MATEMÁTICA

1ª série - Ensino Médio

Alessandro Silveira
Ana Cláudia Piau
Bianca Carlstron
Rafaela Caléfe

Conhecendo seu livro

Ao longo do livro há diversas estruturas feitas para melhorar o seu desempenho. Aqui, você verá como são essas estruturas e para que elas servem, de modo que possa aumentar o aproveitamento do livro.

Em cada capítulo você encontrará:

Aqui, os conteúdos que são pré-requisitos para o capítulo.

Aqui encontrará as **demonstrações.**

Ao longo do livro você encontrará fórmulas como essa:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Essas fórmulas estarão em destaque porque são muito importantes.

Essa caixa vai aparecer quando encontrarmos algo **importante.**

No fim de algumas seções você encontrará caixas como essa contendo **exercícios de aplicação** relacionados a teoria da seção.

Ao final de cada capítulo encontrará diversos **exercícios propostos** para treinar o conteúdo estudado.

E não poderia faltar:

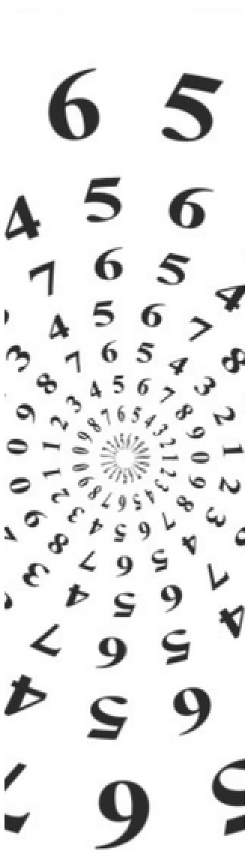
Desafios ao fim do capítulo para você se divertir.

As estruturas acima irão te ajudar a aproveitar esse livro.
Esperamos que você faça proveito de toda as informações aqui contidas.

Que comecem os jogos!!

Sumário

1. Trigonometria no Triângulo Retângulo



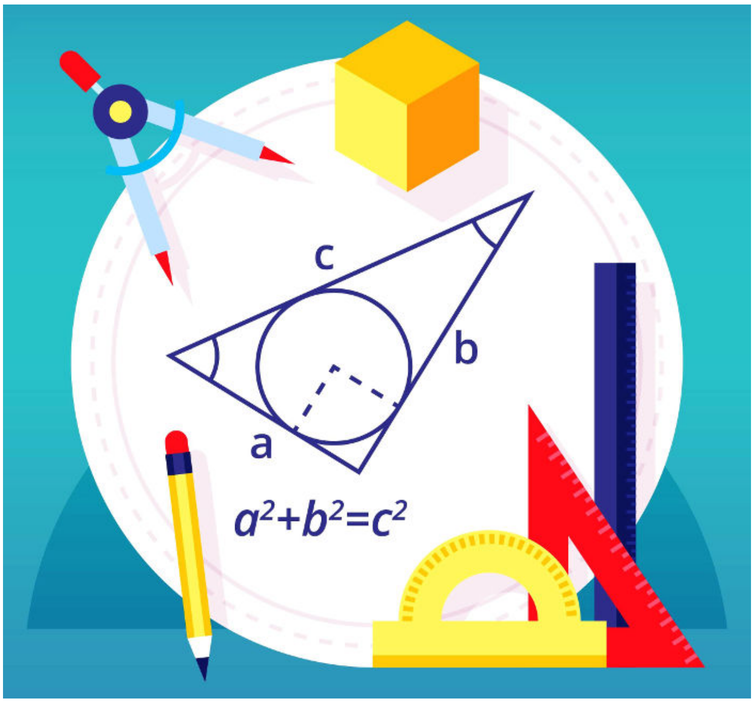
Introdução

Com a proposta de estabelecer conexões entre os conteúdos da matemática para evitar que durante o processo de aprendizagem eles apareçam de forma a serem entendidos como independente entre eles, elaboramos dois capítulos de um livro didático pensado para a disciplina de Matemática que possuem a qualidade de usar a acumulação dos conteúdos aprendidos em outras etapas do ensino.

A escolha por trigonometria foi devido ao desafio de adentrar um tema amplo explorando as abstrações visuais através dos gráficos, uma linguagem acessível à idade àqueles que o livro se destina e, por sua vez, as demonstrações com a finalidade de conquistar os corações e mentes que se debrucem sobre o assunto para desenvolvimento da criatividade e raciocínio próprio da matemática.

No capítulo 1 passamos pela trigonometria no triângulo retângulo e retomamos temas como forma de não deixar dúvidas de conteúdos anteriores. Trazemos de forma breve resultados anteriores que serão necessários no conteúdo atual e então, através de exemplos, o aluno poderia relembrar/verificar se estaria pronto para adentrar no novo tema. Além disso, optamos por trazer exercícios após cada um dos resultados importantes, um box de desafios e exercícios complementares em ordem de dificuldade, o que explicita o desenvolvimento do aluno.

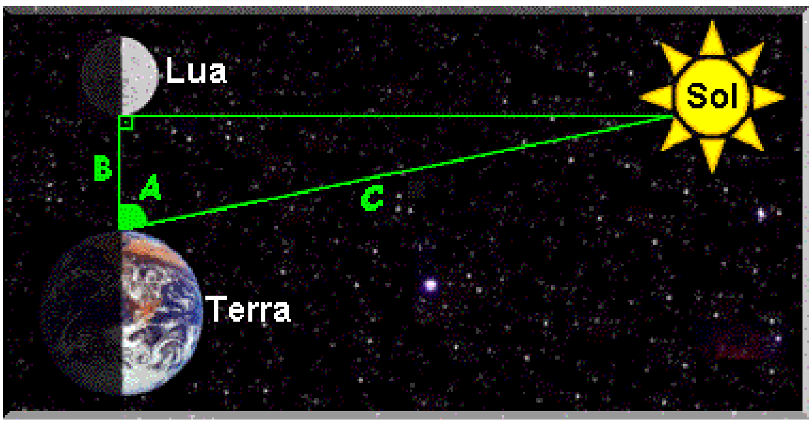
Já no capítulo 2, passamos da trigonometria apenas em triângulos retângulos para triângulos quaisquer. Mantivemos os elementos do capítulo anterior, com breve revisão, box de desafios, exercícios complementares e exemplos.



De onde vem?

Sempre foi do interesse humano encontrar caminhos matemáticos para a resolução de problemas da astronomia, agrimensura, navegação, construção civil etc. Para isso desenvolveu-se a trigonometria, ramo da matemática que estuda a relação entre as medidas dos lados e as dos ângulos dos triângulos.

Para investigar a razão entre a distância da Terra ao Sol e a da Terra à Lua, o grego Aristarco de Samos (310-230 a.C.), considerado por muitos o primeiro grande astrônomo da história, valeu-se da trigonometria e estabeleceu um método geométrico.

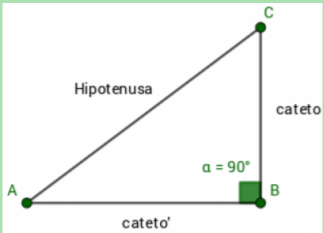


Relembrando

Triângulos Retângulos

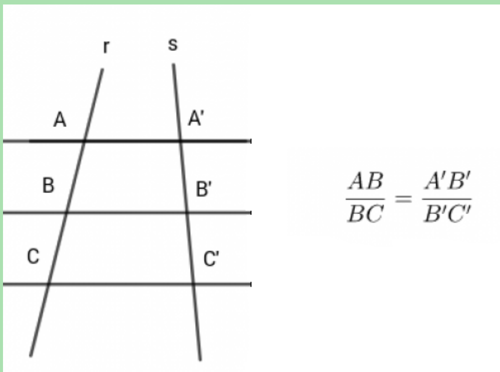
Triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto (90°).

É denominado **hipotenusa** o lado oposto ao ângulo reto e **cateto** os lados adjacentes ao ângulo.



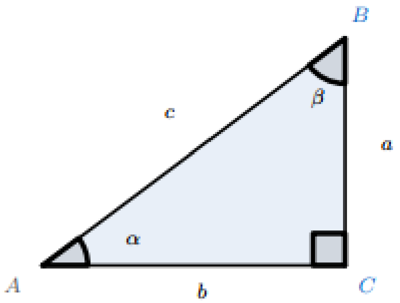
Teorema de Tales

Feixe de duas ou mais retas intersectadas por retas transversais formam segmentos de retas proporcionais.



Seno

Observe o triângulo a seguir:



Seno do ângulo α: razão entre a medida do cateto oposto (CO) a α e a hipotenusa (H).

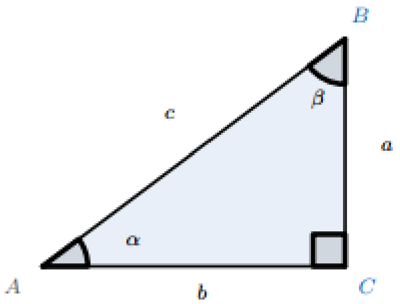
$$\textbf{sen } \alpha = \frac{CO}{H} = \frac{a}{c}$$

Seno do ângulo β: razão entre a medida do cateto oposto (CO) a β e a hipotenusa (H).

$$\textbf{sen } \beta = \frac{CO}{H} = \frac{b}{c}$$

Cosseno

Observe o triângulo a seguir:



Cosseno do ângulo α: razão entre a medida do cateto adjacente (CA) a α e a hipotenusa (H).

$$\textbf{cos } \alpha = \frac{CA}{H} = \frac{b}{c}$$

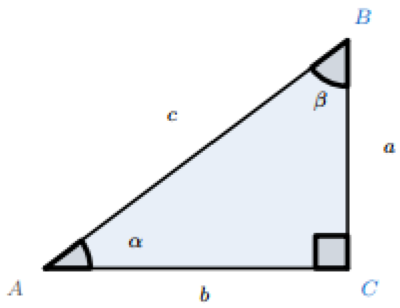
Cosseno do ângulo β: razão entre a medida do cateto adjacente (CA) a β e a hipotenusa (H).

$$\textbf{cos } \beta = \frac{CA}{H} = \frac{a}{c}$$

O seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar. Ou seja:
Dado um ângulo α e um ângulo β tal que $\alpha + \beta = 90°$,
$\text{sen}\ \alpha = \cos\beta \quad \text{e} \quad \text{sen}\ \beta = \cos\alpha$

Tangente

Observe o triângulo a seguir:



Tangente do ângulo α: razão entre a medida do cateto oposto (CO) e o cateto adjacente (CA) a α.

$$\textbf{tan}\ \alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{a}{b}$$

Tangente do ângulo β: razão entre a medida do cateto oposto (CO) e o cateto adjacente (CA) a β.

$$\textbf{tan}\ \beta = \frac{CO}{CA} = \frac{b}{a}$$

1. A tangente de um ângulo é igual ao inverso da tangente do ângulo complementar. Ou seja:
   Dado um ângulo α e um ângulo β tal que $\alpha + \beta = 90°$,

   $\tan\alpha = \dfrac{1}{\tan\beta} \quad \text{e} \quad \tan\beta = \dfrac{1}{\tan\alpha}$, pois como visto no triângulo
   $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$ e $\tan\beta = \dfrac{b}{a}$.

2. $\tan(x) = \dfrac{\text{sen}\ (x)}{\cos\ (x)}$, pois como visto no triângulo

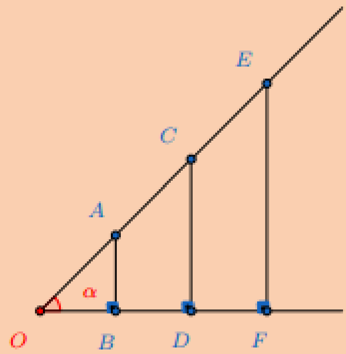
   $\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\beta} = \dfrac{a/c}{b/c} = \dfrac{a}{c}.\dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{b} = \tan\alpha.$

Assim temos que:

$\textbf{sen}\ (x) = \dfrac{CO}{H}$	$\textbf{cos}\ (x) = \dfrac{CA}{H}$	$\textbf{tan}\ (x) = \dfrac{CO}{CA}$

Razões Trigonométricas

Na figura a seguir, os triângulos retângulos OAB, OCD, OEF são semelhantes, já que tem o ângulo Ô em comum e todos têm um ângulo reto.



Observe que:
ΔOAB é semelhante a ΔOCD que por sua vez é semelhante ao ΔOEF, portanto,

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE},$$

ou seja, nesses triângulos as razões entre as medidas do cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa são a mesma. Observe também que o mesmo ocorre quando relacionamos o cateto adjacente com a hipotenusa e o cateto oposto com o adjacente.

Isso nós chamamos de razões trigonométricas.

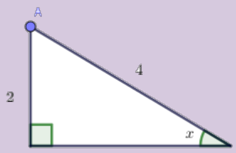
São elas:

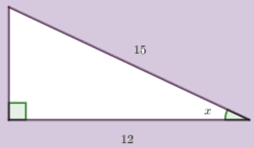
- Seno
- Cosseno
- Tangente

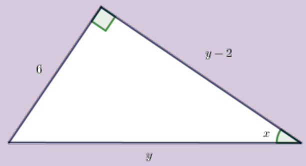
Aplicando

Observação: Em alguns exercícios será necessário consultar a tabela de razões trigonométricas que se encontra no anexo deste livro.

1. Determine o valor de sen (x) em cada um dos casos:

a) 

b) 

c) 

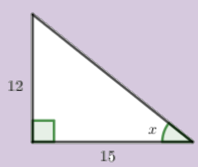
2. Os catetos de um triângulo retângulo medem 5 cm e 12 cm. Calcule o valor do seno de cada ângulo agudo deste triângulo.

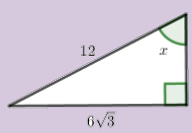
3. Em um dia com muito vento, Artur resolve soltar pipa com seu amigo Filipe. Eles conseguiram fazer a pipa subir muito alto e ficam curiosos com relação à altura em que ela está. Considerando que Artur tenha soltado 60 m de linha e que a inclinação desta em relação ao solo seja de 57°, qual a altura em que a pipa se encontra?

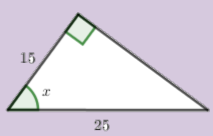
4. Em cada caso são apresentadas medidas dos lados de um triângulo retângulo nos quais **a** representa a hipotenusa e **b** e **c**, os catetos. Determine o cosseno de cada um dos ângulos, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, opostos, respectivamente, a b e a c.

a) b = 3 cm e c = 4 cm
b) a = 12 cm e c = 7 cm
c) a = 25 m e c = 7 m
d) a = 61 m e c = 60 m

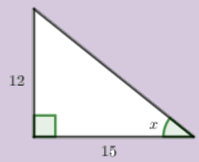
5. Determine o valor de x em cada caso:

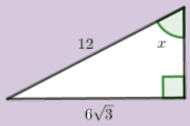
a) 

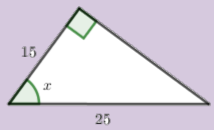
b) 

c) 

6. Determine $\tan\alpha$ nos casos:

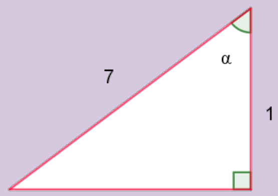
a) 

b) 

c) 

7. Um ponto P forma com o topo de uma torre um ângulo de 27° com a horizontal. Avançando 16 m em direção à torre, o ângulo passa a ser 42°. Calcule a altura da torre. Dados: $\tan 27^\circ = 0,5$ e $\tan 42^\circ = 0,9$.

8. (Mackezie) Ao observar o triângulo desenhado na figura, podemos concluir que $\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{1-\tan\alpha}$ vale:



a) $\frac{1}{5}$;

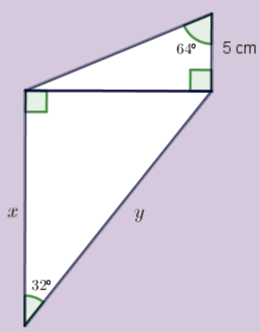
b) $\frac{1}{25}$;

c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$;

d) $\frac{2}{5}$;

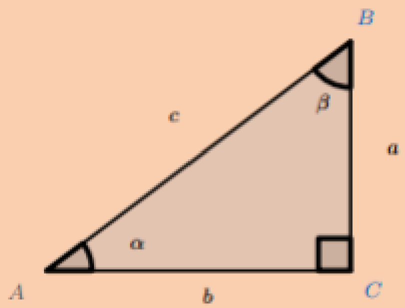
e) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$;

9. Determine as medidas aproximadas de x e y.



Relação Fundamental

Dado um triângulo ΔABC a seguir:



Pelo teorema de Pitágoras, temos que $a^2 + b^2 = c^2$, e, como sen $\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow$ a = c.sen α e cos $\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow$ b = c.cos α : $(c.sen)^2 + (c.cos)^2 = c^2 \Rightarrow c^2 sen^2\alpha + c^2 cos^2\alpha = c^2 \Rightarrow c^2(sen^2\alpha + cos^2\alpha) = c^2 \Rightarrow$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Aplicando

10. Seja o ângulo α tal que o $\cos\alpha = \frac{3}{7}$. Determine sen α.

11. Sabendo que o $\sin 37° \cong 0,6$ e que a medida da hipotenusa do triângulo a seguir é 12, determine o valor da $\tan 37°$.

12. Se x é um ângulo agudo e $\cos x = 0,9744$, calcule sen (x) e tan (x).

13. Sabendo que $\tan x = \sqrt{15}$, calcular sen (x) e cos (x).

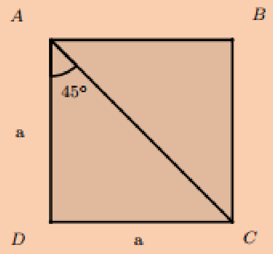
14. (UFMG - 2001) Num triângulo ABC, o ângulo $A\widehat{B}C$ é reto, $\overline{BC} = 5\sqrt{6}$ e $\cos B\widehat{A}C = \frac{3}{\sqrt{15}}$. Considerando esses dados, calcule o comprimento de $\overline{AB}$.

Ângulos Notáveis

Chamamos os ângulos 30°, 45° e 60° de **ângulos notáveis**. Eles recebem esse nome, pois estão presente nos triângulos equiláteros ou quadrados, figuras frequentemente encontradas em problemas na matemática.

Vamos ver como calcular os valores de seno, cosseno e tangente desses ângulos.

- Ângulo 45°
  Considere um quadrado ABCD de lado a, dividido ao meio pelo segmento AC.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$AC^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow AC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$$

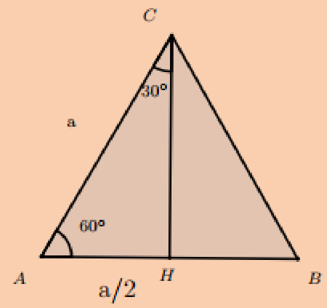
Assim,

$\text{sen}\ \ 45° = \dfrac{a}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\ \ 45° = \dfrac{a}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\ \ 45° = \dfrac{a}{a} = 1$

- Ângulos 30° e 60°
  Considere o triângulo equilátero ABC de lado a, com a altura CH traçada.



Aplicando teorema de Pitágoras:

$a^2 = CH^2 + (a/2)^2 \Rightarrow CH^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow$

AH = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Assim,

$$\text{sen } \ 30^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \ 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \ 30^\circ = \frac{a/2}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } \ 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \ 60^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \ 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a/2} = \sqrt{3}$$

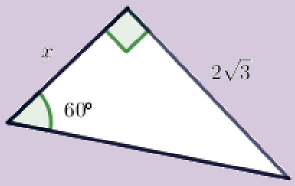
1. Os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis podem ser organizados como na tabela a seguir:

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

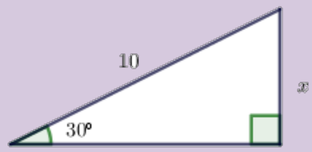
2. Cada ângulo tem seu respectivo valor para seno e cosseno. Estes valores estão presentes em uma tabela nos anexos ao fim da apostila.

Aplicando

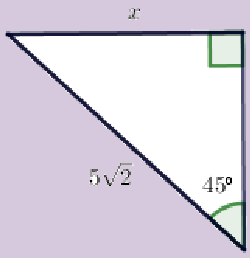
15. Calcule o valor de *x* em cada item:

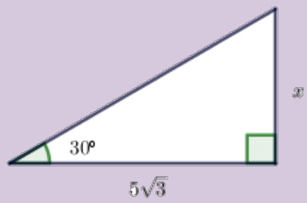


a)



b)



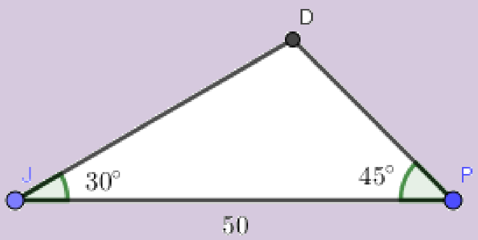


d)

c)

.

16. João (J) e Pedro (P) estão sobre a superfície plana de uma mesma praia e, num dado instante, veem sob respectivos ângulos de 30° e 45°, um drone (D) sobrevoando, conforme é representado na planificação abaixo.



Sabendo que o drone se localiza a uma altura de 50 m, a que distância, João e Pedro se encontram?

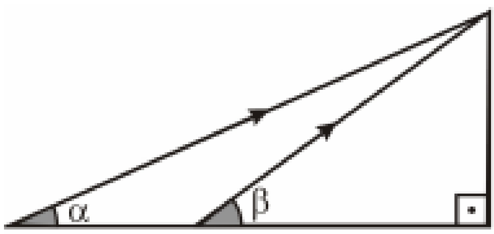
17. A base maior de um trapézio isósceles mede 100 cm e a base menor, 60 cm. Sendo 60° a medida de cada um de seus ângulos agudos, determine a altura e o perímetro do trapézio.

18. Para determinar a distância de sua casa até a casa de um vizinho, que mora do outro lado da rua, você sabe que a distância entre a sua casa e o ponto de ônibus, que fica na frente da casa de seu vizinho, é de 100 m. Você também sabe que a rua tem uma largura de $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m. Determine a distância entre a casa de vocês e a que angulatura sua casa se localiza da dele.

Praticando

Exercícios Complementares

1. Para se calcular a altura de uma torre, utilizou-se o seguinte procedimento ilustrado na figura: um aparelho (de altura desprezível) foi colocado no solo, a uma certa distância da torre, e emitiu um raio em direção ao ponto mais alto da torre. O ângulo determinado entre o raio e o solo foi de $\alpha = 60°$. A seguir, o aparelho foi deslocado 4 metros em direção à torre e o ângulo então obtido foi de β, com tan $(\beta) = 3\sqrt{3}$. Calcule a medida da altura da torre, em metros.



2. A tangente de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo vale o dobro da tangente do outro. Sabendo-se que a hipotenusa mede 1 m, quais os comprimentos dos catetos?

3. (UE-RJ) Um foguete é lançado com velocidade igual a 180 m/s, e com um ângulo de inclinação de 60º em relação ao solo. Suponha que sua trajetória seja retilínea e sua velocidade se mantenha constante ao longo de todo o percurso. Após cinco segundos, o foguete se encontra a uma altura de x metros, exatamente acima de um ponto no solo, a y metros do ponto de lançamento. Os valores de x e y são, respectivamente:

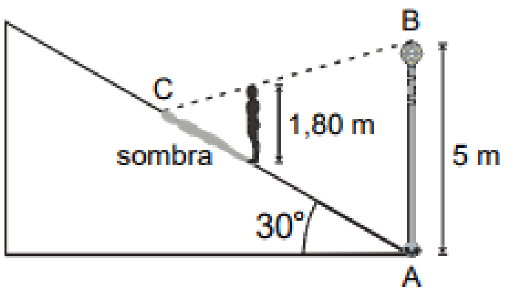
a) 90 e $90\sqrt{3}$
b) $90\sqrt{3}$ e 90
c) 450 e $450\sqrt{3}$
d) $450\sqrt{3}$ e 450

4. Considere o triângulo ABC, cujas medidas dos lados são: AB = 10 cm, BC = 14 cm e AC = 16 cm. a) Calcule a medida da altura relativa ao lado AC; b) Calcule a medida do ângulo.

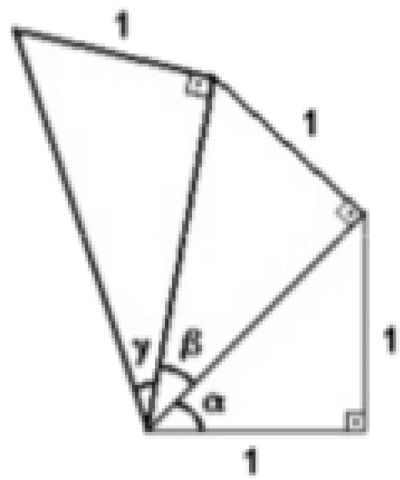
5. (UNICAMP - 2002) Um homem, de 1, 80 m de altura, sobe uma ladeira com inclinação 30°, conforme mostra a figura. No ponto A está um poste vertical de 5 metros de altura, com uma lâmpada no ponto B. Pede-se para:

a) Calcular o comprimento da sombra do homem depois que ele subiu 4 metros ladeira acima.

b) Calcular a área do triângulo ABC

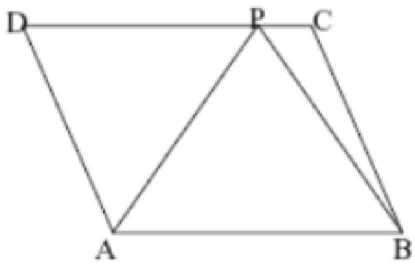


6. A figura abaixo é formada por três triângulos retângulos. As medidas dos catetos do primeiro triângulo são iguais a 1. Nos demais triângulos, um dos catetos é igual à hipotenusa do triângulo anterior e o outro cateto tem medida igual a 1.
Considerando os ângulos α, β e γ na figura abaixo, atenda às solicitações seguintes.
a) Calcule as tangentes de alfa, beta e gama.
b) Calcule os valores de alfa e gama
c) Justifique por que $105° < \alpha+\beta+\gamma < 120°$

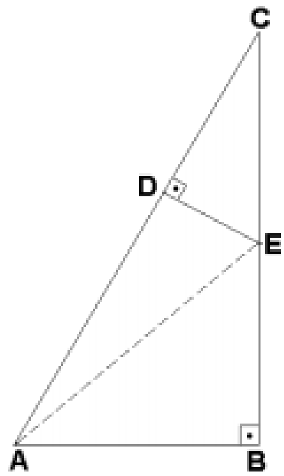


7. Devido aos fortes ventos, um poste de 5,8 m de altura partiu-se em dois pedaços. O pedaço de cima caiu, formando um ângulo α com o solo. Sabendo que $\sin\alpha = 0,45$, $\cos\alpha = 0,89$ e $\tan\alpha = 0,5$, determine a que altura do solo o poste foi partido.

8. (UFMG- 2003) No paralelogramo ABCD, da figura abaixo, o ponto P, contido no lado CD, é tal que o segmento PC mede 4 cm, os segmentos AP e PB medem 14 cm cada um e os ângulos $D\widehat{A}P$ e $P\widehat{A}B$ têm a mesma medida. Determine a medida do lado AD.



9. (FUVEST - 2005) Na figura, ABC e CDE são triângulos retângulos, AB = 1, BC = $\sqrt{3}$ e $BE = 2DE$. Logo, a medida de AE é:



a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

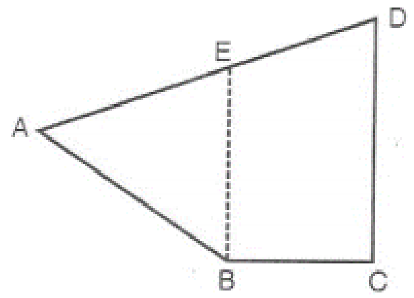
b)$\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{11}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

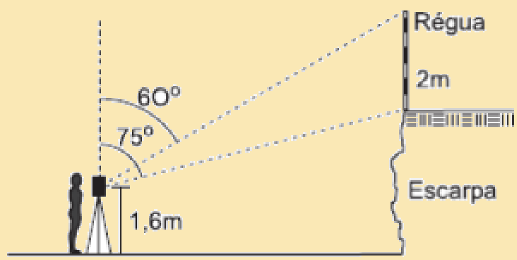
10. (FUVEST - 2000) No quadrilátero ABCD da figura abaixo, E é um ponto sobre o lado AD tal que o ângulo ABE mede 60º e os ângulos EBC e BCD são retos. Sabe-se ainda que $AB - CD = \sqrt{3}$ e $BC = 1$. Determine a medida AD.



Desafios

1. Monte uma figura em que apareça um triângulo retângulo com as medidas dos ângulos em progressão aritmética. A seguir, determine a razão entre as medidas das hipotenusas dos triângulos que aparecem na figura após ser traçada a bissetriz do maior ângulo do triângulo inicial.

2. De uma praia, um topógrafo observa uma pequena escarpa sobre a qual foi colocada, na vertical, uma régua de 2 m de comprimento. Usando seu teodolito, o topógrafo constatou que o ângulo formado entre a reta vertical que passa pelo teodolito e o segmento de reta que une o teodolito ao topo da régua é de 60°, enquanto o ângulo formado entre a mesma reta vertical e o segmento que une o teodolito à base da régua é de 75°. Sabendo que o teodolito está a uma altura de 1,6m do nível da base da escarpa, responda às questões abaixo.

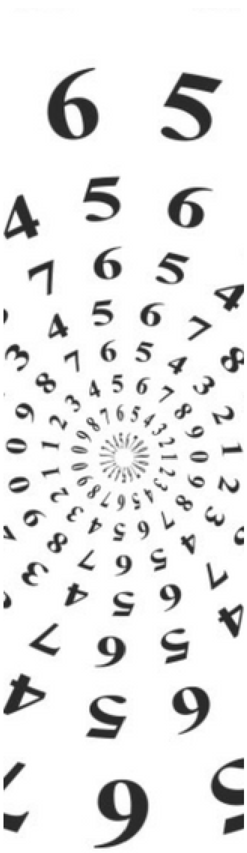


) Qual a distância horizontal entre a reta vertical que passa pelo teodolito e a régua sobre a escarpa?

b) Qual a altura da escarpa?

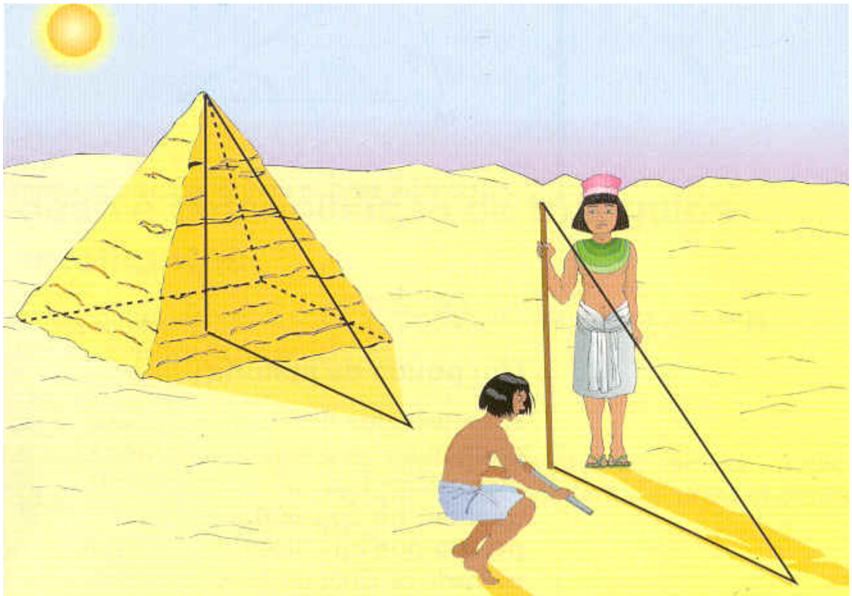
(Para facilitar os cálculos, use $\tan 15^{\circ} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$)

2. Trigonometria num Triângulo Qualquer



De onde vem?

No antigo Egito já se fazia uso de trigonometria, mas na época, era bastante diferente da que conhecemos atualmente. As aplicações feitas pelos egípcios baseavam-se, em grande parte, na semelhança de triângulos.



O matemático Carl Boyer destaca que na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa a preocupação a levar os egípcios a introduzir um novo conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo. Acredita-se que essa deve ser a principal área onde aplicavam os conceitos trigonométricos.

Quando a Lua está em quarto crescente ou quarto minguante, o triângulo formado pelaTerra, pelo Sol e pela Lua é retângulo, com a Lua no vértice do ângulo reto. O astrônomoAristarco, usou este fato para obter um valor aproximado da razão entre as distâncias daTerra à Lua, dL, e da Terra ao Sol, dS.

Relembrando

Equação do Segundo Grau

Uma equação é dita de 2° grau se:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Quando resolvemos uma equação de 2° grau, estamos buscando os valores reais que a incógnita assume, ou seja, as raízes da equação. Para tanto, utilizamos a fórmula de Bháskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo

1. Se tivermos a seguinte equação: $(9x^2 + 6x - 3 = 0)$

Resolvendo a equação conforme o que foi apresentado acima, devemos primeiramente identificar os termos da equação de 2° grau dada.
$a = 9$
$b = 6$
$c = -3$
Calculando o valor do delta:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(9)(-3) = 36 + 108 = 144$$

Para encontrar os valores de x vamos substituir na Fórmula para resolução de equações de segundo grau (Fórmula de Báskara).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{2(9)} = \frac{-6 \pm 12}{18}$$
$$x_1 = \frac{-6+12}{18} = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{-6-12}{18} = -1$$

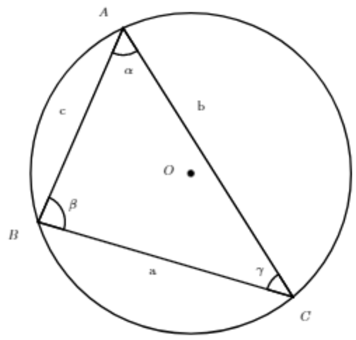
Encontramos duas soluções reais para a equação, como esperado, uma vez que nosso $\Delta > 0$

$$S = (-1, \tfrac{1}{3})$$

Lei dos Senos

Para qualquer triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles. Além disso, a razão obtida nessa ordem é igual ao dobro do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Na figura a seguir o triângulo ABC estar inscrito numa circunferência de raio r e nele temos:

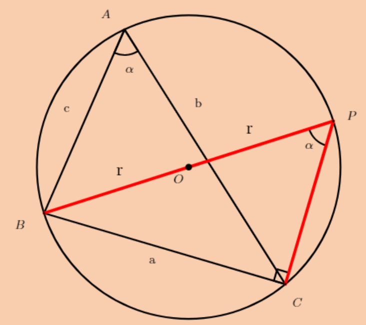


$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2\text{r}$$

Vamos demonstrar:

Note que no triângulo ABC, a seguir, o vértice A determina um ângulo inscrito na circunferência, com arco correspondente delimitado pelos vértices B e C.

Traçando um diâmetro com um dos extremos em B, obtemos o triângulo BPC, conforme a figura, tendo assim o ângulo BPC igual a α.



Assim, no triângulo BPC, temos:

$\text{sen } \alpha = \frac{a}{2r} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \alpha} = 2\text{r}$

De modo análogo, podemos provar que:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2\text{r}$$

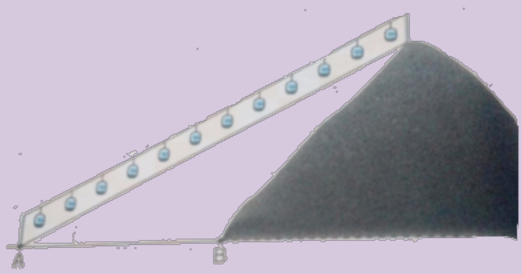
Aplicando

1. Num triângulo ABC são dados $B = 60°$, $C = 45°$ e $AB = 8$. Determine o comprimento de AC.

2. Entre os pontos A e B, extremidades do lado de um terreno, existe uma região plana alagadiça, cuja extensão deseja-se determinar. Um topógrafo, situado em A, avistou um posto rodoviário situado na estrada sob um ângulo de 40° em relação a AB. Dirigiu-se, então, ao posto situado a 1500 metros de A, e avistou as extremidades do terreno sob um ângulo de 85°. Use as aproximações sen $55° \simeq 0,82$; sen $85° \simeq 0,99$ e sen $40° \simeq 0,64$.

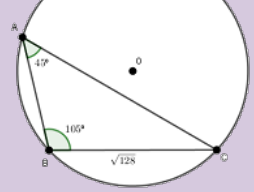
) Qual é a extensão da região alagadiça?
b) Qual é a distância entre o posto e o ponto B?

3. Um teleférico de 3 km de extensão liga o ponto A até o topo de uma montanha, como mostra a figura. Outra opção de ascensão à montanha é caminhar 2 km até sua base, no ponto B, e de lá iniciar a escalada. Sabendo que para cada metro percorrido sobre a montanha corresponde um deslocamento horizontal de 0,5 cm, determine:



a) distância total percorrida por um turista que, saindo de A e passando por B, chegou ao cume da montanha;
b) a altura aproximada da montanha.

4. No triângulo ABC abaixo, determinar as medidas do lado AB e do raio da circunferência circunscrita.

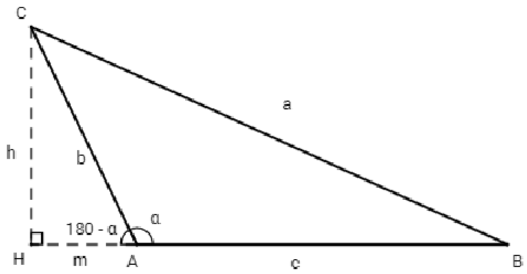


Lei dos Cossenos

Com base no teorema de Pitágoras e nas relações trigonométricas, é possível provar o seguinte teorema:

Para qualquer triângulo, o quadrado da medida de um de seus lados é igual a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Observe o triângulo a seguir:



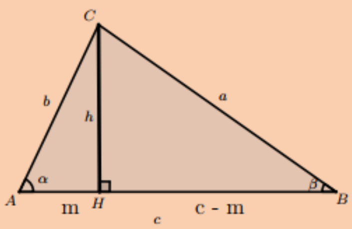
Pelo teorema dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.cos\alpha$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.cos\alpha$$

Vamos demonstrar:

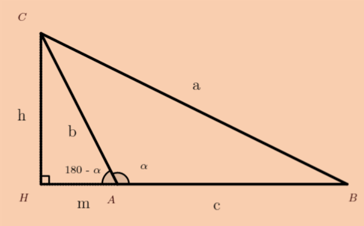
- **Caso1** : $\alpha < \mathbf{90^\circ}$

  Traçando a altura CH relativa ao lado AB, obtemos os triângulos retângulos AHC e BHC.



  Aplicando o teorema de Pitágoras nesses triângulos temos:
  $a^2 = h^2 + (c-m)^2$ e $b^2 = h^2 + m^2$
  Subtraindo membro a membro, temos:
  $a^2 - b^2 = h^2 + c^2 - 2cm + m^2 - h^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$
  como, no ΔAHC, cos $\alpha = \dfrac{m}{b}$, ou seja, $m = b \cos \alpha$
  Assim, $a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ \cos\alpha$

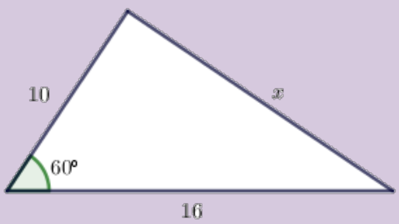
- **Caso 2**: $\alpha > 90°$
  Traçando a altura CH relativa ao lado AB, obtemos os triângulos retângulos AHC e BHC.



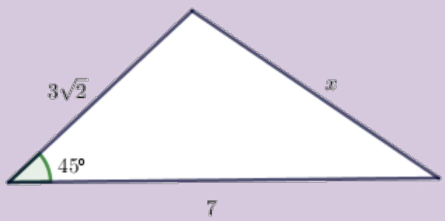
Aplicando o teorema de Pitágoras nesses triângulos temos:
$a^2 = h^2 + (c+m)^2$
$b^2 = h^2 + m^2$
Subtraindo membro a membro, temos:
$a^2 - b^2 = h^2 + b^2 + 2bm + m^2 - h^2 - m^2$
$a^2 = c^2 + b^2 + 2bm$
como, no ΔAHC, cos (180 - α) = $\frac{m}{b} \Rightarrow m = b.cos(180 - \alpha)$,
como cos (180 - α) = -cos α.
$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc(-cos\alpha)$
Ou seja, $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\alpha$

Aplicando

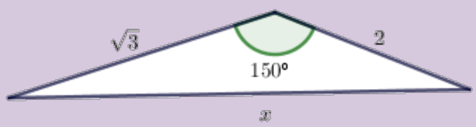
5. Determine o valor de x em cada caso:



a)



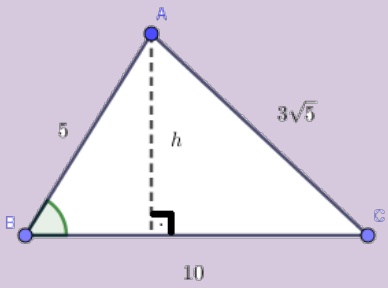
b)



c)

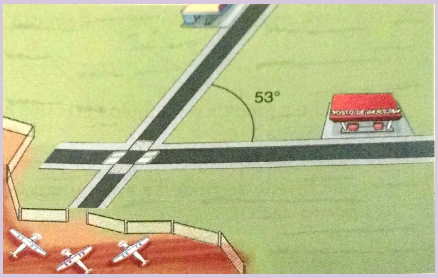
6. Classifique, quanto aos lados, um triângulo em que se forma, entre lados de 4 cm e de 6 cm, um ângulo cujo cosseno vale $\frac{1}{3}$.

7. Na figura, sendo m(ABC) = α, determine:



a) $\cos\alpha$.
b) o valor de h.
c) a área do triângulo ABC.

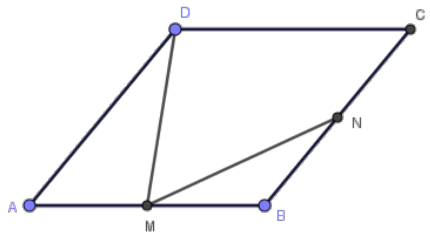
8. O acesso ao aeroporto de uma cidade é feito por duas vias de contorno retilíneo que se cruzam segundo um ângulo de 53°. A primeira tem 2,1 km de extensão, e a outra, 3,5 km de extensão. As vias têm origem em dois postos de gasolina. Qual a distância entre esses postos? Use a aproximação de $\cos 53^\circ \simeq 0,6$.



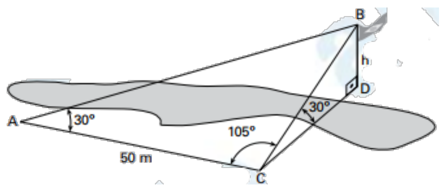
Praticando

Exercícios Complementares

1. No losângo ABCD de lado 1, representado na figura, tem-se que M é o ponto médio de $\overline{AB}$, N é o ponto médio de $\overline{BC}$ e $\overline{MN} = \frac{\sqrt{14}}{4}$. Calcule DM.



2. (UNESP - 2011) Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície, às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para à direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ valem 30°, e ângulo $A\hat{C}B$ vale 105°, como mostra a figura. Calcule a altura h do mastro da bandeira.



3. O hexágono ABCDEF é regular e seu perímetro é 48 cm. Do vértice A saem 3 diagonais. Qual a soma das medidas dessas três diagonais?

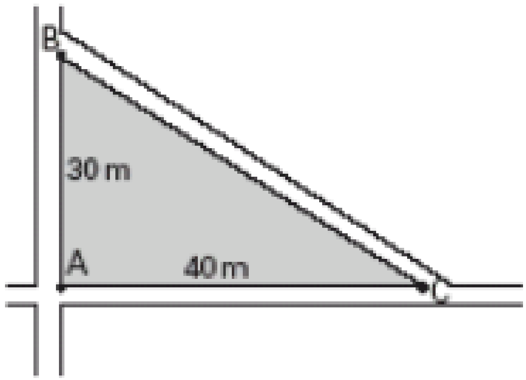
4. Considerando um triângulo qualquer de modo que os seus lados são respectivamente 6, 8 e 9, e que o ângulo oposto ao lado de medida 9 é α, determine a $\tan(\alpha)$.

5. (UF-PI) Num triângulo retângulo um dos catetos mede 4 cm e a bissetriz do ângulo reto mede raiz2 cm. Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo e justifique aquelas que julgar falsa:
a) A medida da hipotenusa é $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ cm.
b) A medida do outro cateto é $\frac{4}{3}$ cm.
c) O triângulo é isósceles.
d) A soma das medidas dos catetos é $\frac{19}{4}$ cm.

6. Considere um quadrado ABCD de lado a e seja E o ponto do lado CD tal que AE = BC + CE.
a) Calcule o comprimento de $\overline{CE}$.
b) Calcule o seno do ângulo CÂE.

7. (UNICAMP - 2000) Os lados de um triângulo têm, como medidas, números inteiros ímpares e consecutivos cuja soma é 15.
a) Quais são esses números
b) Calcule a medida do maior ângulo desse triângulo.
c) Sendo α e β os outros dois ângulos do referido triângulo, com $\beta > \alpha$, mostre que $\sin^2\beta - \sin^2\alpha < \frac{1}{4}$

8. (ESPM - 2004) A figura abaixo representa uma praça de forma triangular, sendo que o ângulo é reto. Duas pessoas percorrem o contorno da praça a partir do ponto A, mas em sentidos contrários, até se encontrarem num ponto P do lado BC. Sabendo-se que elas percorreram distâncias iguais, podemos concluir que a distância do ponto P ao ponto A, em linha reta é de, aproximadamente: (adote$\sqrt{5} \cong 2,25$)

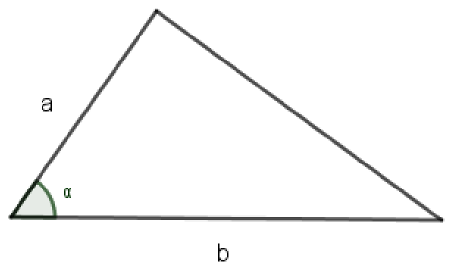


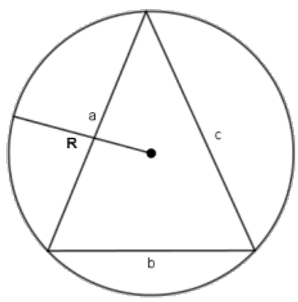
a) 22 m; b) 25 m; c) 27 m; d) 30 m; e) 32 m

9. Mostre os seguintes resultados:

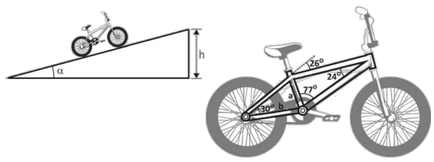
a) $A_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$

b) $A_\Delta = \frac{abc}{4R}$



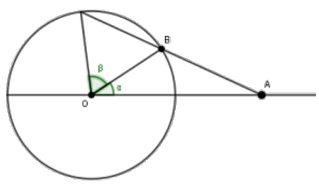


10. (UNICAMP - 2010) Laura decidiu usar sua bicicleta nova para subir uma rampa. As figuras abaixo ilustram a rampa que terá que ser vencida e a bicicleta de Laura.
a) Suponha que a rampa que Laura deve subir tenha ângulo de inclinação , tal que $\cos(\alpha) \simeq 0,99$. Suponha, também, que cada pedalada faça a bicicleta percorrer 3,15 m. Calcule a altura h (medida com relação ao ponto de partida) que será atingida por Laura após dar 100 pedaladas.
b) O quadro da bicicleta de Laura está sendo destacado na figura. Com base nos dados da figura, e sabendo que a mede 22 cm, calcule o comprimento b da barra que liga o eixo da roda ao eixo dos pedais.



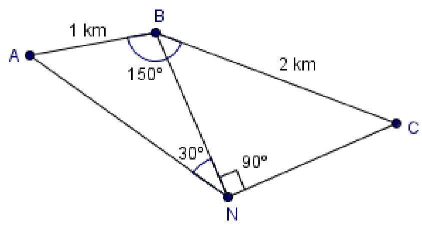
11. Mostre que é obtusângulo o triângulo que possui um lado medindo $1+\sqrt{3}$ cm e um ângulo de 15°, ao qual se opõe um lado unitário.

12. (FUVEST) Na figura abaixo, O e o centro da circunferência de raio 1, a reta AB é secante a ela, o ângulo β mede 60° e $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.



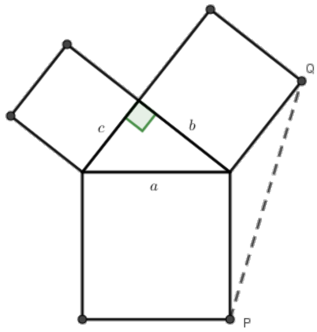
a) Determine $sin(OAB)$ em função de AB.
b) Calcule AB.

14. (UNICAMP - 2005) Sejam A, B, C e N quatro pontos em um mesmo plano, conforme mostra a figura abaixo.



a) Calcule o raio da circunferência que passa pelos pontos A, B e N.
b) Calcule o comprimento do segmento NB.

13. (UF-RS) Sobre os lados de um triângulo retângulo constroem-se quadrados, conforme mostra a figura abaixo:



Sendo a a medida da hipotenusa, b e c as medidas dos catetos, a distância entre P e Q é igual a:
a) $(\sqrt{a^2+b^2})$ b) $(\sqrt{2a^2+b^2})$ c) $(\sqrt{a^2+2b^2})$ d)$(\sqrt{3a^2+b^2})$ e) $(\sqrt{a^2+3b^2})$

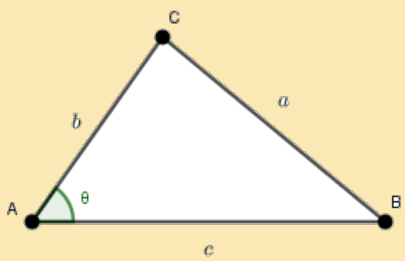
Desafios

1. Um quadrilátero convexo ABCD está inscrito em um semicírculo de diâmetro d. Sabe-se que AB = BC = a, AD = d e CD = b, com a, b e d não nulos. Demonstre que $d^2 = bd + 2a^2$.

2. Um triângulo possui um lado de 10 cm e as medidas dos ângulos formando uma progressão aritmética de razão 10°. Qual é a maior medida possível para um lado do triângulo? E a menor?

3. O objetivo desta questão é que você demonstre a *lei dos cossenos*. Mais especificamente, considerando o triângulo da figura abaixo, mostre que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$



3. Anexos

θ	Senθ	Cosθ	tgθ	θ	Senθ	Cosθ	tgθ	θ	Senθ	Cosθ	tgθ
1°	0,017	1	0,017	31°	0,515	0,857	0,601	61°	0,875	0,485	1,804
2°	0,035	0,999	0,035	32°	0,53	0,848	0,625	62°	0,883	0,469	1,881
3°	0,052	0,999	0,052	33°	0,545	0,839	0,649	63°	0,891	0,454	1,963
4°	0,07	0,998	0,07	34°	0,559	0,829	0,675	64°	0,899	0,438	2,05
5°	0,087	0,996	0,087	35°	0,574	0,819	0,7	65°	0,906	0,423	2,145
6°	0,105	0,995	0,105	36°	0,588	0,809	0,727	66°	0,914	0,407	2,246
7°	0,122	0,993	0,123	37°	0,602	0,799	0,754	67°	0,921	0,391	2,356
8°	0,139	0,99	0,141	38°	0,616	0,788	0,781	68°	0,927	0,375	2,475
9°	0,156	0,988	0,158	39°	0,629	0,777	0,81	69°	0,934	0,358	2,605
10°	0,174	0,985	0,176	40°	0,643	0,766	0,839	70°	0,94	0,342	2,747
11°	0,191	0,982	0,194	41°	0,656	0,755	0,869	71°	0,946	0,326	2,904
12°	0,208	0,978	0,213	42°	0,669	0,743	0,9	72°	0,951	0,309	3,078
13°	0,225	0,974	0,231	43°	0,682	0,731	0,933	73°	0,956	0,292	3,271
14°	0,249	0,97	0,249	44°	0,695	0,719	0,966	74°	0,961	0,276	3,487
15°	0,259	0,966	0,268	45°	0,707	0,707	1	75°	0,966	0,259	3,732
16°	0,276	0,961	0,287	46°	0,719	0,695	1,036	76°	0,97	0,242	4,011
17°	0,292	0,956	0,306	47°	0,731	0,682	1,072	77°	0,974	0,225	4,332
18°	0,309	0,951	0,325	48°	0,734	0,669	1,111	78°	0,978	0,208	4,705
19°	0,326	0,946	0,344	49°	0,755	0,656	1,15	79°	0,982	0,191	5,145
20°	0,342	0,94	0,364	50°	0,766	0,643	1,192	80°	0,985	0,174	5,671
21°	0,358	0,934	0,384	51°	0,777	0,629	1,235	81°	0,988	0,156	6,314
22°	0,375	0,927	0,404	52°	0,788	0,616	1,28	82°	0,99	0,139	7,115
23°	0,391	0,921	0,424	53°	0,799	0,602	1,327	83°	0,993	0,122	8,144
24°	0,407	0,914	0,445	54°	0,809	0,588	1,376	84°	0,995	0,105	9,514
25°	0,423	0,906	0,466	55°	0,819	0,574	1,428	85°	0,996	0,087	11,43
26°	0,438	0,899	0,488	56°	0,829	0,559	1,483	86°	0,998	0,07	14,3
27°	0,454	0,891	0,51	57°	0,839	0,545	1,54	87°	0,999	0,052	19,08
28°	0,469	0,883	0,532	58°	0,848	0,53	1,6	88°	0,999	0,035	28,63
29°	0,485	0,875	0,554	59°	0,857	0,515	1,664	89°	0,999	0,017	57,29
30°	0,5	0,866	0,577	60°	0,866	0,5	1,732	90°	1,000	0,000	–

4. Referências

- Apostila de triângulos retângulos UNO-International
- Iezzi, G. et al. Matemática Volume Único. 4ª ed. Atual Editora, 2007.
- Matika. Exercícios de Trigonometria no Triângulo Retângulo. Disponível em: <http://www.matika.com.br/trigonometria-no-triangulo-retangulo/exercicios/problemas-de-trigonometria>. Acesso em: 24/11/2017.
- Brasil Escola. Trigonometria no Triângulo Retângulo. Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/trigonometria-no-triangulo-retangulo.htm>. Acesso em: 18/11/2017
- Blog do Professor Danilo. Árvore de Matemática. Disponível em: <http://danilossoares2015.blogspot.com.br/2015/06/arvore-de-matematica.html>. Acesso em: 18/11/2017
- Alunos Online. Circulo Trigonométrico. Disponível em: <http://alunosonline.uol.com.br/matematica/circulo-trigonometrico.html>. Acesso em: 18/11/2017
- 123RF.Banco de Imagens - fundo matemática. Disponível em: <https://pt.123rf.com/photo18336346fundo-matemC3A1tica.html>. Acesso em: 18/11/2017
- Zenite. Trigonometria elementar para calcular distância da Terra ao Sol. Disponível em:http://www.zenite.nu/aristarco-de-samos-e-a-distancia-terra-sol/. Acesso em: 20/11/2017