Matemática Agora

Estudando os conhecimentos Matemáticos

Primeira Edição

Matemática Agora

Grupo B

Autores:
Camila Takeuti Vaz Rodrigues
145622
Bárbara de Souza Pinto Silva
157709
Guilherme Zanni Pestana
157961
Gabriel Nascimento Novaes
168058

Diagramação:
Gabriel Nascimento Novaes

Conteúdo:
Camila Takeuti Vaz Rodrigues
Bárbara de Souza Pinto Silva
Guilherme Zanni Pestana

Editor de Layout:
Gabriel Nascimento Novaes

Primeira edição, Maio de 2018.

Apresentação do Livro

Esse livro irá tratar de assuntos que são importantes pra você, jovem do sexto ano!
Trabalhe junto com o professor e com o conteúdo que existe aqui nesse livro para entender melhor o mundo único da matemática.
Professor, encare o desafio de ensinar matemática de uma forma envolvente e com comprometimento.
Aluno, encare o desafio de aprender matemática corretamente pois é parte do conhecimento que possibilitou a construção do mundo como conhecemos hoje.

Manual do livro

O livro possuí uma estrutura utilizada em todos os capítulos, com objetivo de facilitar a sua leitura, fique atento nas caixas que organizam as partes do capítulo, que estarão distribuídas entre o espaço central da página mas também na barra lateral. Na barra lateral estarão as informações mais rápidas ou com um teor de curiosidade.

Introdução

Introdução

A introdução ocorre a cada assunto novo. Nem sempre esse tipo de caixa irá ter um título.

Vamos recordar

Recordar

A Caixa de Recordar, ou "Vamos Recordar", tratará de assuntos que foram vistos anteriormente, sejam em capítulos anteriores ou em outros livros.

Tenha atenção

Atenção!

No livro você encontrará quadros como esse, eles servem para chamar sua atenção para alguma coisa do capítulo. Ele é muito útil pra encontrar erros comuns!

Curiosidades

Curiosidade

Uma curiosidade sobre o conteúdo, que pode servir para tirar alguma dúvida menor ou até mesmo para nos fazer pensar em algo diferente sobre o conteúdo.

Exemplo

Exemplo

Exemplos de conteúdos estarão em caixas como essa. Um exemplo serve para reforçar uma ideia do conteúdo.

Definição

Definição

Um conceito novo será apresentado numa caixa como essa. Fique atento a ideias novas em caixas como essa pois serão importantes para entender exemplos.

História

História

A matemática, assim como todas áreas de conhecimento, possui um vasto processo de criação em diferente épocas e com diferentes perspectivas sobre o mesmo assunto. Nesse tipo de espaço trechos desse processo estarão presentes.

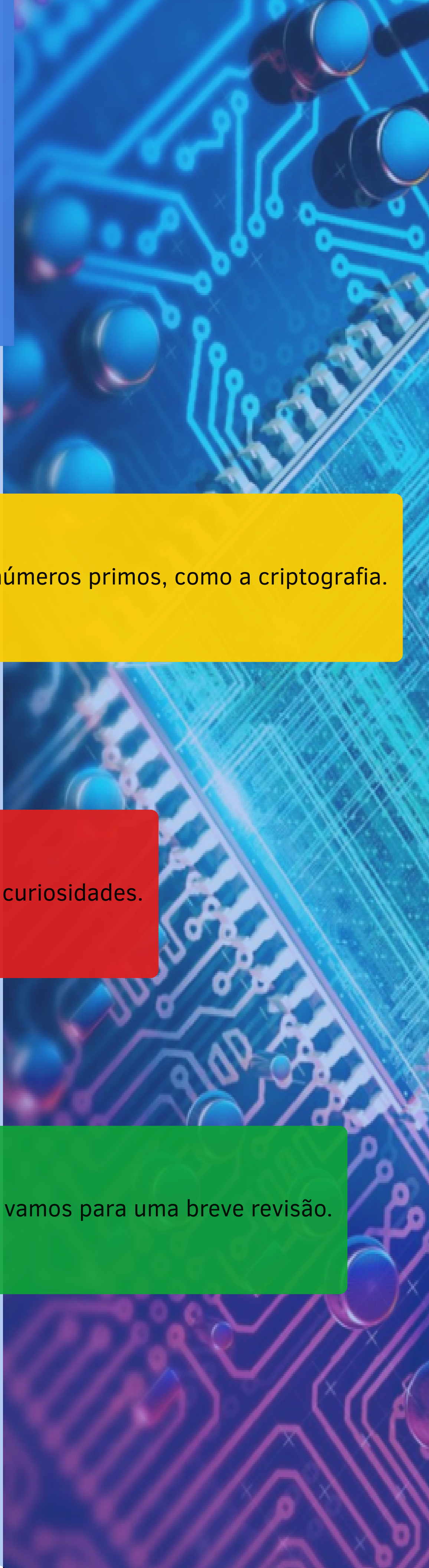
Exercício

Exercícios

Os exercícios são importantes para verificar se você realmente está entendendo o conteúdo, e um passo importante para o seu aprendizado.

Sumário

Números Primos



Coisas que usamos no dia a dia dependendem de números primos, como a criptografia.

Nesse capítulo vamos explorar um pouco sobre esses números e suas curiosidades.

Mas antes de tratar desse assunto, vamos para uma breve revisão.

1 Introdução ao Capítulo

O que veremos nesse capitulo

1 - Múltiplo e Divisor de um número natural
2 - Critérios de divisibilidade
3 - Números Primos
4 - MDC
5 - MMC

E no final do capítulo, uma seção inteira para Exercícios.

Recordar: Multiplicação

A multiplicação é uma das quatro operações básicas.
Multiplicar um número por outro significa somar um número de vezes um número por ele mesmo, ou seja, uma forma de simplificar uma soma grande.

Por exemplo:

$$3 + 3 + 3 = 3 \times 3 = 9$$

Recordar: Divisão

A divisão também é uma das quatro operações básicas.
A divisão é a operação inversa a multiplicação, e isso fica evidente no seu resultado.

Por exemplo:

$$4 \div 2 = \frac{4}{2} = \text{quatro dividido em duas partes} = 2$$

Atenção!

A divisão por zero não é definida! Um matemático morre toda vez que você faz isso.

Atenção!

Nem toda divisão diminui o valor de um número.
Por exemplo, se dividirmos 2 por 0.5, o resultado é 4!

Barra Lateral

Lembre-se de sempre checar a barra lateral para encontrar informações adicionais do capítulo.

Operações

Quando multiplicamos e dividimos um número pelo mesmo valor, as operações se cancelam, pois são operações inversas.

Exemplo 1

$$2 \times \frac{3}{2} = 3$$

Exemplo 2

$$7 \times \frac{10}{7} = 10$$

2 Múltiplo e Divisor de um número natural

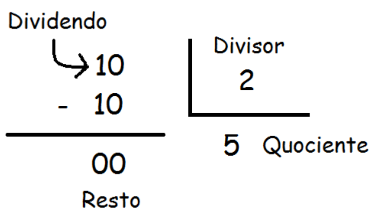
Em uma sala de aula que possui 28 alunos será realizado um trabalho em grupo.

Se cada grupo for composto por 4 alunos, podemos afirmar que algum aluno ficará sem grupo?

Para resolver essa questão devemos analisar se 28 divido por 4 é uma divisão exata (resto da divisão é igual a zero) ou não exata (resto da divisão é diferente de zero).

Recordar: elementos da divisão

Na divisão os objetos envolvidos recebem nomes como o do exemplo a seguir:



$$\begin{array}{r|l} 28 & 4 \\ \hline -\ 28 & 7 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Como 28 dividido por 4 é uma divisão exata então dizemos que 28 é divisível por 4 ou 28 é múltiplo de 4.
Caso os grupos sejam compostos por 5 pessoas cada, ocorrerá o seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 5 \\ \hline -\ 25 & 5 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Como 28 dividido por 5 não é exato então dizemos que 28 não é divisível por 5 ou 28 não é múltiplo de 5.
Sendo assim, sabemos que 3 pessoas ficarão sem grupo. (resto da divisão)

Quociente

Quando o número do divisor é maior do que o do dividendo atual, podemos aumentar o dividendo de alguma forma que permita a divisão do dividendo aumentado pelo divisor, adicionando uma casa decimal no quociente.
No exemplo de 28 dividido por 5, percebemos que 3 é menor do que 5, então a divisão não poderia continuar e o resto seria 3 mesmo. No entanto se adicionarmos uma casa decimal no quociente, colocando um ponto, podemos multiplicar o 3 por 10, e dessa forma estaremos dividindo 30 por 5, chegando no resultado exato da divisão, que é de 5.6.

Números Primos

Como veremos mais pra frente, os números primos intrigam os matemáticos e a humanidade há milhares de anos. Um dos motivos pra isso, é que até hoje não foi encontro um padrão para esses números, embora já saibamos que eles são infinitos e já conhecemos números primos com mais 23 milhões de dígitos.

Criptografia

Isso leva a outro problema que os matemáticos ainda não conseguiram encontrar uma solução eficiente. Encontrar os divisores (ou fatorar) de números muito grandes. Por isso os números primos são usados na criptografia.

Criptografar uma mensagem, é codifica-la de modo que qualquer pessoa que tente ler essa mensagem não consiga entender nada, a não ser que saiba como decodifica-la. É comum crianças e adolescentes fazerem isso quando querem mandar uma mensagem pra algum amigo e não querem que ninguém saiba o que tá escrito.

Exemplo 1

Marina quer colocar 315 balas em saquinhos, todos possuindo a mesma quantidade de balas, não deixando sobrar nenhuma. Qual a quantidade de balas que ela pode colocar em cada saquinho: 8, 10 ou 15 balas?

Solução:
Devemos fazer a divisão do número de balas pela quantidade em cada saquinho.

8 balas
315 dividido por 8

$$\begin{array}{r|l} 315 & 8 \\ \cline{2-2} -\ 312 & 39 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Restará 3 balas, sendo assim, essa quantidade não é possível.

10 balas

315 dividido por 10

$$\begin{array}{r|l} 315 & 10 \\ \cline{2-2} -\ 310 & 31 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Restará 5 balas, essa quantidade também não é possível.

15 balas

315 dividido por 15

$$\begin{array}{r|l} 315 & 15 \\ \cline{2-2} -\ 315 & 21 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Não restará nenhuma bala, logo, essa quantidade é ideal para que não sobre nenhuma bala.

Exemplo: Divisibilidade

Efetue as divisões e responda:

a) 280 é múltiplo de 7?
Resposta: Sim, 280 é multiplo de 7.
Podemos verificar que isso é verdade se observarmos o seguinte:
Para que 280 seja múltiplo de 7, temos que 280 é divisível por 7.
280 dividido por 7

$$\begin{array}{r|l} 280 & 7 \\ \cline{2-2} -\ 280 & 40 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Como o resto é zero, então é verdade.

b) 14 é divisor de 196?
Resposta: Sim. Usando o mesmo raciocínio anterior:

196 dividido por 14.

$$\begin{array}{r|l} 196 & 14 \\ \cline{2-2} -\ 196 & 14 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Da mesma forma que concluímos anteriormente, como o resto é zero, é divisível.

Criptografia

Com técnicas muito mais avançadas, os bancos, sites de vendas, exércitos e toda informação importante que circula pela internet também são criptografadas.

Mas qual a relação disso com os números primos? Uma das técnicas mais eficientes pra codificar mensagens é a Criptografia RSA, que usa o produto de dois números primos muito grandes pra criptografar mensagens. Esse produto é chamado de chave pública, e qualquer pessoa tem acesso.

Pra descobrir o que estava escrito na mensagem original, é preciso conhecer os números primos que geraram esse produto, esses números são chamados de chave privada.

2.1 Exercícios

Exercício 1

Determine:

a) Os divisores de 36.
b) Um número entre 10 e 30 que possui exatamente 2 divisores.
c) Um número que tem apenas um divisor.
d) Um número que tem infinito divisores.

Exercício 2

Observe que se colocarmos os divisores de 15 e 20 em ordem crescente obtemos:

D(15)= 1, 3, 5, 15.	D(9) = 1, 3, 9.
1x15=15	1x9= 9
3x5= 15	3x3= 9

Verifique se o mesmo ocorre com os divisores de 25, 38, 14 e 76.
Escolha dois números naturais e veja se ocorre o mesmo.

✍ Complete as frases:

a) Um ____________ é um número pelo qual outro número pode ser dividido.

b) 12 é ____________ de 2.

c) ____________ é o número pelo qual nenhum outro pode ser dividido.

d) Todos os números pares são divisíveis por ____________.

e) Uma divisão com resto ____________ é chamada de divisão exata.

Exercício 3

Uma professora dividirá uma caixa com 100 lápis de cor será igualmente entre seus 22 alunos.

a) Quantos lápis cada aluno receberá?

b) Quantos lápis sobrarão?

Exercício 4

Quantos vestidos a mãe da Luísa terá que comprar se ela quer quatro para cada uma de suas 3 filhas?

Exercício 5

Responda em seu caderno se as frases abaixo são verdadeiras:

a) 24 é múltiplo de 2.

b) 100 é múltiplo de 10.

c) 12 é divisor de 36.

d) 21 é múltiplo de 5.

e) 10 é múltiplo de 40.

Exercício 6

Márcia é irmã de Paulo, que tem 4 anos, e de Téo, que tem 3.

A idade de Márcia é um múltiplo da idade de ambos os irmãos dela.

Quantos anos Márcia tem, se sabemos que a diferença entre ela e Téo é menor que 20 anos?

Exercício 8

Em um mês como o do calendário abaixo, Roberto jogou tênis nos dias ímpares e Felipe nos dias múltiplos de 3. Em quais dias eles jogaram juntos?

Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Exercício 9

Juca tem cartões numerados de 1 a 30 e três caixas nas quais quer dividi-los, de acordo com os seguintes critérios:

CAIXA A - Só recebe cartões cujo número é múltiplo de 3.
CAIXA B - Só recebe cartões cujo número é ímpar
CAIXA C - Só recebe cartões cujo número é múltiplo de 4.

Sabendo isso, responda:

a) O cartão com número 21 pode ser colocado em quais caixas?

b) O cartão com número 2 pode ser colocar em quais caixas?

c) O cartão com número 24 pode ser colocado em quais caixas?

d) Qual caixa pode receber a maior quantidade de cartões?

e) Existe algum cartão que não pode ser colocado em nenhuma caixa?

3 Critérios de Divisibilidade

Os critérios de divisibilidade nos auxiliam para determinarmos se certo número natural é divisível ou não por outro número natural. Iremos ver a seguir alguns desses critérios para alguns números naturais.

3.1 Divisibilidade por 2

Se analisarmos a sequência dos números pares : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16... podemos concluir que todo número par dividido por 2 dá resto zero, ou seja, todo número par é múltiplo de 2 ou divisível por 2.

Definição: Divisibilidade por 2

Um numero natural é divisıvel por 2 quando ele termina em 0, ou 2, ou 4, ou 6, ou 8.

Exemplos

Vamos ver exemplos sobre a Divisibilidade por 2.

1 - Verifique se os números abaixo são pares ou ímpares.

a) 37

Resposta: O último algarismo é 7, que não é divisível por 2. Por conta disso, é ímpar.

b) 1032

Resposta: O último algarismo é 2, é divisível por 2, portanto é par.

c) 421

Resposta: O último algarismo é 1, não é divisível por 2, portanto é ímpar.

d) 319

Resposta: O último algarismo é 9, não é divisível por 2, portanto é ímpar.

3.2 Divisibilidade por 3

Se um número é pequeno, para analisar se é divisível ou não por 3, basta fazermos a divisão e se for exata, é divisível por três.
Porém para números muito grandes esse método é muito trabalhoso, nesses casos faremos o seguinte:

Exemplo

O número 249201733 é divisível por 3?

Devemos somar os algarismos desse número
2+4+9+2+0+1+7+3+3= 31

como 31 não é divisível por 3 então 249201733 não é divisível por 3.

Divisibilidade por 3

Um número natural é divisível por 3, quando a soma de seus algarismos é divisível por 3.

Exemplos:

1- Verifique se os números 3134, 215 e 17274 são divisíveis por 3 (sem efetuar a divisão)

Lembre-se que para concluir se um número é divisível por 3 a soma dos algarismos desse número tem que ser divisível por 3.

$$\begin{array}{l} 3134 \\ 3+1+3+4=11 \\ 11 \\ 1+1=2 \\ \text{2 não é divisível por 3 então 3134 também não é.} \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{l} 215 \\ 2+1+5=8 \\ \text{8 não é divisível por 3, então 215 não é.} \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{l} 17274 \\ 1+7+2+7+4=21 \\ 21 \\ 2+1=3 \\ \text{3 é divisível por 3, então 17274 é divisível por 3.} \end{array} \tag{3}$$

3.3 Divisibilidade por 4

Examinando os números e suas decomposições:

$2834 = 2000 + 800 + 30 + 4$.

Observe que 2000 e 800 são divisíveis por 4 então para que 2834 seja divisível por 4, $30 + 4 = 34$ (os dois últimos algarismos) também tem que ser divisível por 4.

Como 34 não é divisível por 4, concluímos que 2834 não é divisível por 4.

$13128 = 10000 + 3000 + 100 + 20 + 8$.

Analogamente temos que 10000, 3000 e 100 são divisíveis por 4 então para que 13128 seja divisível por 4, $20 + 8 = 28$ (os dois últimos algarismos) também tem que ser divisível por 4.

Como 28 é divisível por 4, temos que o número 13128 é divisível por 4.

Divisibilidade por 4

Um número natural é divisível por 4 quando o número formado pelos dois últimos algarismos é divisível por 4.

Exemplos:

75220 é divisível por 4 pois o número formado pelos dois últimos algarismos (20) é divisível por 4.

325 não é divisível por 4 número formado pelos dois últimos algarismos (25) não é divisível por 4.

3.4 Divisibilidade por 5

Os números que divididos por 5 que dá resto zero são todos os seus múltiplos 0, 5, 10, 15, 20, 15, 30...

Divisibilidade por 5

Dizemos que um número é divisível por 5 quando termina em zero ou 5

Exemplos:

O número 182 não é divisível por 5 pois o último algarismo é 2.

39275 é divisível por 5 pois o último algarismo é 5.

477 não é divisível por 5 pois o último algarismo é 7.

O número 5730 é divisível por 5 pois o último algarismo é 0.

3.5 Divisibilidade por 6

Sabemos que podemos escrever 6 como o produto entre 2 e 3 ou seja, 6 = 2x3

Sendo assim, um número é divisível por 6 quando é divisível por 3 e por 2 ao mesmo tempo.

Como já visto anteriormente, deverá satisfazer duas condições:
Divisível por 2 —> é par

Divisível por 3 —> Soma dos algarismos do número é divisível por 3.

Exemplo:

O número 12720 é divisível por 6?

Sim, pois é par (é divisível por 2), e também 1+2+7+2+0=12 (é divisível por 3).

3.6 Divisibilidade por 9

O modo para determinar se um número é divisível por 9 é muito parecido com o critério de divisibilidade por 3.

Devemos somar os algarismos do número, se a soma obtida for divisível por 9, então podemos afirmar que 9 divide este número.

Exemplos:

37692

3+7+6+9+2 = 27 é divisível por 9

logo, 37692 é divisível por 9 .

9534

9+5+3+4 = 21 não é divisível por 9.

logo, 9534 não é divisível por 9.

3.7 Divisibilidade por 10

Um número é divisível por 10 se o último algarismo for zero.

Exemplos:

3750 é divisível por 10 pois seu último algarismo é 0.

573 não é divisível por 10 pois o último algarismo é 3.

124000 é divisível por 10 pois o último algarismo é 0.

3.8 Divisores de um número natural

Divisores de um número natural são todos os números naturais que ao dividirem esse número resultarão em uma divisão exata, ou seja, com resto igual a zero.

Todos os divisores de 15 são 1, 3, 5, e 15. Podemos escrever da seguinte forma:

D(15)= 1, 3, 5, 15.

Como 15 dividido por 2 não é uma divisão exata, dizemos que 2 não é um divisor de 15 (resto é igual a 1).

✍ Exemplo 1

Luiza tem 8 bombons e deverá separá-los em caixas, de modo que obtenha a mesma quantidade de bombons em cada caixa. Ela poderá:

I) Separar um bombom por caixa, terá 8 caixas no total.
II) Separar 2 bombons por caixa, terá 4 caixas no total.
III) Separar 4 bombons por caixa, terá 2 caixas no total.
Em último caso colocar todos os 8 bombons em uma única caixa.
Sendo assim, o número de caixas que podem ser divididos os bombons são 8, 4, 2 e 1, que nada mais é que os divisores do número 8.
Observação: Para qualquer outra quantidade de caixas não obteremos a mesma quantidade de bombons por caixa. Por exemplo tentarmos separar 8 bombons em 3 caixas não será possível a mesma quantidade em todas as caixas.

✍ Exemplo 2

Determine :

Os divisores de 9.
Resposta: Os números naturais que dividem 9 são 1, 3 e 9.

Os divisores de 24.
Resposta: Os números naturais que dividem 24 são 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24.
D(16)
1, 2, 4, 8, 16.
D(47)
1, 47.

3.9 Exercícios

Complete as frases:

a) Se um número for divisível por 4 ele também será divisível por ____________.

b) Para descobrir se um número é divisível por 3, a ____________ de seus algarismos deve ser um múltiplo de 3.

c) Um número é múltiplo de 5 se termina em ____________ ou ____________.

d) Todos os números divisíveis por ____________ terminam em zero.

e) Múltiplos de seis também são múltiplos de ____________ e ____________.

Exercício 1

Todos os números pares são múltiplos de dois. Quais dos números abaixo satisfazem esse critério?

a) 71

b) 100.000

c) 3644

d) 30

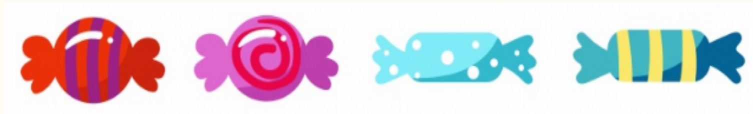
e) 19

Exercício 3

Ana, Bia e Cléo querem comprar um pacote de balas para dividir igualmente entre elas.

No supermercado encontraram quatro tamanhos de pacotes: com 50, 60, 70 ou 80 balas.

Qual dessas opções elas podem comprar para que comam a mesma quantidade?



Exercício 4

Chico foi ao banco e ao chegar lá descobriu que só poderia sacar notas de 5 reais.

Quais desses produtos ele poderá comprar sem que sobre ou falte dinheiro?

a) Um tênis de R$45,00.

b) Uma bola de futebol de R$ 32,00.

c) Duas barras de chocolate por R$7,50 cada.

d) Um conjunto de canetas por R$18,99.

Exercício 5

Quais dessas divisões são exatas?

a) $351 \div 3$

b) $144 \div 2$

c) $52 \div 5$

d) $10 \div 10$

e) $1695 \div 5$

4 Números primos

4.1 Introdução

Introdução

Agora que você aprendeu a encontrar os divisores de um número, faça isso para os seguintes números:

a) 16
b) 30
c) 11
d) 9
e) 3
f) 23

Você deve ter percebido que alguns números tem mais divisores que outros. Também deve ter percebido que todos os números têm ele mesmo e o 1 como divisores, sendo que alguns são divisíveis apenas por esses dois números (1 e ele mesmo). Esses números são chamados primos.

Definição

Um número é primo quando possui exatamente dois divisores (1 e ele mesmo).

Atenção!

Existem infinitos números primos.

Os números que não são primos, ou seja, os que tem mais de dois divisores, são chamados números compostos.

Quais números da atividade anterior são primos e quais são compostos?

a) 16
b) 30
c) 11
d) 9
e) 3
f) 23

Observação

O número 1 não é primo pois tem um único divisor.

Observação

O números 0 tem infinitos divisores, portanto também não é primo.

Curiosidade

O nome "primo" vem de "primeiro", pois eles são os números mais "básicos", que geram todos os outros. Lembre que todos os números não-primos (compostos?) podem ser escritos como multiplicação de primos.

4.2 Contexto Histórico

História

Os números primos fascinam pesquisadores desde o início da história da matemática.

Há indícios que o assunto já é discutido desde o Egito antigo, mais de 1500 anos antes de Cristo.

Anos depois, em 300 a.C., o matemático grego Euclides escreveu "Elementos", um livro que prova a infinitude de primos e o Teorema Fundamental da Aritmética, que diz que todo número composto pode ser escrito como a multiplicação de primos.

Uma invenção que também data da Grécia Antiga é o Crivo de Eratóstenes, que vamos estudar logo mais.

Curiosidade

O matemático grego Euclides escreveu, por volta de 300 a.C., "protós arithmós estin monadi mone metroymenos", significando que números primos são tudo aquilo que só pode ser medido através da unidade.

História

No estudo dos números primos, nos deparamos, desde o começo, com mais um caso de diferença de significado de termo em relação ao uso corriqueiro da língua.

Esse fato poderá ser observado na pergunta: "por que números primos"?

Inicialmente nos vem à mente a ideia de parentesco.

Porém, o termo primo, em matemática, não é utilizado para designar parentesco, e sim para indicar a ideia de primeiro.

Isso significa dizer que, sendo os primos os primeiros, eles são os responsáveis por gerar os demais números naturais por meio da multiplicação.

Dessa última afirmação, deduz-se que todos os números naturais não primos podem ser escritos como produtos de primos.

Anos Bissextos

Você sabe o que é um ano bissexto? E por quê eles existem?

A ideia surgiu em 7 d.C., durante o império de Júlio César, porém sofreu diversas mudanças até chegar ao modo como conhecemos hoje.

Um ano bissexto consiste em um ano com 366 dias, em vez dos 365 habituais, e acontece em anos que são múltiplos de 4.

Isso ocorre pois o ano terrestre é de 365 dias, 5 horas e 48 minutos, mas arredondamos para 365, e essas horas e minutos ficam sobressalentes.

Aproximando esse valor para 6 horas, a cada 4 anos essas horas adicionais equivalem a um dia, que são compensados com o dia 29 de Fevereiro.

Porém esses 12 minutos de diferença entre as 5 horas e 48 minutos e as 6 horas, fazem com que tenhamos que ter alguns anos que seriam bissextos de fato não sejam.

Para arrumar esse erro, os anos terminados em 00 só são bissextos se forem divisíveis por 400.

☞ Números Primos

Exercício 1

Liste em seu caderno todos os números primos até 20.

Exercício 2

Quantos números primos pares existem? E por que?

Exercício 3

Quantos números primos que terminam com 0 existem? E com 5?

Exercício 4

Determine quais dos seguintes números são primos?

a) 35	d) 39	g) 8	j) 735
b) 22	e) 17	h) 19	k) 1234
c) 5	f) 2	i) 15	l) 23

Exercício 5

Saber a divisibilidade pode ser útil para descobrir se um ano será bissexto ou não. Releia o quadro para descobrir se os anos abaixo são bissextos:

a) 1990

b) 2002

c) 1950

d) 2200

e) O ano em que você nasceu

Alguns números devem ter sido mais fáceis que outros para descobrir se é primo ou composto.

Todos os números pares, com exceção do 2, são compostos, já que são divisíveis por 2.

O mesmo para os números que sabemos que são múltiplos de 3 ou 5, todos são compostos.

☞ Números Primos

Podemos determinar todos os primos até um certo número X , construindo uma tabela com todos os números naturais a partir do 2 até X.

Em seguida, podemos circular o primeiro número da lista, o 2 que é primo, e riscar todos os seus múltiplos.

Circulamos o próximo número não riscado e riscamos todos os seus múltiplos.

Fazemos isso sucessivamente até que todos os números estejam circulados ou riscados. Faça isso na tabela abaixo:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Exercício 6

Quantos são os números primos até 50?

☞ Decomposição em fatores primos

Os números naturais podem ser escritos como produto de dois ou mais números. Veja o exemplo do 30.

$$
\begin{aligned}
30 &= 2 \times 15 \\
30 &= 3 \times 10 \\
30 &= 5 \times 6 \\
30 &= 2 \times 3 \times 5
\end{aligned}
$$

De todas as fatorações do número 30, apenas uma delas tem somente números primos. Essa é chamada decomposição em fatores primos de 30.

Números Primos

Decomposição em fatores primos

Veja mais um exemplo, com o número 24 agora:

$$24 = 2 \times 12$$
$$24 = 3 \times 8$$
$$24 = 6 \times 4$$
$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

Quando na decomposição aparecer fatores primos repetidos, podemos agrupá-los usando potenciação.

Como 2 x 2 x 2 = 2^3, podemos escrever 24 = 2^3 x 3.

Exercício 7

Determine a decomposição em fatores primos dos seguintes números.

a) 48
b) 21
c) 36

Todo número natural que não é primo pode ser escrito como produto de números primos e de forma única.

Um processo para decompor números naturais maiores que 1 e que não sejam primos é fazer sucessivas fatorações até só sobrarem números primos. Veja o exemplo com o 28:

Exemplo: Número 28

$$28 = 2 \times 14$$

Como o 2 é primo, fatoramos agora o 14

$$28 = 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7$$

Veja agora com o 32:

Exemplo: Número 32

$$32 = 4 \times 8 = 2 \times 2 \times 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

Atenção!

Não multiplique a base pelo expoente!

$$2^3 \neq 2 * 3$$

A ordem que se segue a fatoração não altera o resultado final.

Exemplo: Número 30

$$30 = 3 \times 10 = 3 \times 2 \times 5$$
$$30 = 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5$$
$$30 = 5 \times 6 = 5 \times 2 \times 3$$

Logo: $30 = 2 \times 3 \times 5$

Exercício 8

Use o processo de fatorações sucessivas para decompor em fatores primos os seguintes números.

a) 100
b) 88
c) 52
d) 42

Um método muito usado e que é bastante eficiente para se decompor um número em fatores primos é efetuar sucessivas divisões por números primos.

Começamos dividindo o número que se quer decompor pelo menor primo possível.

Fazemos o mesmo com o resultado dessa divisão e repetimos esse passo até que o resultado seja 1.

Vamos fazer isso com 540.

Exemplo: Número 540

540	2	$\rightarrow$ 540 é par, logo podemos dividir por 2
270	2	$\rightarrow$ 270 também é par
135	3	$\rightarrow$ 135 não é divisível por 2, mas é por 3
45	3	$\rightarrow$ 45 também é divisível por 3
15	3	$\rightarrow$ 15 é divisível por 3
5	5	$\rightarrow$ 5 é primo, logo só podemos dividir por ele mesmo
1		$\rightarrow$ O número 1 indica o passo final

$$520 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

4.3 Exercícios

Complete as frases:

a) Um número primo só é divisível por ____________ e por ____________.

b) ____________ é o único número primo par.

c) Os cinco primeiros números primos são ________, ________, ________, ________ e ________.

d) Um número ________ é um número que não é primo.

e) Ao realizarmos a fatoração de um número, paramos ao chegar no ________.

Exercício 1

Determine a decomposição em fatores primos dos seguintes números:

a) 1200

b) 2048

c) 192

d) 32

Exercício 2

Qual das opções abaixo contém apenas números primos?

a) 5; 2; 9; 23; 47.

b) 7; 17; 28; 47; 97.

c) 2; 7; 13; 17; 29.

d) 3; 7; 19; 21; 33.

Exercício 3

Escreva, em seu caderno, quais números substituem as letras A, B, C, D, para completar as fatorações:

a) $$\begin{array}{l|l} 350 & 2 \\ A & 5 \\ 35 & B \\ C & 7 \\ 1 & \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l|l} A & 2 \\ 60 & B \\ 30 & 2 \\ C & 3 \\ 5 & D \\ 1 & \end{array}$$

Exercício 4

Qual das opções abaixo representa a decomposição correta em fatores primos de 640?

$$2^7 \times 5$$
$$2^5 \times 4 \times 5$$
$$2 \times 5 \times 9$$
$$2^2 \times 5 \times 32$$
$$2^5 \times 64$$

Exercício 5

O 1 é um número primo?

Divisores

Voltando aos divisores

Vamos voltar um pouco a falar sobre os divisores de um número.

Agora que sabemos encontrar a decomposição em fatores primos (ou fatoração completa), podemos determinar todos os divisores desse número sem ter dúvidas se esquecemos algum.

Vejamos como exemplo o 30:

D(30) : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

O número 30 é escrito na forma fatorada como 2 x 3 x 5, logo também é divisível por 2, 3 e 5.

Podemos encontrar os outros divisores de 30 combinando os seus fatores primos de todas as formas possíveis e os multiplicando. Veja só.

$$2 \times 3 = 6$$
$$2 \times 5 = 10$$
$$3 \times 5 = 15$$

Dessa forma conseguimos encontrar todos os divisores de 30.

Veja mais um exemplo:

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$
$$2 \times 3 = 6$$
$$2 \times 5 = 10$$
$$3 \times 3 = 9$$
$$3 \times 5 = 15$$
$$2 \times 3 \times 3 = 18$$
$$2 \times 3 \times 5 = 30$$
$$3 \times 3 \times 5 = 45$$

Logo, os divisores de 90 são:
D(90) : 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

5 MDC

Máximo Divisor Comum (MDC)

Numa aula de educação física o professor quer dividir a sala em grupos para uma gincana, de modo que todos os grupos tenham o mesmo número de meninas e o mesmo número de meninos.

Nesse dia estavam presentes 18 meninas e 12 meninos. Qual o número máximo de grupos possível de se formar sem que ninguém fique de fora?

Os divisores de 18 são 1, 2, 3, 6, 9 e 18. Podemos interpretar esses números como as possibilidades de as meninas estarem em grupos iguais.

Já os meninos podem ser divididos em 1, 2, 3, 4, 6 e 12 grupos.

Assim, é possível dividir todos os alunos, de modo que todos os grupos tenham o mesmo número de meninas e o mesmo número de meninos, de quatro formas. Sendo em 1, 2, 3 ou 6 grupos. Esses números são os divisores comuns de 18 e 12, ou seja, os que podem dividir os dois números ao mesmo tempo e deixar resto zero.

O número máximo de grupos é 6. Cada grupo teria 2 meninos e 3 meninas. Chamamos o 6 de máximo divisor comum de 18 e 12 e denotamos por MDC(18, 12) = 6.

Responda em seu caderno:

a)Quantas meninas e quantos meninos teriam em cada grupo se a sala fosse dividida em 3 grupos?

b)Por que não é possível dividir a sala em 4 grupos?

c)Qual seria número máximo de grupos se a sala tivesse 16 meninos e 20 meninas?

Exemplo

Vamos calcular o MDC de 18 e 45:

18 = 2 x 3 x 3 -> D(18) : 1, 2, 3, 6, 9, 18

45 = 3 x 3 x 5 -> D(45) : 1, 3, 5, 9, 15, 45

Os divisores comuns de 18 e 45 são 1, 3 e 9.
Logo MDC(18, 45) = 9.

MDC

Exercício

Usando o mesmo processo anterior, encontre o máximo divisor comum dos seguintes números:

a) 24 e 16
b) 20 e 50
c) 25 e 32

Podemos simplificar esse processo usando os fatores primos dos números que queremos calcular o MDC. Sabemos que todo divisor de um número natural pode ser escrito como produto de um ou mais dos seus fatores primos (além do 1).

O MDC de dois ou mais números é o produto de todos os fatores primos que são comuns nas formas fatoradas desses números.

Exemplo:

Veja o exemplo com o 120 e o 84.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Os fatores primos comuns na fatoração de 120 e 84 estão em parênteses.

O MDC (120) = 2 x 2 x 3 = 12

Mais alguns exemplos

a) $$\begin{array}{r|l} 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$ MDC (165, 90) = 3 x 5 = 15

b) $$\begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$ MDC (135, 105, 90) = 3 x 5 = 15

Também podemos escrever os números que queremos calcular o MDC lado a lado e fatorar todos ao mesmo tempo.

Dividimos sucessivamente pelo menor primo que divide pelo menos um dos números, sendo que os números que não forem divisíveis por esse primo, copiamos na linha de baixo.

Cada fator primo que divide todos os números, circulamos e fazemos o produto deles ao final.

Vamos calcular o máximo divisor de 120, 96 e 72.

MDC (120, 96, 72

$$\begin{array}{lll|l} 120, & 96, & 72 & 2 \\ 60, & 48, & 36 & 2 \\ 30, & 24, & 18 & 2 \\ 15, & 12, & 9 & 2 \\ 15, & 6, & 9 & 2 \\ 15, & 3, & 9 & 3 \\ 5, & 1, & 3 & 3 \\ 5, & 1, & 1 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

MDC (120, 96, 72) = 2 x 2 x 2 x 3 = 24

Quando os números não tem nenhum fator primo em comum, o máximo divisor comum entre eles é 1.

Se o MDC de dois números é 1, chamamos eles de primos entre si.

6 MMC

Na frente da casa de Maria tem um ponto de ônibus que passam duas linhas. A primeira passa a cada 25 minutos e a segunda a cada 20 minutos. Ela reparou que às dez horas da manhã os dois ônibus passaram juntos.

Maria ficou se questionando se seria possível descobrir quando as duas linhas passariam juntas novamente, sem ter que ficar esperando até que isso aconteça. Depois de algum tempo, fez as seguintes anotações.

$$\begin{array}{lllll l} Linha1: & 10:00, & 10:25, & 10:50, & 11:15, & (11:40), \\ & 12:05, & 12:30, & 12:55, & (13:20), & 13:45 \\ & 14:10, & 14:35, & (15:00), & 15:25 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} Linha2: & 10:00, & 10:20, & 10:40, & 11:00, & 11:20, \\ & (11:40), & 12:00, & 12:20, & 12:40, & 13:00 \\ & (13:20), & 13:40, & 14:00, & 14:20, & 14:40 \\ & (15:00), & 15:20 & & & \end{array}$$

Vão passar juntos às 11:40, depois de 1h e 40 minutos (100 minutos)

Passam juntos às 13:20, depois de 3h e 20 minutos (200 minutos)

Novamente às 15:00, depois de 5h (300 minutos)

Maria chegou a conclusão de que vão passar sempre juntos a cada 1 hora e 40 minutos, que é o mesmo que 100 minutos.

Os horários que Maria escreveu pra linha 1 foram descobertos somando os múltiplos de 25 com o horário inicial (10:00). Já pra linha 2 foi somado os múltiplos de 20.

Atenção!

Vamos denotar os múltiplos de um número natural “a” por M(a).

1 hora = 60 minutos

100 minutos = 1 hora e 40 minutos

Os múltiplos de um número são infinitos, uma vez que os números naturais são infinitos.

M(25): 0, 25, 50, 75, (100), 125, 150, 175, (200), 225, 250, 275, (300), 325,...

M(20): 0, 20, 40, 60, 80, (100), 120, 140, 160, 180, (200), 220, 240, 260, 280, (300), 320,..

Os números 100, 200 e 300 são múltiplos comuns de 25 e 20. Se a lista continuasse sendo feita, os números 400, 500, 600 e todos os múltiplos de 100 estariam na lista de múltiplos de 25 e na lista de múltiplos de 20.

O menor desses números que aparece nas duas lista é chamado de mínimo múltiplo comum de 25 e 20. Para facilitar usaremos a notação mmc(25, 30).

Podemos então, determinar o mínimo múltiplo comum (mmc) de números, listando seus múltiplos e verificando qual o primeiro número a aparecer na lista de múltiplos de todos os números que se quer calcular o mmc. Vamos calcular mmc(10, 12, 15)

M(10): 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80,...

M(12): 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84,...

M(15): 15, 30, 45, 60, 75, 90,..

O primeiro número que é múltiplo comum de 10, 12 e 15 é o 60. Logo mmc(10, 12, 15) = 60.

Para números pequenos podemos tentar fazer esse processo mentalmente.

Listando os múltiplos de um dos números até encontrar algum que também é múltiplo de todos os números que se quer calcular o mmc.

Exercício

Vamos praticar! Calcule o mínimo múltiplo comum dos números abaixo.

a) mmc (7, 21)
b) mmc (8, 36)
c) mmc (9, 16)
d) mmc (9, 15, 6)

Podemos calcular o mínimo múltiplo comum entre números usando a decomposição em fatores primos desses números.

O método é bastante parecido com o cálculo do MDC através das divisões sucessivas.

Porém, multiplicaremos todos os fatores primos, ao invés de só os que dividem todos os números.

Veja os exemplos:

mmc (12, 18)

$$\begin{array}{ll|l} 12, & 18, & 2 \\ 6, & 9, & 2 \\ 3, & 9, & 3 \\ 1, & 3, & 3 \\ 1, & 1, & \end{array}$$

mmc (12, 18) = 2 x 2 x 3 x 3 = 36

mmc (8, 10, 14)

$$\begin{array}{lll|l} 8, & 10, & 14 & 2 \\ 4, & 5, & 7 & 2 \\ 2, & 5, & 7 & 2 \\ 1, & 5, & 7 & 5 \\ 1, & 1, & 7 & 7 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

mmc (8, 10, 14) = 2 x 2 x 2 x 5 x 7 = 280

mmc (20, 21)

$$\begin{array}{ll|l} 20, & 21 & 2 \\ 10, & 21 & 2 \\ 5, & 21 & 3 \\ 5, & 7 & 5 \\ 1, & 7 & 7 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

mmc(20, 21) = 2 x 2 x 3 x 5 x 7 = 420

Se os números que se quer calcular o mmc não tem nenhum fator primo em comum, (como é o caso do 20 e o 21), ou seja, são primos entre si e tem MDC = 1, o mínimo múltiplo comum é o produto de todos os fatores primos dos dois números, ou ainda, é o produto dos dois dois números.

6.1 Exercícios

Complete as frases:
a) MDC significa “Máximo __________ Comum”.

b) mmc significa “__________ múltiplo comum”.

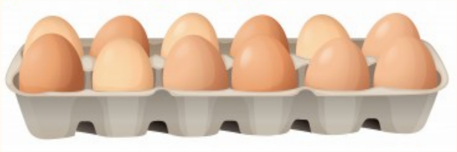
c) Todo número pode ser decomposto em __________.

Exercício 1

Encontre os divisores de 144. Agora encontre os de 450. Quais são os divisores que esses dois números têm em comum?

Exercício 2

a) Em quantas pessoas é possível se dividir uma dúzia de ovos?
b) E se cada pessoa for comer no mínimo dois ovos?



Exercício 3

Em um jogo de tabuleiro, os jogadores devem receber quantidades iguais de fichas vermelhas e azuis. Sabendo que existem 40 azuis e 24 vermelhas e que nenhuma deve sobrar, responda:

a) 3 jogadores é uma quantidade cabível de jogadores? E 4?

b) Qual o número máximo de jogadores desse jogo?

7 Exercícios Finais

Exercício 1

Em uma caixa, existem mais de 50 laranjas, porém menos de 60. Sabemos também que se tirarmos de 3 em 3, sobram 2; se tirarmos de 5 em 5, sobram 4. Quantas laranjas há na caixa?

Exercício 2

Em uma cesta, há menos de 40 ovos. Sabemos que se tirarmos de 6 em 6, de 10 em 10 ou de 15 em 15 sempre sobrará um único ovo. Quantos ovos há na cesta?

Exercício 3

Um conceito que data da Grécia Antiga, também apresentado no livro “Elementos” de Euclides, que já vimos neste capítulo, é o de Número Perfeito. Um número é considerado “perfeito” se a soma de seus divisores (com a exclusão do próprio núemro) for igual ao próprio número. 6 é um desses números. Você consegue encontrar outro? Dica: existe um entre 20 e 30.

Exercício 4

(UEL- Adaptado) Três ciclistas percorrem um circuito saindo todos ao mesmo tempo, do mesmo ponto, e com o mesmo sentido. O primeiro faz o percurso em 40 s, o segundo em 36 s e o terceiro em 30 s. Com base nessas informações, depois de quanto tempo os três ciclistas se reencontrarão novamente no ponto de partida, pela primeira vez?

a) 5 minutos.
b) 6 minutos.
c) 7 minutos.
d) 8 minutos.
e) 9 minutos.

7.1 DESAFIO

Qual é o menor número, não nulo, que devemos multiplicar por 1485 para que ele seja um cubo perfeito?

Após resolver esse desafio em seu caderno, confira aqui a resolução proposta:

Iniciaremos com a fatoração do número 1485: $5 \cdot 3^3 \cdot 11$.

Para que um número seja um cubo perfeito, os expoentes de cada um de seus fatores primos que se encontram em sua decomposição, devem ser múltiplos de 3.

Como estamos buscando o menor número que ao ser multiplicado por 1485 resulte num cubo perfeito, queremos: $5^x \,.\, 3^y \,.\, 11^z \,.\, 5 \,.\, 3^3 \,.\, 11 = 5^3 \,.\, 3^3 \,.\, 11^3$

Aplicando a propriedade das potências a respeito da multiplicação de potências de mesma base, podemos de deduzir que $x = 2$, $y = 0$ e $z = 2$.

Logo, o número que buscamos é $5^2 \,.\, 11^2 = 3025$.

Curiosidade

Um "cubo perfeito" é um número que tem uma raiz cúbica exata, ou seja, um número que, se multiplicado por ele mesmo mais duas vezes, vai resultar nesse cubo perfeito.

7.2 ATIVIDADES

1) Uma técnica muito antiga, chamada de Crivo de Eratóstenes,é utilizada para que se descubra quais números são primos, começando pelo 2 e indo até qualquer valor pré-determinado.

Aqui, faremos até 100. Escreva em seu caderno os números naturais entre 2 e 100.

Agora vamos começar a determinar os primos.
Vamos fazer um círculo ao redor dos primos e riscar os que são compostos. Começamos com o 2.

Agora riscamos todos os que são divisíveis por 2.

Achamos o próximo número que não está riscado e o circulamos, pois ele é primo.

Neste caso, esse número é o 3. Riscamos todos os seus múltiplos.

O próximo primo que vamos encontrar aqui é o cinco.

E assim por diante, achando os primos e riscando seus múltiplos até encontrarmos todos os 25 primos entre 2 e 100.

Curiosidade

“Crivo” é uma palavra que caracteriza alguma coisa semelhante a uma peneira, com diversas divisões, como uma tabela. Eratóstenes de Cirene foi um grego que viveu entre 276 a.C. e 194 a.C. e foi o responsável pela ideia desse método de encontrar números primos.

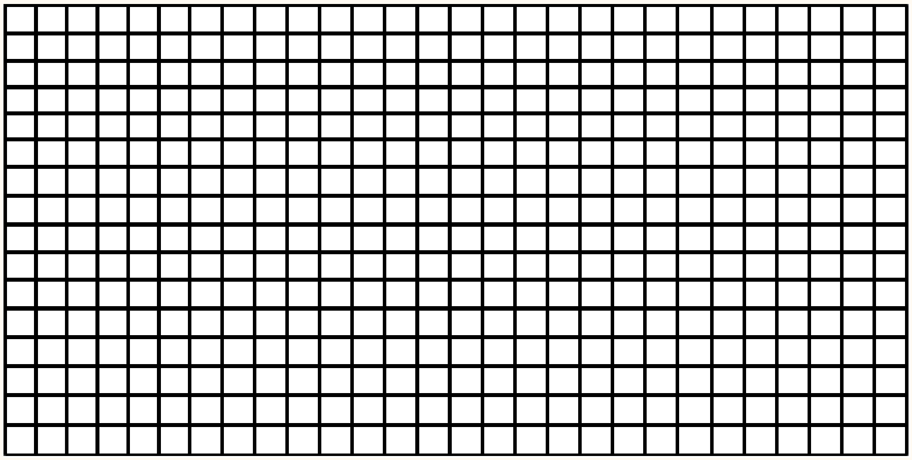
Desafio

Agora um desafio: Qual o primeiro número primo maior que 100?

2) Em seu caderno, escreva todas as multiplicações de números naturais que resultam em 16. Dica: são três multiplicações diferentes.

No quadriculado abaixo, desenhe os retângulos cujos lados sejam os componentes dessas multiplicações.

Observe as medidas desses retângulos são os fatores de 16.



Agora responda:

16 é um número primo?

16 é divisível por 2? E por 3?

16 tem quantos fatores?

Atenção!

Atenção: O quadrado é um retângulo!

Referências

PEXELS, fonte de imagens para uso pessoal e comercial sem atribuição requerida, disponível em <https://www.pexels.com>, acesso em Maio de 2018.

MAIS TECNOLOGIA, disponível em <https://www.maistecnologia.com>, acesso em Maio de 2018.

MMC e MDC, por GLOBO EDUCAÇÃO, disponível em <http://educacao.globo.com/matematica/assunto/matematica-basica/mmc-e-mdc.html>, acesso em Maio de 2018.

PRATICANDO MATEMÁTICA 6º ANO, por Issuu, disponível em <https://issuu.com/ronaldo.cardoso/docs/praticando_matematica-6ano_a275d03052b9bd>, acesso em Maio de 2018.

PRATICANDO MATEMÁTICA 7º ANO, por Issuu, disponível em <https://issuu.com/gbdslvrsglobal/docs/praticando_matem__tica_-_7___ano>, acesso em Maio de 2018.

EXERCÍCIO SOBRE NÚMERO PRIMOS, por Brasil Escola, disponível em <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-numeros-primos.htm#resp-3>, acesso em Maio de 2018.