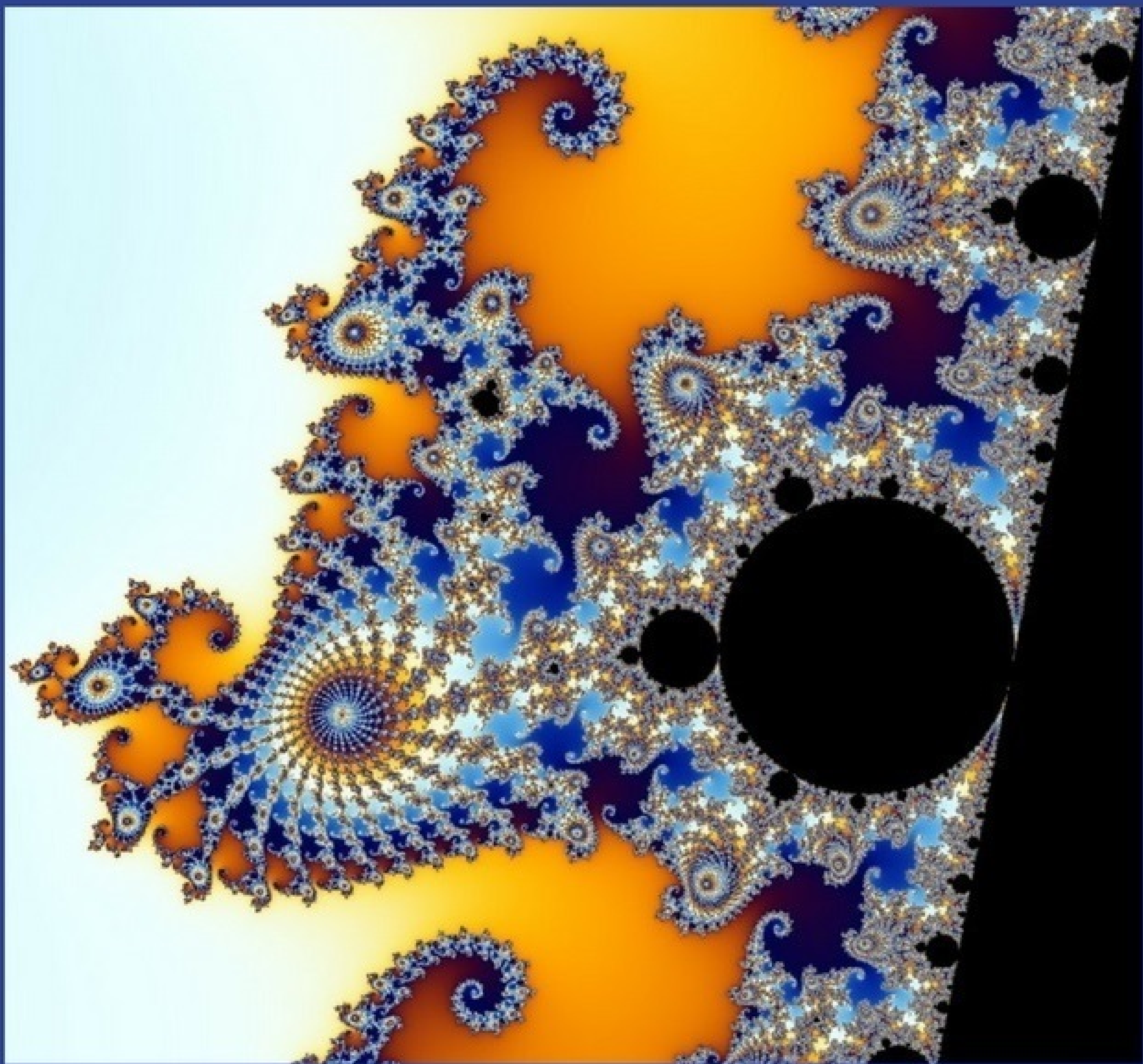
Matemática
não tão
Complexa



A. Aparecido, C. Sanroman,
G. Oliveira, N. Bucalon

Editora Real

GRUPO F

Conteúdo
Cora Sanroman Duran e Cano
155056
Giovana de Oliveira
155549
Nayane Lossardo Bucalon
175238

Exercícios
Alex Junior Aparecido Leite
141445

Diagramação
Cora Sanroman Duran e Cano
Giovana de Oliveira

Revisão do Conteúdo
Cora Sanroman Duran e Cano
Giovana de Oliveira

Revisão do LaTeX
Cora Sanroman Duran e Cano
Giovana de Oliveira

Agradecimentos
Guilherme Tavares da Silva
Henrique N. Sá Earp
Marcelo Terra Cunha

NOTA DA EQUIPE

Este material foi pensado na estrutura da matéria Análise de Livros Didáticos de Matemática (MA225) no segundo semestre de 2017 na Unicamp. Houve três semanas para a confecção do mesmo, com mais duas semanas para implementações de melhorias baseadas em críticas feitas por colegas de classe, somando um total de 5 semanas de trabalho neste material.

Pensamos nosso material como se fosse o capítulo numa apostila. Assim, como um capítulo, o estruturamos dessa forma:

- Como usar esse livro
- Introdução
- Conjuntos numéricos e o formato dos números
- Representação cartesiana e operações com complexos
  - Adição de números complexos
  - Subtração de números complexos
  - Multiplicação de números complexos
  - Divisão de números complexos
- Representação polar e operações na forma polar
- Potenciação
- Radiciação
- Autoavaliação
- Exercícios Complementares
- Teorema Fundamental da Álgebra

Como está explícito em "Como usar este livro", este material é digital e apostamos muito na questão digital do material, fazendo com que haja vários links que redirecionam para outras plataformas de ensino, como vídeos, softwares de construção geométrica, etc. Assim, este **não** é um livro pensado para ser impresso.

Os assuntos "potenciação" e "radiciação" ganharam destaque, sendo tratados separadamente das demais operações, uma vez que costumam ser assuntos deixados de lado e o grupo julgou necessário abordá-los melhor.

O "Teorema Fundamental da Álgebra" é abordado no fim do capítulo, após a "autoavalição", pois o intuito é que, caso o aluno precise revisar algum assunto, que não tenha ficado claro, o capítulo ainda não tenha acabado, restando assunto a ser discutido. Além disso, pensamos que, sendo este um capítulo de um livro, todo capítulo deveria terminar com um gancho para o próximo capítulo, sendo nossa ideia fazer o próximo capítulo sobre polinômios, assim todos os capítulos se relacionariam entre si.

Os exercícios foram pensados de modo que houvesse uma classificação de 40% mecânicos, 40% conceituais e 20% contextualizados, sendo, dentro de cada uma dessas divisões, 40% fáceis, 40% médios e 40% difíceis. Além disso, no fim de cada seção após a introdução, há um bloco de "Exercícios resolvidos", contendo de 3 a 5 exercícios e um bloco de "Exercícios propostos", contendo de 7 a 10 exercícios cada.

No final do livro, o bloco de exercícios complementares foi pensado para ter entre 20 e 30 exercícios que exigissem um maior nível de abstração, tendo em vista que o aluno faria sozinho em casa, para que pudesse pensar sobre.

COMO USAR ESSE LIVRO

Os objetivos da unidade estarão em notas como essa.

Sabe-se que livros podem ser utilizados como peso de papel, alimento para fogo, nivelamento para mesas bambas, acessório de embelezamento de ambientes, entre outras tantas utilidades que não são ideais. Entretanto, este é um livro digital, e não pode ser usado para nenhuma das atividades prazerosas já citadas, portanto aqui a proposta é ensiná-lo a utilizar este livro como ele foi pensado para ser utilizado: na leitura.

Ao longo do capítulo haverá diversas estruturas visuais para auxiliá-lo em sua leitura, e aqui elas estão dizendo para que elas são utilizadas.

Teoremas virão em caixas como essas.

Definições virão em caixas como essas.

Exercícios propostos

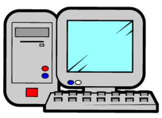
Ao final de cada capítulo encontrará caixas assim para que possa praticar.

Exercícios Resolvidos

No fim de algumas seções você encontrará caixas como essa para se inspirar na resolução dos exercícios.

Dicas aparecerão em alguns exercícios em caixas como essas.

Demonstrações virão entre linhas como essas.



Entre essas linhas, após o símbolo do computador, virão propostas com tecnologia.

Exemplo

Veja como se faz!

Lembretes e observações aparecerão em bilhetes como este.

Você também encontrará algumas seções no final do livro chamadas de "**Autoavaliação**" e "**Exercícios Complementares**", que abrangem todo o assunto de números complexos abordadao neste material.

Números Complexos

◇ Ampliar o conhecimento de conjuntos numéricos.

◇ Operar com números complexos.

◇ Representar números complexos geometricamente.

Introdução

Tendo um cubo de aresta x cm, seu volume será x^3cm^3. Agora, tome um paralelepípedo retângulo de base $15cm^2$ e altura igual à aresta do cubo, ou seja, igual a x cm. O volume deste paralelepípedo será $15xcm^3$. Imagine que você quer cortar o cubo, retirando $4cm^3$ de seu volume de modo que o restante do cubo tenha volume igual ao do paralelepípedo. Para qual valor de x isso será possível?

O que estamos perguntando é, em outras palavras, quais valores de x satisfazem a equação $x^3-4=15x$. Esse era o problema que Cardano [1] se deparava, tendo como ferramenta a fórmula descoberta por Tartaglia [2] para resolver equações do tipo $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Essas raízes eram dadas por:

$$x=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2+(r-p^2)^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2+(r-p^2)^3}}+p,$$

$$\text{com } p=\frac{-b}{3a},\ q=p^3+\frac{bc-3ad}{6a^2} \text{ e } r=\frac{c}{3a}$$

Então, reescrevamos a fórmula de modo que possamos obter uma equação que possui uma fórmula de resolução conhecida. Assim, $x^3-4=15x$ é a mesma coisa que $x^3-15x-4=0$, sendo $a=1$, $b=0$, $c=-15$ e $d=-4$.

$$p=\frac{-b}{3a}=\frac{-0}{3\cdot 1}=0$$

[1] Girolamo Cardano (1501-1576)
[2] Niccolo Tartaglia (1500-1557)

$$q = p^3 + \frac{bc-3ad}{6a^2} = 0^3 + \frac{0\cdot(-15)-3\cdot(1)(-4)}{6\cdot 1^2} = \frac{12}{6} = 2$$

$$r = \frac{c}{3a} = \frac{-15}{3\cdot 1} = -5$$

Então, temos $p=0, q=2$ e $r=-5$.

Voltando a $x = \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2+(r-p^2)^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2+(r-p^2)^3}} + p$ e substituindo os valores, obtemos:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{2^2+((-5)-0^2)^3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{2^2+((-5)-0^2)^3}} + 0$$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{4+(-5)^3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{4+(-5)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{4+(-125)}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{4+(-125)}}$$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{(-121)}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{(-121)}}$$

Isso gerou um problema na aplicação da fórmula de Tartaglia, pois raízes de números negativos eram dadas como problemas insolúveis, de modo que se concluía pela fórmula que não era possível que as condições do problema fossem satisfeitas. Porém, Cardano sabia que $x=4$ era uma solução para a equação.

Poderia ser então que $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{(-121)}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{(-121)}} = 4$? Como poderia ser possível, tendo como radicandos números negativos e índices pares, encontrar uma solução real positiva?

Bombelli[3], então, propôs "imaginar" as tais raízes de números negativos "como se fossem números", isto é, admitindo válidas as propriedades usuais das operações, tais como comutatividade, distributividade, etc. Deste modo, buscou reduzir a equação para um modo que ficasse da forma $x = (a+\sqrt{-b}) + (a-\sqrt{-b})$, onde $b=1$.

Dessa forma, obteve:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{(-121)}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{(-121)}}$$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{(-1)(11^2)}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{(-1)(11^2)}}$$

$$x = \sqrt[3]{2+11\sqrt{(-1)}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{(-1)}}$$

[3] Raphael Bombelli (1526-1573)

Onde, por inspeção (ou seja, por verificação, testando números), constatou que $(2+\sqrt{-1})^3 = 2+11\sqrt{(-1)}$ e $(2-\sqrt{-1})^3 = 2-11\sqrt{(-1)}$, de modo que pôde substituir na equação que estava dando problema, tendo:

$$x = \sqrt[3]{2+11\sqrt{(-1)}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{(-1)}}$$

$$x = \sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3}$$

$$x = (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1})$$

$$x = 2+2+\sqrt{-1}-\sqrt{-1} = 4$$

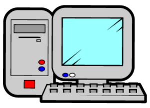
No início, esse tipo de número, como $\sqrt{-1}$ (chamado de número complexo), não era visto como número, mas apenas como uma ferramenta para resolver equações. Você precisava utilizar esse tipo de artimanha ao manipular o número com raiz negativa, mas o interesse era a resposta real que viria dele.

Em 1777, Euler[4] passou a usar um símbolo para $\sqrt{-1}$, a letra i, devido a Bombelli, que "imaginou que eram números" e desenvolveu vários trabalhos sobre como operar com esses números imaginários, mesmo sem compreender seu significado.

Assim, ficou definido

$i^2 = -1$, e a i chamaram **unidade imaginária**.

Gauss[5] tornou o símbolo famoso ao utilizá-lo em suas publicações, porém afirmou que a nominação "unidade imaginária" foi a grande responsável por mistificar e dificultar o ensino deste conjunto de números, que ele preferia ter chamado de números laterais, uma vez que eles apenas estão numa dimensão ao lado e existem, não sendo realmente imaginários.



Se tiver interesse pela questão "imaginária" dos números, veja os vídeos produzidos pelo *Welch Labs* clicando na palavra link.

[4]Leonhard Euler (1707-1783)
[5]Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Conjuntos numéricos e o formato dos números

Cada conjunto numérico traz uma propriedade que permite a solução de algum tipo de problema que, antes da criação daquele conjunto, não era possível ser resolvido.

Por exemplo, a equação $x+3=2$ não tem solução no conjunto dos números naturais($\mathbb{N}$), mas tem no conjunto dos números inteiros($\mathbb{Z}$).

$$\mathbb{N}=\{1,2,3...\}$$
$$\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$$

A equação $5\cdot x=4$ não tem solução nos inteiros, mas tem solução no conjunto dos números racionais($\mathbb{Q}$).

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}:a\in\mathbb{Z}\text{ e }b\in\mathbb{Z}^*\right\}$$

A equação $x^2=2$ não tem solução nos racionais, mas tem no conjunto dos números irracionais($\mathbb{I}$).

$$\mathbb{I}=\{\mathbb{R}-\mathbb{Q}\}$$

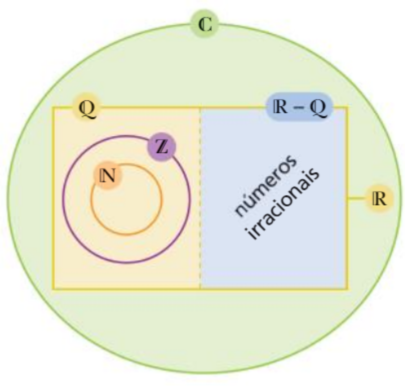
E a equação $x^2+1=0$ não tem solução no conjunto dos números reais($\mathbb{R}$), mas tem solução no conjunto dos números complexos($\mathbb{C}$).

$$\mathbb{R}=\text{ a reta real.}$$

> Preferimos não formalizar o conjunto dos reais devido à sua dificuldade.

Deste modo, reforça-se aqui o argumento que *números imaginários são reais*, no sentido de que *existem*. Assim como os outros conjuntos já tiveram seus tempos de negação e estranhamento, os números imaginários também sofrem com isso, um pouco mais até, pelo nome infeliz que foram dar a eles, porém sendo nada mais que uma expansão dos números reais, tendo seus números de um determinado formato e estando definidas certas operações, tais que

$$\mathbb{C}=\{z=a+bi:\ a,b\in\mathbb{R}\text{ e }i^2=-1\}$$



ADILSON SECCO

De onde podemos ver que

O formato do número complexo é dado por $\mathbf{z=a+bi}$,
sendo a representação de cada número única.

Deste modo, quando $b=0$, z é um número real, portanto, qualquer número real a pode ser expresso por $a+0i$, o que indica que $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. Porém, note que quando $a=0$, $z=bi$, ou seja, se todo número real pode ser expresso por a, este tipo de número não é um número do conjunto dos reais.

O número da forma $\mathbf{z=bi}$ é chamado de **imaginário puro**,
uma vez que sua parte real é nula.

Desta forma, fica claro que

$\mathbf{a}$ é chamada de **parte real** do número e
$\mathbf{b}$ é chamada de **parte imaginária**.

Logo, todo número complexo será composto de partes real e imaginária.

É importante destacar aqui que a e b não são definidos por suas letras, ou por ser o primeiro termo na soma, mas por estar ou não multiplicando a unidade imaginária. Se escrevêssemos $z=ai+b$, o a seria a parte imaginária e o b seria a parte real.

Exercícios Resolvidos

1. Classifique em verdadeiro ou falso os itens a seguir:

(a) $-10\in\mathbb{N}$

Falso. Não há negativo nos naturais.

(b) $-10\in\mathbb{Z}$

Verdadeiro. Vide página 8.

(c) $\pi\in\mathbb{Q}$

Falso. π é um número irracional.

(d) $0\in\mathbb{N}$

Falso. O conjunto começa no 1.

(e) $10\in\mathbb{C}$

Verdadeiro. $z=10+0i=10$

(f) $\pi\in\mathbb{R}$

Verdadeiro. $\mathbb{I}\subset\mathbb{R}$

(g) $2i\in\mathbb{C}$

Verdadeiro. $z=0+2i=2i$

(h) $\sqrt{3}\in\mathbb{Z}$

Falso. $\mathbb{I}\cap\mathbb{Z}=\emptyset$

2. Identifique as partes real e imaginária dos números a seguir.

   (a) $z = 1 + i$

   Como vimos que o número complexo tem forma $z = a + bi$, com a sendo a parte real e b sendo a parte imaginária, $z = 1 + i = 1 + 1i \Rightarrow a = 1, b = 1$

   (b) $z = 4i = 0 + 4i \Rightarrow a = 0, b = 4$

   (c) $z = 2i - 4 = -4 + 2i \Rightarrow a = -4, b = 2$

   (d) $z = -5i = 0 - 5i \Rightarrow a = 0, b = -5$

   (e) $z = 0 = 0 + 0i \Rightarrow a = 0, b = 0$

3. O polinômio $p(x) = x^2 + 1$ possui solução? Pense em diferentes conjuntos para responder. Para resolver este tipo de problemas, precisamos lembrar que "resolver" um polinômio é encontrar suas raízes. Para isso, buscamos onde $p(x) = 0$.

   Assim, $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

   Portanto, no conjunto dos números complexos o polinômio não tem uma, mas duas soluções, enquanto no conjunto dos números reais não tinha nenhuma.

Exercícios Propostos

1. (UFF 2010) Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891), Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem. Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas. Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:

   (a) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

   (b) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

   (c) entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.

   (d) entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.

   (e) a diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.

2. Seja y um número real compreendido entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Qualquer que seja o valor de y, ele pertencerá ao conjunto

   (a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1\}$

   (b) $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$

   (d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\right\}$

   (e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$

3. Classifique em verdadeiro ou falso os itens a seguir:

   (a) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

   (b) $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$

   (c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{C}$

   (d) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \subset \mathbb{C}$

   (e) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

   (f) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \supset \mathbb{R}$

4. (UFSC) Marque a(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S), em relação aos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

   (a) A soma de três números ímpares consecutivos é 159. O maior dos três é 55

   (b) Se x e y são números racionais, então $x+y$ e $x \cdot y$ também são racionais.

   (c) Dado um número complexo qualquer $x = a + bi$, existe sempre um número complexo y tal que $x \cdot y$ é real.

   (d) Se x é um número negativo, então $\sqrt{x}$ não existe.

   (e) A forma trigonométrica do número complexo $3\sqrt{3} + 3i$ é $6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

5. O que significa afirmar sobre os conjuntos A e B que $A \subset B$ e $B \subset A$?

6. Identifique as partes reais e imaginária dos números a seguir.

   (a) $z = \frac{1}{3} + i$

   (b) $z = -3 - 27i$

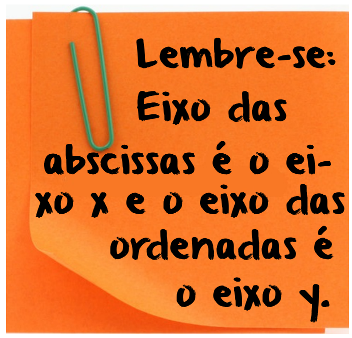
   (c) $z = 2017$

   (d) $z = -i$

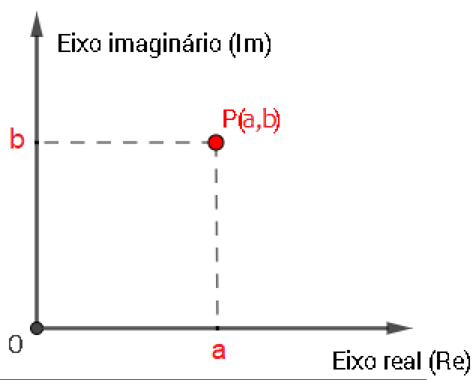
7. (UEL - modificado) Se o número complexo $(1-i)$ é raiz da equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$. Em qual intervalo a raiz real dessa equação pertence?

Representação cartesiana e operações com complexos

O número complexo é representado no plano cartesiano onde o eixo das abscissas é a reta real (representada por Re) e o eixo das ordenadas é a reta imaginária (representada por Im). Esse plano complexo é conhecido como **Plano de Argand Gauss**.

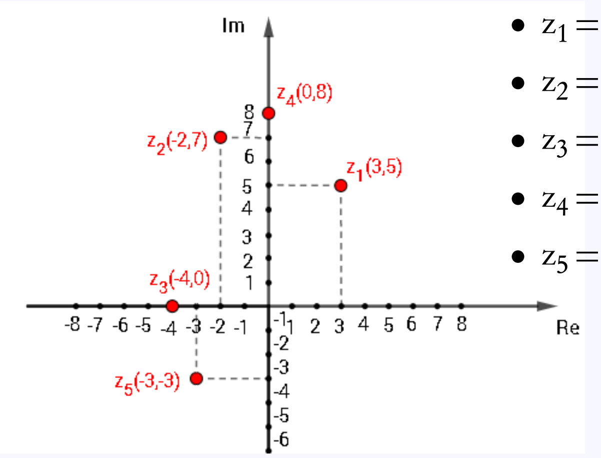


Assim, um número complexo dado pelo ponto $P = (a,b)$ é o equivalente a $z = a + bi$. Ou seja, a parte real do número ocupa a posição do x no par ordenado, e a parte imaginária ocupa a posição do y.



Exemplo

Observe alguns números complexos representados no plano complexo.



- $z_1 = 3+5i$ = (3,5)
- $z_2 = -2+7i$ = (-2,7)
- $z_3 = -4+0i$ = (-4,0)
- $z_4 = 0+8i$ = (0,8)
- $z_5 = -3-3i$ = (-3,-3)

Note que o número real é da forma $(a,0)$, logo estará localizado sobre o eixo real, enquanto o número imaginário puro é da forma $(0,b)$ e estará sobre o eixo imaginário.

Você pode ter se lembrado, na sua leitura até o momento, do seu estudo de vetores das aulas de Física sobre mecânica, onde a força se decompunha em x e y num plano inclinado, e era dada como uma soma de seus componentes. Grandezas vetoriais, como a distância, velocidade, aceleração e força, costumam ser dadas da forma $F = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$.

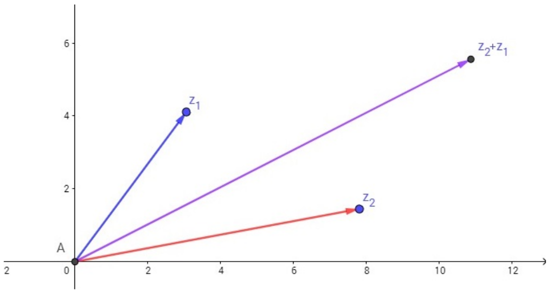
Note que há uma semelhança muito grande entre falar num vetor como o da força e num número complexo da forma $z = a+bi$, pois os dois são formados por somas de suas componentes. O número complexo é parte real e parte imaginária, e a proporção dessas partes é que vai fazer com que cada número seja único. Desta forma, também podemos ver o número complexo como um vetor. Com isso em mente, você tem ideia de como será feita a adição de dois números complexos, por exemplo $(-2+3i)+(6+2i)$?

Adição de números complexos

Vendo um número complexo como um vetor, na adição de números complexos, vamos adicionar partes reais separadas das partes imaginárias, da mesma maneira que, na Física, as influências de força em y só afetavam y e as de x só afetavam x. Considerando $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$ com a,b,c,d $\in \mathbb{R}$, temos que

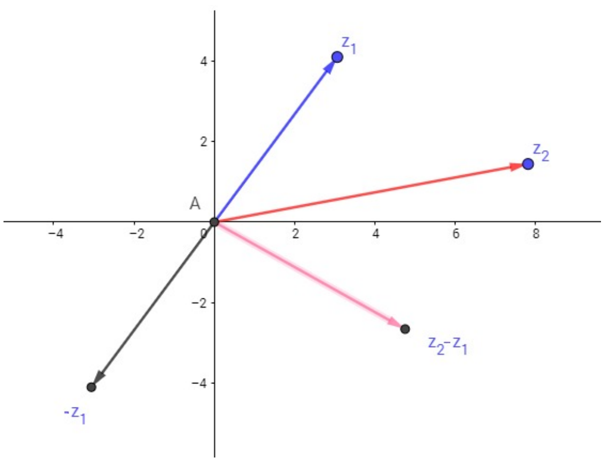
$$\boxed{z_1 + z_2 = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i}$$

A soma entre dois vetores, conhecida também como soma vetorial, nos permite representar no plano quaisquer z_1 e z_2, com a regra do paralelogramo, obtendo



Subtração de números complexos

A subtração é análoga, resultando na figura seguinte.



Lembre-se:
$z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1)$
O vetor -z tem o mesmo módulo de z e sentido oposto.

Exemplo

Sejam $z_1 = 3i - 2$ e $z_2 = 6 + 2i$.

$z_1 + z_2 = (-2+6) + (3+2)i = 4 + 5i$

$z_1 - z_2 = (-2-6) + (3-2)i = -8 + i$

$z_2 - z_1 = (6-(-2)) + (2-3)i = 8 - i$

Multiplicação de números complexos

Para a multiplicação, precisamos aplicar a propriedade distributiva e reduzir os termos semelhantes, lembrando que $i^2 = -1$.

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = (ac\text{-}bd) + (ad+bc)i}$$

Exemplo

Tome $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 3 - 2i$.

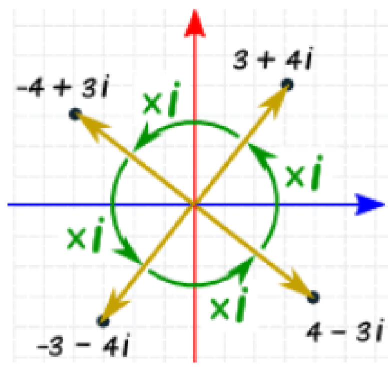
$z_1 \cdot z_2 = (3+4i)\cdot(3-2i) = 3\cdot 3 + 3\cdot(-2i) + (4i)\cdot 3 + (4i)\cdot(-2i)$

$z_1 \cdot z_2 = 9 - 6i + 12i - 8i^2 = 9 + 8 + 12i - 6i = 17 + 6i$

Analisando o caso específico em que $z_2 = i$, observaremos o que significa a multiplicação no plano. Seja $z' = z_1 \cdot i$, $z'' = z' \cdot i$, $z''' = z'' \cdot i$ e $z'''' = z''' \cdot i$.

$$\begin{aligned}
z' &= (a+bi)\cdot i = ai + bi^2 = ai - b \\
z'' &= (ai-b)\cdot i = ai^2 - bi = -a - bi \\
z''' &= (-a-bi)\cdot i = -ai - bi^2 = -ai + b \\
z'''' &= (-ai+b)\cdot i = -ai^2 + bi = a + bi = z'
\end{aligned}$$

Se desenhar esses pontos no plano complexo, notará que cada uma dessas multiplicações estará em um quadrante, sendo a multiplicação por i no plano uma rotação de 90°. Note que a multiplicação por -1 representa uma rotação de $180° = i^2$.



Exemplo

Tome $z_1 = 3 + 4i$. $z' = -4 + 3i, z'' = -3 - 4i$ e $z''' = 4 - 3i$.

Divisão de números complexos

Agora, para a divisão, precisamos fazer o inverso da multiplicação, ou seja, precisamos multiplicar por $\frac{1}{z}$. Para que isso seja possível, precisamos saber trabalhar com frações complexas. O modo de fazer isso é utilizar um recurso que acaba com estranhezas em somatórias, que talvez você já esteja habituado do seu estudo de frações: o conjugado.

O conjugado na radiciação é um número que, quando você soma ou multiplica o número com seu conjugado, o resultado é um número racional. Por exemplo, quando tínhamos $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, que é um número que não é usual trabalharmos, bastava multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, obtendo

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})}$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1^2-(\sqrt{2})^2)}$$

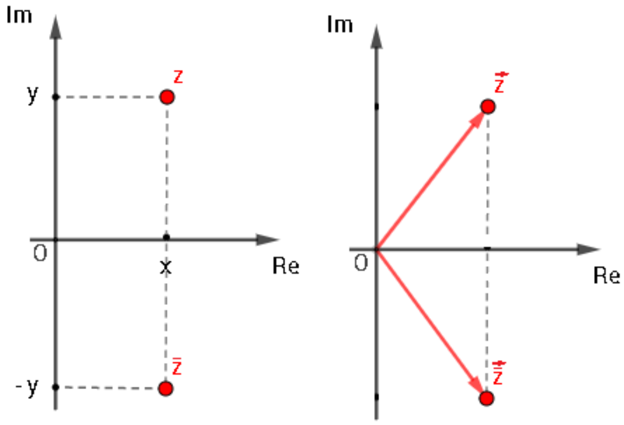
$$\frac{1-\sqrt{2}}{(1-2)} = \frac{1-\sqrt{2}}{(-1)} = \sqrt{2}-1$$

Lembre-se:

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Que é um número mais fácil de ser compreendido. Analogamente, teremos para os complexos que

O **conjugado** de um número complexo será indicado por $\bar{\mathbf{z}}$, e dado por $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{a-bi}$, com $a,b \in \mathbb{R}$.



Note que, se representarmos no plano de Argand-Gauss, o número complexo z e seu conjugado $\bar{z}$, as imagens serão simétricas em relação ao eixo real (Re). Abaixo, segue um exemplo para melhor compreensão.

Exemplo

$z_1 = 5+3i \Rightarrow \bar{z} = 5-3i$

$z_2 = -2i-7 \Rightarrow \bar{z} = -7+2i$

$z_3 = -8 \Rightarrow \bar{z} = -8$

$z_4 = 4i \Rightarrow \bar{z} = -4i$

$z_5 = -1-i \Rightarrow \bar{z} = -1+i$

Agora que sabemos trabalhar com o conjugado, vamos obter o quociente. Para isso, precisamos multiplicar o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor, ou seja,

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}, \text{ com } (z_2 \neq 0)}$$

Exemplo

Tome $z_1 = 2+3i$ e $z_2 = \frac{-i}{3}+1$. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{\frac{-i}{3}+1}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1+\left(\frac{-i}{3}\right)} \cdot \frac{1-\left(\frac{-i}{3}\right)}{1-\left(\frac{-i}{3}\right)} = \frac{2+3i}{1-\frac{i}{3}} \cdot \frac{1+\frac{i}{3}}{1+\frac{i}{3}} = \frac{1+\frac{11i}{3}}{\frac{10}{9}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\frac{10}{9}} + \frac{\frac{11i}{3}}{\frac{10}{9}} = \frac{9}{10} + \frac{33i}{10}$$

Exercícios resolvidos

1. Dados os complexos $z_1 = (2,4)$ e $z_2 = (3,-1)$, determine os complexos v e w, tais que: $v = z_1 + z_2$ e $w = z_1.z_2$.

   Como vimos, para realizar a soma de dois números complexos na forma algébrica, somamos as partes real e imaginária separadamente.Sendo assim, temos:

   $v = z_1 + z_2 = (2,4) + (3,-1)$

   $v = (2+3, 4+(-1)) \Rightarrow v = (5,3)$

   Já para a multiplicação de dois números complexos que podem ser representados por $x = a + bi$ e $y = c + di$ aplica-se a propriedade distributiva. Lembre que $i^2 = -1$. Temos que o ponto z_1 representa o número complexo $2+4i$ e o ponto z_2 representa $3-i$. Logo,

   $w = z_1 \cdot z_2 = (2+4i) \cdot (3-i)$

   $= (2 \cdot 3 + 2 \cdot (-i) + (4i) \cdot 3 + 4i \cdot (-i))$

   $= (6 - 2i + 12i + 4) \Rightarrow w = 10 + 10i = (10,10)$

2. Obtenha o número real k que satisfaz a condição determinada:

(a) o número complexo $z = (k-2) + 4i$ deve ser imaginário puro.

Sabe-se que z é um imaginário puro se, e somente se, $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) \neq 0$.
Então, devemos ter:

$$\begin{cases} \text{Re}(z) = k - 2 = 0 \\ \text{Im}(z) = 4 \neq 0 \end{cases}$$

ou seja, $k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

(b) o complexo $z = \left(-3, \dfrac{2k-1}{3}\right)$ deve ser um número real.

Sabe-se que z é um número real se, e somente se, $\text{Im}(z) = 0$.
Então, devemos ter: $\dfrac{2k-1}{3} = 0$, ou seja, $2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$

3. Determine a forma algébrica dos seguintes quocientes:

(a) $\dfrac{3-2i}{2+i}$

Vamos multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador, ou seja, por $2-i$, obtendo assim um número real.

$$\frac{3-2i}{2+i} = \frac{3-2i}{2+i} \cdot \left(\frac{2-i}{2-i}\right) = \frac{6-3i-4i+2i^2}{4-i^2}$$

$$= \frac{4-7i}{4-(-1)} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

(b) $\dfrac{-1+5i}{i}$

Repetiremos aqui o mesmo procedimento do item anterior.

$$\frac{-1+5i}{i} = \frac{-1+5i}{i} \cdot \left(\frac{-i}{-i}\right) = \frac{i-5i^2}{-i^2}$$

$$= \frac{i-5(-1)}{-(-1)} = 5 + i$$

Exercícios propostos

1. Represente geometricamente os complexos:

(a) $z = 1 + i$
(b) $z = -2i$
(c) $z = 4i$
(d) $z = -5$
(e) $z = 4 - i$
(f) $z = 3 + 2i$

2. Sejam os complexos $v = (-2, x)$ e $w = (y, -3)$.

(a) Escreva v e w na forma algébrica

(b) Determine x e y reais tal que $v + w = -4 + 2i$

3. Determine $p \in \mathbb{R}$ de modo que $z = (1-p) + (p^2 - 1)i$ seja um número real não nulo.

4. Mostre que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\bar{\bar{z}} = z$

5. Determine a fórma algébrica dos seguintes quocientes:

> Dica: basta multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

(a) $\dfrac{6-2i}{4+2i}$ (c) $\dfrac{4+i}{4-i}$ (e) $\dfrac{2i}{1-i}$

(b) $\dfrac{5i}{3-4i}$ (d) $\dfrac{6}{5i}$ (f) $\dfrac{12-i}{7+8i}$

6. Determine os números reais m e n para que as igualdades sejam verdadeiras:

> Dica: pense em qual condição deve ser satisfeita para que dois números complexos sejam iguais.

(a) $m+(n-1)i=-4+3i$

(b) $(n-2, m+5)=(3,-2)$

(c) $(m-3)+(n-2)i=5i$

(d) $(m-n+1)+(2m+n-4)i=0$

7. (UNICAMP) Dado um número complexo $z=x+iy$, o seu conjugado é o número $\overline{z}=x-iy$.

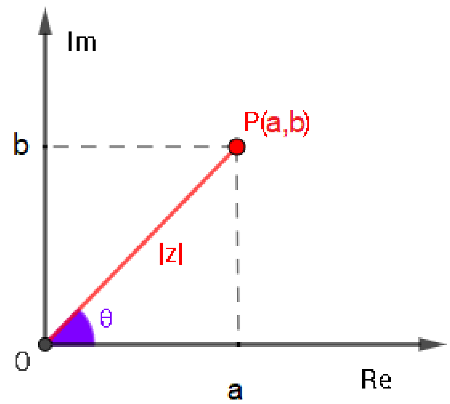
(a) Resolva as equações: $z\cdot\overline{z}=4$ e $(\overline{z})^2=z^2$

(b) Ache os pontos de intersecção dos lugares geométricos que representam as soluções dessas equações.

8. Utilize o conjugado $\bar{z}$ para obter a expressão para z^{-1}, com $z \neq 0$.

Representação polar e operações na forma polar

Quando falamos de grandezas vetoriais, podemos expressá-las no plano da forma como já havíamos visto, em termos de um par ordenado $P=(a,b)$, que indicam as correspondências em x e y, ou podemos expressá-las na **forma polar**, que significa um par ordenado $P=(|z|,\theta)$ que corresponda ao tamanho do vetor (módulo) e ângulo (θ).

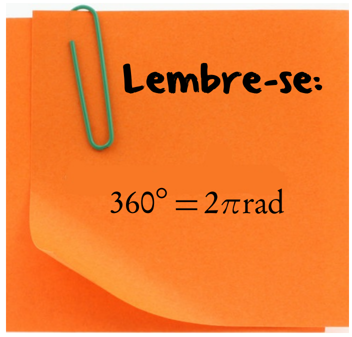


> O módulo do vetor $\vec{OP}$, indicado por $|z|$ ou ρ, é a distância do ponto P à origem no plano, dada por $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Lembre-se: Num triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c

$a^2+b^2=c^2$

O argumento de z é o ângulo (θ) formado pelo vetor $\vec{OP}$ com o semi-eixo x positivo, tomado a partir desse semi-eixo, no sentido anti-horário.



Exemplo

Tome $z = 3 + 4i$. Encontre o módulo e argumento de z.

Representando z geometricamente, a distância da origem O até o ponto P(3,4), temos um triângulo pitagórico famoso, onde já sabemos que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Assim, $|z| = 5$.

Para encontrar o argumento, basta usar alguma das funções trigonométricas. Por exemplo, $\text{sen}(\theta) = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{arcsen}(0,8) = \theta = \approx 0,927\text{rad} \approx 52,13°$, que pode ser obtido em uma calculadora científica.

Considerando $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\arg(z) = \theta$. Observe que, aplicando seno e cosseno, obtemos as seguintes igualdades:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow \mathbf{a} = |\mathbf{z}|\cos\theta$$
$$\text{sen}\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow \mathbf{b} = |\mathbf{z}|\,\mathbf{sen}\theta$$

Então substituímos estes valores em z, obtendo:

$$z = a + bi$$
$$z = |z|\cos\theta + |z| \cdot \text{sen}\theta i$$
$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)}$$

O produto entre dois números complexos z_1 e z_2 na forma polar é o número complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos de z_1 e z_2 , e o argumento é igual à soma dos argumentos de z_1 e z_2.

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]}$$

Para n números complexos, temos, de forma análoga, a multiplicação dos módulos e soma dos argumentos:

$$\boxed{z_1 z_2 z_3 ... z_n = |z_1||z_2||z_3|...|z_n|[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n)]}$$

Exemplo

Calcule o produto $z_1 \cdot z_2$ com $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot \text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$$

O quociente entre dois números complexos z_1 e z_2, com $z_2 \neq 0$, na forma polar é o número complexo cujo módulo é igual ao quociente dos módulos de z_1 e z_2 , e o argumento é igual à diferença dos argumentos de z_1 e z_2.

Ou seja,

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]}$$

Exemplo

Calcule o quociente de $\frac{z_1}{z_2}$ para $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$.

De acordo com a fórmula dada, temos :

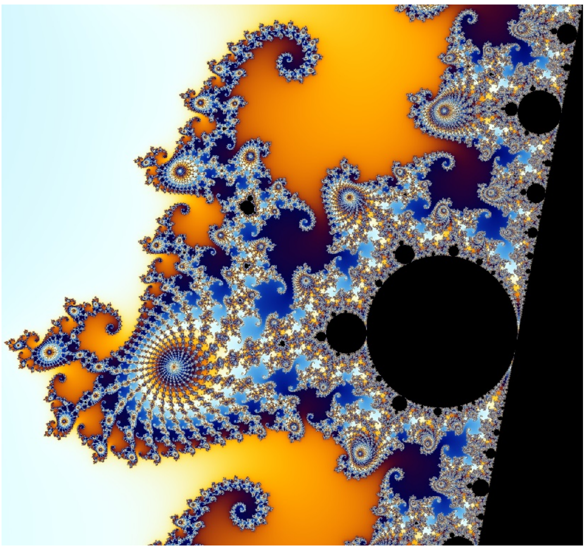
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\cdot \text{sen}\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\cdot \text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$$

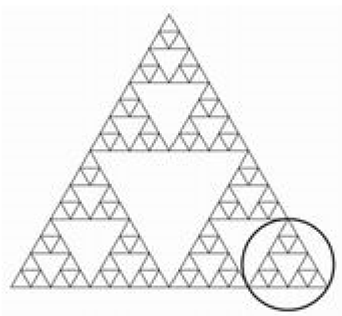
Logo,

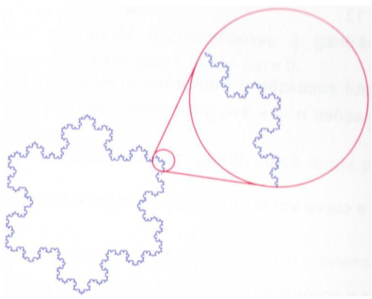
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\cdot \text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$$

Você se lembra da imagem da capa deste livro?



Ela representa uma parte do Fractal denominado por **Conjunto de Mandelbrot**. Antes de mais nada, fractais são objetos geométricos dotados de certas propriedades, entre elas a autossimilaridade. Ou seja, conforme se dá mais zoom em um fractal, encontram-se figuras semelhantes, como se pode ver no **Triângulo de Sierpinski** e na **Curva de Koch** abaixo.





Este fractal está contido em um plano complexo, e cada um de seus pontos faz parte de uma sequência definida recursivamente, de modo que

$$z_0 = 0 \text{ e } z_{n+1} = z_n^2 + c; \ (c = x + yi)$$

não tende ao infinito.

Se quiser entender mais sobre a relação entre este fractal e números complexos, clique na palavra link.

Exercícios Resolvidos

1. Determine o argumento principal de $z=4+4i$

Como $a=4, b=4$ e $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, temos:
$|z|=\sqrt{4^2+4^2} \Rightarrow |z|=4\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos(\theta)=\dfrac{a}{|z|}=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}(\theta)=\dfrac{b}{|z|}=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

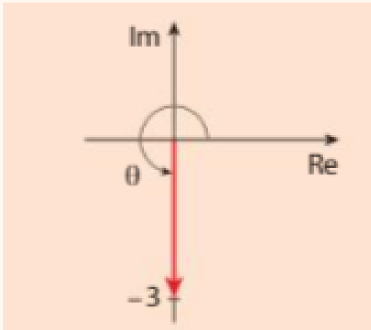
$\Rightarrow \theta \in 1°$ quadrante $\Rightarrow \theta=45°$(ou $\dfrac{\pi}{4}$ rad)

2. Obtenha a forma polar do número complexo $z=4i$.

Como z é um imaginário puro e seu afixo M(0, 4) pertence ao semieixo imaginário positivo, então $\theta=90°$.A distância de M à origem do plano complexo é igual a 4, então $|z|=4$

Temos que $z=|z|(\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta)) \Rightarrow$
$z=4(\cos(90°)+i\cdot\operatorname{sen}(90°))$

3. Escrever a forma trigonométrica de $z=3i$. Vamos resolver esse exercício geometricamente. Para isso representamos z no plano complexo:



Observando a figura, vemos que:

- o módulo (comprimento) de z é 3
- o ângulo de z é $\dfrac{3\pi}{2}$

Logo, basta substituir $|z|$ e θ para obter a forma trigonométrica. Sabemos que: $z=|z|\cdot(\cos(\theta)+i\cdot\operatorname{sen}(\theta))$, então:

$$z=3.\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

4. Dado o complexo $z=\dfrac{1}{4}(\cos(\pi)+i(\operatorname{sen}(\pi))$, expresse-o na forma algébrica.

Como $\cos(\pi)=-1$ e $\operatorname{sen}(\pi)=0$, temos:
$z=\dfrac{1}{4}(-1+i\cdot 0) \Rightarrow z=-\dfrac{1}{4}$

Exercícios Propostos

1. Determine o argumento principal dos números complexos dados:

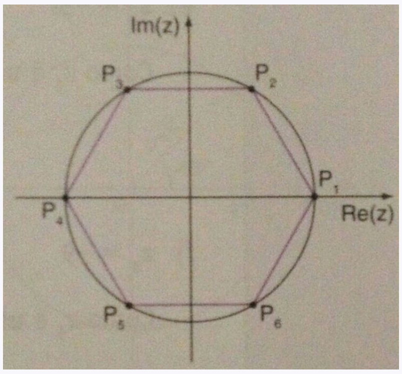
(a) $z_1=4+4i$

(b) $z_2=-5i$

(c) $z_3=-\sqrt{3}+i$

(d) $z_4=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i$

2. A figura apresenta, no plano complexo, um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo raio mede 4.



Determine o argumento principal dos complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6, cujas respectivas imagens são os vértices $P_1, P_2, \cdots, P_6$.

3. Escreva os seguintes complexos na forma trigonométrica:

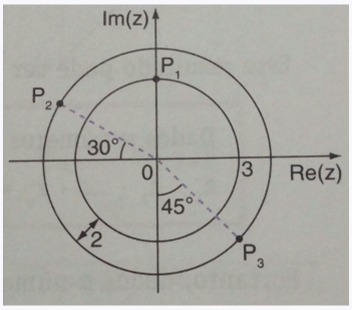
(a) $z = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$ (c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
(b) $z = 2i$ (d) $z = (1-i)^2$

4. Determine a fórmula polar dos complexos x e y que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} 2xi + y = -3 + i \\ x + yi = -1 \end{cases}$$

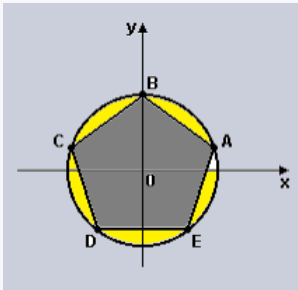
5. Conhecendo um número complexo na sua forma polar, como posso escrever a forma polar do seu inverso multiplicativo (z^{-1})? E do seu conjugado?

6. Na figura, P_1, P_2 e P_3 são os afixos dos números complexos z_1, z_2 e z_3, respectivamente:



Determine a forma polar de z_1, z_2 e z_3.

7. (UFRS - modificado) O polígono ABCDE da figura é um pentágono regular inscrito no círculo unitário de centro na origem. Determine as coordenadas p e θ do vértice A



8. São dados os números complexos:
$z_1 = 6(\cos 240° + i\operatorname{sen} 240°)$
$z_2 = 2\sqrt{3}(\cos 30° + i\operatorname{sen} 30°)$
$z_3 = 3(\cos 150° + i\operatorname{sen} 150°)$
Determine a forma trigonométrica de:

(a) $z_1 \cdot z_2$ (c) $\frac{z_1}{z_3}$
(b) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ (d) $\frac{z_2}{z_3}$

9. Sabendo que $z_1 = 4(\cos 120° + i\operatorname{sen} 120°)$ e $z_1 \cdot z_2 = 2(\cos 270° + i\operatorname{sen} 270°)$, determine:
(a) a forma polar de z_2;
(b) a forma algébrica de z_2.

Potenciação

Calcular um número elevado a n é o mesmo que multiplicar um determinado número n vezes. Deste modo, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, etc. Como sabemos que z^n é uma multiplicação de n fatores de números complexos iguais, podemos escrever da seguinte forma: $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z..... \cdot z}_{\text{n fatores}}$.

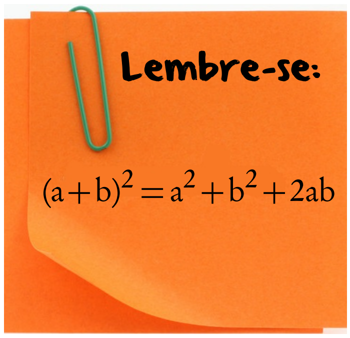
Portanto, como já sabemos como trabalhar com a multiplicação de um número complexo,

$$z^n = \underbrace{|z|\,|z|\,|z| ... |z|}_{\text{produto de n módulos}} \left(\cos \underbrace{(\theta + \theta + \cdots + \theta)}_{\text{soma de n argumentos}} + i\text{sen} \underbrace{(\theta + \theta + \cdots + \theta)}_{\text{soma de n argumentos}}\right)$$

Em seguida, obtemos a primeira fórmula de De Moivre[6] que também vale para $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)]}$$

Para operar com potências, talvez você julgue mais simples utilizar a forma polar. A algébrica pode ser mais familiar, porém para números maiores é impraticável operar nesta forma.



Exemplo

Tome $z = 1 + i$. Calcule z^4.

Na forma algébrica, temos que $z^4 = (z^2)^2 = ((1+i)^2)^2$.

Isto é, $z^2 = 1^2 + i^2 + 2i = 1 - 1 + 2i = 2i$

$z^4 = (z^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$.

Na forma polar, temos que $|z| = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)) \Rightarrow z^4 = (\sqrt{2})^4 \left(\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$z^4 = 4(\cos(\pi) + i\text{sen}(\pi))$

Agora faça z^{2017}.

Na forma polar, $z^{2017} = (\sqrt{2})^{2017} \left(\cos\left(2017 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(2017 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$z^{2017} = (\sqrt{2})^{2017} \left(\cos\left(2017\frac{\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(2017\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

A forma algébrica fica a cargo do leitor.

[6] Abraham de Moivre (1667-1754)

Quando falamos do caso específico de imaginários puros, vamos analisar utilizando as propriedades de potenciação para calcular os valores de i^n, com $n \in \mathbb{N}$.

Lembre-se:

$$a^0 = 1$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1 \text{ (por definição)}$$
$$i^3 = i^2 \cdot i^1 = (-1) \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

Se você seguir a sequência, vai notar que todas as potências de i se repetem da seguinte maneira a partir de i^4: 1, i, -1, -i.

Assim, basta dividir n por 4 e observar o resto da divisão. Se não há resto (r), o resultado da potência é 1, se r=1, o resultado é i, se r=2 o resultado é -1, e, se r=3, o resultado é -i.

Podemos escrever isso matematicamente, assumindo p como o resultado da divisão por 4 e r como o resto, tal que

$$\boxed{i^{4p+r} = i^{4p} + i^r = (i^4)^p + 1^r = 1^p + 1^r = i^r}$$

Exemplo

Calcule o valor de i^{49}.

$i^{49} = i^{4 \cdot 12 + 1} = (i^4)^{12} \cdot i^1 = i$

Tal sequência aparece por conta da rotação já discutida na multiplicação do número complexo. A potência nada mais é que uma multiplicação, então faz sentido que se repitam quatro termos, pois são os quatro quadrantes onde o número complexo está rotacionando. Caso queira enxergar melhor isso, basta por os pontos no plano e ver como fica o desenho.

Radiciação

Raiz enésima de z é um número complexo ω tal que $\omega^n = z$.

Considerando o número complexo $z \neq 0$ tal que $z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$. Para encontrarmos as raízes enésimas de z, precisamos determinar todos os números complexos distintos do tipo:

$$\omega = |\omega|(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha)$$

Dessa maneira, sendo $n > 1$,temos

$$\omega^n = |\omega|^n(\cos(n\alpha) + i\text{sen}(n\alpha)) = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta) = z$$

Assim, podemos deduzir, por comparação, que

$$|\omega^n| = |z|,\ \cos(n\alpha) = \cos\theta \text{ e } \text{sen}(n\alpha) = \text{sen}\theta.$$

De $|\omega^n| = |z|$, obtemos $|\omega| = \sqrt[n]{|z|}$, real e positvo.

De $\cos(n\alpha) = \cos(\theta)$ e $\text{sen}(n\alpha) = \text{sen}\theta$, temos

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ (com } k \in z)$$

Mas para que $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ é necessário que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Deste modo, concluímos que

$$\boxed{\omega^n = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$$

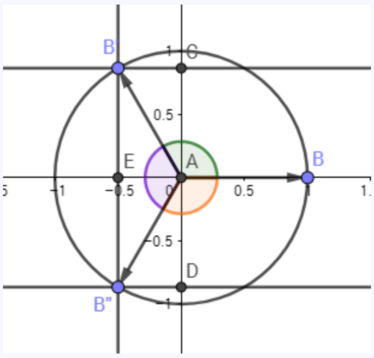
Um polinômio de grau n terá n raízes complexas, como veremos no fim do capítulo. Isso significa que podemos desenhar as raízes de um polinômio no plano encontrando uma delas, de modo que o todas terão o mesmo módulo, sendo seus argumentos equidistantes.

Exemplo

Encontre as soluções para a equação $\sqrt[3]{z} = \omega^3 = 1$.

Sabemos que uma das raízes deste polinômio é 1. Na forma cartesiana, $\omega = 1 + 0i$, na forma polar, $\omega = 1(\cos 2\pi + i\mathrm{sen} 2\pi)$. Para encontrar os outros argumentos, para chegar a todas as raízes, basta dividir os 360° da circunferência pelo índice da raiz.

$$\omega_1 = 1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$
$$\omega_2 = 1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 2\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 2\right)\right) = 1\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$
$$\omega_3 = 1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 3\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 3\right)\right) = 1(\cos(2\pi) + i\mathrm{sen}(2\pi))$$



Aplicando seno e cosseno, podemos obter também as formas cartesianas através do desenho. Sabendo que o ângulo $BAB' = 120°$, o ângulo $CAB' = 30°$, sendo o ângulo $B'AE = 60°$

$$\mathrm{sen} 60° = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60° = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Como está à esquerda do zero na reta real, em x será negativo, uma raiz variando da outra apenas pelo sinal em y, mas tendo os mesmos valores.

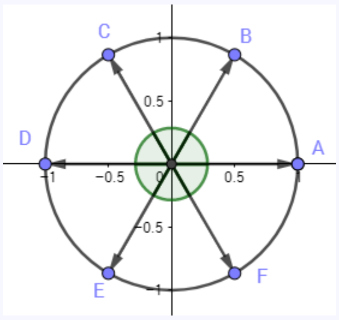
Assim, temos as raízes na forma cartesiana:

$\omega_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad \omega_2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad \omega_3 = 1$

Exemplo

Encontre as soluções para $\sqrt[6]{z} = \omega^6 = 1$.

Dividindo o círculo em 6 partes, obtemos



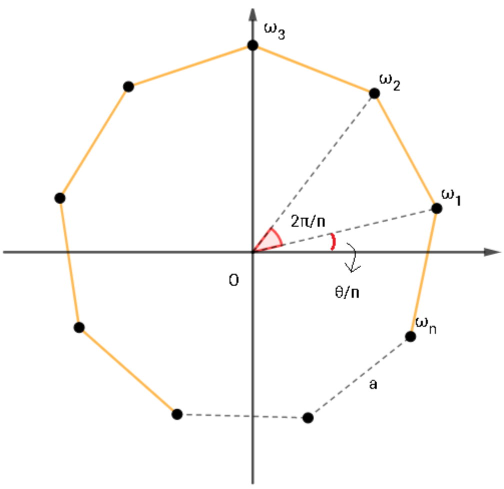
Assim, podemos ver que o vetor $\vec{OC}$ é igual ao vetor $\vec{AB'}$ do exemplo anterior, sendo o vetor $\vec{OB}$ uma reflexão em relação ao eixo y, e os vetores $\vec{OE}$ e $\vec{OF}$ reflexões em relação ao eixo x. Logo,

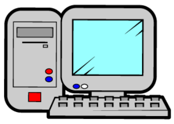
$$\omega_1 = 1 \qquad \omega_4 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\omega_2 = -1 \qquad \omega_5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\omega_3 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \omega_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Portanto, podemos interpretar as n raízes de um número complexo, para polinômios da forma $z^n = a$, sendo a um número complexo qualquer. Conforme colocamos seus valores no plano, iremos construir um polígono regular de n lados cujos vértices são as n raízes:





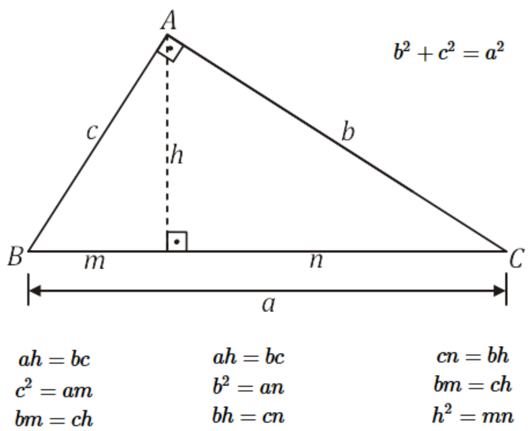
Agora que você já sabe operar com raízes e potências, podemos construir a raiz quadrada de um número complexo utilizando o software *GeoGebra*. Clicando na palavra link, você será levado à versão online do GeoGebra. Ele também pode ser baixado em seu computador, e diversas construções interessantes podem ser realizadas com o seu auxílio, como a que mostraremos abaixo:

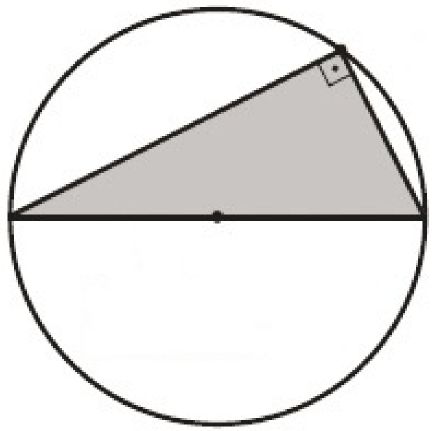
Como construir a raiz quadrada de um número complexo?

Primeiramente, para fazer a construção da raiz quadrada de um número complexo, é interessante saber como construir a raiz quadrada de um número real, pois faremos uma analogia.

A base teórica matemática que usaremos é bem simples, utilizando apenas semelhança de triângulos, mais propriamente a relação $h^2 = mn$, mostrada na figura abaixo, onde a ideia é construir um triângulo retângulo de modo que $n = 1$ e m seja o número desejado. Assim, $h^2 = m \rightarrow \sqrt{m} = h$, onde só precisaremos medir a altura h para saber a raiz quadrada de m.

Para facilitar essa construção, a faremos de modo que mn seja o diâmetro de um um círculo, então traçaremos uma reta perpendicular ao diâmetro, distando 1 da circunferência, de modo a separar m e n, obtendo o h.

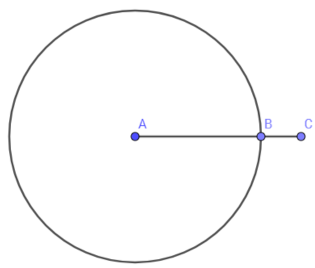




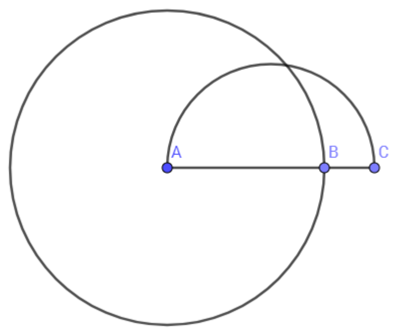
1. Você precisa saber construir o número cuja raiz você está procurando. Para fazer isso no GeoGebra, procure “Segmento com Comprimento Fixo”. Usaremos 3,14 para o exemplo.

2. Quando tiver feito isso, terá um segmento $\overline{AB}$. Procure, então, a opção “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”, clique então, primeiro em quem será o Centro, depois no outro ponto. No nosso exemplo, A é o centro.

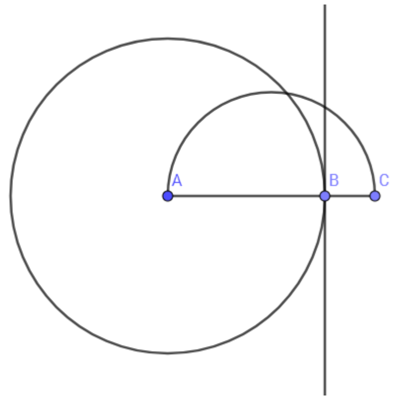
3. Agora, volte em “Segmento com Comprimento Fixo” e clique no ponto que está na circunferência, escolhendo o valor 1. Este será o seu n. Se tudo correu bem, terá uma imagem parecida com essa.



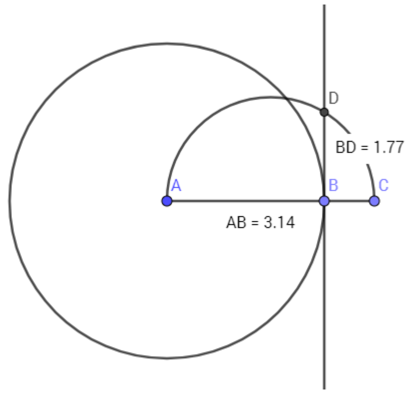
4. Agora procure “Semicírculo Definido por Dois Pontos” e escolha os pontos A e C. Se escolher os pontos C e A, nesta ordem, estará com a imagem invertida, mas nada mudará no resultado.



5. Procure agora “Reta Perpendicular” e clique, primeiro em um ponto do segmento $\overline{AC}$, depois no ponto B.

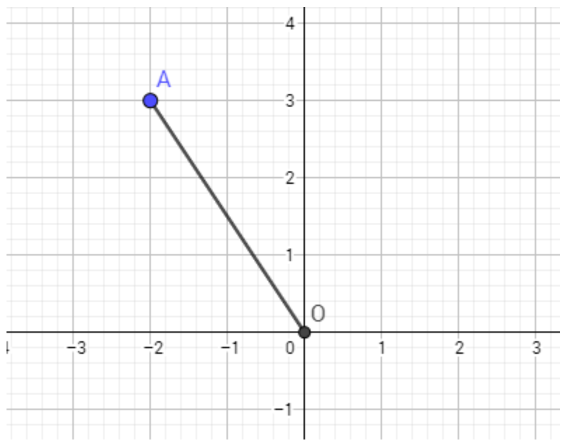


6. Escolha “Ponto” e marque a interseção entre o semicírculo e a reta, então escolha a função “Distância, Comprimento ou Perímetro” e clique primeiro em B, depois no ponto recentemente criado. Este deve ser o valor aproximado da raiz do seu número.

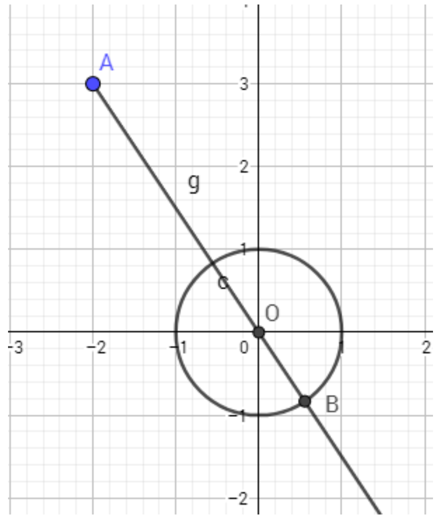


Para os números complexos, precisaremos da malha, para trabalhar no Plano de Argand-Gauss. No exemplo, trabalharemos com o número z=-2+3i.

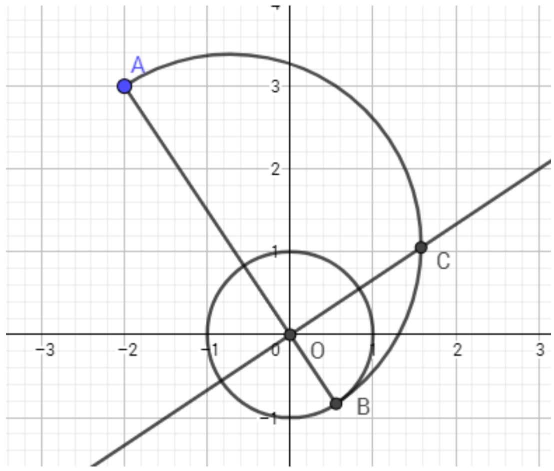
1. O primeiro passo é desenhar o tamanho do módulo deste número, isto é, colocar o ponto no plano e traçar um segmento da origem até ele. Para traçar este segmento, como ele não tem tamanho fixo, basta procurar “Segmento”.



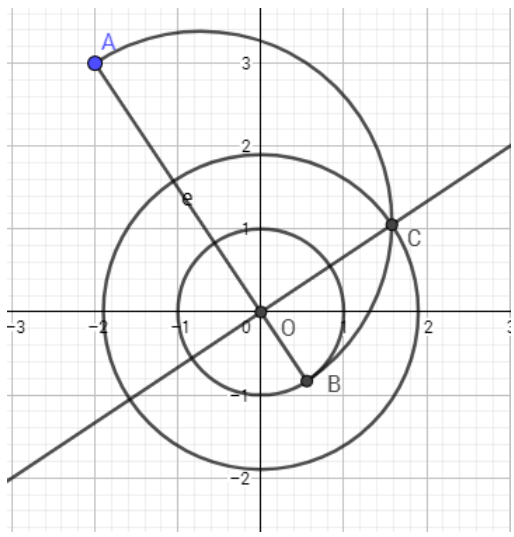
2. Queremos, analogamente, um $n = 1$, e este n estará no prolongamento do segmento, no 4ž quadrante. Procure, então, a opção "Semirreta" e clique em A e em O, depois, procure "Círculo dados Centro e Raio", e escolha o raio=1. Coloque um ponto então na interseção do círculo com a semirreta.



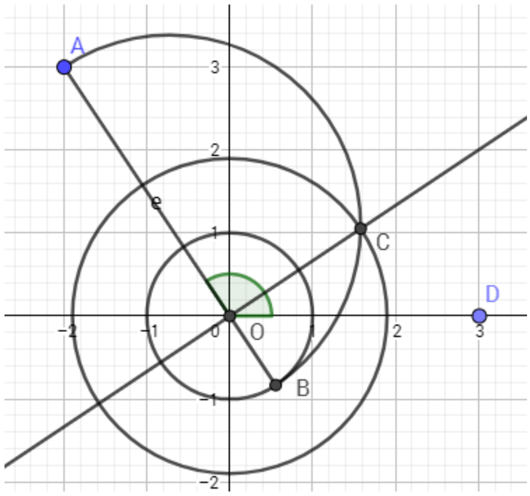
3. Então escolha "Semicírculo Definido por Dois Pontos" e escolha os pontos A e B, depois procure "Reta Perpendicular" e clique, primeiro em um ponto do segmento $\overline{AB}$, depois no ponto O. Marque a interseção do semicírculo com a reta com um ponto.



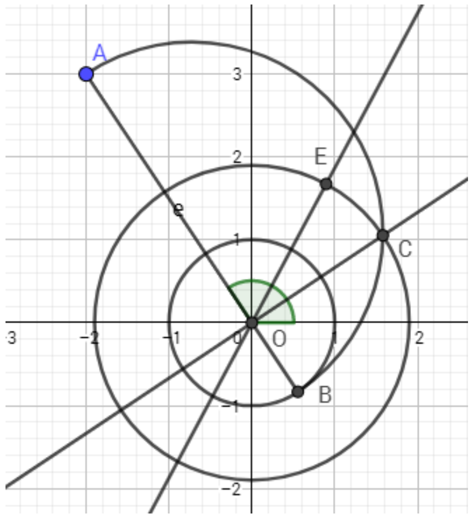
4. Dessa forma, a raiz do módulo já está pronta, faltando apenas o argumento. Sabemos que a raiz tem que ter aquele comprimento, então tem que estar em algum ponto da circunferência de raio OC. Escolha "Círculo dados Centro e Um de seus Pontos" e trace esse círculo.



5. O argumento será dado pela metade do argumento do número original. Assim, é necessário colocar um ponto de auxílio sobre o eixo x, para saber que ângulo é esse. Feito isso, procure "Ângulo", clique no ponto novo, depois em O e por fim em A.



6. Procure então "Bissetriz" e clique primeiro em D, depois em O e por último em A. Marque a interseção da reta nova com o círculo cujo raio não mede 1. Este ponto é a sua raiz desejada.



Tal ponto no exemplo foi $E = (0.9, 1.67)$, se chamarmos isso de $z' = 0{,}9 + 1{,}67i$, podemos testar se, ao quadrado, voltamos ao ponto original. O resultado dá $(z')^2 = -1{,}9789 + 3{,}006i)$, que é a aproximação feita pelo computador, sendo suficientemente próxima de $(z')^2 = -2 + 3i = z$.

É interessante notar que todos pontos são fixos e dependem de A e, no entanto, A é móvel. De modo que, uma vez que esta raiz está construída, pode-se mover o ponto A para obter a raiz quadrada de qualquer outro número complexo dado por $Z = (a, b)$.

No entanto, apesar de ser uma ferramenta interessante, não é possível construir qualquer raiz complexa, você consegue pensar num contra-exemplo? Se quiser continuar pensando a respeito, clique na palavra link.

Exercícios Resolvidos

1. Interprete geometricamente as raízes cúbicas de $z=8(\cos(\pi)+i\operatorname{sen}(\pi))$.

   Para obter as raízes cúbicas de z, devemos achar os complexos w_k tais que $(w_4)^3=z$

   $$w_k=\sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{3}\right)\right)$$

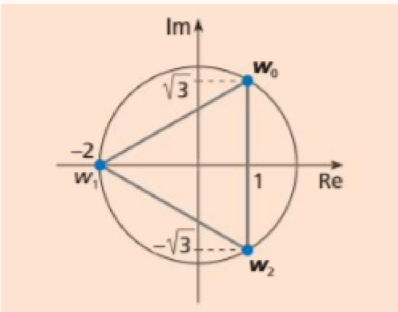
   Assim, para $k=0, k=1$ e $k=2$, temos:

   $$w_0=2(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3}$$

   $$w_1=2(\cos(\pi)+i\operatorname{sen}(\pi)=-2$$

   $$w_2=2(\cos\left(5\frac{\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(5\frac{\pi}{3}\right)=1-i\sqrt{3}$$

   Representando as imagens das raízes w_0, w_1, w_2, no plano complexo, temos:

   Observamos que as imagens das raízes cúbicas de z pertencem a uma circunferência de centro na origem e raio igual a 2, e dividem a circunferência em três arcos congruentes de $\frac{2\pi}{3}$rad. Podemos dizer que essas imagens são os vértices de um triângulo equilátero inscrito nessa circunferência.

2. Calcule $\sqrt[5]{1-i}$. Escrevendo $z_0=1-i$ na forma polar, temos $|z_0|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

   e $\begin{cases}\cos(\theta_0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \operatorname{sen}(\theta_0)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Rightarrow \theta=\dfrac{7\pi}{4}$

   Logo: $z_0=\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

   Seja $z=|z|(\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta))$ tal que $z^5=z_0$, ou seja, $|z|^5(\cos(5\theta)+i\operatorname{sen}(5\theta))=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

   Então, pela definição de igualdade de complexos na forma polar, temos:

   $$\begin{cases}|z|^5=\sqrt{2}\\ 5\theta=-\dfrac{7\pi}{4}+k\cdot 2\pi, \text{com } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
   $$\Rightarrow$$
   $$\begin{cases}|z|=\sqrt[5]{\sqrt{2}}=\sqrt[10]{2}\\ \theta=-\dfrac{7\pi}{20}+\dfrac{k\cdot 2\pi}{5}, \text{com } k\in\mathbb{Z}\ (*)\end{cases}$$

   Então (*), fazendo $k=0,1,2,3,4$ obtemos:

   $$\theta_1=\frac{7\pi}{20};\theta_2=\frac{15\pi}{20}=\frac{3\pi}{4};\theta_3=\frac{23\pi}{20};$$
   $$\theta_4=\frac{31\pi}{20};\theta_5=\frac{39\pi}{20}$$

   Como as raízes quintas de $1-i$ são dadas pela expressão $z_m=|z|(\cos(\theta_m)+i\operatorname{sen}(\theta_m)$, em que $m=1,2,3,4,5$, temos:

   $$\sqrt[5]{1-i}=\begin{cases}z_1=\sqrt[10]{\left(\cos\left(\frac{7\pi}{20}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{20}\right)\right)}\\ z_2=\sqrt[10]{\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)}\\ z_3=\sqrt[10]{\left(\cos\left(\frac{23\pi}{20}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{23\pi}{20}\right)\right)}\\ z_4=\sqrt[10]{\left(\cos\left(\frac{31\pi}{20}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{31\pi}{20}\right)\right)}\\ z_5=\sqrt[10]{\left(\cos\left(\frac{39\pi}{20}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{39\pi}{20}\right)\right)}\end{cases}$$

Exercícios Propostos

1. Dado $z=4(\cos(15°)+i\text{sen}(15°))$, calcule z^{10}.

2. Encontre a forma trigonométrica de $z = i^{21} \cdot i^{22} \cdot i^{23} \cdots i^{29}$.

3. Dado $z=2(\cos(30°)+i\text{sen}(30°))$, obtenha a forma algébrica de:
   (a) z^3
   (b) z^6
   (c) z^{10}

4. Dado $z=\sqrt{3}-i$, obtenha z^6:
   (a) sem o uso da fórmula de De Moivre;
   (b) por meio da fórmula de De Moivre.

5. Calcule:
   (a) $(-\sqrt{6}-i\sqrt{2})^{13}$
   (b) $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}i\right)^{101}$
   (c) $(-4+4i\sqrt{3})^{-6}$

6. Determine as raízes quadradas dos números complexos seguintes:
   (a) i
   (b) -3
   (c) $-\frac{1}{4}i$

7. Calcular:
   (a) $\sqrt[3]{-2+2i\sqrt{3}}$
   (b) $\sqrt[4]{-5-5i}$
   (c) $\sqrt{4\sqrt{3}-4i}$

8. Dados o complexo $z=4i$, determine:
   (a) as raízes quadradas de z e represente-as no plano complexo;
   (b) a medida do diâmetro do círculo que contém os afixos das raízes obtidas no item anterior.

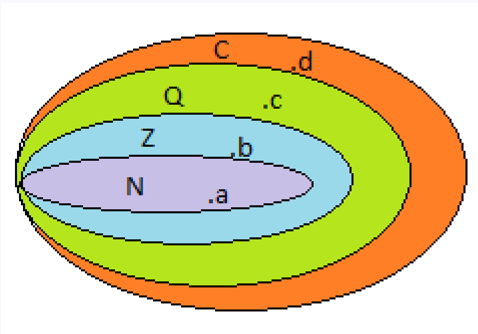
9. Sabendo que o ponto $A(-1,0)$ é a imagem de uma das raízes sextas de um número complexo z, determine:
   (a) z
   (b) as formas algébrica e polar das raízes sextas de z.

10. Sabendo que $z = -1+\sqrt{3}i$, calcule z^6, z^{16} e z^{101}, e expresse os resultados nas formas polar e algébrica.

Autoavaliação

1. (UFPA-modificado) Qual o valor de m, real, para que o produto $(2+mi)\cdot(3+i)$ seja um imaginário puro?

2. No diagrama a seguir, cada uma das letras a, b, c, d e representa uma das raízes das equações: $x^2-4x+8=0, x^2-x-6=0$ ou $x^2-x+\frac{1}{4}=0$. Determine o valor de cada letra.



3. Dados complexos $z_1=-1-3i$, $z_2=2i$ e $z_3=1-i$. Determine:

   (a) z_1+z_2

   (b) z_1-z_3

   (c) $z_1\cdot z_2\cdot z_3$

   (d) $\frac{z_1}{z_2}$

   (e) $\frac{z_2}{z_3}\cdot z_1$

4. Determine $z\in C$ que verifica a igualdade $z-\bar{z}=6i$

5. Seja $z=\frac{3+i}{2+xi}$ com x real. Em cada caso, determine x de modo que:

   (a) $Re(z)=1$

   (b) $Im(z)=0$

   (c) $Re(z)=Im(z)$

6. Represente os seguintes casos na forma polar:

   (a) $z=3-5i$

   (b) $w=1+2i$

   (c) $z=-29-4i$

7. Indique o inverso multiplicativo z^{-1} do número complexo $z=\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

$$z^{-1}=\frac{1}{z};\ \cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta)=1$$

8. Em cada item, determine a forma trigonométrica das potências do comlexo $z=2(\cos 35^\circ+i\operatorname{sen}35^\circ)$.

   (a) z^8

   (b) $\frac{z^8}{z^8}$

   (c) $(z^3)^4$

9. (FUVEST - modificado) Sendo i a unidade imaginária $(i^2=-1)$ pergunta-se: quantos números reais a existem para os quais $(a+i)^4$ é um número real?

10. Determine as coordenadas do ponto P', obtido ao se rotacionar o ponto $P(4\sqrt{2},4\sqrt{2})$ em torno da origem, em um ângulo de 225°, no sentido:

    (a) anti-horário

    (b) horário

	Número das Questões da Autoavaliação									
Objetivos dos Exercícios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Identificar um número Complexo	x	x								
Operar com números complexos			x	x	x			x	x	x
Compreender as representações geométricas de um número Complexo						x	x	x		x
Páginas referente aos conceitos	9	9 e 10	14 à 17	16	16 e 17	19	19 à 21	25	26	27 à 29

Caso você não acerte alguma questão da Autoavaliação, consulte a tabela acima e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a seção e refaça os exercícios. Também tente fazer os exercícios complementares abaixo.

Exercícios Complementares

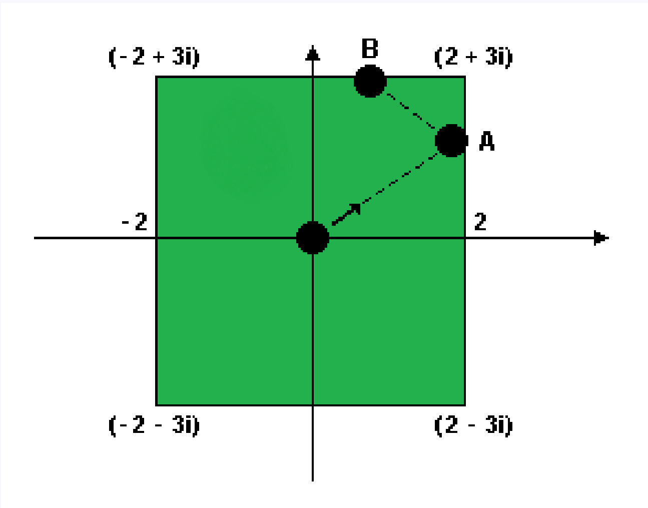
1. Calcule o valor real de x tal que: $(x^2-9)+(x+3)i=0$

2. Mostre que:
   Dado $v=(a,b)$ e $w=(c,d)$ complexos, então $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c$ e $b=d$

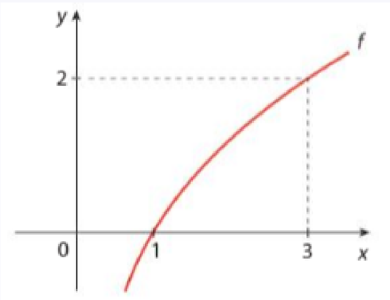
3. Identifique a parte real e a parte imaginária de cada um dos seguintes números complexos:

   (a) $z=3+2i$
   (b) $z=\sqrt{10}+3i$
   (c) $z=-i$
   (d) $z=i$
   (e) $z=1-\frac{i}{3}i$

4. (UFRJ) Em um jogo de sinuca, uma mesa está localizada com centro na origem do plano complexo, conforme mostra a figura a seguir. Após uma tacada do centro O, a bola preta segue na direção de $Z=1+i$, bate em A, indo em seguida até B e parando, conforme demonstra a figura a seguir. Encontre o ponto $Z=a+bi$, onde a bola preta teria parado se a tacada tivesse sido dada, com a mesma intensidade, na direção e sentido do conjugado de Z.



5. (UFBA) Sendo a = -4 + 3i , b = 5 - 6i e c = 4 - 3i , o valor de ac + b é:tem Na figura abaixo, tem-se o gráfico da função f de R_+, definida por $f(x) = \log_b x$, com $b \in R_+$ e $b \neq 1$.



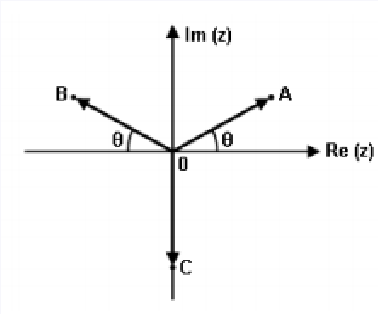
O módulo do número complexo $z = b^2 - bi$ é:

(a) $\sqrt{3}$
(b) $2\sqrt{5}$
(c) $2\sqrt{3}$
(d) $3\sqrt{10}$
(e) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{4}$

6. (Mackenzie-SP) O valor da expressão $y = i + i^2 + i^3 + ... + i^{1001}$ é:

7. Determine x real de modo que o número complexo $z = (x + 3i)\cdot(1 - 2i)$ seja um número real, qual é o número z?

8. (FATEC) Na figura adiante, os pontos A, B e C são as imagens dos números complexos z_1, z_2 e z_3, no plano de Argand-Gauss.



9. (UFRJ-modificado) Um matemático, observando um vitral com o desenho de um polígono inscrito em um círculo, verificou que os vértices desse polígono poderiam ser representados pelas raízes cúbicas complexas do número 8. Qual é a área do polígono observado pelo matemático?

10. Mostre algebricamente a validade das propriedades a seguir:
   (a) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
   (b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
   (c) $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, em que $z_2 \neq 0$

11. A equação $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$,em que p, q, r, e s são coeficientes reais, admite a unidade imaginária i como raiz simples e 2 como raiz dupla. Quais são os valores para p, q, r e s?

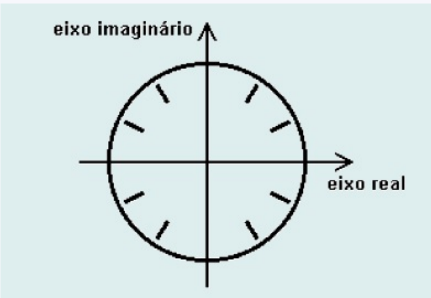
12. Dado o complexo $z = 3 - 4i$, determine:
   (a) o inverso de z
   (b) o conjunto do inverso de z^2
   (c) o inverso de $z \cdot i$

13. (UFMG) Por três pontos não-colineares do plano complexo, z_1, z_2 e z_3, passa uma única circunferência.Sabe-se que um ponto z está sobre essa circunferência se, e somente se, for um número real. Seja C a única circunferência que passa pelos pontos $z_1=1$, $z_2=-3i$ e $z_3=-7+4i$ do plano complexo. Assim sendo, determine todos os pontos do plano complexo cuja parte real é igual a 1 e que estão sobre a circunferência C.

14. Considerando os números Complexos w e v, tal que: $w=2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ $v=4\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i.\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$. Calcule:

    (a) $v\cdot w$ (b) $\frac{v}{w}$ (c) $v\cdot v\cdot v\cdot v$

15. (UFRJ) Um jantar secreto é marcado para a hora em que as extremidades dos ponteiros dos relógio forem representadas pelos números complexos z e w a seguir: $z=\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $w=z^2$ sendo α um número real fixo $0<\alpha<1$. Determine a hora do jantar.



16. Determine o complexo z tal que $z\cdot\bar{z}=13+6i+\bar{z}.z$

17. Um número complexo z tem módulo 5 e argumento $\frac{2\pi}{3}$. Determine o módulo e o argumento do complexo w tal que $z\cdot w=1$

18. Reúna-se com um colega para resolver para este exercício. Dado $z=7\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, descubram os valores de n, com $n\in\mathbb{N}$, para que:

    - z^n seja um número imaginário puro
    - z^n seja um número real

    Dica: Represente z no plano complexo.

19. Sejam os números complexos: $u=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$ e

    $v=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{8}\right)+i\text{sen}\left(\frac{11\pi}{8}\right)\right)$

    Obtenha a forma algébrica de:

    (a) $u\cdot v$ (b) $\frac{v}{u}$ (c) u^2

20. Escreva o complexo $z=\frac{(2\sqrt{3}-2i)^8}{(4+4i)^6}$ na forma trigonométrica.

21. Calcule:

    (a) $\sqrt[3]{-8}$
    (b) $\sqrt[4]{4i}$

22. (UNB) No plano complexo, considere a curva β descrita pelos pontos $z = (1 + \cos(\theta) \cdot (\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$, para $\theta \in [-\pi, \pi]$, em que $i = \sqrt{-1}$, e julgue os seguintes itens.
    (a) $|z| \leq 2$ para todo $z \in \beta$
    (b) Se z é um número real e $z \in \beta$, então $z = 0$.
    (c) Se $z \in \beta$, então o conjugado de z também pertence a β

23. Sabe-se que uma das raízes quartas de $-8 + 8i\sqrt{3}$ é $z_1 = 2(\cos(30°) + i\text{sen}(30°))$. Escreva todas as raízes quartas de $-8 + 8i\sqrt{3}$ na forma algébrica.

24. (FUVEST - modificado) No plano complexo, cada ponto representa um número complexo. Considere o hexágono regular, com centro na origem, tendo i, a unidade imaginária, como um de seus vértices.
    (a) Determine os vértices do hexágono.
    (b) Determine os coeficientes de um polinômio de grau

25. Desafio: Justifique a desigualdade triangular: $|a+b| \leq |a| + |b|$ utilizando números complexos.

Teorema Fundamental da Álgebra

No seu estudo sobre equações de segundo grau, você com certeza se deparou com uma fórmula para encontrar as raízes de polinômios do tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$, conhecida como *fórmula de Bhaskara*[7], que é

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \Delta = b^2 - 4ac$$

É comum fazer uma análise de Δ para ter informações sobre as raízes de x. Diz-se que

- Quando $\Delta > 0$, há duas raízes reais distintas.
- Quando $\Delta = 0$, há uma única raiz.
- Quando $\Delta < 0$, não há raízes reais.

[7] Bhaskara Akaria (1114-1185)

Porém, o Teorema Fundamental da Álgebra diz que

Um polinômio de grau n tem exatamente n raízes
(não necessariamente distintas).

Isso significa que

- Quando $\Delta > 0$, há duas raízes reais distintas.
- Quando $\Delta = 0$, há duas raízes iguais.
- Quando $\Delta < 0$, há duas raízes complexas.

Exemplo

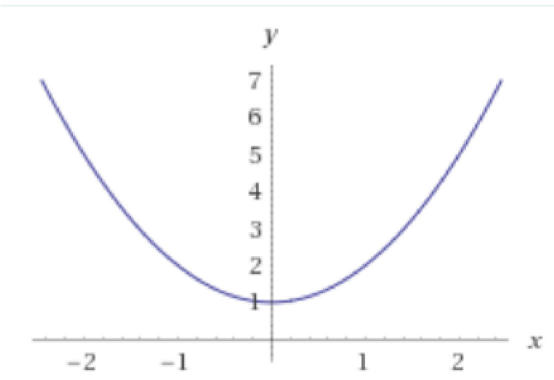
Encontre as raízes do polinômio $p(x) = x^2 + 1$.

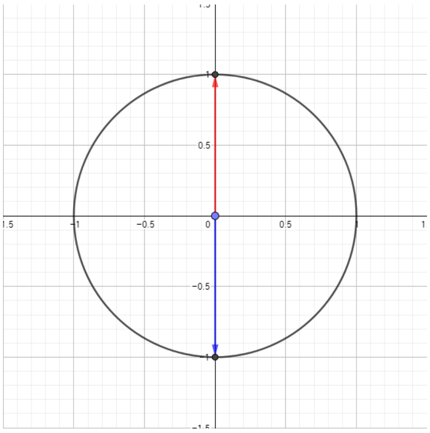
$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$\text{assim, } x_1 = i \text{ e } x_2 = -i.$$

Deste modo, mostramos as duas raízes do polinômio de grau dois.





Na imagem da esquerda, pode-se ver a parábola dada no plano cartesiano com x e y reais, onde vê-se que não tem raízes, e na imagem da direita vemos as duas raízes do polinômio no plano complexo.

Este mesmo teorema é escrito às vezes de outras formas, não equivalentes, como

Um polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos de uma variável
e de grau $n \geq 1$ tem alguma raiz complexa.

Para fazer a demonstração, teremos um olhar analítico e vamos usar a ideia que as funções polinomiais são contínuas ao longo do plano.

Considere uma função polinomial p: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por: $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, onde a_n, a_{n-1}, ... , a_1, a_0, são números complexos. Então p é uma função definida nos complexos, ou seja, cada ponto do plano complexo tem uma imagem que também é um número complexo. Vamos provar que existe um complexo z_0 tal que a sua imagem seja igual a zero, $p(z_0) = 0$. Em outras palavras, existe um ponto do plano complexo que, passando por p, tem sua imagem na origem.

Vamos considerar, de modo intuitivo, que as imagens, através de p, de círculos do plano complexo com centro na origem. Por que são círculos? Como p é uma função contínua, a imagem de uma curva contínua e fechada deve ser outra curva contínua e fechada. É importante salientar que a curva pode cruzar a si própria.

Consideremos um círculo $|z| = r$, e vamos ver a imagem desse círculo quando aplicado no polinômio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.

Exprimindo z na sua forma polar: $z = (\cos\theta + i\text{sen}\theta)$, temos:

$$p(z) = a_n (r(\cos\theta + i\text{sen}\theta))^n + a_{n-1}(r(\cos\theta + i\text{sen}\theta))^{n-1} + \\ \cdots + a_1(r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)) + a_0$$

Ou seja:

$$p(z) = a_n(r^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta))) + a_{n-1}(r^{n-1}(\cos(n-1)\theta + i\text{sen}(n-1)\theta)) + \\ \cdots + a_1(r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)) + a_0$$

Quando z percorre o círculo de raio r, seu argumento θ varia de 0 a 2π. Em consequência z^2 tem argumento 2θ vai variar de 0 a 4π, e assim por diante. Logo z^n tem argumento $n\theta$ e varia de 0 a $2n\pi$. Isso também significa que quando z percorre uma vez o círculo anterior, z^2 vai percorrer duas vezes, e assim por diante, onde concluímos que z^n vai percorrer n vezes o círculo dado.

Assim o polinômio $p(z)$ é a soma de n complexos, a_0, z, que percorre uma vez o círculo, z^2, que percorre duas vezes o círculo, até z^n, que percorre o círculo n vezes. A imagem do círculo é a soma de todos as parcelas, o que não é simples de calcular. Porém podemos descobrir o que acontece com a curva nos casos extremos, ou seja, quando r é muito pequeno, ou r é muito grande. Isso fica mais claro quando pomos r^n em evidência:

$$p(z) = r^n\left[a_n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)) + \frac{a_{n-1}}{r}(\cos(n-1)\theta + i\operatorname{sen}(n-1)\theta) + \ldots + \frac{a_1}{r^{n-1}}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) + \frac{a_0}{r^n}\right]$$

Para valores próximos de zero, as potências de r serão valores cada vez menores, ou seja, $r > r^2 > \ldots > r^{n-1} > r^n$, porém $\frac{1}{r} < \frac{1}{r^2} < \ldots < \frac{1}{r^{n-1}} < \frac{1}{r^n}$. Assim, a imagem do polinômio é um círculo centrado em a_0, com pouca perturbação dos outros termos.

Para valores grandes de r, a trajetória de $p(z)$ vai ser um círculo de centro na origem e raio r^n, ligeiramente perturbado pelas contribuições das outras parcelas.

Então temos que para valores bem pequenos de r a curva descrita por $p(z)$ é uma curva fechada em torno do complexo $a_0 + 0i$ e próxima desse complexo. Assim percebemos que a origem do plano é exterior a essa curva. Quando os valores de r são grandes, a curva descrita por $p(z)$ se comporta como um círculo de centro na origem. Para que o centro passe do exterior para o interior da curva significa que, para algum valor de r a curva passa pela origem e, assim, que $p(z) = 0$ possua, pelo menos, uma raiz complexa. Assim, toda equação polinomial tem uma raiz complexa.

É importante notar que esse teorema foi construído sobre o conjunto dos números complexos, e só é verdade nele.

Bibliografia

[1] https://www.mathsisfun.com/algebra/complex-number-multiply.html

[2] https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/TCC_Claudio_Salvado.pdf

[3] https://www.geogebra.org/classic

[4] http://www.profezequias.net/complexo.html

[5] http://livrozilla.com/doc/746861/hist%C3%B3ria-dos-n%C3%BAmeros-complexos---ime-usp

[6] https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot

[7] Luiz Roberto Dante, Matemática: contexto e aplicações, Editora Ática, 2011.

[8] Joaninha Souza, Jacqueline Garcia, #contatoMatemática, Editora FTD, 2016.

[9] Gelson Iezzi et al, Matemática: Ciência e Aplicações, Editora São Paulo, 2009.

[10] Fábio de Leonardo, Conexões com a Matemática, Editora Moderna, 2016.

[11] John M. Livermore, Constructing the square root of a complex number, National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

[12] http://www.puc-rio.br/pibic/relatorio_resumo2012/relatorios_pdf/ctc/MAT/MAT-Ana%20Luiza%20Maksoud%20Elias.pdf

[13] http://www.ime.unicamp.br/~tcunha/, Teaching, MA044.

[14] https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complexo

[15] http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico4.php

[16] http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico3.php

[17] https://www.aprovaconcursos.com.br

[18] https://www.infoescola.com