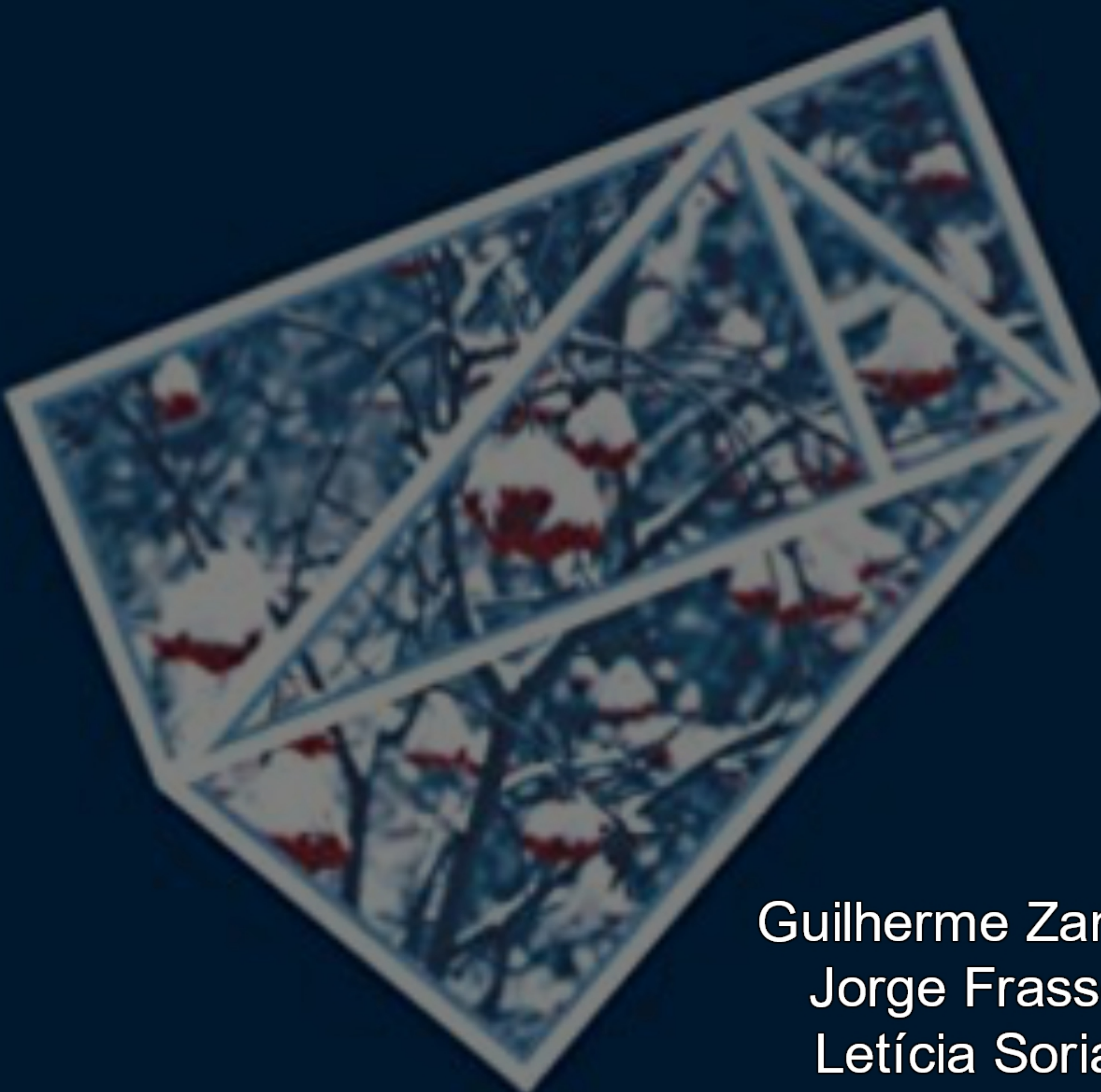
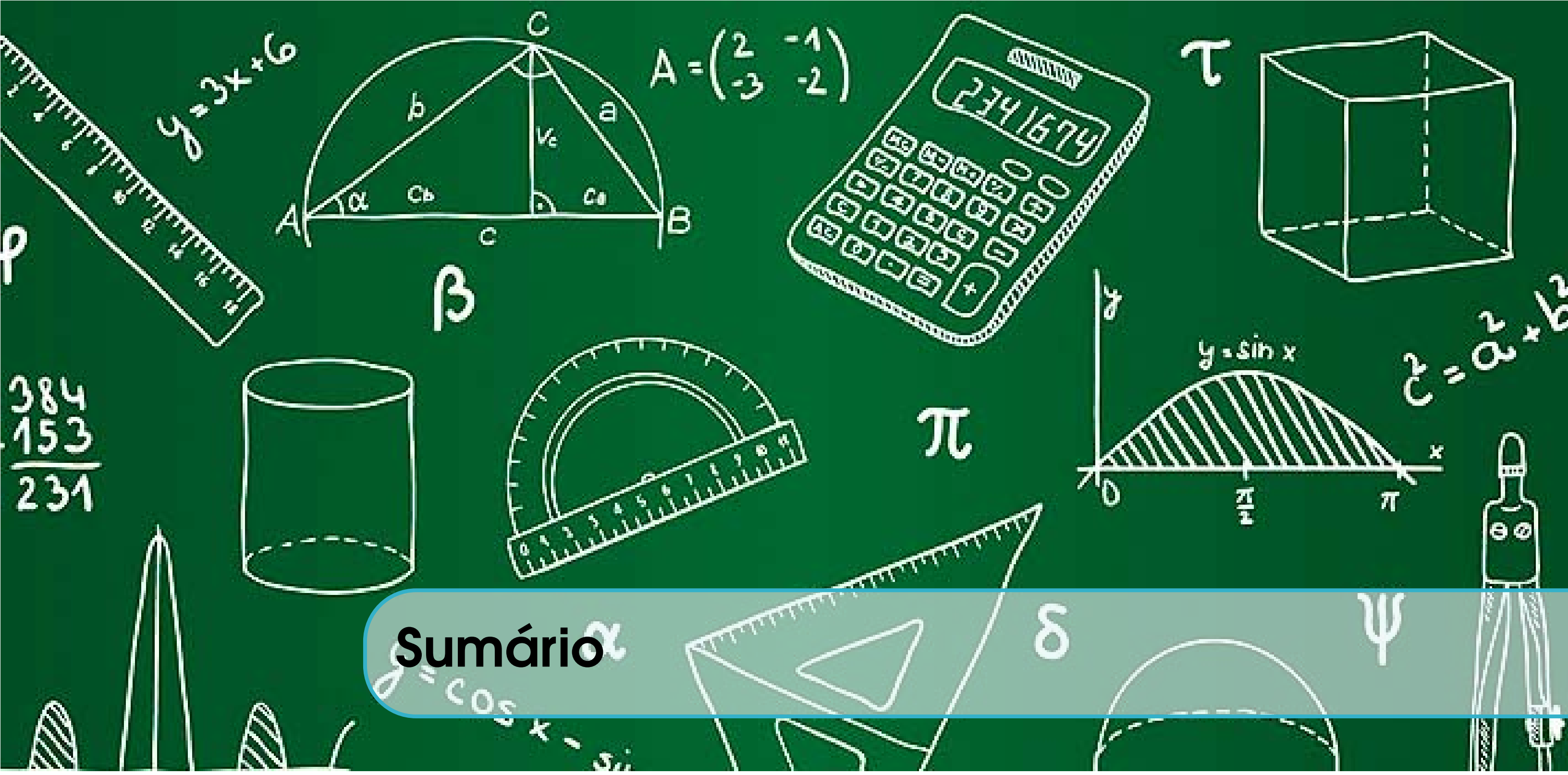
Análise de Livros Estrangeiros

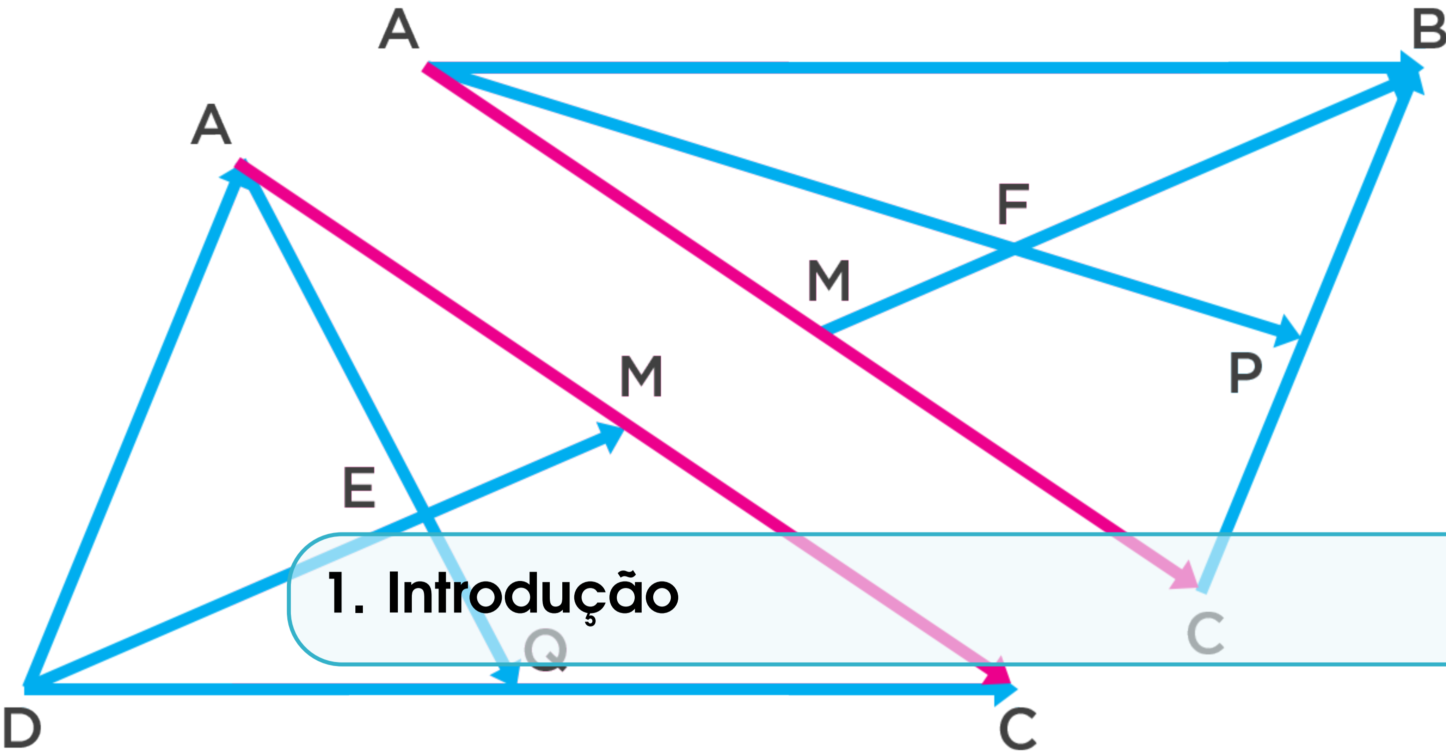
Tarefa 3



Guilherme Zanni
Jorge Frasson
Letícia Soriani



Sumário



1. Introdução

Esse trabalho destina-se a realizar a análise de um livro de material estrangeiro, considerando como poderia ser a abordagem do mesmo conteúdo se fosse trabalhado no Brasil. Para isso, escolhemos o livro Geometry, Book I. Planimetry, do autor russo Andrey Kiselev, e adaptado para o inglês por Alexander Givental. Analisaremos parte do capítulo três, sobre semelhanças (páginas 117-161).

Andrey Kiselev nasceu na Rússia em 1852 e foi um famoso autor de livros didáticos. Chegou a escrever livros até sobre física e cálculo diferencial, mas os que mais venderam e que o fizeram enriquecer foram os seus livros sobre aritmética, álgebra, e o que analisaremos, sobre geometria. Este último foi publicado em 1892 pela primeira vez, e a versão em inglês que usamos é separada em dois volumes, um sobre geometria plana e outro sobre geometria espacial.

De acordo com Alexander Karp, em seu artigo "*Andrey Kiselev: the Life and the Legend*"[1], os livros de Kiselev eram muito populares na Rússia czarista, passando por um momento em que foi pouco usado durante a primeira década pós revolução de outubro de 1917, e voltando a ser muito usado na União Soviética após uma mudança no sistema educacional em 1929, passando a ser usado como livro obrigatório em todo o país.

Embora tenha uma trajetória controversa, sendo bastante ativo politicamente e, entre outras posições, foi contra à autodeterminação das colônias russas, seus livros foram usados por quase um século. Desde a Rússia czarista até a União Soviética comunista, usado ainda por um longo período após sua morte em 1940. Entender o por que disso foi o que nos motivou a escolher esse livro como objeto de análise neste trabalho.

Com a ideia de perceber boas práticas matemáticas no período de escrita do livro, que o objetivo do presente trabalho não é o de analisar o livro de Kiselev em si, mas sim observar, acima de tudo, quais são suas contribuições a serem aplicadas pedagogicamente no Brasil, levando em conta o Currículo do Estado de São Paulo e o Plano Nacional do Livro Didático (para saber o momento no qual o conteúdo deveria ser estudado) e a Base Nacional Comum Curricular (para saber quais as competências necessárias em cada ano).

Nos documentos, o assunto em análise é proposto para ser trabalhado nos anos finais do Ensino

[1] Artigo disponível em <`https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/12758/9353`>

Fundamental, sendo que daremos mais foco para os conceitos estudados no 9º ano, onde se localiza a maior parte do conteúdo.

2. Metodologia

Como dito na introdução, analisaremos os conteúdos comuns no livro de Kiselev com os propostos no Brasil, tanto pelo *Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)*[1] quanto, mais especificamente, pelo *Currículo do Estado de São Paulo*[2]. Para melhor argumentação em relação às competências desenvolvidas estaremos utilizando a *Base Nacional Curricular Comum, versão III (BNCC)*[3].

A partir destes recursos, utilizaremos como base a coleção *"Praticando Matemática"* , para que possamos ter uma noção da realidade comum dos livros brasileiros nos últimos anos, já que, segundo o *Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)*[4] essa foi a coleção mais distribuída em 2017 para as séries finais do ensino fundamental.

9º ANO – 10 UNIDADES – 272 PP.	
1	Potenciação: definição, propriedades; notação científica; radiciação: definição, propriedades, simplificação, adição, subtração, racionalização
2	Equações do 2° grau: resolução, problemas, raízes; equações fracionárias, biquadradas e irracionais
3	Localização no plano: direção e sentido, coordenadas cartesianas, coordenadas geográficas
4	Função: notação, domínio, imagem, lei de formação, gráficos; gráficos de funções polinomiais do 1° e do 2° graus; funções do 1° grau e sistemas de equações
5	Possibilidades; probabilidade; população; amostra
6	Razões e proporções – teorema de Tales; semelhança de figuras geométricas; semelhança de triângulos
7	Teorema de Pitágoras; relações métricas no triângulo retângulo
8	Razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente
9	Área do círculo, da coroa circular e do setor circular; cilindro: área da superfície, volume
10	Porcentagens: descontos, acréscimos; juros simples e compostos

Figura 2.1: Localização do conteúdo no PNLD 2017. Perceba a relação entre o item 6 do PNLD com o 3° semestre do Currículo do Estado de São Paulo da Fig. 2.2

[1]Download disponível em <http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/guia-do-livro-didatico/item/8813-guia-pnld-2017>

[2]Download disponível em <http://www.educacao.sp.gov.br/curriculo>

[3]Download disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc/>

[4]Dados estatísticos disponibilizados em <http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/dados-estatisticos>

8ª série/9º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Geometria/Relações** Proporcionalidade na Geometria • O conceito de semelhança • Semelhança de triângulos • Razões trigonométricas	• Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes • Saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos • Compreender e saber aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos, particularmente o teorema de Pitágoras, na resolução de problemas em diferentes contextos • Compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos

Figura 2.2: Localização do conteúdo no Currículo do Estado de São Paulo 2018

Como também dito na introdução, o foco maior do trabalho será o 9° ano, pois é a localização da maior parte dos conteúdos trabalhados no livro russo, como percebemos nas Fig. 2.1 e 2.2. Assim, visando sempre adquirir melhores práticas para a educação do nosso país, dividimos a metodologia em partes:

2.1 Estrutura

Análise da parte estrutural do livro, ou seja, do "perfil" de organização do começo ao fim. No caso do livro de Kiselev, aqui entra analisar se todos os teoremas, proposições, lemas e tais especificidades matemáticas seguem uma determinada maneira de apresentação ao longo do livro. A partir disso, buscamos verificar se demonstrações, teoremas, proposições e lemas poderiam ser utilizados no contexto brasileiro.

2.2 Recursos visuais

Analisar a presença de figuras e outros recursos visuais de maneira adequada a facilitar o entendimento do aluno, principalmente por estarmos trabalhando com um assunto no qual a construção geométrica pode ser bem utilizada. Por exemplo, verificar se a existência de uma figura que exemplifique o teorema é necessária e, ainda por cima, se facilita para que o aluno entenda seu enunciado e consequente demonstração.

2.3 Abordagem pedagógica

2.3.1 Teoria

Analisar se demonstrações, teoremas, lemas e preposições, da maneira como são apresentados pelo autor, poderiam ser utilizados, ao pé da letra ou com uma modificação plausível, em um livro de 9° ano do Ensino Fundamental.

2.3.2 Aplicações

Verificar se os exemplos, exercícios e aplicações reais presentes no livro podem induzir, no aluno, uma construção lógica através de trabalhos em grupo ou pesquisas individuais. Além disso, avaliar a forma com a qual o conteúdo é apresentado, ou seja, se existe ou não uma preocupação pedagógica para que o aluno realmente entenda o que está sendo passado. A partir dessa análise, avaliar em que sentido podemos utilizar o que foi visto, no livro, em sala de aula.

2.4 Exercícios

Verificar o grau de dificuldade dos exercícios de acordo com o conteúdo apresentado. Ao realizar a análise, não buscamos avaliar a complexidade dos exercícios em um sentido vertical[5], mas sim avaliar uma possível aplicação destes em nível nacional, a partir das competências estabelecidas pela BNCC. O objetivo é, portanto, comparar os exercícios do Kiselev com a maneira pela qual o conteúdo é apresentado no Brasil.

[5] Denominação utilizada, dentro da disciplina, para analisar um livro individualmente, ou seja, encontrar seus pontos positivos e negativos.

3. Análise

3.1 Estrutura

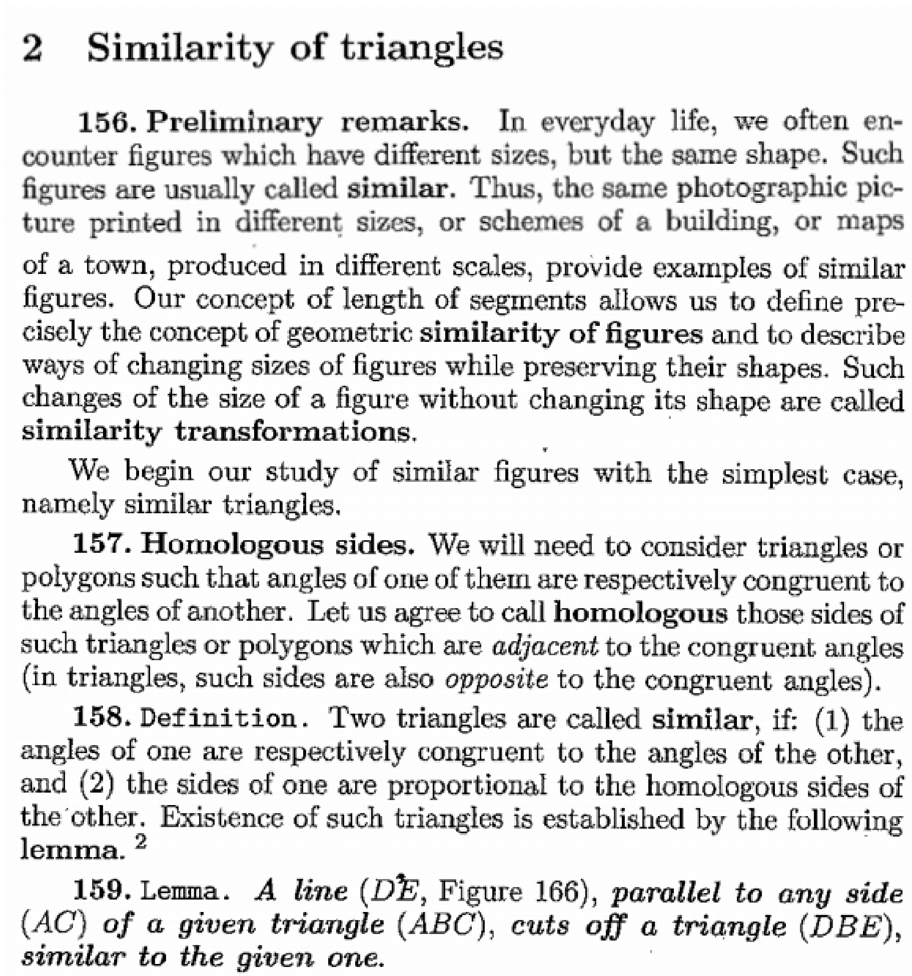
A estrutura do livro é estabelecida seguindo um padrão que pode ser definido como:

1. Questão matemática ou apresentação do conteúdo através de uma contextualização sucinta.
2. Construção geométrica sobre tal ideia previamente apresentada.
3. Apresentação visual sobre a referida construção geométrica.
4. Desenvolvimento dos conceitos sobre a ideia inicial através de teoremas e lemas e suas devidas apresentações.
5. Finalização do capítulo através de exercícios que retomam os conceitos abordados.

Devemos lembrar que, em alguns tópicos que são apresentadas construções geométricas, por exemplo, nem sempre há a exibição através de figuras ou desenhos. Entretanto, a explicação com palavras no texto é feita de maneira que o leitor entenda o que está sendo feito, para que possa reproduzir o desenho por si próprio.

Outro ponto muito importante para discussão é que o livro organiza todo o conteúdo de forma sequencial, ou seja, existe uma numeração única para cada conceito desenvolvido. Isso é utilizado para referenciar tópicos que foram previamente estudados e precisam ser utilizados em novos conteúdos. Exemplificaremos tal análise com a apresentação do conteúdo de semelhança de triângulos segundo o Kiselev. Ressaltamos que logo após apresentação do lema, existe uma demonstração sobre o mesmo, no qual não é exibido na figura 3.1.

Com relação aos exercícios, é possível notar que, ao fim de todo capítulo, há a apresentação de exercícios referentes ao tema abordado, com dificuldade tão complexa quanto, ou seja, assim como ele apresenta demonstrações, ele cobra do aluno o desenvolvimento de tais demonstrações.



2 Similarity of triangles

156. Preliminary remarks. In everyday life, we often encounter figures which have different sizes, but the same shape. Such figures are usually called **similar**. Thus, the same photographic picture printed in different sizes, or schemes of a building, or maps of a town, produced in different scales, provide examples of similar figures. Our concept of length of segments allows us to define precisely the concept of geometric **similarity of figures** and to describe ways of changing sizes of figures while preserving their shapes. Such changes of the size of a figure without changing its shape are called **similarity transformations**.

We begin our study of similar figures with the simplest case, namely similar triangles.

157. Homologous sides. We will need to consider triangles or polygons such that angles of one of them are respectively congruent to the angles of another. Let us agree to call **homologous** those sides of such triangles or polygons which are *adjacent* to the congruent angles (in triangles, such sides are also *opposite* to the congruent angles).

158. Definition. Two triangles are called **similar**, if: (1) the angles of one are respectively congruent to the angles of the other, and (2) the sides of one are proportional to the homologous sides of the other. Existence of such triangles is established by the following lemma. [2]

159. Lemma. ***A line** (DE, Figure 166), **parallel to any side** (AC) **of a given triangle** (ABC), **cuts off a triangle** (DBE), **similar to the given one.***

Figura 3.1: Seção 3.2 Semelhança de triângulos, páginas 127-128

3.2 Recursos visuais

Os recursos visuais utilizados pelo autor são feitos apenas para apresentações geométricas das figuras previamente construídas.

Exibimos aqui um exemplo de uma construção a respeito do teorema que define que a diagonal de um quadrado é incomensurável ao seu lado. Perceba que, antes da apresentação visual, existe a construção geométrica a respeito dos pontos, segmentos e ângulos e esse padrão se repete em todas as figuras apresentadas, ou seja, o autor leva muito a sério o critério da construção geométrica, e trabalha tal conceito de forma clara e abrangente.

Logo, podemos definir que esse é um dos pontos mais positivos deste livro, visto que para o conteúdo do Ensino Fundamental ou Médio, o desenvolvimento do raciocínio construtivo é fundamental, e infelizmente no Brasil é pouco desenvolvido.

148. Theorem. ***The diagonal of a square is incommensurable to its side.***

Since the diagonal divides the square into two isosceles right triangles, then this theorem can be rephrased this way: ***the hypotenuse of an isosceles right triangle is incommensurable to its leg.***

Let us prove first the following property of such a triangle: *if we mark on the hypotenuse AC (Figure 162) of $\triangle ABC$ the segment AD congruent to the leg, and draw $DE \perp AC$, then the right triangle DEC thus formed will be isosceles, and the part BE of the leg BC will be congruent to the part DC of the hypotenuse.*

To prove this, draw the line BD and consider angles of the triangles DEC and BED. Since the triangle ABC is right and isosceles, then $\angle 1 = \angle 4$, and therefore $\angle 1 = 45°$. Therefore in the right triangle DEC we have $\angle 2 = 45°$ too, so that $\triangle DEC$ has two congruent angles, and hence two congruent sides DE and DC.

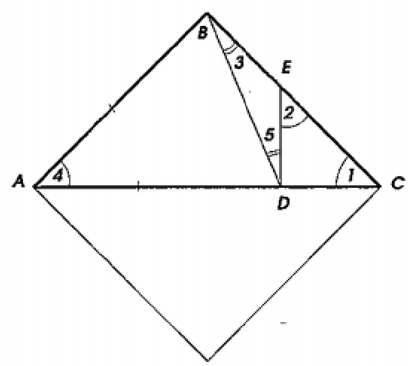


Figure 162

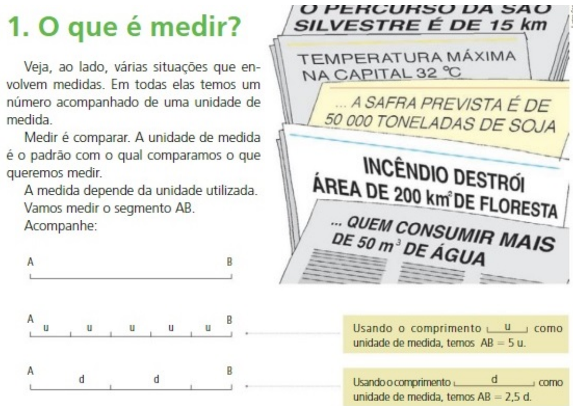
Figura 3.2: Teorema 148, página 121

3.3 Abordagem pedagógica - Teoria e Aplicações

3.3.1 Medição (*Mensuration*)

O primeiro tópico do capítulo que estamos analisando trata da medição de segmentos. Na coleção brasileira que adotamos como padrão, o assunto aparece no volume do 6° ano, no capítulo "Medidas". Basicamente o livro brasileiro apresenta que, para medir o comprimento de um segmento "a", é necessário adotar um segmento "u" como unidade e escrever o segmento "a" em função de "u".

Todo o resto do capítulo é dedicado para falar de diferentes unidades de medidas de comprimento, seguido de áreas e volumes.



1. O que é medir?

Veja, ao lado, várias situações que envolvem medidas. Em todas elas temos um número acompanhado de uma unidade de medida.

Medir é comparar. A unidade de medida é o padrão com o qual comparamos o que queremos medir.

A medida depende da unidade utilizada.

Vamos medir o segmento AB.

Acompanhe:

Usando o comprimento u como unidade de medida, temos AB = 5 u.

Usando o comprimento d como unidade de medida, temos AB = 2,5 d.

Figura 3.3: Coleção *"Praticando Matemática"*, 6° ano, página 237

Aqui fica evidente uma grande diferença entre Kiselev e os livros brasileiros, e que será constante em todo o livro. Diferença essa que, com certeza, contribuiria muito se fosse adaptada ao contexto atual e adotada nos livros didáticos. No livro russo, várias páginas são dedicadas ao assunto medição, que, como dito inicialmente, é o primeiro tópico do capítulo de semelhanças.

Os conceitos são apresentados aos poucos e começando com os mais simples, além do conteúdo ser apresentado com o problema de comparar e mensurar segmentos: "o que é uma medida comum (*common measure*) entre dois segmentos?". É apresentado o algoritmo de Euclides para encontrar a maior medida comum (se ela existir) entre dois segmentos e o que são segmentos comensuráveis e incomensuráveis. É demonstrado que a diagonal de um quadrado é incomensurável com o seu lado. Como determinar o comprimento de um segmento “a” comparando ele com um outro segmento chamado unidade de comprimento, se o segmento “a” e a unidade são comensuráveis então “a” tem como medida um número racional. Por outro lado, se são incomensuráveis, é possível determinar uma aproximação para sua medida a partir de outro segmento comensurável com a unidade e tão próximos de “a” quanto se queira.

A medida desses segmentos incomensuráveis com a unidade é um número irracional e então é apresentado a reta dos números, onde um número “a” é marcado no ponto A quando a medida do segmento OA (onde O é a origem) é igual a “a”. Ao final, é apresentado o que é a razão entre dois segmentos e proporção entre pares de segmentos.

O ponto positivo a ser realçado aqui é como o conteúdo é construído aos poucos com o aluno, ao invés de apenas apresentar uma definição simples e passar exercícios numéricos. É apresentado e demonstrado que a diagonal de quadrado é incomensurável com o seu lado, o que também é um ponto positivo e poderia ser adotado nos livros brasileiros, já que raramente são feitas demonstrações nestes livros, mesmo de proposições muito simples.

Um outro ponto positivo é a relação feita com os conjuntos racional e irracional. Enquanto na coleção *"Praticando Matemática"* os conjunto numéricos são apenas apresentados de forma muito superficial aos alunos, Kiselev faz isso de modo a relacionar as medidas de segmentos com a construção desses conjuntos, o que torna mais concreto e evidente quais as diferenças entre os conjuntos. O conteúdo estudado no tópico *Mensuration* também poderia, de forma muito eficiente, ser relacionado com máximo divisor comum e números primos ao se falar de medida comum entre dois segmentos.

Thus, all real numbers: positive, zero, or negative, are represented by points on the number line. conversely, picking on any straight line any two points O and B to represent the numbers 0 and 1 respectively, we establish a correspondence between all points of the line and all real numbers.

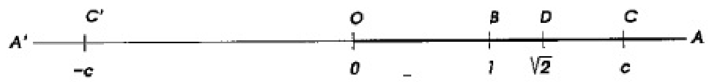


Figure 165

Figura 3.4: Representação dos números na reta real, relacionando os conjuntos racional e irracional

No geral - e também comparando com a coleção *"Praticando Matemática"* - os livros brasileiros relacionam razão e proporção com geometria apenas no 9° ano, quando se fala de teorema de Tales e semelhança de triângulos. Porém, razão e proporção aparecem desde o 6° ano. A forma como o Kiselev apresenta isso, ao comparar segmentos e pares de segmentos é muito interessante e inexistente nos livros brasileiros, algo que também poderia ser adotado.

155. Proportions. A proportion expresses equality of two ratios. For instance, if it is known that the ratio $a : b$ of two segments is equal to the ratio $a' : b'$ of two other segments, then this fact can be expressed as a proportion: $a : b = a' : b'$, or

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Figura 3.5: Apresentação da ideia de razão e proporção no livro de Kiselev

3.3.2 Semelhança de triângulos (*Similarity of triangles*)

O segundo tópico é sobre semelhança de triângulos. Na coleção brasileira que analisamos, esse assunto é tratado no 9° ano junto com teorema de Tales. No livro de Kiselev, esse tópico começa com algumas idéias que podem não estar bem definidas até aqui, como o que seria semelhança de figuras ou lados correspondentes entre dois triângulos ou polígonos. É bem definido o que são triângulos semelhantes e em seguida é apresentado e demonstrado o seguinte lema:

159. Lemma. *A line* (DE, Figure 166), *parallel to any side* (AC) *of a given triangle* (ABC), *cuts off a triangle* (DBE), *similar to the given one.*

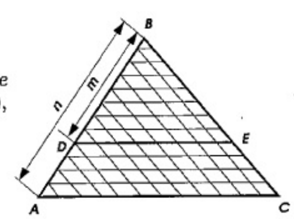


Figure 166

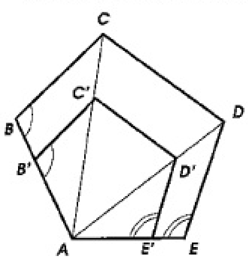
Figura 3.6: Lema para triângulos semelhantes

Tal conclusão aparece de forma implícita no livro *"Praticando Matemática"* quando trata do teorema de Tales aplicado aos triângulos, onde o autor mostra que, ao se traçar uma reta que corte o triângulo e é paralela a um dos lados, os segmentos dos lados cortados são proporcionais. Não se conclui, porém, que o triângulo menor formado é semelhante ao triângulo original. Essa conclusão é importante, pois é usada na demonstração de que triângulos com dois ângulos congruentes são semelhantes. Kiselev usa essa mesma conclusão para demonstrar os critérios de semelhança entre triângulos, e esse é um grande ponto positivo de seu livro, visto que no geral, tudo que é usado em algum momento fois demonstrado anteriormente.

3.3.3 Semelhança de polígonos (*Similarity of polygons*)

O terceiro tópico deste capítulo é sobre semelhança de polígonos. Este assunto faz parte do volume do 9° ano do livro *"Praticando Matemática"*, logo antes do livro tratar de semelhança de triângulos. Como pode-se perceber, no livro em análise, esse assunto é logo depois do tópico de semelhança de triângulos, sendo uma diferença importante e que poderia ser adotada pelo livro brasileiro. Como podemos ver na Fig. 3.7, algumas propriedade de semelhança de triângulos são usadas para mostrar como construir polígonos semelhantes.

166. Problem. *Given a polygon ABCDE, and a segment a, construct another polygon similar to the given one and such that its side homologous to the side AB is congruent to a* (Figure 173).



from $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$: $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{AC'}{AC}$;

from $\triangle AC'D' \sim \triangle ACD$: $\dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{C'D'}{CD} = \dfrac{AD'}{AD}$;

from $\triangle AD'E' \sim \triangle ADE$: $\dfrac{AD'}{AD} = \dfrac{D'E'}{DE} = \dfrac{AE'}{AE}$.

Figure 173

Figura 3.7: Problema envolvendo semelhança de polígonos

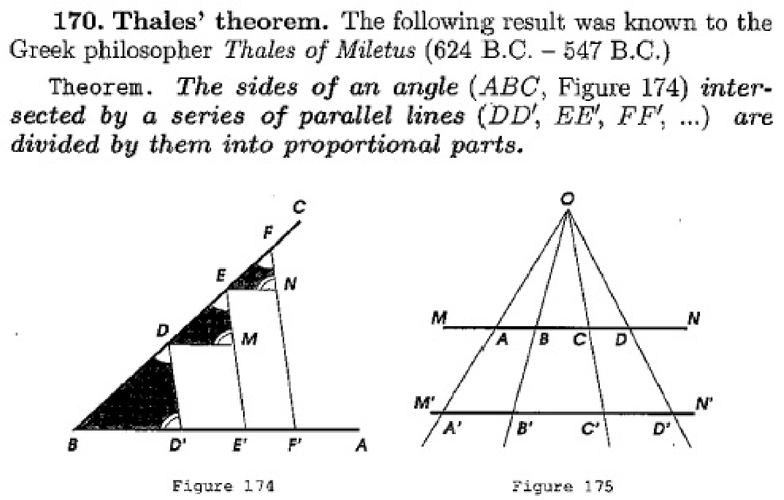
No livro brasileiro a ordem não importa, pois não tem nenhuma relação entre os dois tópicos. Remarcamos aqui esse ponto positivo que também é constante no capítulo e no livro, as frequentes relações feitas em um tópico com o assunto estudado nos tópicos anteriores.

Pela Fig. 3.7, também podemos reparar outro ponto positivo do Kiselev: é mostrado como construir um pentágono semelhante a um pentágono dado. Enquanto nos livros brasileiros só é apresentado o critério de semelhança entre polígonos, no Kiselev é feita a construção de polígonos semelhantes, mostrado que é possível dividir dois polígonos convexos semelhantes em triângulos semelhantes, e demonstrado que a razão entre os lados de dois polígonos semelhantes se mantém quando os perímetros dos mesmos são comparados.

3.3.4 Teoremas de proporcionalidade (*Proporcionality theorems*)

Este tópico apresenta alguns teoremas sobre proporcionalidade e trata centralmente desse assunto, entrando em algumas propriedades das bissetrizes como consequência do teorema de Tales. Na coleção *"Praticando Matemática"*, o tema proporcionalidade aparece no volume do 6° ano, mas com praticamente nenhuma relação com geometria. Já teorema de Tales aparece no volume do 9° ano, antes de semelhança de triângulos, o que é a primeira diferença positiva encontrada.

Enquanto na coleção brasileira primeiro se estuda o teorema de Tales, quase que como uma regra imposta, no livro de Kiselev, este teorema é apresentado depois de se ter estudado semelhança de triângulos e como uma consequência lógica do que se estudou anteriormente.


170. Thales' theorem. The following result was known to the Greek philosopher *Thales of Miletus* (624 B.C. – 547 B.C.)

Theorem. ***The sides of an angle*** *(ABC, Figure 174)* ***intersected by a series of parallel lines*** *(DD', EE', FF', ...)* ***are divided by them into proportional parts.***

Figure 174 Figure 175

Figura 3.8: Apresentação do teorema de Tales no livro de Kiselev

Na Fig. 3.8, podemos ver que é usado algumas propriedades de semelhança de triângulos para demonstrar o teorema. Novamente são feitas várias construções geométricas para demonstrar as propriedades apresentadas.

3.3.5 Homotetia (*Homothety*)

O quinto tópico desse capítulo é sobre Homotetia, um assunto que não faz parte do conteúdo de matemática no ensino básico, porém, pela forma que este tópico é abordado, fica evidente que poderia fazer parte.

É apresentado a definição de homotetia e já fica perceptível que existe alguma relação com o teorema de Tales e semelhança de polígonos. Na sequência, são formalizadas e construídas algumas dessas relações e a homotetia, neste caso, pode ser entendida como uma ferramenta para construir figuras semelhantes e resolver alguns problemas como o da Fig. 3.9.

O ponto positivo neste tópico é, então, que alguns conteúdos que não fazem parte dos livros brasileiros (nem da BNCC) poderiam ser incorporados a eles.

183. Problem 3. *Into a given triangle ABC, to inscribe a rhombus with a given acute angle, in such a way that one of its sides lies on the base AB of the triangle, and two vertices on the lateral sides AC and BC* (Figure 187).

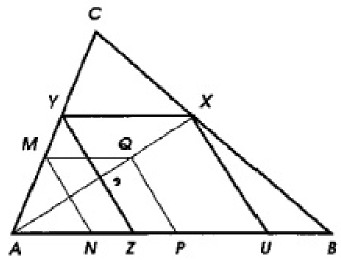


Figure 187

Figura 3.9: Problema do livro de Kiselev envolvendo Homotetia

3.3.6 Média geométrica (*Geometric mean*)

No último ponto que analisaremos neste capítulo, o assunto central é média geométrica. Este é um assunto que não aparece nos livros do Ensino Fundamental e não está presente especificamente na BNCC, embora o tema média e medidas de tendência central estejam presentes. Também não é um tema que geralmente seja estudado no Ensino Médio, onde apenas média, moda e mediana aparecem como medidas de tendência central.

Kiselev, em nenhum momento, realiza uma abordagem estatística, mas centralmente geométrica. Inclusive, temos a definição de média geométrica, onde o livro, antes de apresentar como a raiz quadrada do produto de dois números, apresenta como um segmento "b" que satisfaça a proporção a : b = b : c, onde "a" e "c" são os segmentos dados (como o livro é sobre geometria plana, não é abordado média geométrica com mais de dois números).

184. Definition. The **geometric mean** between two segments a and c is defined to be a third segment b such that $a : b = b : c$. More generally, the same definition applies to any quantities of the same denomination. When a, b, and c are positive numbers, the relationship $a : b = b : c$ can be rewritten as

$$b^2 = ac, \text{ or } b = \sqrt{ac}.$$

Figura 3.10: Definição de média geométrica

Os pontos positivos aqui não são muito diferentes dos encontrados nos tópicos anteriores, tratando, por exemplo, de como relacionar com os conteúdos estudado anteriormente, demonstrando essa proporção usando semelhança de triângulos em um triângulo retângulo. Também são apresentadas construções que facilitem o entendimento, como na Fig. 3.11, onde é mostrado duas formas de construir a média geométrica entre dois segmentos.

187. Problem. *To construct the geometric mean between two segments a and c.*

We give two solutions.

(1) On a line (Figure 190), mark segments $AB = a$ and $BC = c$ next to each other, and describe a semicircle on AC as the diameter. From the point B, erect the perpendicular to AC up to the intersection point D with the semicircle. The perpendicular BD is the required geometric mean between AB and BC.

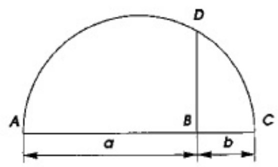


Figure 190

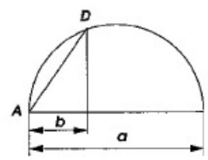


Figure 191

(2) From the endpoint A of a ray (Figure 191), mark the given segments a and b. On the greater of them, describe a semicircle. From the endpoint of the smaller one, erect the perpendicular up to the intersection point D with the semicircle, and connect D with A. The chord AD is the required geometric mean between a and b.

Figura 3.11: Problema envolvendo média geométrica

193. Theorem. ***The sum of the squares of the diagonals of a parallelogram is equal to the sum of the squares of its sides*** (Figure 195).

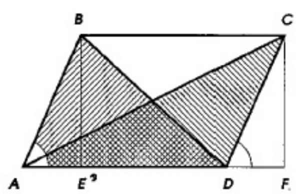


Figure 195

From the vertices B and C of a parallelogram $ABCD$, drop the perpendiculars BE and CF to the base AD. Then from the triangles ABD and ACD, we find:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE, \quad AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot DF.$$

The right triangles ABE and DCF are congruent, since they have congruent hypotenuses and congruent acute angles, and hence $AE = DF$. Having noticed this, add the two equalities found earlier. The summands $-2AD \cdot AE$ and $+2AD \cdot DF$ cancel out, and we get:

$$BD^2+AC^2 = AB^2+AD^2+AD^2+CD^2 = AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$

Figura 3.12: Generalização do teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é apresentado e demonstrado como consequência dessas proporções concluídas anteriormente, diferente do comum nos livros brasileiros, que demonstra o teorema com base nas áreas.

Várias conclusões, propriedades e construções bastante interessantes são apresentadas na sequência deste tópico e que, com certeza, poderia ser parte de um material didático brasileiro. O teorema de Pitágoras é manipulado de modo a generalizar para qualquer tipo de triângulo e paralelogramos, como podemos ver na Fig. 3.12, que diz que a soma dos quadrados das diagonais de um paralelogramo é igual a soma dos quadrados dos seus lados.

São apresentadas também várias relações entre segmentos dentro de uma circunferência e, no geral, tudo o que é apresentado até o fim deste tópico poderia acrescentar muito nos livros brasileiros.

3.4 Exercícios

A análise dos exercícios seguirá a ideia da análise da abordagem pedagógica, ou seja, de acordo com as seções estabelecidas no Kiselev.

3.4.1 Medição (*Mensuration*)

Exercícios 330 e 331 são modelos de exercício interessantes para serem inseridos em livros do 9° ano. Uma das habilidades da BNCC para a série é a de que o aluno saiba "*resolver e elaborar problemas que envolvam problemas de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas*"**(EF09MA08)**. Tomando como base o livro Praticando Matemática, não há a inserção de exercícios sobre o tema proporcionalidade no conteúdo no 9° ano.

De acordo com o PNLD, esse é conteúdo de 9° ano, porém, no Currículo do Estado de São Paulo, esse é um conteúdo para ser visto anteriormente (7° ano). De qualquer forma, é interessante que ele seja retomado para explicar conceitos de semelhança, e dado que os alunos de 9° ano já possuem maior maturidade matemática que alunos de 7° ano essa retomada poderia ser dada com exercícios um pouco mais elaborados. Como exemplo, então, retomar o conteúdo de proporção com exercícios modelo 330 e 331 do livro de Kiselev, nos quais a demonstração de propriedades de proporção é pedida.

330. Prove that if $a : b = a' : b'$, then $(a + a') : (b + b') = a : b$.

331. Prove that if $a : a' = b : b' = c : c'$, then $(a+b) : c = (a'+b') : c'$.

Figura 3.13: Exercícios 330 e 331, capítulo 3

3.4.2 Semelhança de triângulos (*Similarity of triangles*)

Essa seção divide os exercícios em demonstração (345 a 355) e cálculo (356 a 359). Alguns exercícios de demonstração poderiam ser utilizados no 9° ano do Ensino Fundamental, desde que estejam de acordo com as competências e habilidades de um aluno nessa idade. Comparando com o livro Praticando Matemática, os exercícios passados para os alunos são exercícios do tipo apenas de cálculo mecânico, não havendo aprofundamento teórico por trás.

Por exemplo, 345, 346 e 351, pois trabalham com a habilidade de que o aluno deve "*reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes*"**(EF09MA12)**.

345. All equilateral triangles are similar.

346. All isosceles right triangles are similar.

Figura 3.14: Exercícios 345 e 346, capítulo 3

351. A right triangle is divided by the altitude drawn to the hypotenuse into two triangles similar to it.

Figura 3.15: Exercício 351, capítulo 3

Um tipo de exercício muito comum em vestibulares, por exemplo, é o 358, no qual um quadrado é inserido no triângulo e a semelhança de triângulos deve ser utilizada para encontrar os lados do quadrado. Esse tipo de exercício envolve uma única competência que é a semelhança de triângulos. No livro no qual comparamos a análise, aparece um exercício desse tipo na revisão do capítulo, sendo que o desenho já é dado.

43 Calcule o valor de x.

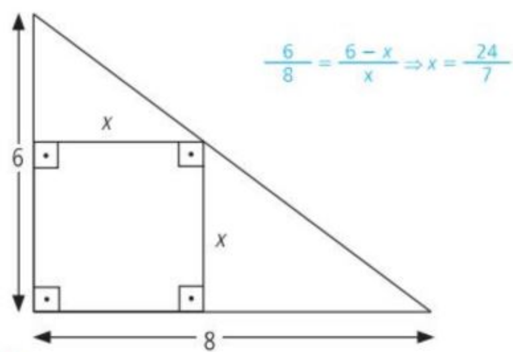


Figura 3.16: Exercício 43, livro Aprendendo Matemática

Seria interessante, portanto, um exercício no qual o aluno tivesse que visualizar o que o problema está pedindo para, aí sim, aplicar sua resolução, como é o caso do exercício 358.

358. Into a right triangle with legs a and b units long, a square is inscribed in such a way that one of its angles is the right angle of the triangle, and the vertices of the square lie on the sides of the triangle. Find the perimeter of the square.

Figura 3.17: Exercício 358, capítulo 3

3.4.3 Semelhança de polígonos (*Similarity of polygons*)

Essa parte do capítulo trata de semelhança de polígonos. Em 2 dos 3 documentos de análise (PNLD e BNCC), esse tema não está presente. O livro Aprendendo Matemática, entretanto, trata o assunto de maneira sucinta antes de apresentar a semelhança de triângulos. Pelo fato do conteúdo aparecer no livro que foi mais adotado em 2017, o consideramos como importante para ser apresentado para alunos do 9° ano, o que justifica a análise de exercícios desse tema.

Pelo planejamento do Currículo do Estado de São Paulo, é no 9° ano que o conteúdo de semelhança de polígonos é passado. Entretanto, se analisarmos o documento da BNCC, a competência

EF06MA21 é "*construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais*". Sendo assim, o conteúdo é passado no 6° ano, mas poderia ser retomado no 9° ano.

No livro de Kiselev, o tema de semelhança de polígonos tem maior ênfase na parte demonstrativa do que na parte de cálculos e, de fato, não existem exercícios diretamente relacionados ao cálculo numérico para tal seção. Todavia, alguns dos exercícios de demonstração existentes podem ser utilizados em livros de 9°, já que poderia ampliar a visão do aluno de acordo com a competência EF06MA21, auxiliando-o mais para frente nos estudos.

Como exemplo de uso, temos os exercícios 367 e 368:

367. Prove that two circumscribed quadrilaterals are similar if and only if the angles of one of them are respectively congruent to the angles of the other.

368. How does the previous result change if quadrilaterals are replaced by arbitrary polygons?

Figura 3.18: Exercícios 367 e 368, capítulo 3

Um fator interessante nestes exercícios é a relação feita entre eles, ou seja, o exercício 368 questiona como seria o enunciado do exercício 367 caso determinada mudança fosse feita. O interessante, aqui, seria o uso dessa ideia para a sala de aula, pois não apenas está presente a demonstração de propriedade, mas também a ideia de fazer o aluno pensar em como seria o exercício ao mudar o tipo de polígono, por exemplo.

3.4.4 Teoremas de proporcionalidade (*Proporcionality theorems*)

Nenhum exercício que agregue, a maior parte é exercício de demonstração; o resto tem exercícios mais avançados do que para o 9° ano.

3.4.5 Homotetia (*Homothety*)

Homotetia é um conteúdo mais aprofundado na matemática para ser trabalhado tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, de forma que tal assunto não é previsto em nenhum dos documentos (PNLD, BNCC e Currículo do Estado de São Paulo).

Por esse motivo, com decisão conjunta do grupo, não analisaremos os exercícios dessa seção, mesmo que o tema tenha sido discutido na abordagem pedagógica.

3.4.6 Média geométrica (*Geometric mean*)

Dentro dos assuntos trabalhados nessa seção, temos aplicações do teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo. Seguindo o que ocorreu com os exercícios de semelhança de triângulos, a seção está dividida em exercícios de demonstração (exercícios 400 a 411) e cálculo (exercícios 414 a 427).

Na parte de demonstração, o exercício 408 é de certa forma interessante para estar presente em um livro de 9° ano. Isso porque, tomando como base o livro Praticando Matemática, não há exercícios que desenvolvam a parte demonstrativa no aluno. Além disso, para resolução do exercício, é necessária a aplicação do teorema de Pitágoras em cortes triangulares do trapézio (Fig. 3.4.6, se relacionando com a competência da BNCC que diz que o aluno deve saber "*resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes*"**(EF09MA14)**.

408. If an isosceles trapezoid has bases a and b, lateral sides c, and diagonals d, then $ab + c^2 = d^2$.

Figura 3.19: Exercício 408, capítulo 3

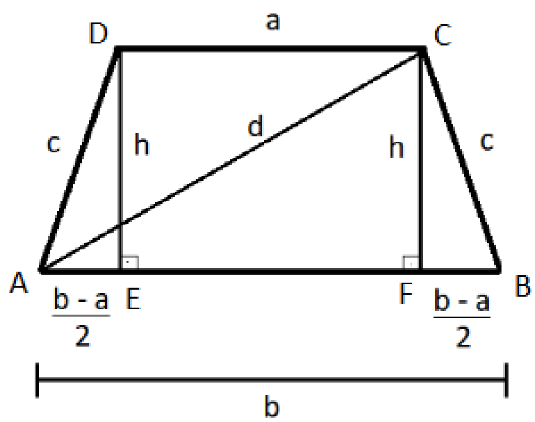


Figura 3.20: Visualização da imagem para resolução do exercício 408. Aplicando Pitágoras nos triângulos ACF e CFB, o exercício está resolvido

Já na parte de cálculos, o exercício 414 pede, indiretamente, a demonstração das relações métricas no triângulo retângulo e, já que o aluno de 9° ano deve "*demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos*"**(EF09MA13)**, é um exercício interessante de ser aplicado em livros brasileiros.

414. Compute the legs of a right triangle if the altitude dropped from the vertex of the right angle divides the hypotenuse into two segments m and n.

Figura 3.21: Exercício 414, capítulo 3

4. Conclusão

A partir da análise realizada do livro de Kiselev, concluímos que a parte relacionada ao rigor matemático é a que mais nos interessa para um livro de dos anos finais do Ensino Fundamental. Ao falarmos de rigor matemático, nos referimos, principalmente, às demonstrações presente no livro russo, tanto na parte teórica (enunciado de um teorema seguido de sua respectiva demonstração) quanto na parte de exercícios, que pedem demonstrações muitas vezes intuitivas, mas que não são trabalhadas no Brasil.

Como exemplo, temos o exercício 345 que pede para demonstrar que todos os triângulos equiláteros são semelhantes. Com aplicação de propriedades de semelhança, facilmente demonstramos tal exercício, todavia, nos embasando no livro "Praticando Matemática", não existem exercícios demonstrativos nesse nível em livros brasileiros.

Este é apenas um exemplo. De modo geral, toda a análise do trabalho converge para uso de demonstrações em livros brasileiros e, claro, é importante ressaltar que isso não significa mudar a forma como o conteúdo é passado (alterando os currículos já propostos), mas sim, acrescentar tópicos que enriqueçam os conteúdos e façam com que os alunos tenham maior conhecimento sobre o que é visto em sala de aula.