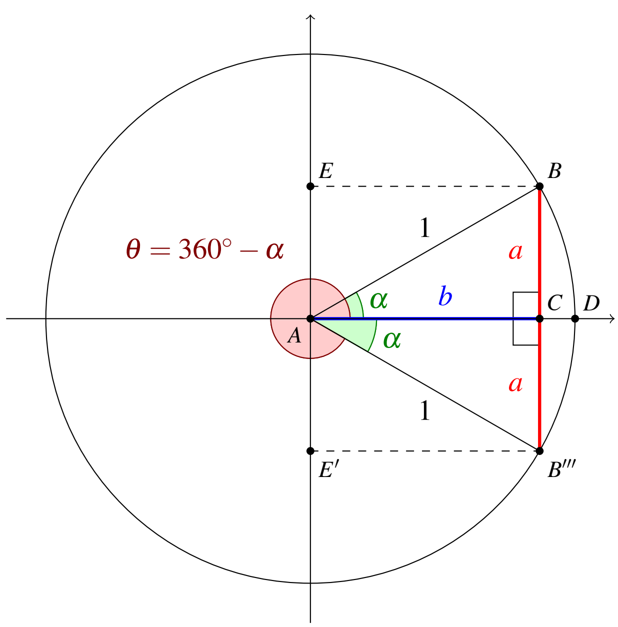
Assim, conhecendo o valor das razões trigonométricas de um ângulo do 1º quadrante ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), podemos calcular o valor das razões trigonométricas de um ângulo $\gamma = 180^\circ + \alpha$ do 3º quadrante ($180^\circ < \gamma < 270^\circ$).

Seno e cosseno de ângulos do quarto quadrante

Por fim, vamos tomar um ponto B''' no quarto quadrante, de tal forma que $\mathrm{m}B'''\widehat{A}D = \alpha$, e a intersecção C''' entre a reta perpendicular ao eixo x passando por B''' e o eixo x. Observe que $\mathrm{m}D\widehat{A}B''' = 360^\circ - \mathrm{m}B'''AD = 360^\circ - \alpha$.



Percebemos que os triângulo ABC e $AB'''C'''$ são congruentes pelo caso de congruência LAAo, pois possuem um par de lados congruentes ($AB = AB'''$), um par de ângulos congruentes ($C\widehat{A}B = D\widehat{A}B \cong B'''\widehat{A}D = B'''\widehat{A}C'''$) e os ângulos opostos a $\overline{AB}$ e $\overline{AB'''}$ congruentes ($\mathrm{m}B\widehat{C}A = \mathrm{m}A\widehat{C'''}B''' = 90^\circ$). Como consequência disso temos que $B'''C''' = BC$ e $AC''' = AC$, ou seja, $C''' = C$.



Assim, a abcissa de B''' é igual a $AC = \cos(\alpha)$ e a ordenada de B''' é igual a $B'''C = BC = -\operatorname{sen}(\alpha)$. Portanto, para $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, temos:

$$\operatorname{sen}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$$

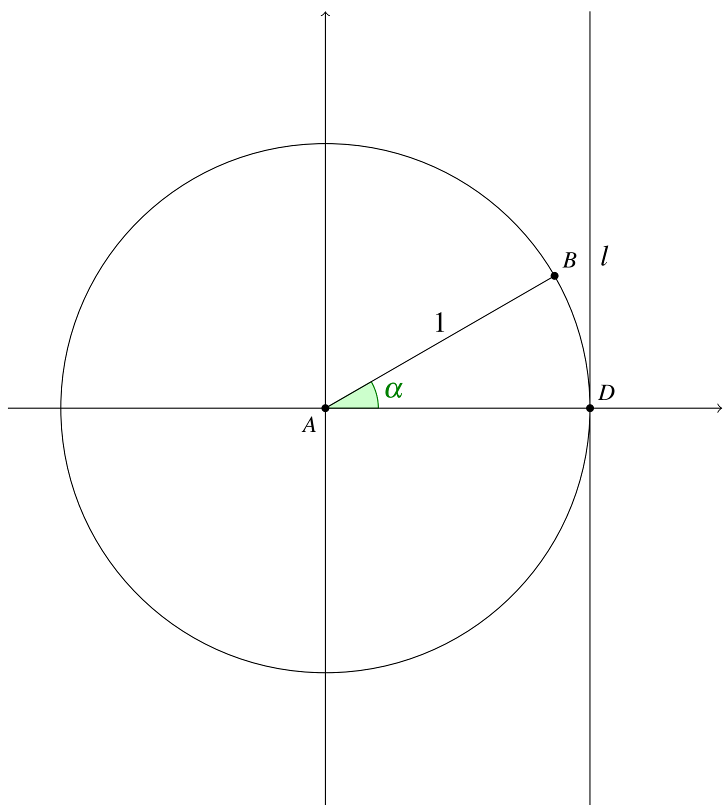
$$\cos(360^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

Então, conhecendo o valor das razões trigonométricas de um ângulo do 1º quadrante ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), podemos calcular o valor das razões trigonométricas do seu replementar $\theta = 360^\circ - \alpha$, que pertence ao quarto quadrante ($270^\circ < \beta < 360^\circ$).

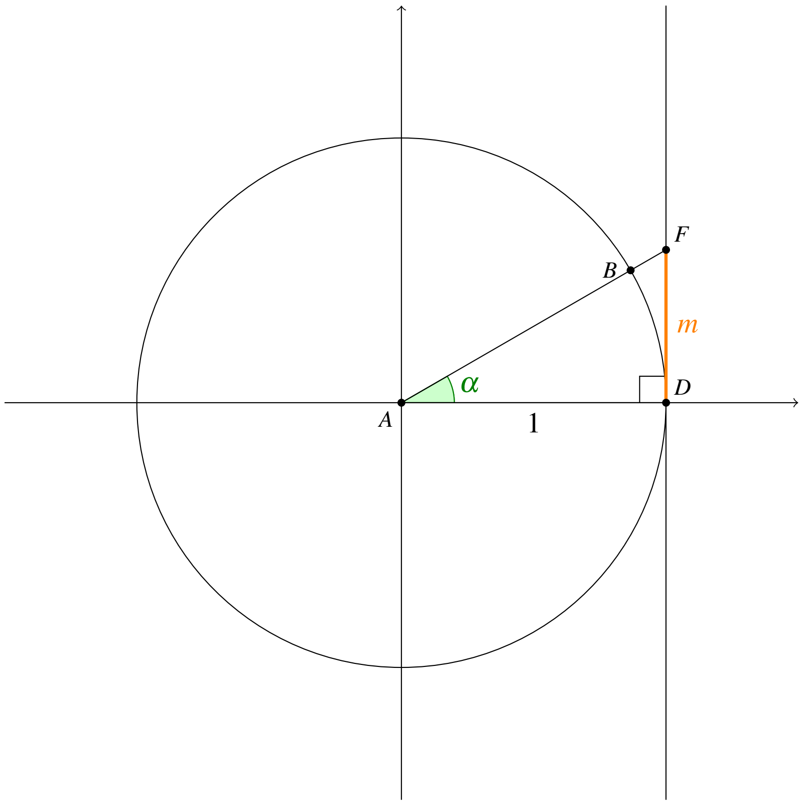
Desta forma, conseguimos transformar o problema de se calcular o seno e o cosseno de um ângulo do segundo, terceiro ou quarto quadrante em calcular o seno e o cosseno de um ângulo no primeiro quadrante.

Tangente de ângulos do primeiro quadrante

E, pela definição, para se calcular a tangente de um ângulo, basta calcular a razão entre o seno e o cosseno do mesmo, porém é possível dar uma interpretação geométrica para o valor da tangente de um ângulo. Para isto vamos considerar uma reta l paralela ao eixo y, passando por D.



Seja F o ponto onde a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intersecta a reta l e $AF = m$. O valor da tangente do ângulo $D\widehat{A}B$ será igual ao valor da ordenada do ponto F.



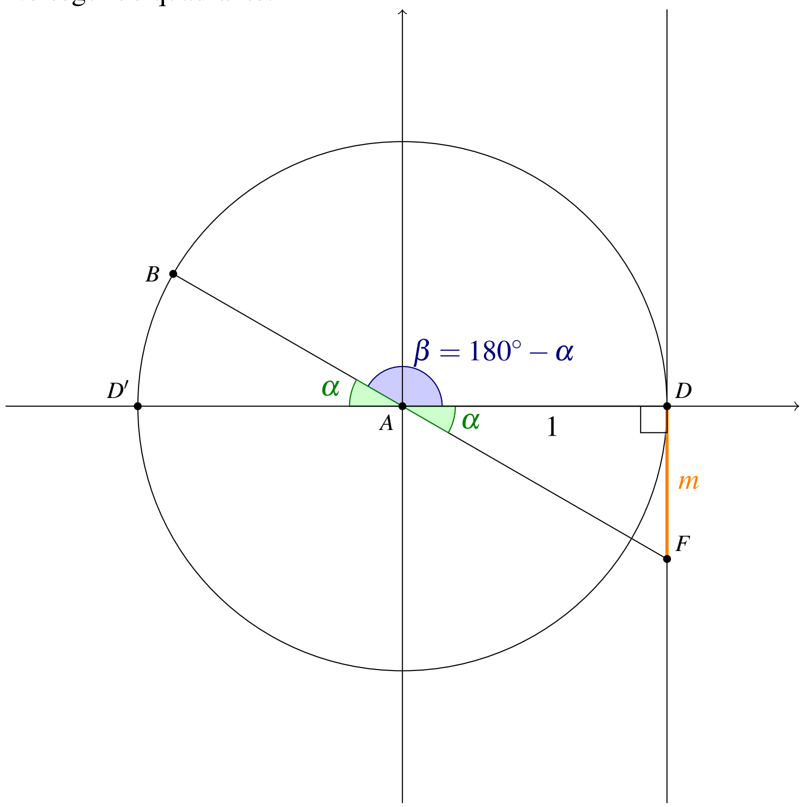
Observe, pelo triângulo acima que, de fato, usando a nossa primeira definição de tangente para ângulos agudos (que é equivalente a segunda, quando restringimos esta também a ângulos agudos), temos:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{AF}{AD} = \frac{m}{1} = m$$

E a ordenada de F é igual a $m = \text{tg}(\alpha)$.

Tangente de ângulos do segundo quadrante

No segundo quadrante:



O ângulo $F\widehat{A}D$ é congruente ao ângulo $B\widehat{A}D'$, pois eles são opostos pelo vértice. Daí, pelo triângulo ADF:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{AF}{AD} = \frac{m}{1} = m$$

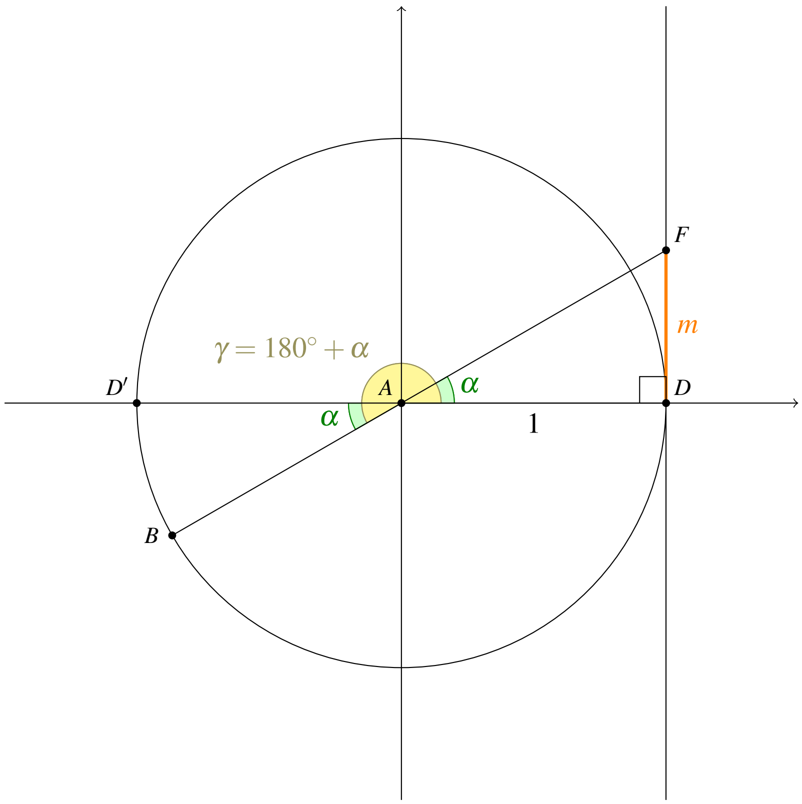
A tangente de $D\widehat{A}B$ é igual a:

$$\operatorname{tg}(\mathrm{m}D\widehat{A}B) = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = -\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\operatorname{tg}(\alpha)$$

E a ordenada de F é igual a $-m = -\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$. Esta última igualdade merece um destaque $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$.

Tangente de ângulos do terceiro quadrante

No terceiro quadrante:



O ângulo $F\widehat{A}D$ é congruente ao ângulo $D'\widehat{A}B$, pois eles são opostos pelo vértice. Daí, pelo triângulo ADF:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{AF}{AD} = \frac{m}{1} = m$$

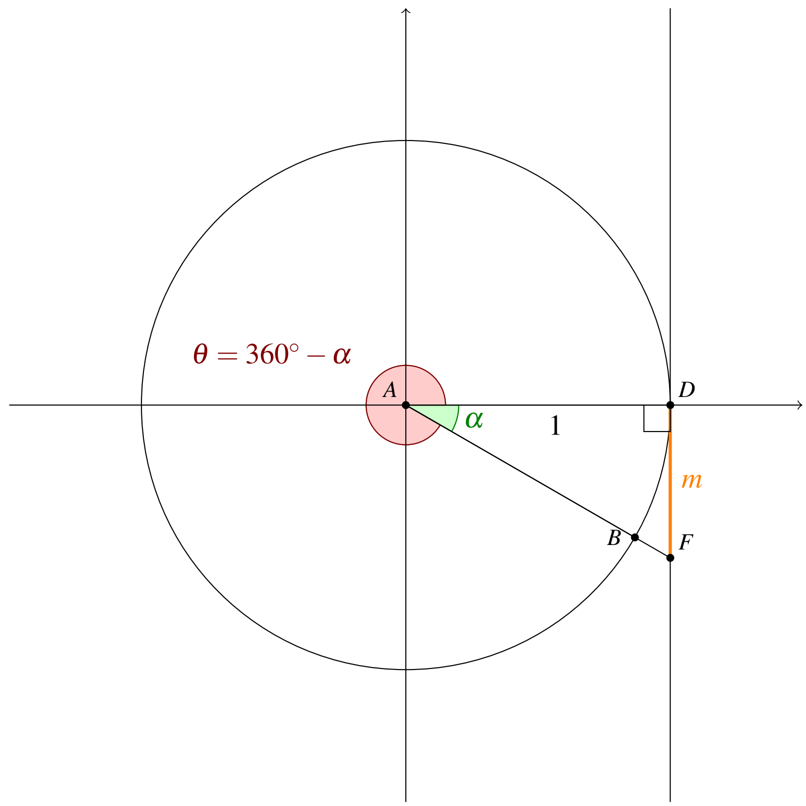
A tangente de $D\widehat{A}B$ é igual a:

$$\operatorname{tg}(\mathrm{m}D\widehat{A}B) = \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \operatorname{tg}(\alpha)$$

E a ordenada de F é igual a $m = \operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$. Destacamos que $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha)$.

Tangente de ângulos do quarto quadrante

No quarto quadrante:



O ângulo $F\widehat{A}D$ é congruente ao ângulo $B\widehat{A}D$, pois eles são opostos pelo vértice. Daí, pelo triângulo ADF:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{AF}{AD} = \frac{m}{1} = m$$

A tangente de $D\widehat{A}B$ é igual a:

$$\operatorname{tg}(\mathrm{m}D\widehat{A}B) = \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(360^\circ - \alpha)}{\cos(360^\circ - \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\operatorname{tg}(\alpha)$$

E a ordenada de F é igual a $-m = -\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)$. Destacamos que $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$.

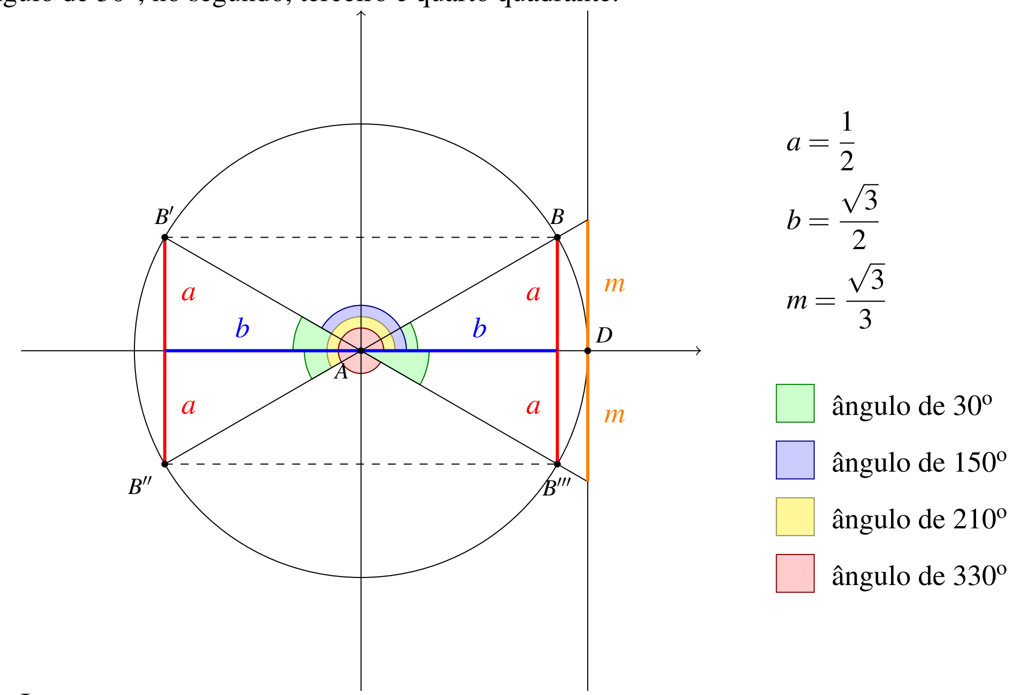
Exercícios

1- Sabendo que $\operatorname{sen}(13^o) = 0,225$, calcule $\cos(167^o)$.
2- Sabendo que x é um arco do segundo quadrante e que $\operatorname{sen} x = 0,8$, determine $\cos\ x$ e $\operatorname{tg}\ x$.
3- Calcule o valor de:
a) $\operatorname{tg}\ 150^o$
b) $\operatorname{tg}\ 120^o$
c) $\operatorname{tg}\ 300^o$

Conhecendo os valores de Seno, Cosseno e Tangente no Ciclo Trigonométrico

Vocês viram no capítulo os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°. Utilizando as igualdades em destaque anteriores podemos calcular os senos, cossenos e tangentes de alguns ângulos contidos nos demais quadrantes.

A figura abaixo mostra o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos correspondentes ao ângulo de 30°, no segundo, terceiro e quarto quadrante.

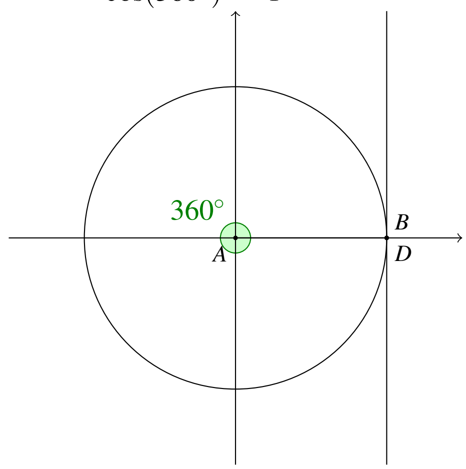


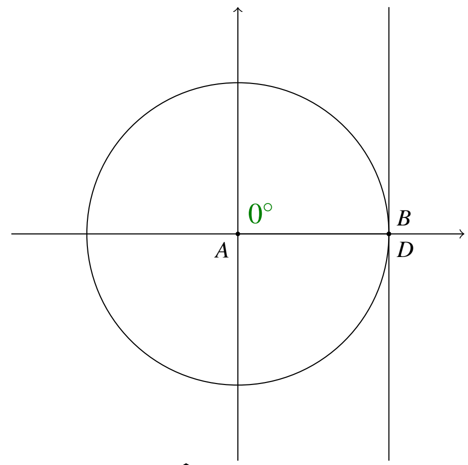
Isso porque:

$$\text{sen}(150^\circ) = \text{sen}(180^\circ - 30^\circ) = \text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$$
$$\text{sen}(210^\circ) = \text{sen}(180^\circ + 30^\circ) = -\text{sen}(30^\circ) = -\frac{1}{2}$$
$$\text{sen}(330^\circ) = \text{sen}(360^\circ - 30^\circ) = -\text{sen}(30^\circ) = -\frac{1}{2}$$
$$\cos(150^\circ) = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos(210^\circ) = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos(330^\circ) = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\text{tg}(150^\circ) = \text{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\text{tg}(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\text{tg}(210^\circ) = \text{tg}(180^\circ + 30^\circ) = \text{tg}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\text{tg}(330^\circ) = \text{tg}(360^\circ - 30^\circ) = -\text{tg}(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

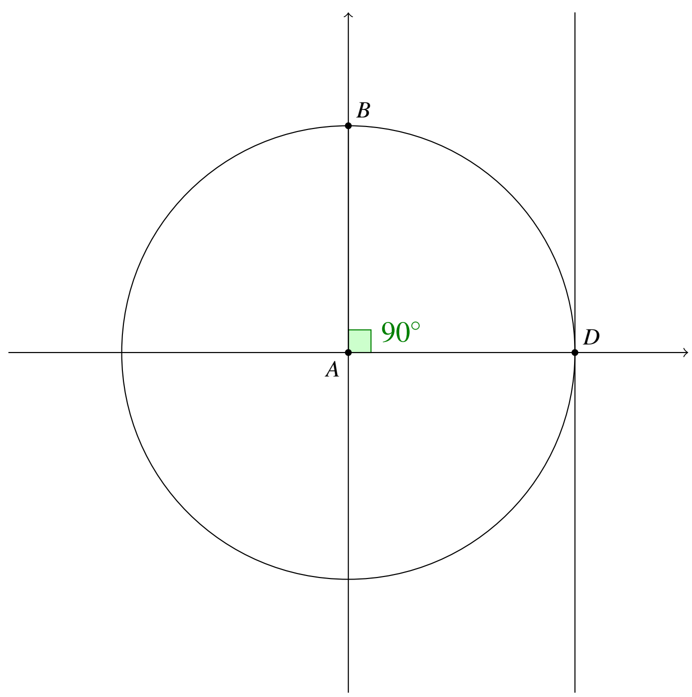
Porém, para completar nossa expansão das razões trigonométricas para $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, precisamos falar ainda dos ângulos 0°, 90°, 180°, 270° e 360°.

Quando o ponto $B = (1,0)$, podemos dizer que o ângulo $D\widehat{A}B$ mede $0°$ ou $360°$, logo $\cos(0°) = \cos(360°) = 1$ e $\operatorname{sen}(0°) = \operatorname{sen}(360°) = 0$, já a tangente é igual a $\operatorname{tg}(0°) = \operatorname{tg}(360°) = \dfrac{\operatorname{sen}(360°)}{\cos(360°)} = \dfrac{0}{1} = 0$.

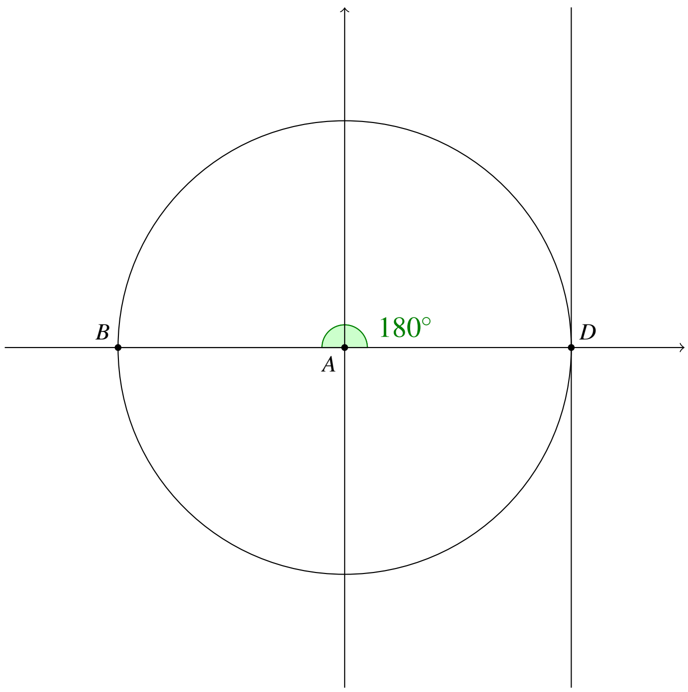




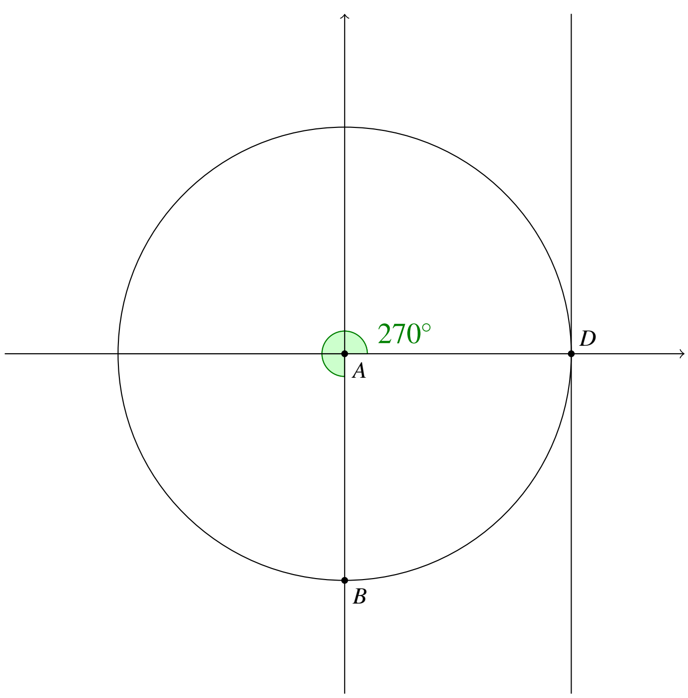
Quando o ponto $B = (0,1)$, podemos dizer que o ângulo $D\widehat{A}B$ mede $90°$, logo $\cos(90°) = 0$ e $\operatorname{sen}(90°) = 1$, porém como o $\cos(90°) = 0$ a tangente deste ângulo não existe.



Quando o ponto $B = (-1,0)$, podemos dizer que o ângulo $D\widehat{A}B$ mede $180°$, logo $\cos(180°) = -1$ e $\operatorname{sen}(180°) = 0$, já a tangente é igual a $\operatorname{tg}(180°) = \dfrac{\operatorname{sen}(180°)}{\cos(180°)} = \dfrac{0}{-1} = 0$.

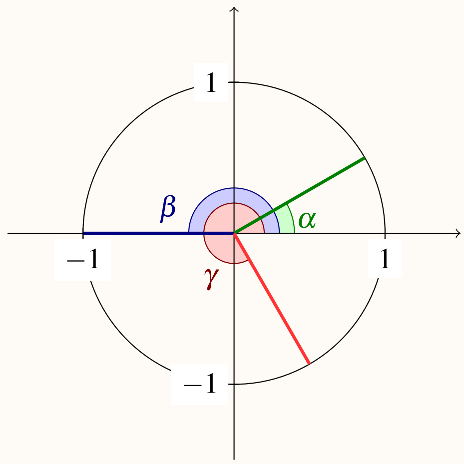


Quando o ponto $B = (0,-1)$, podemos dizer que o ângulo $D\widehat{A}B$ mede $270°$, logo $\cos(270°) = 0$ e $\operatorname{sen}(270°) = -1$, porém como o $\cos(270°) = 0$ a tangente deste ângulo não existe.



Exercícios

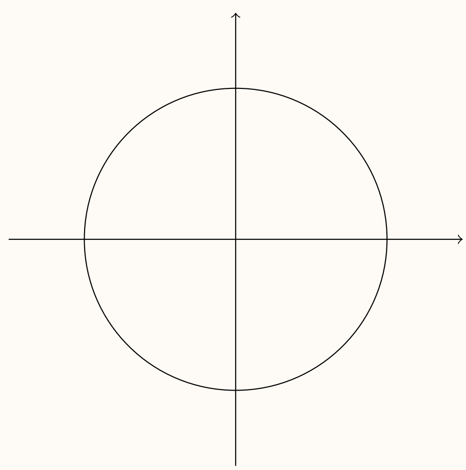
1. Considere os ângulos α, β e γ.



Pode se afirmar que:

(a) $cos\ \alpha < cos\ \beta$
(b) $sen\ \gamma < sen\ \beta$
(c) $sen\ \beta < sen\ \alpha$
(d) $cos\ \gamma < cos\ \beta$
(e) $cos\ \gamma < cos\ \alpha$

Se precisar, use a circunferência abaixo para resolver os exercícios de 2 até 6.



2. Indique o quadrante associado aos ângulos abaixo:

$$135^o,\ 225^o \text{ e } 315^o$$

3. Sabendo que $sen\ 45^o = cos\ 45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, calcule:

$$cos\ 135^o, sen\ 225^o \text{ e } cos\ 315^o$$

Dica: Utilizando um transferidor, marque os arcos na circunferência.

4. Sabendo que $tan\ 45^o = 1$, calcule:

$$tan\ 135^o, tan\ 225^o \text{ e } tan\ 315^o$$

5. Indique o quadrante associado aos ângulos abaixo:

$$120^{\circ},\ 240^{\circ} \text{ e } 300^{\circ}$$

6. Sabendo que *sen* $60^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, calcule:

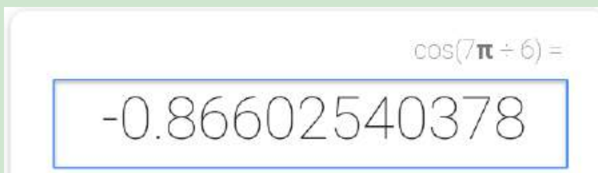
$$cos\ 120^{\circ}, cos\ 240^{\circ} \text{ e } cos\ 300^{\circ}$$

Usando a calculadora

Da mesma forma como fizemos no capítulo 1, podemos calcular as razões trigonométricas para ângulos entre 0° e 360°. Além disso, se deixarmos o modo Rad ativo, ao invéz de Deg, a calculadora irá operar em radianos.

Exemplo

Se teclarmos cos, 7, π, $\div$, 6 e = no modo Rad, aparecerá:



Que é a aproximação decimal de $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$. Note que $\dfrac{7\pi}{6} rad = 210^{\circ}$, e lembre que:

$$\cos(210^{\circ}) = \cos(180^{\circ} + 30^{\circ}) = -\cos(30^{\circ}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se pensarmos nas razões trigonométricas como funções, temos que $\sin : [0^{\circ}, 360^{\circ}] \to [-1, 1]$ e $\cos : [0^{\circ}, 360^{\circ}] \to [-1, 1]$ são funções sobrejetoras, mas não injetoras, pois, por exemplo, $\sin(360^{\circ} - \alpha) = \sin(180^{\circ} + \alpha)$ e $\cos(180^{\circ} - \alpha) = \cos(180^{\circ} + \alpha)$.

A função da calculadora $\cos^{-1}$ é, na verdade, a função inversa da função $\cos : [0^{\circ}, 180^{\circ}] \to [-1, 1]$, observe que no intervalo dado, a função cos é bijetora. Daí quando usamos $\cos^{-1}$ a calculadora dá como resposta um valor entre 0° e 180°. Se quisermos saber, por exemplo, que valor do terceiro quadrante tem como cosseno um certo valor $-1 < a < 0$, devemos aplicar $\cos^{-1}$ a este valor o que nos devolverá um valor no segundo quadrante e daí encontramos o ângulo correspondente a ele no 3º quadrante.

Lembre-se
Função injetora: Todo elemento do contradomínio é imagem de, no máximo, um (um ou nenhum) elemento do domínio.
Função sobrejetora: Todo elemento do contradomínio é imagem de, pelo menos, um elemento do domínio (um ou mais).
Função bijetora: Uma função é bijetora se é injetora e sobrejetora.

Lembre-se
Uma função só possui inversa se for bijetora.

Exemplo

Se quisermos saber que ângulo do 3º quadrante tem cosseno igual a -0,75, podemos calcular o $\cos^{-1}$ de -0,75 na calculadora.

Aproximando para duas casas decimais, o correspondente a ele no 1º quadrante é o

$180^\circ - 138,59^\circ = 41,41^\circ$ e o correspondente a ele no 3º quadrante é o $180^\circ + 41,41^\circ$. Logo $221,41^\circ$ é o ângulo do terceiro quadrante cujo cosseno é -0,75.

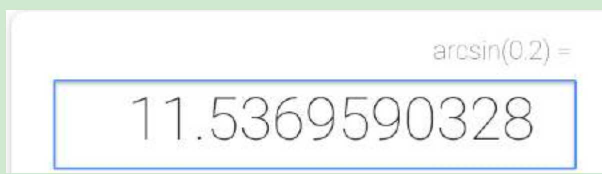
A função $\sin^{-1}$ dá como resultado um valor α no intervalo $[-90^\circ, 90^\circ]$. O $\sin^{-1} b = \alpha$ para $-1 < b < 0$ corresponde ao ângulo $-\alpha$ do 1º quadrante, logo se quisermos saber, por exemplo, qual o ângulo do terceiro ou quarto quadrantes que tem como seno um valor b, $-1 < b < 0$ basta encontrar os correspondentes a $-\alpha$. De forma semelhante, temos que $\tan^{-1}$ dá como resultado um valor β no intervalo $(-90^\circ, 90^\circ)$.

Exemplo

Para saber, usando a calculadora, qual o ângulo do quarto quadrante tem tangente igual a $-\sqrt{3}$. Teclamos $\tan^{-1}$, $-$, $\sqrt{}$, 3 e =:

O que corresponde a $-(-60^\circ) = 60^\circ$ no primeiro quadrante e a $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ no quarto quadrante.

Para saber qual o ângulo do segundo quadrante tem seno igual a 0,2, calculamos o $\sin^{-1}$ de 0,2:



Que corresponde a $180^\circ - 11,54^\circ = 168,46^\circ$ no segundo quadrante.

Triângulos não retângulos

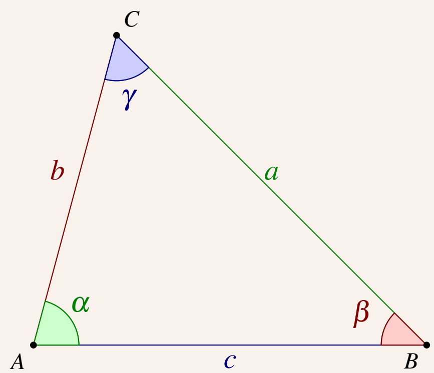
Até o momento, estudamos as relações métricas no triângulo retângulo e fizemos a expansão dos conceitos de seno, cosseno e tangente para ângulos maiores do que 90°. Veremos, agora, duas importantes leis da trigonometria, as quais nos possibilitam o estudo das medidas de quaisquer triângulos.

2.5 Lei dos Senos

Primeiramente, estudaremos a relação entre os lados de um triângulo e os senos de seus ângulos internos.

Teorema

Lei dos Senos:
Seja ABC um triângulo com ângulos internos α, β e γ, e lados medindo a, b e c, como na figura abaixo:



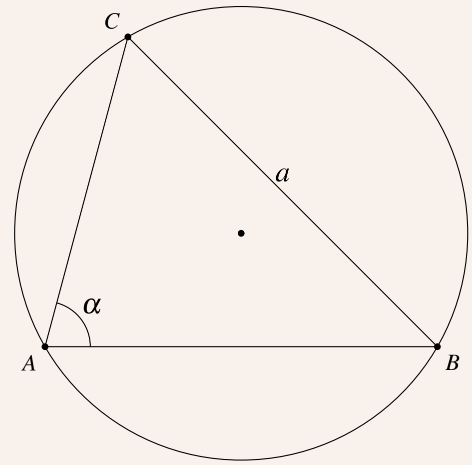
Então:

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)} = 2R$$

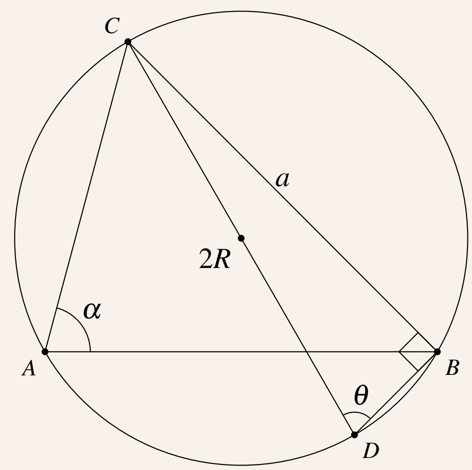
Em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração:
Vamos mostrar que, num triângulo, a razão entre um lado qualquer dele e o seno do ângulo oposto a este lado é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja, se R é o raio da circunferência, a razão é igual a $2R$. Para isto, vamos considerar três casos:

1) **Quando o ângulo oposto é agudo.**



Vamos tomar um ângulo inscrito θ na circunferência que determine o mesmo arco que α e de tal forma que um de seus lados contenha o diâmetro da circunferência.

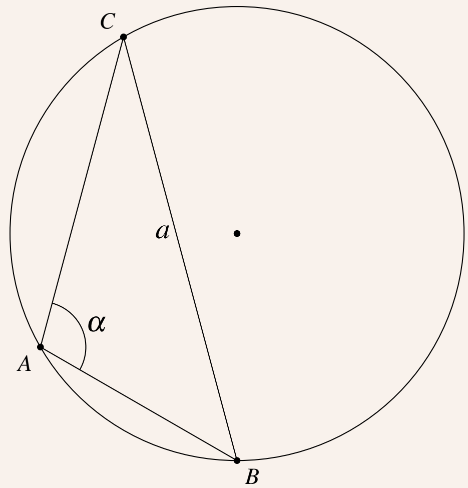


Note que $\alpha = \theta$, pois determinam o mesmo arco, e que o triângulo BCD é retângulo em B. Logo:

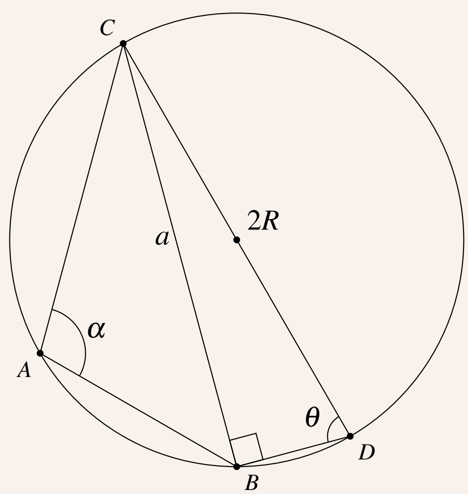
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\theta) &= \frac{a}{2R} \\ 2R \cdot \operatorname{sen}(\alpha) &= a \\ 2R &= \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} \end{aligned}$$

Lembre-se
A medida do ângulo inscrito em uma circunferência vale metade da medida do arco que ele "enxerga", logo, se um triângulo inscrito tem um de seus lados como sendo o diâmetro da circunferência, então esse triângulo é retângulo.

2) **Quando o ângulo oposto é obtuso.**



Como o ângulo α determina um arco maior do que 180° não é possível construir um ângulo inscrito θ que determine o mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$ em que um de seus lados contenha o diâmetro da circunferência, mas podemos construir um ângulo β que determine o arco $\overset{\frown}{CB}$.



Como $m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{CB} = 360^\circ$ e $m\overset{\frown}{CB} = 2\theta$, temos que $m\overset{\frown}{BC} = 360^\circ - m\overset{\frown}{CB} = 360^\circ - 2\theta$. Sabemos ainda que:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

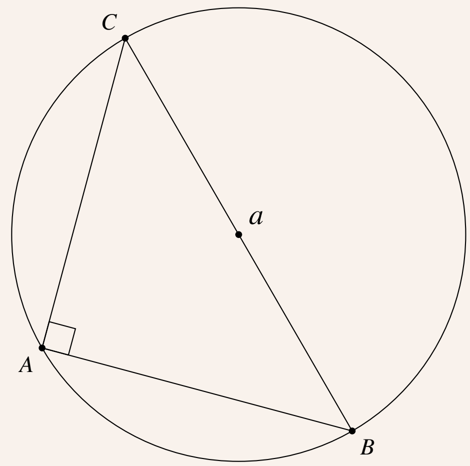
Logo:

$$\alpha = \frac{360^\circ - 2\theta}{2} = 180^\circ - \theta$$

Daí como o triângulo BCD é retângulo em B. Temos:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = \operatorname{sen}(\theta) = \frac{a}{2R}$$
$$2R \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = a$$
$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$

3) **Quando o ângulo oposto é reto.**



A medida da hipotenusa de um triângulo retângulo (lado oposto ao ângulo reto) é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a ele. Logo:

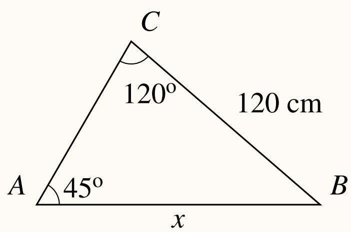
$$\frac{a}{\operatorname{sen}(90^\circ)} = \frac{2R}{1} = 2R$$

Desta forma concluímos que, de fato, a razão entre um lado qualquer de um triângulo e o seno do ângulo oposto a este lado é igual à duas vezes a medida do raio da circunferência circunscrita, ou seja, num triângulo cujos lados medem a, b e c e cujos ângulos opostos a estes lados são, respectivamente, α, β e γ, temos a seguinte relação:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)} = 2R$$

Exercícios Resolvidos

Calcule no seguinte triângulo a medida do lado AB.



Resolução: Pela Lei dos Senos:

$$\frac{150}{sen\ 45} = \frac{x}{sen\ 120}$$

$$\frac{150}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

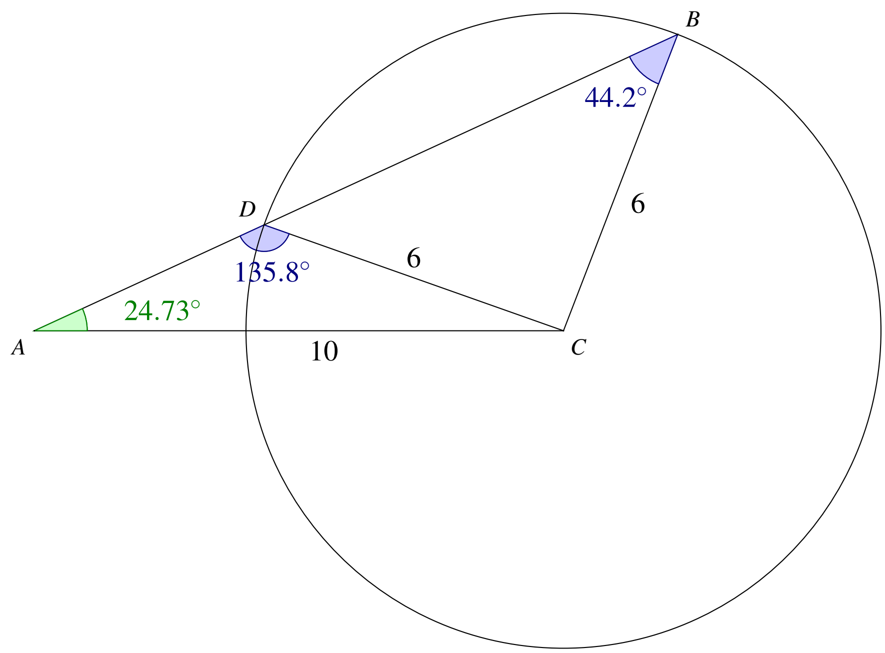
$$x = 150 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{150\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{150\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{150\sqrt{6}}{2} = 75\sqrt{6}\text{ cm}$$

Ambiguidade da Lei dos Senos

Sempre que utilizarmos a Lei dos Senos, devemos ficar atento ao caso ambíguo.

Suponha que você sabe a medida de dois dos lados de um triângulo (a e b) e um dos ângulos opostos a um desses lados (suponha que seja conhecida a medida α do ângulo oposto a a), perceba que é possível calcular o seno de α, mas existem dois ângulos possíveis (um no primeiro quadrante e outro no segundo) que tem seno igual a esse valor (a não ser que $sen(\alpha) = 1$).

A figura abaixo exemplifica essa situação. Note que existem duas possibilidades de triângulos de lados medindo 6 e 10 e ângulo oposto ao lado de medida 6 medindo $24,73°$. Na imagem são os triângulos ACD e ABC.

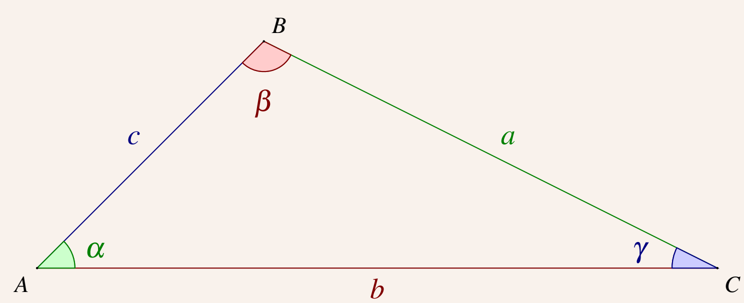


2.6 Lei dos Cossenos

Teorema

Lei dos Cossenos

Seja *ABC* um triângulo com ângulos internos α, β e γ, e lados medindo a, b e c, como na figura abaixo:



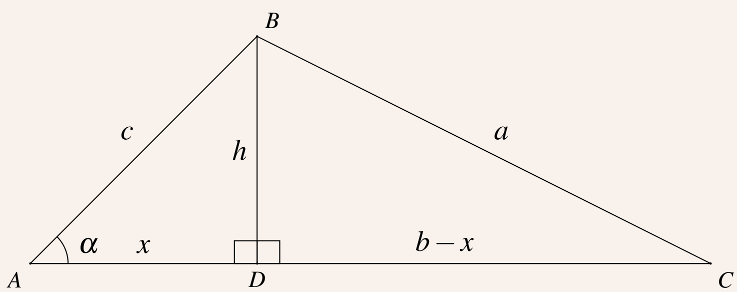
Então:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Demonstração:

Vamos dividir a demonstração em dois casos: o caso do ângulo agudo e o caso do ângulo obtuso.

- **Caso do ângulo agudo**
  Vamos mostrar a Lei dos Cossenos para o ângulo agudo α, podemos então traçar a altura relativa ao lado $\overline{AC}$, formando dois triângulos retângulos:



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo da esquerda temos:

$$c^2 = x^2 + h^2$$

Subtraindo o termo x^2 de ambos os lados, temos:

$$c^2 - x^2 = x^2 + h^2 - x^2$$
$$c^2 - x^2 = h^2$$

Ou ainda,

$$h^2 = c^2 - x^2$$

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo da direita temos:

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2$$

Sabendo que:

$$(b - x)^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot x + x^2$$

e que:

$$h^2 = c^2 - x^2$$

Podemos fazer as seguintes substituições:

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x + x^2$$

Como

$$-x^2 + x^2 = 0$$

então,

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x$$

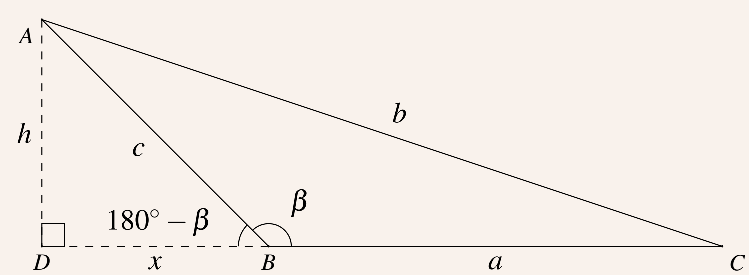
Observe, no triângulo da esquerda, que:
$\cos(\alpha) = \dfrac{x}{c}$
Logo,

$$x = c \cdot \cos(\alpha)$$

Substituindo na equação anterior,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

- **Caso do ângulo obtuso**
  Observe o triângulo abaixo:



De maneira análoga ao que fizemos para demonstrar a Lei dos Cossenos no caso do ângulo agudo, faremos para o caso do ângulo obtuso β.
A altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é externa ao triângulo, e perpendicular à reta suporte do lado.
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD temos:
(i) $c^2 = h^2 + x^2$
E no triângulo ACD temos:

(ii) $b^2 = h^2 + (a+x)^2$
Subtraindo a equação (i) da equação (ii) teremos:

$$b^2 - c^2 = h^2 + (a+x)^2 - h^2 - x^2$$

Sabendo que

$$h^2 - h^2 = 0$$

E que

$$(a+x)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot x + x^2$$

Podemos concluir que:
(iii)

$$b^2 - c^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot x$$

Note que:

$$\cos(180^\circ - \beta) = \frac{x}{c}$$

Ou ainda,
$x = c \cdot \cos(180^\circ - \beta)$
E lembrando que:

$$cos(180^\circ - \beta) = -\cos(\beta)$$

Temos:

$$x = -c \cdot \cos(\beta)$$

Voltando à equação (iii) e substituindo x por $-c \cdot \cos(\beta)$, teremos:

$$b^2 - c^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot [-c \cdot \cos(\beta)]$$

Pela regra de sinais:

$$b^2 - c^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

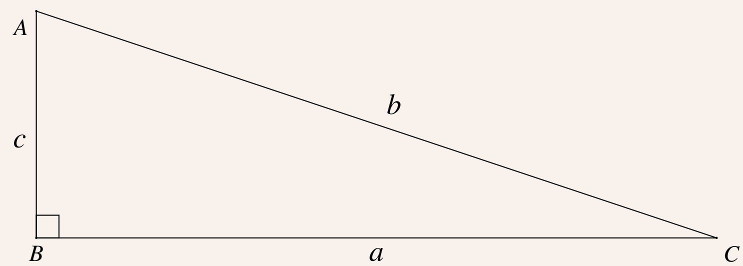
Somando c^2 em ambos os lados:

$$b^2 - c^2 + c^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) + c^2$$

Por fim:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

- **Ângulo reto**



A Lei dos Cossenos vale até mesmo para ângulos retos, mas neste caso aplicar a Lei dos Cossenos é equivalente a aplicar o Teorema de Pitágoras, pois ao escrever:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(90^\circ)$$

Como o cosseno de 90° é igual a 0, obtemos que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot 0$$

Ou seja:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Exercícios Resolvidos

Dado que as medidas dos lados de um triângulo medem 5m, 7m e 10m. Calcule a medida do ângulo oposto ao lado de medida 7m, em radianos. Use uma calculadora.

Resolução: Seja θ o ângulo oposto ao lado de medida 7m, temos, pela Lei dos Cossenos, que:

$$7^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos(\theta)$$

$$49 = 25 + 100 - 100\cos(\theta)$$

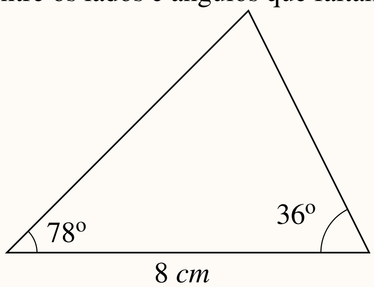
$$100\cos(\theta) = 125 - 49 = 76$$

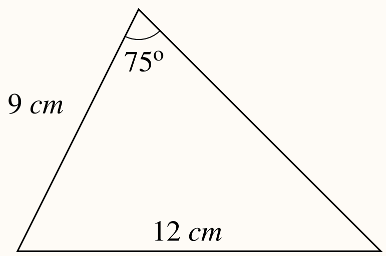
$$\cos(\theta) = 0,76$$

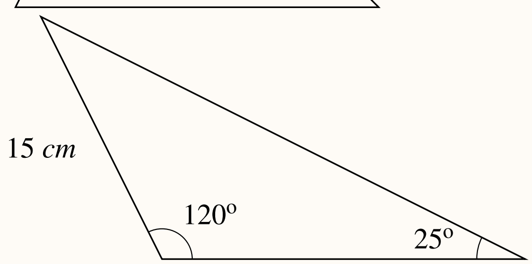
Usando $\cos^{-1}$ na calculadora no modo rad e arredondando o resultado para três casas decimais obtemos que $\theta = 0,707$ radianos.

Exercícios

1. Dois lados de um triângulo medem 8m e 12m e formam entre si um ângulo de 120^o. Calcule o terceiro lado.
2. Encontre os lados e ângulos que faltam nos triângulos abaixo. Use uma calculadora.

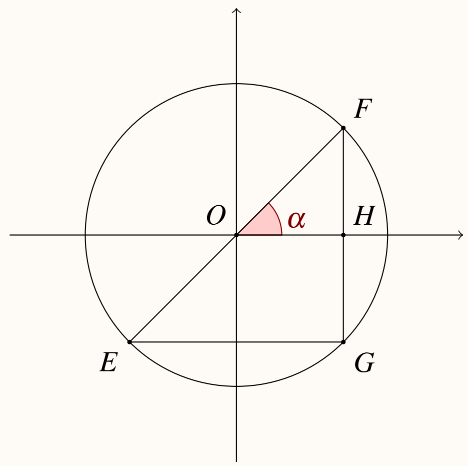
(a)


(b)


(c)


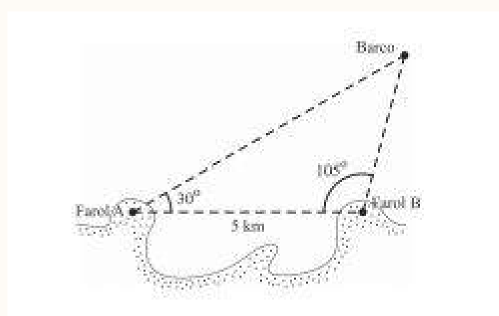
Exercícios Complementares

1. Na representação a seguir, $\overline{EF}$ é diâmetro da circunferência trigonométrica; $\overline{EG}$ e $\overline{FG}$ são catetos do triângulo retângulo FGE, inscrito na circunferência; e $\overline{FG}$ é perpendicular ao eixo X para qualquer α $(0 < \alpha < 90)$. Nessas condições, podemos afirmar que,



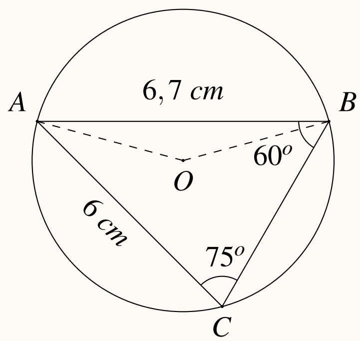
   (a) $\frac{FG}{EG} = 2 \cdot tan\ \alpha$
   (b) $EF = sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha$
   (c) $OH = cos\ (90 - \alpha)$
   (d) $FG = 2 \cdot sen\ \alpha$

2. Do alto de seus faróis, que distam 5 km um do outro, dois faroleiros avistam um barco no mar, como mostra a figura abaixo. Determine a distância do barco a cada farol.

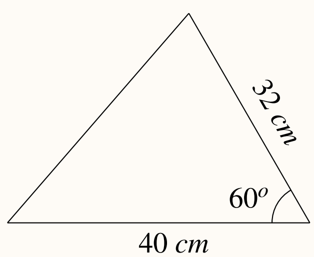


3. O quadro de uma bicicleta é mostrado abaixo. Sabendo que a mede 22 cm, use a lei dos senos para calcular o comprimento b da barra que liga o eixo da roda ao eixo dos pedais.

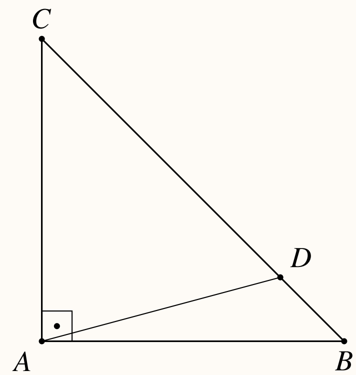
4. Na figura abaixo, o triângulo ABC está inscrito na circunferência de centro em O.



   (a) Determine o comprimento do lado BC.
   (b) Determine o raio r da circunferência.
   (c) Determine o comprimento do arco de circunferência AC, destacado na figura.
5. Calcule a área do triângulo abaixo,



6. (UFU - MG) Considere o triângulo retângulo a seguir



Sabendo-se que m$A\widehat{D}B = 120^{\text{o}}$, $AB = AC = 1cm$, então AD é igual a

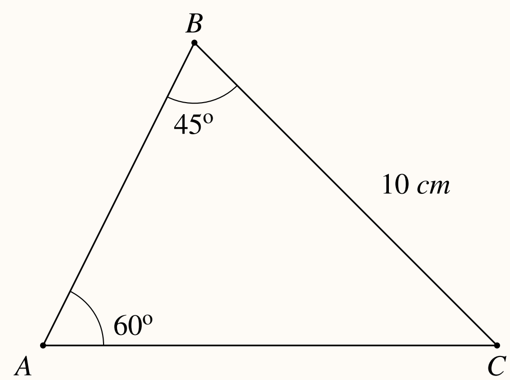
(a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\ cm$

(b) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ cm$

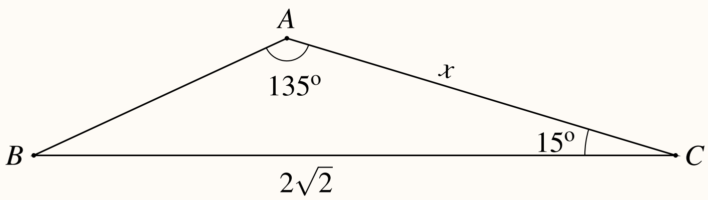
(c) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ cm$

(d) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\ cm$

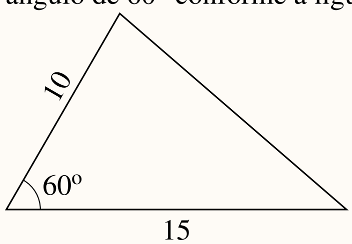
7. No triângulo a seguir determine a medida do lado AC, tendo em vista as medidas presentes nele. (Use $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$).



8. No triângulo a seguir, qual a medida do segmento AC, destacada pela letra x, dado que estas medidas estão em centímetros?



9. Dois lados de um terreno de forma triangular medem 15 *m* e 10 *m*, formando um ângulo de 60º conforme a figura abaixo

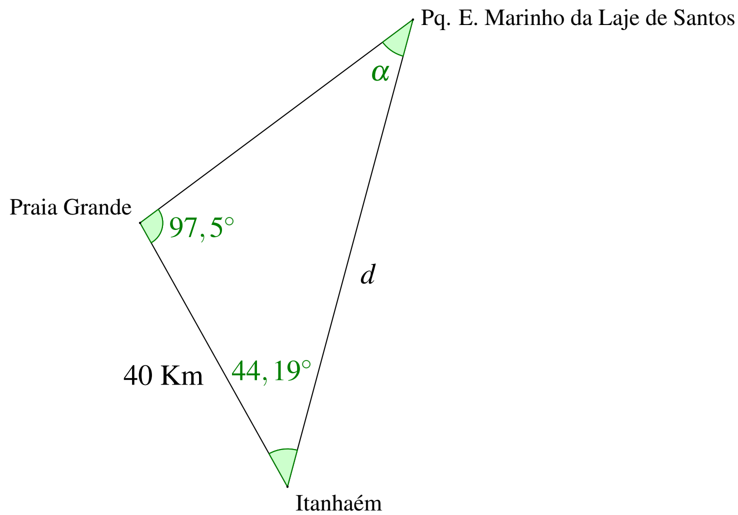


Calcule qual o comprimento do muro necessário para cercar o terreno.

10. Dois lados de um triângulo formam um ângulo de 60º e medem 8*m* e 10*m*. Qual a medida do terceiro lado deste triângulo?
11. Em um triângulo, qual a medida do lado oposto ao ângulo de 30º, sabendo que os outros dois lados medem 2 e $\sqrt{3}$

2.7 Voltando ao Problema Inicial

Vamos voltar ao problema do início do capítulo. Imagine que o mergulhador tenha partido da Praia Grande, marcando o ângulo entre a reta que liga a Praia Grande à Laje de Santos, e a reta que liga Praia Grande à Itanhaém (local onde fica a marina de onde ele partirá) , e ido até Itanhaém, marcando a distância. Em Itanhaém, marcou o ângulo entre a estrada de que veio e a reta que liga à Laje de Santos, como no triângulo abaixo.



Utilizando a Lei dos Senos, podemos calcular a distância d entre Itanhaém e a Laje de Santos.

Antes, precisamos conhecer o ângulo de vértice na Laje de Santos (α). Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, podemos concluir que:

$$\alpha + 97,5^\circ + 44,19^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha + 141,69^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha = 180^\circ - 141,69^\circ$$
$$\alpha = 38,31^\circ$$

Agora, usando a Lei dos Senos, temos:

$$\frac{d}{\operatorname{sen}(97,5^\circ)} = \frac{40}{\operatorname{sen}(38,31^\circ)}$$

Multiplicando a equação por $\operatorname{sen}(97,5^\circ)$,

$$\frac{d}{\operatorname{sen}(97,5^\circ)} \cdot \operatorname{sen}(97,5^\circ) = \frac{40}{\operatorname{sen}(38,31^\circ)} \cdot \operatorname{sen}(97,5^\circ)$$
$$d = \frac{40}{\operatorname{sen}(38,31^\circ)} \cdot \operatorname{sen}(97,5^\circ)$$

Com o auxílio da calculadora, podemos encontrar os seguintes valores:

$$\operatorname{sen}(38,31^\circ) = 0,62$$
$$\operatorname{sen}(97,5^\circ) = 0,99$$

Então:

$$d = \frac{40}{0,62} \cdot 0,99 = 63,87\text{km}$$

(Obs. Os cálculos foram feitos sempre arredondando para a segunda casa decimal.)

Bibliografia

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Stephen_Hawking

[2] https://pt.wikipedia.org/wiki/O_Universo_numa_Casca_de_Noz

[3] http://ew7.com.br/projeto-arquitetonico-com-autocad/index.php/tutoriais-e-dicas/130-como-projetar-corretamente-uma-rampa.html

bibitemnorma http://www.ufpb.br/cia/contents/manuais/abnt-nbr9050-edicao-2015.pdf

[4] https://posgraduacao.ufms.br/portal/trabalho-arquivos/download/2257 acessado em 11/05/2018 às 20:49.

[5] Iezzi, Gelson.Fundamentos-de-Matematica-Elementar-Volume-3-Trigonometria

[6] ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. Praticando Matemática 9º ano. 4ª edição. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

[7] BIANCHINI, Edmundo. Matemática Biachini 9º ano. 8ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 2015.

[8] QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de; REZENDE, Eliane Quelho Frota. Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas. 2ª Edição. Campinas: Editora Unicamp, 2008.

[9] Trigonometria do Triângulo Retângulo. Equipe Clubes de Matemática da OBMEP. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/trigonometria-trigonometria-do-triangulo-retangulo/>. Acesso em: 27/03/2018.

[10] GOMES, F. Oitava Lista de Exercícios: Funções trigonométricas inversas. Lei dos senos e lei dos cossenos. MA092 - Geometria plana e analítica, Unicamp, Campinas. Disponível em: < https://www.ime.unicamp.br/ chico/ma092/MA092_ex8.pdf >

[11] Lista de Exercícios de Aplicação do Teorema de Pitágoras. Colégio Mielini. Disponível em: <http://www.colegionomelini.com.br/midia/arquivos/2014/10/c67c8dceecfe0ad4c2b4b2d330d21741.pdf>

[12] As imagens do cadeirante foram retiradas de: https://www.wheelchairnet.org/WCN_ProdServ/Docs/MWTG/Sec4/sec4.html

[13] Axelson P, Chesney D, Minkel J & Perr A www.wheelchairnet.org/

[14] https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-aplicacoes-teorema-tales.htm

[15] http://tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com.br/2013/08/40-questoes-resolvidas-de-trigonometria.html

[16] https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/circulo-trigonometrico-trigonometria/

[17] https://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-lei-dos-senos.htm

[18] https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-lei-dos-cossenos.htm

[19] https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-conversao-medidas-angulos.htm

[20] https://www.wheelchairnet.org/WCN_ProdServ/Docs/MWTG/Sec4/Image5.gif

[21] https://www.wheelchairnet.org/WCN_ProdServ/Docs/MWTG/Sec4/Image16.gif

[22] Mathias Legrand http://www.LaTeXTemplates.com