MS225 - Trabalho 4, 2S2016
Exponenciais e Logaritmos

Fernando Cezarino
Thiago Julião
Carina Lofredo
Euclides Stolf

Sumário

Como utilizar este livro

Este livro didático é dividido em capítulos independentes. Os capítulos tratam de tópicos de forma independente. Em cada capítulo é possível ver uma divisão, e um movimento da exposição em: 1) Problema motivador e introdução histórica; 2) Teoria; 3) Resolução do problema motivador; 4) Exercícios; 5) eExercícios de vestibular.

Julgamos esta sequência a mais conveniente porque ela traz consigo uma trajetória do conhecimento em dois conjuntos: Uma síntese que nos leva do problema concreto para o uma formulação abstrata; e uma análise que nos permite resolver os problemas em questão. Permite ao aluno ver como a teoria pode ajudar a pensar problemas que sem ela poderiam ser de difícil solução.

Quanto a disposição do layout, pensamos em como poder explorar os recursos visuais sem o excesso característico de muitos livros didáticos, limitando ao branco e preto, por questões tanto de uma possível facilidade econômica quanto estilística. Mas, também, não queríamos abusar de uma sobriedade, por isso desenvolvemos alguns artifícios para manter a organização e praticidade do uso do livro.

> Em cada capítulo, indicamos por uma sessão diferente conteúdos a ser relembrados, informações importantes e exemplos, através deste recurso visual, uma caixa.

Também demos um foco maior às definições e propriedades dos assuntos abordados. Acreditamos que a fácil localização destes anteparos teóricos facilita a consulta durante a execução dos exercícios e futuras consultas ao livro.

Quanto aos exercícios, julgamos correto conter uma sessão mista tanto de exercícios canônicos e de fixação, quanto de vestibulares, pois acreditamos que o aluno deve estar preparado não só para entender corretamente a teoria, mas, como consequência disso, ter autonomia para utilizar estes conhecimentos para seu futuro em provas que, queiramos ou não, decidirão a sua vida.

Capítulo 1

Exponenciais

1.1 Introdução

Nos dias atuais, a importância do conhecimento matemático voltado ao cotidiano é de suma importância para o compreendimento das relações por trás de diversas situações que enfrentamos no decorrer de nossa vida como consumidores. Uma das situações que será o motivo de estudo para este capítulo em questão é a compra de bens à prazo. Ter noção sobre o valor real a ser pago na quitação do produto nos auxilia a evitar situações em que podemos ser ludibriados em relação às taxas de juros aplicadas ou até mesmo para fins comparativos a fim de economizarmos na compra de um certo produto. Vamos analisar uma situação real que envolve a compra de um celular à prazo:

Como vemos no anúncio mostrado na Figura 1.1, muito comum nos sites comerciais, um smartphone é vendido. Seu preço à vista é de R$1200. Porém,

Figura 1.1: Problema motivador para exponenciais

podemos também comprá-lo à prazo, ou seja em 10 parcelas fixas que devem ser pagas no final de cada mês.

Porém, quando compramos à prazo, o valor que pagamos não é mais os R$1200 iniciais, já que há juros sobre este primeiro valor, ou seja um acréscimo sobre este valor inicial devido à flexibilização do tempo de pagamento.

Como podemos encontrar o valor final do produto à prazo e ao mesmo tempo sabermos o valor de cada parcela a ser paga por mês?

Para respondermos a nossa pergunta vamos recorrer à Matemática buscando uma solução no mundo das funções exponenciais. Na sequência definiremos o que é uma função exponencial e listaremos suas propriedades.

1.2 Introdução histórica

O leitor já pode estar imaginando que rastrear as recorrências do conceito de função exponencial na história da matemática tem correlação com rastrear recorrências de um tipo de fenômeno humano específico, o comércio. Sem dúvida a correlação entre estes dois assuntos, comércio e matemática, traz consigo reflexões acerca dos juros, e desta forma, não é um erro inferir que tais proximidades tragam também a ideia de função exponencial.

É possível datar evidências de tábulas babilônicas de aproximadamente 2100 a.C., pertencentes ao antigo povo Sumério, que descrevem relações entre números, tanto de multiplicação, de divisão e até exponenciação. Tais tábulas tinham usos comerciais e agrícolas, e ajudavam na contabilidade que tais atividades desenvolviam. Tábulas exponenciais eram utilizadas para solucionar problemas relacionados a juros, créditos e contratos em geral que lidavam com problemas relacionados.

Vejamos um exemplo para ilustrar o uso destas tábulas, observe a Tabela 1.1.

Qual relação há entre os números? Se observarmos as linhas, veremos que a de número 1 permanece invariável em cada coluna, a de número dois parece dobrar e a de número três parece triplicar. Desta forma, o número das colunas significa o número de vezes que o número representado na linha foi multiplicado por ele mesmo. Logo, em termos modernos, o resultado de 4^3 está representado na casa cuja linha é a quarta e a coluna a terceira, ou seja, $4^3 = 64$. Logo, temos uma tabela que representa a^n, para a e n de 1 a 5.

Se expressarmos em termos de função, podemos dizer que os resultados da linha três formam um conjunto cuja expressão é $f(x) = 3^x$, para $x \in \{1, \ldots, 5, 1/2, 1/3\}$. Desta forma, $f(4) = 3^4 = 81$.

Tabela 1.1: Exemplo de tábula exponencial

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32
3	3	9	27	81	243
4	4	16	64	256	1024
5	5	25	125	625	3125
1/2	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32
1/3	1/3	1/9	1/27	1/81	1/243

Também podemos observar as propriedades desta função definida como $f(x) = a^x$, onde a é a linha. Ela é crescente nas linhas em que $a > 1$ e decrescentes nas linhas em que $a < 1$.

Tais propriedades e funções são decorrentes de um tipo específico da função exponencial, que iremos estudar nas sessões seguintes de forma mais detalhada.

É certo que o povo Sumério não conhecia a ideia de função. Este conceito só veio a ser usado de forma generalizada muito tardiamente, no século XVIII. Porém, veremos que este conceito permite traduzir melhor os questionamentos que estão atrás de tabelas como esta.

1.3 Função Exponencial

Definição. Dado um número real a, tal que $a > 0$; $a \neq 1$, chamamos de *função exponencial de base* a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x em $\mathbb{R}$ ao número real a^x.

Em notação matemática:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = a^x \end{aligned}$$

Exemplos:

a) $f(x) = 2^x$

b) $g(x) = 10^{x+1}$

c) $h(x) = (\sqrt{2})^{x-2}$

d) $p(x) = (^1/_2)^{3x}$

Importante! Você deve estar se imaginando porque temos que aplicar a restrição de a ser um número positivo e diferente de 1. Vamos imaginar os casos onde a é um número negativo ($a < 0$) e um onde a é igual a 1.

(i) Se $a < 0$, por exemplo $a = -1 \Rightarrow f(x) = (-1)^x$:
Se tomarmos algum valor de x inteiro como por exemplo -2 ou 3 temos que x pode assumir valores pares ou ímpares e sabemos que potências de números negativos quando os expoentes são pares (ímpares) resultam em valores positivos (negativos), em outras palavras:

Se $x = -2$ (par) $\Rightarrow f(-2) = (-1)^{-2} = [(-1)^2]^{-1} = 2^{-1} = {}^1/_2 > 0$ (positivo)

Se $x = 3$ (ímpar) $\Rightarrow f(3) = (-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$ (negativo)

Mas como x é um número real temos que x pode assumir também valores fracionários como por exemplo $^1/_2$ ou $^2/_3$. Se x for um número fracionário onde o denominador é par temos que a imagem gerada pela função f em x não pertencerá ao conjunto dos reais, pois:

Se $x = {}^1/_2$ (denominador é par) $\Rightarrow f(^1/_2) = (-1)^{1/2} = \sqrt{(-1)^1} = \sqrt{-1}$

Temos uma raiz quadrada de um número negativo e sabemos das propriedades de radiciação que raízes onde o radicando é um número negativo e o índice é par não estão definidas no conjunto dos reais, ou seja, a imagem gerada por essa função quando x é $^1/_2$ não pertence ao conjunto dos números reais, o que contradiz nossa afirmação de que f é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, ou seja, que para cada valor de x real associamos a um valor $f(x) = a^x$ também real.

(ii) Por outro lado, se $a = 1$ temos que $f(x) = 1^x = 1$ para todo x em $\mathbb{R}$ e portanto teremos uma função constante que não possui características de uma função exponencial.

1.4 Propriedades

A seguir listaremos as propriedades das funções exponenciais e elucidaremos tais propriedades com um exemplo prático. Vale ressaltar que a utilização de exemplos deve ser vista apenas para fins práticos com o intuito de facilitar a compreensão das propriedades e não como meio de demonstração das mesmas, pois, em matemática não se demonstra a validade de um teorema ou propriedade a partir de exemplos.

Propriedade 1.1. Na função exponencial $f(x) = a^x$ temos que:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1$$

Isto é, o par ordenado $(0, 1)$ pertence a função para todo a e $\mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$. Isto significa que a representação gráfica de toda função exponencial no plano cartesiano intercepta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 1.

Exemplificando:
Tendo como base os exemplos de funções acima, vamos selecionar as funções $f(x) = 2^x$ e $p(x) = (1/2)^{3x}$.

Se tomarmos $x = 0$ em ambos os casos temos que:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1 \text{ e } p(0) = (1/2)^0 = 1$$

Logo, temos que o par ordenado $(0, 1)$ pertence as funções f e p.

Se analisarmos também a função $g(x) = 10^{x+1}$ e tomando $x = -1$ temos que:

$$x = -1 \Rightarrow g(-1) = 10^{(-1+1)} = 10^0 = 1$$

E portanto, o par ordenado $(0, 1)$ também pertence a função g.

Propriedade 1.2. A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$. Portanto, dados x_1 e x_2 números reais temos que:

i) quando $a > 1$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

ii) quando $0 < a < 1$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Exemplificando:

i) Seja $f(x) = 2^x$. Temos que $a = 2$, logo garantimos que a é positivo e diferente de 1. Temos que a função f é crescente. Sejam x_1, x_2 dois valores reais tais que $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.Então $x_1 < x_2$ e devemos ter $f(x_1) < f(x_2)$. Analisando:

$$f(x_1) = f(2) = 2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$f(x_2) = f(5) = 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 8 \cdot f(x_1)$$

E portanto, $f(x_1) < f(x_2)$.

ii) Seja $g(x) = ({}^1\!/\!{}_2)^{x+1}$. Temos $a = {}^1\!/\!{}_2$ que é número real entre 0 e 1. Temos que a função g é decrescente. Sejam x_1, x_2 dois valores reais tais que $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Então $x_1 < x_2$ e devemos ter $g(x_1) > g(x_2)$. Analisando:

$$g(x_1) = g(-1) = (1/2)^{-1+1} = (1/2)^0 = 1$$
$$g(x_2) = g(1) = (1/2)^{1+1} = (1/2)^2 = (1/2) \cdot (1/2) = 1/4 = g(x_1)/4$$

E portanto, $g(x_1) > g(x_2)$.

Relembrando: Uma função $f : A \longrightarrow B$ é dita *injetora* se para todo $x_1, x_2 \in A$ tem-se que $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, onde A e B são dois conjuntos quaisquer.

Propriedade 1.3. A função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 0; a \neq 1$ é injetora pois, dados x_1 e x_2 tais que $x_1 \neq x_2$ (por exemplo $x_1 < x_2$) temos que:

Se $a > 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ pela Propriedade 1.2, i) $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

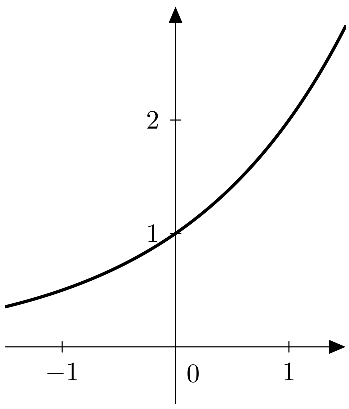
Se $0 < a < 1 \Rightarrow f(x1) > f(x2)$ pela Propriedade 1.2, ii) $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Exemplificando:
Se voltarmos à i) e ii) do exemplo anterior, veremos claramente que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ em ambos os casos.

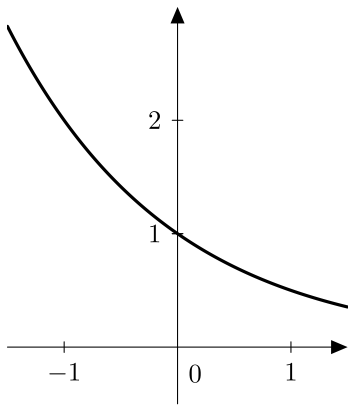
1.5 Conjunto Imagem

Dado $a \in \mathbb{R}_+ \setminus 0, 1$, temos que a imagem da função exponencial $f(x) = a^x$ definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é o conjunto:

$$Im(f) = \mathbb{R}_+ \setminus 0$$



(a) $a > 1$



(b) $0 < a < 1$

Figura 1.2: Função exponencial

1.6 Representação Gráfica

Com relação a representação gráfica da função $f(x) = a^x$ no plano cartesiano podemos dizer que:

i) A curva representativa está toda acima do eixo das abscissas, pois vimos que $y = f(x) = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii) Intercepta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada igual a 1.

iii) Se $a > 1$ temos uma função crescente e se $0 < a < 1$ temos uma função decrescente.

iv) Toma uma das formas representadas na Figura 1.2.

Importante! Como você pode observar na Figura 1.2 e na Seção 1.5, a função não chega a "cruzar" o eixo x. Em outras palavras, ela não assume um valor nulo (zero) em nenhum momento. Para esclarecer este fato vamos utilizar o caso onde $0 < a < 1$, fazendo $a = {}^1\!/_2$ e analisando sequencialmente os valores de f para $x = 0, \ldots, 5$:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = (1/2)^0 = 1$$
$$x = 1 \Rightarrow f(1) = (1/2)^1 = 1/2$$
$$x = 2 \Rightarrow f(2) = (1/2)^2 = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$
$$x = 3 \Rightarrow f(3) = (1/2)^3 = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$$
$$x = 4 \Rightarrow f(4) = (1/2)^4 = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/16$$
$$x = 5 \Rightarrow f(5) = (1/2)^5 = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/32$$

Podemos perceber que conforme x cresce os valores de f decrescem gerando uma sequência onde o próximo termo é exatamente a metade do anterior. Este processo pode ser tomado indefinidamente, fazendo com que o valor de f se torne arbitrariamente pequeno. Em outras palavras, a medida que x cresce os valores de f se tornam muito próximos de zero mas nunca iguais a zero.

1.7 Resolvendo o problema inicial

Vamos voltar ao problema abordado no início do capítulo e usar de todo o conhecimento que adquirimos até agora para modelar matematicamente o nosso problema, ou seja, vamos escrever uma função f que descreva o valor do nosso produto a cada mês tendo em mente a aplicação da taxa de juros da compra à prazo.

Como estamos trabalhando com taxas de juros compostas, que nada mais são do que taxas aplicadas sobre o montante anterior de modo sucessivo, podemos modelar o problema a partir de funções exponenciais. Vamos dispor os dados na Tabela 1.2 e analisar o valor do produto ao decorrer de um período de tempo t de 10 meses (número de parcelas da compra à prazo), onde $t = 0$ representa o mês da compra do produto.

Como podemos ver ao final de 10 meses teremos pago pelo celular um valor de R\$$1.325, 55$, ou seja, uma diferença de R\$$1.325, 55 -$ R\$$1.200, 00 =$ R\$$125, 55$ em juros por realizar uma compra à prazo. Tendo em vista o valor final do produto à prazo podemos calcular o valor de cada prestação a ser pago durante o período de 10 meses. Como temos 10 parcelas fixas (valores são constantes ao longo do período) então basta dividirmos R\$$1325, 55$ por 10, no que resulta em aproximadamente R\$$132, 55$ por mês.

Fica evidente que para uma quantidade bem pequena de meses resolver por tabulação de dados parece aceitável, mas e se analisarmos a compra de um automóvel ou até mesmo de um imóvel onde a quantidade de parcelas

Tabela 1.2: Dados relativos ao problema inicial

Mês (t)	Valor (R$)	Acréscimo de Juros (R$)	Valor Final (R$)
0	1200	-	1200
1	1200	12	1212
2	1212	12,12	1224,12
3	1224,12	12,24	1236,36
4	1236,36	12,36	1248,72
5	1248,72	12,49	1261,21
6	1261,21	12,61	1273,82
7	1273,82	12,74	1286,56
8	1286,56	12,87	1299,43
9	1299,43	12,99	1312,42
10	1312,42	13,12	1325,55

geralmente supera 2 anos (24 meses no caso do automóvel) ou 15 anos (360 meses no caso do imóvel como casa ou apartamento), como poderíamos facilitar o processo neste caso? Para isto vamos modelar o mesmo problema através de uma função matemática, que veremos ao final do processo construtivo como sendo uma função exponencial.

Primeiramente vamos entender o significado dos juros no contexto de uma compra à prazo. Dizer que em $t = 1$ o valor do final do produto é R$1212 é o mesmo que dizer que:

$$1212 = 1200 + \left(\frac{1}{100} \cdot 1200\right) = 1200 + \frac{1200}{100} = 1200 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

Importante! Note que $1/100$ é o equivalente fracionário da taxa de 1,00% de juros aplicada.

Para t = 2 seguiremos o mesmo raciocínio:

$$\begin{aligned}
1224,12 &= 1212 + \left(\frac{1}{100} \cdot 1212\right) \\
&= 1212 + \left[\frac{1}{100} \cdot (1200 + 12)\right] \\
&= 1212 + \left[\frac{1}{100} \cdot 1200 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)\right] \\
&= 1212 + 1200 \cdot \left[\frac{1}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)\right] \\
&= (1200 + 12) + 1200 \cdot \left[\frac{1}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)\right] \\
&= 1200 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{100}\right) + \frac{1}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)\right] \\
&= 1200 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right) \\
&= 1200 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^2
\end{aligned}$$

Como a taxa de juros é fixa, é de se esperar que em $t = 3$ tenhamos:

$$1236,36 = 1200 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^3$$

Se chamarmos de j a taxa de juros aplicada (sendo seu equivalente fracionário correspondente a $j/100$), $P(0)$ o valor do produto no início da compra ($t = 0$) e $P(t)$ o valor do produto em um instante t qualquer, temos que:

$$P(t) = P(0) \cdot \left(1 + \frac{j}{100}\right)^t \tag{1.1}$$

onde $P(t)$ é uma função exponencial com $a = (1+j/100)$ onde nosso expoente t é uma variável temporal cuja unidade de medida é a mesma da taxa de juros aplicada, ou seja, se a taxa de juros é mensal nossa variável de tempo necessita ser uma medida relacionada ao número de meses. Com isso podemos dizer que a função que modela nosso problema abordado no início do capítulo é dada por:

$$P(t) = 1200 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^t; \quad t \in \{0, 1, \ldots, 10\}$$

Para situações onde a quantidade de meses é significativamente maior basta modelarmos o problema a partir da função descrita em (1.1), e com o auxílio de uma calculadora podemos descobrir o valor final do produto sem maiores esforços.

Nos próximos tópicos iremos abordar os métodos de resolução de equações e inequações exponenciais.

1.8 Equações Exponenciais

Definição. Uma *equação exponencial* é uma equação em que a variável ou incógnita se encontra na posição do expoente de uma potência.

Exemplos:

a) $2^x = 64$

b) $4^x - 2^x = 2$

c) $(1/3)^{x+1} = 27$

Para a resolução destas equações existem dois métodos fundamentais, um deles será visto no próximo capítulo quando estudarmos o conceito de logaritmos.

1.8.1 Método da redução a uma base comum

Este método, como o próprio nome já sugere, será aplicado quando, ambos os membros da equação, após as transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências, forem redutíveis a potências de mesma base a $(a < 0;\ a \neq 1)$. A veracidade do método pode ser comprovada se utilizarmos o fato de que a função $f(x) = a^x$ é injetora, implicando que potências iguais e de mesma base têm expoentes iguais, isto é:

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c; \quad a < 0;\ a \neq 1$$

Exemplos:

a) $4^3 = 4^x \Leftrightarrow x = 3$

b) $4^x = 1024 = 4^5 \Leftrightarrow x = 5$

c) $2^x = 1,4 \Leftrightarrow x \approx 1/2$

1.9 Inequações Exponenciais

Definição. Uma *inequação exponencial* é uma inequação em que a variável ou incógnita se encontra na posição do expoente de uma potência.

Exemplos:

a) $2^x > 32$

b) $(\sqrt{5})^{x-2} > \sqrt[3]{25}$

c) $4^x - 2 \leq 2^{3x-1}$

1.9.1 Método da redução a uma base comum

O mesmo método aplicado à equações exponenciais também pode ser aplicado às inequações exponenciais lembrando sempre que a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente, se $a > 1$, ou decrescente se $0 < a < 1$. Se b e c são números reais, temos:

Para $a > 1$ tem-se $a^b > a^c \Leftrightarrow b > c$

Para $0 < a < 1$ tem-se $a^b > a^c \Leftrightarrow b < c$

Exemplos:

a) $10^x > 100 = 10^2 \Leftrightarrow x > 2$

b) $(1/2)^x < 1/10 < (1/2)^3 \Leftrightarrow x > 3$

c) $3^{x^2} < 3^9 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow x < 3$

1.10 Curiosidade: Lenda do xadrez

Há diversas histórias sobre o surgimento do jogo do xadrez. Uma delas conta de um antigo rei indiano que pediu para a um dos inventores de seu reino um jogo no qual poderia se divertir e que superasse o gamão (um outro jogo antigo) em diversão. Como prêmio o rei disse que daria qualquer coisa que esse inventor pedisse, desde que ele concordasse que o pedido fosse viável.

Um sábio então entregou ao rei o tabuleiro de xadrez com suas peças e regras. O rei considerou o jogo muito interessante, mais divertido que o gamão. Então perguntou qual seria o pedido que o sábio gostaria de ser realizado. O sábio colocou um grão de trigo na primeira casa, duas na segunda e diz que gostaria que para cada uma das 64 casas do tabuleiro de xadrez gostaria de ter o dobro da quantidade de trigo da casa anterior.

O rei considerou o pedido sensato e pediu para que seus contadores realizassem o pedido do sábio. Porém, ficou surpreso ao ver que todo seu estoque de trigo tinha sumido. E além disso, viu que em suas contas havia uma dívida impagável.

Ora, para nós, não é de todo estranho que isto tenha acontecido. Sabemos que a função que modela o crescimento dos grãos de trigo ao longo das casas de xadrez é a função exponencial, que como sabemos, cresce muito rápido. Para termos uma noção disso, podemos fazer um rápido cálculo:

$$\begin{array}{rcl}
1^{\text{a}} \text{ casa} & — & 2^0 = 1 \text{ grão} \\
2^{\text{a}} \text{ casa} & — & 2^1 = 2 \text{ grãos} \\
3^{\text{a}} \text{ casa} & — & 2^2 = 4 \text{ grãos} \\
\vdots & & \\
21^{\text{a}} \text{ casa} & — & 2^{20} = 1048576 \text{ grãos} \\
\vdots & & \\
64^{\text{a}} \text{ casa} & — & 2^{63} = 9223372036854775808 \text{ grãos}
\end{array}$$

Logo, teremos que somar todos estes grãos. Temos:

$$\sum_{n=0}^{63} 2^n = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615 \text{ grãos}$$

Para termos uma ideia de quanto isso significa, podemos balizar esta contagem sabendo que 15 milhões de grãos equivalem a um metro cúbico de grãos (o equivalente a uma caixa d'água de 1000 litros). Logo:

$$\frac{18446744073709551615}{15000000} \approx 10^{12} = 1 \text{ trilhão de metros cúbicos}$$

Se sabemos que a Represa Guarapiranga, que abastece a cidade de São Paulo, possui um volume de água de aproximadamente 200000000m^3, então:

$$\frac{1000000000000}{200000000} = 500$$

Podemos encher a represa 500 vezes de grãos de trigo com o volume obtido pelo sábio. Logo uma quantia muito grande.

Exercícios

1. Seja a função $f(x) = 4^x$. Construa o gráfico de $f(x)$ e encontre os valores de $f(1/2)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$. O que ocorre com os valores de $y = f(x)$ quando x aumenta?

2. Esboce o gráfico das seguintes funções:

   a) $f(x) = 2^{x+1}$
   b) $f(x) = (1/3)^x$
   c) $f(x) = 2^x + 1$
   d) $f(x) = 5^{-x}$
   e) $f(x) = 1,01^x$

3. Os gráficos das funções $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 5^x$, $f_3(x) = 7^x$, $f_4(x) = 1$ e $f_5(x) = 0$ estão traçados na Figura 1.3. Quais funções representadas no gráfico não são funções exponenciais? Por quê?

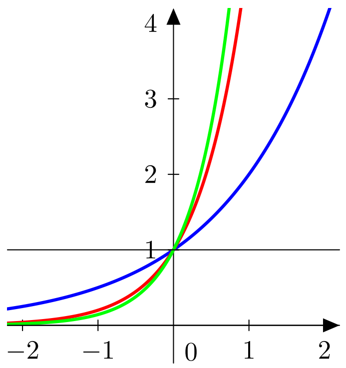


Figura 1.3: $f_1(x), \ldots, f_5(x)$

4. Construa, num mesmo plano cartesiano, as funções $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^x + 2$ e $h(x) = 2^{-x}$. Descreva o que acontece com $g(x)$ e $h(x)$ em relação a $f(x)$.

5. Identifique como crescente ou decrescente as seguintes funções exponenciais:

   a) $f(x) = 5^x$
   b) $f(x) = (1/6)^x$
   c) $f(x) = 2^{-x}$
   d) $f(x) = (\sqrt{2})^x$
   e) $f(x) = (2/5)^{-x}$
   f) $f(x) = \pi^x$
   g) $f(x) = 3^{x/2}$

6. Determine o conjunto solução das equações exponenciais:

   a) $2^{x-3} + 2^{x-1} + 2^x = 52$
   b) $3^{2x} + 3^{x+1} = 18$
   c) $7^{x-1} + 7^{x+1} = 50$
   d) $5^{x-1} + 5^{x-3} = 26$
   e) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$
   f) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$
   g) $25^x - 30 \cdot 5^x = -125$

7. Resolva os sistemas de equações:

   a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ 3^{x-y} = 1 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} 2^{2x+y} = 4 \\ 2^{x-y} = 2^{-1/2} \end{cases}$

8. Se r_2 e r_3 representam, respectivamente, as raízes quadradas de 2 e 3, resolva a equação exponencial $4 \cdot r_3^{x+1} = 9 \cdot r_2^{x+1}$.

9. Encontre o conjunto solução das inequações exponenciais:

a) $2^{2x-1} > 2^{x+1}$

b) $0,1^{5x-1} \leq 0,1^{2x+8}$

c) $2^{2x} - 32^{x+1} \leq -8$

d) $2^{2x+2} - 2^{x+3} > 2^x - 2$

10. Determine o domínio da função $y = \sqrt{2^{-x+2} - 2^x}$.

VESTIBULARES

11. (FUVEST) Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se a e b são tais que $f(a) = 4 \cdot f(b)$, pode-se afirmar que:

(a) $a + b = 2$

(b) $a + b = 1$

(c) $a - b = 3$

(d) $a - b = 2$

(e) $a - b = 1$

12. (FGV) Os gráficos das funções exponenciais g e h são simétricos em relação à reta $y = 0$, como mostrado na Figura 1.4. Sendo $g(x) = a + b \cdot c^x$ e $h(x) = d + e \cdot f^x$, a soma $a + b + c + d + e + f$ é igual a:

(a) 0

(b) 7/3

(c) 10/3

(d) 8

(e) 9

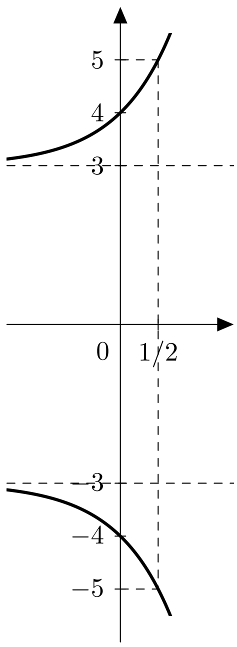


Figura 1.4: $g(x)$ e $h(x)$

13. (MACKENZIE) O domínio da função real definida por $f(x) = 3x/\sqrt{1 - |3^x - 2|}$ é:

(a) $]0, 1[$

(b) $]1, 2[$

(c) $]2, 3[$

(d) $]3, 4[$

(e) $]4, 5[$

14. (UFSJ) A interseção dos gráficos das funções $h(x) = 2^x + 1$ e $s(x) = 2^{x+1}$ é o ponto que tem a soma de suas coordenadas igual a:

(a) 2 e pertence à reta $v = x + 2$

(b) 1 e pertence à reta $v = x + 1$

(c) 2 e pertence à reta $v = x - 2$
(d) 1 e pertence à reta $v = x - 1$

15. (ITA) Considere a função $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3^{x-2}} \cdot (9^{2x+1})^{1/2x} - (3^{2x+5})^{1/x} + 1$. A soma de todos os valores de x para os quais a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tem raiz dupla é:

    (a) 0
    (b) 1
    (c) 2
    (d) 4
    (e) 6

16. (UEL) Se o número real K satisfaz à equação $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$, então K^2 é igual a:

    (a) 0 ou $1/2$
    (b) 0 ou 1
    (c) $1/2$ ou 1
    (d) 1 ou 2
    (e) 1 ou 3

17. (UFPB) Sendo a e b raízes distintas da equação $2 \cdot 4^x + 4 = 9 \cdot 2^x$, calcular o valor de $a^6 + b^6$.

18. (MACKENZIE) A soma das raízes da equação $2^{2x+1} – 2^{x+4} = 2^{x+2} – 32$ é:

    (a) 2
    (b) 3
    (c) 4
    (d) 6
    (e) 7

19. (VUNESP) É dada a inequação:

$$\left(3^{x/2}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{3}{9}\right)^{x-3}$$

O conjunto verdade V, considerado o conjunto universo como sendo o dos reais, é dado por:

    (a) $V = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq -3 \text{ ou } x \geq 2\}$
    (b) $V = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq -3 \text{ e } x \geq 2\}$
    (c) $V = \{x \in \mathbb{R};\ -3 \leq x \leq 2\}$
    (d) $V = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq -3\}$
    (e) $V = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 2\}$

20. (UFRGS) A solução da inequação $0,5^{1-x} > 1$ é o conjunto:

    (a) $\{x \in \mathbb{R};\ x > 1\}$
    (b) $\{x \in \mathbb{R};\ x < 1\}$
    (c) $\{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$
    (d) $\{x \in \mathbb{R};\ x < 0\}$
    (e) $\mathbb{R}$

Capítulo 2

Logaritmos

2.1 Introdução

Vimos no capítulo anterior como modelar um problema envolvendo uma compra à prazo com aplicação de juros compostos através de uma função exponencial. Repare que tínhamos à nossa disposição o valor inicial do produto na compra, o número de parcelas, o valor da taxa de juros aplicada e queríamos saber o valor final do produto após um período de 10 meses. Agora imagine que você tenha seguinte situação envolvendo a compra de um automóvel:

No anúncio da Figura 2.1 podemos ver claramente a alegação de que a taxa de juros sobre o produto é nula (canto superior direito da figura). Vamos mostrar rapidamente que a afirmação é falsa e de caráter enganatório. Analisando os dados disponíveis temos o valor do carro à vista, o valor da entrada, a quantidade de prestações e o valor de cada parcela ao mês. Note que se a taxa de juros é nula então comprar à vista ou à prazo não implicaria numa diferença do valor final a ser pago, logo suponhamos que:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{Valor à vista} = \textbf{Valor total à prazo}\\
\Rightarrow\ &\text{Valor à vista} = \text{Valor da entrada} + \text{Valor total das parcelas}\\
\Rightarrow\ &\text{R\$}37990 = \text{R\$}32291 + 24 \cdot \text{R\$}249\\
\Rightarrow\ &\text{R\$}37990 = \text{R\$}32291 + \text{R\$}5976\\
\Rightarrow\ &\text{R\$}37990 = \text{R\$}38.267(!)
\end{aligned}
$$

Observe que os valores são diferentes, portanto a taxa de juros não é nula. Sabendo disto, como descobrir o seu verdadeiro valor?

Para responder a esta pergunta precisamos do conceito de logaritmos.

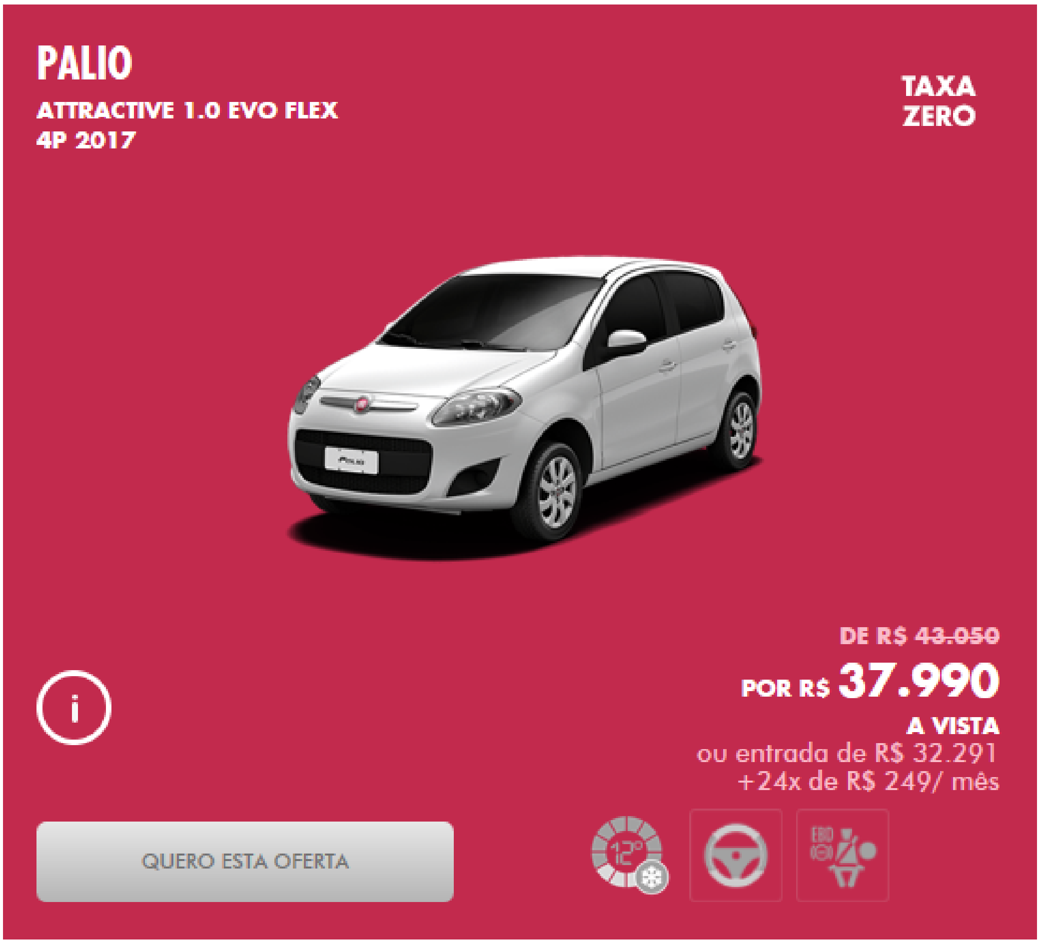


Figura 2.1: Problema motivador para logaritmos

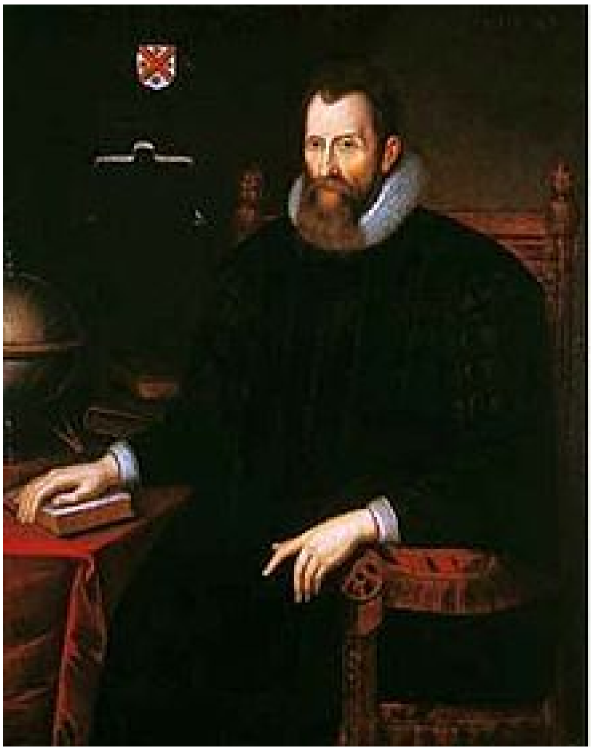


Figura 2.2: John Napier

2.2 Introdução histórica

A história dos logaritmos é a história de uma duplicidade. Pois o nome logaritmo se deve ao matemático e religioso John Napier (1550-1617) para fins quase exclusivos de facilitar o cálculo de multiplicações e divisões difíceis. Porém, o seu uso como processo inverso da exponenciação tem um percurso histórico semelhante ao da própria exponenciação: Sabe-se que este uso acompanhou o comércio do mundo desde a Babilônia.

Logaritmo quer dizer "número da razão". Uma nomenclatura que quase não ocorreu, pois Napier havia batizado estes números, que ele descobrira, primeiramente como "números artificiais". A sua ideia de facilitar os cálculos difíceis foi rapidamente aclamada. Porém, ele acreditava não entrar na história por isso, mas sim por ter descoberto a "verdade" de que o papa católico era o demônio (disto pode-se deduzir seu protestantismo).

Henry Briggs (1561-1631), um matemático contemporâneo a Napier, ao saber da existência dos logaritmos logo foi prestar seu respeito a Napier e pôde entrar em um acordo com Napier sobre alguns aspectos de como fundar a tábua de logaritmos, uma tábua que ajudaria na computação de multiplicações e divisões no sistema decimal.

Porém, a conexão íntima com vários conceitos de crescimento e, portanto, do crescimento natural e de certos eventos demasiadamente humanos como o juros, entrou na história de modo lento e somente após a análise de Leonhard Euler (1707-1783), quando o logaritmo se pode entender plenamente como processo inverso da exponenciação.

Porém, sob outro nome, a operação inversa da exponenciação já era amplamente utilizada pelos comerciantes. Em uma tábula de cerca de 1700 a.C., que atualmente está no Louvre, há o seguinte problema: Por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20% para que ela dobre?

Utilizando nosso conhecimento sobre a exponenciação podemos dar alguns chutes a esta pergunta. Sabemos que um quantia C a 20% de juros anuais irá dobrar de montante quando esta igualdade for verdadeira:

$$C \cdot (1 + 20/100)^x = 2 \cdot C$$
$$\Rightarrow 1,2^x = 2$$

Desta maneira se chutarmos valores para $x = 1$, teremos $1,2^x = 1,2$; para $x = 2$, teremos $1,2^x = 1,44$; para $x = 3$, teremos $1,2^x = 1,728$; para $x = 4$, teremos $1,2^x = 2,0736$. Ora, logo sabemos que entre 3 e 4 anos o montante irá dobrar de tamanho. Podemos fazer chutes melhores, e veremos para $x = 3,5$, teremos $1,2^x \approx 1,9$. Mas ficaremos insatisfeitos se disso dependermos muito.

É realmente surpreendente que o povo da Babilônia, sem contar de métodos modernos como o logaritmo, conseguiu esta aproximação para o problema: 3,81 anos.

2.3 Conceito de Logaritmos

Lembremos que no estudo de equações e inequações exponenciais, feito anteriormente, só tratamos dos casos em que poderíamos reduzir as potências à mesma base.

Se queremos resolver a equação $2^x = 3$, sabemos que x assume um valor entre 1 e 2, pois $2^1 < 2^x = 3 < 2^2$. Mas com os conhecimentos adquiridos até agora não sabemos qual é esse valor e nem o processo para determiná-lo.

A fim de que possamos resolver este e outros problemas, vamos iniciar agora o estudo de logaritmos.

Definição. Sejam a e b números reais positivos, com $a \neq 1$. Chama-se *logaritmo de b na base a* o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b.

Em notação matemática: Se $a, b \in \mathbb{R};\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$, então:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Em $log_a b = x$, dizemos que a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e x é o logaritmo.

Exemplos:

a) $\log_2 8 = 3 \quad (2^3 = 8)$

b) $\log_3 {}^1\!/_9 = -2 \quad (3^{-2} = {}^1\!/_3 \cdot {}^1\!/_3 = {}^1\!/_9)$

c) $\log_5 5 = 1 \quad (5^1 = 5)$

d) $\log_4 8 = {}^3\!/_2 \quad (4^{3/2} = (2^2)^{3/2} = 2^3 = 8)$

Com as restrições impostas ($a, b \in \mathbb{R};\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$), dados a e b existe um único $x = \log_a b$.

A operação pela qual se determina o logaritmo de b ($b \in \mathbb{R},\ b > 0$) numa dada base a ($a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$), chamamos logaritmação e o resultado dessa operação de logaritmo.

2.4 Propriedades

Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$.

Propriedade 2.1. O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a zero

$$\log_a 1 = 0$$

Exemplos:

a) $\log_2 1 = 0 \quad (2^0 = 1)$

b) $\log_3 1 = 0 \quad (3^0 = 1)$

c) $\log_{45} 1 = 0 \quad (45^0 = 1)$

Propriedade 2.2. O logaritmo da base em qualquer base é igual a um

$$\log_a a = 1$$

Exemplos:

a) $\log_2 2 = 1 \quad (2^1 = 2)$

b) $\log_3 3 = 1 \quad (3^1 = 3)$

c) $\log_{45} 45 = 1 \quad (45^1 = 45)$

Propriedade 2.3. A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b

$$a^{\log_a b} = b$$

Exemplos:

a) $2^{\log_2 8} = 2^3 = 8 \quad (\log_2 8 = 3)$

b) $4^{\log_4 16} = 4^2 = 16 \quad (\log_4 16 = 2)$

Propriedade 2.4. Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Propriedade 2.5. Em qualquer base a $(a > 0,\ a \neq 1)$, o logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual a soma dos logaritmos dos fatores

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c; \quad b > 0,\ c > 0$$

Demonstração. Se fizermos $x = \log_a b$, $y = \log_a c$ e $z = \log_a(b \cdot c)$, então pela definição de logaritmo temos que:

$$\begin{aligned}
\log_a b = x &\Rightarrow a^x = b \\
\log_a c = y &\Rightarrow a^y = c \\
\log_a(b \cdot c) = z &\Rightarrow a^z = b \cdot c \\
\therefore a^z = a^x \cdot a^y = a^{x+y} &\Rightarrow z = x + y \\
&\Rightarrow \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c
\end{aligned}$$

□

Exemplos:

a) $\log_2 32 = \log_2(16 \cdot 2) = \log_2 16 + \log_2 2$

b) $\log_5(3 \cdot 4) = \log_5 3 + \log_5 4$

c) $\log_4(2 \cdot 3 \cdot 5) = \log_4 2 + \log_4 3 + \log_4 5$

Propriedade 2.6. Em qualquer base a $(a > 0,\ a \neq 1)$, o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual a diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor

$$\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c; \quad b > 0,\ c > 0$$

Demonstração. Se fizermos $x = \log_a b$, $y = \log_a c$ e $z = \log_a(b/c)$, então pela definição de logaritmo temos que:

$$\begin{aligned} \log_a b = x &\Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y &\Rightarrow a^y = c \\ \log_a(b/c) = z &\Rightarrow a^z = b/c \\ \therefore a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} &\Rightarrow z = x - y \\ &\Rightarrow \log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c \end{aligned}$$

□

Exemplos:

a) $\log_{10}(2/3) = \log_{10} 2 - \log_{10} 3$

b) $\log_3(2 \cdot 3/5) = \log_3(2 \cdot 3) - \log_3 5 = log_3 2 + \log_3 3 - \log_3 5$

c) $\log_2[(x+1)/(x-1)] = \log_2(x+1) - \log_2(x-1),\ x > 1$

Propriedade 2.7. Em qualquer base a $(a > 0,\ a \neq 1)$, o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência

$$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b; \quad b > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Demonstração. Se fizermos $x = \log_a b$ e $y = \log_a cb^\alpha$, então pela definição de logaritmo temos que:

$$\begin{aligned} \log_a b = x &\Rightarrow a^x = b \\ \log_a b^\alpha = y &\Rightarrow a^y = b^\alpha \\ \therefore a^y = (a^x)^\alpha &\Rightarrow a^y = a^{x\cdot\alpha} \\ \therefore y = \alpha x &\Rightarrow \log_a(b^\alpha) = \alpha \cdot \log_a b \end{aligned}$$

□

Exemplos:

a) $\log_3 2^5 = 5 \cdot \log_3 2$

b) $\log_5 2^{1/3} = 1/3 \cdot \log_5 2$

c) $\log_{10}(x-1)^4 = 4 \cdot \log_{10}(x-1);\; x > 1$

d) Resolução do problema da Seção 2.2 pelo método do logaritmo. Temos a seguinte equação:

$$1.2^x = 2$$

Aplicando logaritmo de base 10 dos dois lados:

$$\begin{aligned} \log_{10} 1,2^x &= log_{10} 2 \\ x \cdot \log_{10} 1,2 &= \log_{10} 2 \\ x &= \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1,2} \end{aligned}$$

Podemos fazer esta última conta na calculadora, o que nos dará $x \approx 3,80$ Logo, em aproximadamente 3,8 anos o montante dobrará, um resultado muito parecido com o obtido na sessão de introdução histórica.

Importante! Notemos a impossibilidade de obter o logaritmo de uma soma ou de uma diferença, por meio de regras análogas às discutidas anteriormente. Assim para encontrarmos

$$\log_a(b+c) \text{ e } \log_a(b-c)$$

devemos, calcular inicialmente $(b+c)$ e $(b-c)$.

2.5 Sistemas de logaritmos

Chamamos de sistemas de logaritmos de base a o conjunto de todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base a $(a > 0,\ a \neq 1)$. Por exemplo, o conjunto formado por todos os logaritmos de base 2 dos números reais e positivos é o sistema de logaritmos na base 2.

Entre a infinidade de valores que pode assumir a base e, portanto, entre a infinidade de sistemas de logaritmos, existem dois sistemas de logaritmos particularmente importantes, que são:

a) **Sistema de logaritmos decimais** é o sistema de base 10 também chamado sistema de logaritmos vulgares ou de Briggs (Henry Briggs, matemático inglês, quem primeiro destacou a vantagem dos logaritmos de base 10, tendo publicado a primeira tábua (tabela) dos logaritmos de 1 a 1000 em 1617). Indicamos o logaritmo decimal por simplesmente $\log(x)$.

b) **Sistema de logaritmos neperianos** é o sistema de base e ($e = 2,71828\ldots$ número irracional), também chamado de sistema de logaritmos naturais. O nome neperiano vem de John Neper, matemático escocês, autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos. O nome natural se deve ao fato de que no estudo dos fenômenos naturais geralmente aparece uma lei exponencial de base e. Indicamos o logaritmo neperiano pela notação $\ln(x)$.

2.6 Mudança de base

Há certas ocasiões em que logaritmos em bases diferentes necessitam serem transformados para uma única base conveniente. Para isto, vamos ver o processo que permite transformar o logaritmo de um número positivo em uma certa base para outro em uma base conveniente.

Propriedade 2.8. Se a, b e c são números reais positivos tais que $a \neq 1$ e $c \neq 1$, então tem-se que:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração. Se fizermos $x = \log_a b$, $y = \log_c b$ e $z = \log_c a$, então pela definição de logaritmos temos que:

$$\begin{aligned} \log_a b = x &\Rightarrow a^x = b \\ \log_c b = y &\Rightarrow c^y = b \\ \log_c a = z &\Rightarrow c^z = a \\ \therefore (c^z)^x = a^x = b = c^y &\Rightarrow z \cdot x = y \\ &\Rightarrow x = {}^y\!/_z \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{aligned}$$

□

Exemplos:

a) $\log_3 5$ transformado para a base 2: $\log_3 5 = \log_2 5 / \log_2 3$

b) $\log_2 7$ transformado para a base 10: $\log_2 7 = \log 7 / \log 2$

c) $\log_{100} 3$ transformado para a base 10: $\log_{100} 3 = \log 3 / \log 100 = (\log 3)/2$

2.7 Resolvendo o problema inicial

Agora que conhecemos um pouco mais sobre o logaritmos podemos voltar ao nosso problema no início do capítulo e encontrarmos a verdadeira taxa de juros no financiamento do automóvel. Assim como podemos somar dois números quaisquer em ambos os lados de uma igualdade, pode-se fazer o mesmo aplicando logaritmos. Iremos primeiramente encontrar a função exponencial que modela o problema como fizemos no capítulo anterior e posteriormente aplicar o logaritmo em ambos os lados da igualdade a fim de encontrarmos a taxa de juros.

Vimos que o valor final do produto com entrada somado com o valor total das parcelas resulta em R\$38267 que é maior que o valor à vista de R\$37990. Logo podemos pensar neste problema como uma aplicação de um valor inicial de R\$37990 que no final de um período de 24 meses (quantidade de parcelas) nos renderia um montante de R\$38267. Modelando o problema através de uma função exponencial tem-se que:

$$M = C \cdot \left(1 + \frac{j}{100}\right)^t$$

onde M é o montante (valor final da aplicação), C é o capital inicial (valor inicial), j é a taxa de juros mensal e t é o números de meses ou parcelas mensais.

Substituindo os valores temos que:

$$38267 = 37990 \cdot \left(1 + \frac{j}{100}\right)^{24}$$

Aqui antes de aplicarmos o logaritmo em ambos os lados podemos fazer uma análise prévia de qual base nos seria mais conveniente. Como de primeira vista fica difícil de fazermos tal análise iremos optar por utilizar a base 10. Portanto, se aplicarmos o logaritmo de base 10 em ambos os lados e utilizando de suas propriedades tem-se que:

$$\begin{aligned}
\log 38267 =& \ \log 37990 \cdot \left(1 + \frac{j}{100}\right)^{24} \\
\Rightarrow \log 38267 =& \ \log 37990 + \log\left(1 + \frac{j}{100}\right)^{24} \\
\Rightarrow \log 38267 =& \ \log 37990 + 24 \cdot \log\left(1 + \frac{j}{100}\right)
\end{aligned}$$

Utilizando uma calculadora para se efetuar os cálculos dos logaritmos vem que:

$$\begin{aligned}
4,5828 =& \ 4,5796 + 24. \log\left(1 + \frac{j}{100}\right) \\
\Rightarrow 4,5828 - 4,5796 =& \ 24 \cdot \log\left(1 + \frac{j}{100}\right) \\
\Rightarrow 0,0032 =& \ 24 \cdot \log\left(1 + \frac{j}{100}\right) \\
\Rightarrow \frac{0,0032}{24} =& \ \log\left(1 + \frac{j}{100}\right) \\
\Rightarrow 1,33 \cdot 10^{-4} =& \ \log\left(1 + \frac{j}{100}\right)
\end{aligned}$$

Aplicando a definição de logaritmo:

$$\begin{aligned}
10^{1,33\cdot 10^{-4}} &= 1 + \frac{j}{100} \\
\Rightarrow 1,000307 &= 1 + \frac{j}{100} \\
\Rightarrow 1,000307 - 1 &= \frac{j}{100} \\
\Rightarrow 0,000307 &= \frac{j}{100} \\
\Rightarrow j &= 0,000307 \cdot 100 \\
\Rightarrow j &= 0,0307 \\
&\approx 0,031\% \text{ a.m.}
\end{aligned}$$

Note que a taxa é realmente pequena mas diferente de zero.

Pode-se concluir que ter conhecimentos matemáticos sobre as funções exponenciais e os logaritmos nos auxiliam e muito nas questões voltadas ao mercado financeiro. Ter conhecimento sobre o valor real a ser pago pelo produto e consequentemente sobre as devidas taxas aplicadas sobre ele minimizam consideravelmente o risco de sermos ludibriados por propagandas enganosas e nos direcionam a uma prática de consumo mais inteligente e menos impulsiva.

Exercícios

1. Calcule o valor dos seguintes logaritmos:

   a) $\log_{16} 64$

   b) $\log_{625} \sqrt{5}$

   c) $\log 50,000064$

   d) $\log_{49} \sqrt[3]{7}$

   e) $\log_{\sqrt[5]{2}} 128$

   f) $\log_9 (3\sqrt{3})$

   g) $\log_2 (\sqrt[8]{64})$

   h) $\log_2 0,25$

2. Usando apenas que $\log_2 = 0,30$, $\log_3 = 0,47$ e $\log_5 = 0,69$, calcule:

   a) $\log 4$

   b) $\log(2/5)$

   c) $\log 12$

   d) $\log 25$

   e) $\log \sqrt{2}$

   f) $\log 0,5$

   g) $\log(3/2)$

   h) $\log 20$

i) $\log_2 3$

j) $\log 20 + \log 40 + \log 1600$

3. Calcule o valor da incógnita N em cada exercício, aplicando a equivalência fundamental:

   a) $\log_5 N = 3$

   b) $\log_2 N = 8$

   c) $\log_2 N = -9$

   d) $\log_{\sqrt{3}} N = 2$

4. Calcule o valor da incógnita a em cada exercício, aplicando a equivalência fundamental:

   a) $\log_a 81 = 4$

   b) $\log_a 1024 = 20$

   c) $\log_a 10 = 2$

   d) $\log_{9a} \sqrt{27} = 1/2$

5. Resolva as equações:

   a) $\log_3[(x+3)/(x-1)] = 1$

   b) $\log_3 x = 4$

   c) $\log_{1/3}(x-1) = -2$

   d) $\log_x(1/9) = 2$

   e) $\log_x 16 = -2$

6. Calcule as seguintes expressões logaritmicas, escrevendo como um só logaritmo de base 10:

   a) $2 \cdot \log 3 + \log 5$

   b) $7 \cdot (\log x + \log y - \log z)$

   c) $3 \cdot (1 - \log a)$

   d) $2 + (1/2) \cdot \log 5$

7. Determine o conjunto solução da equação $\log_{12}(x^2 - x) = 1$.

8. Encontre o conjunto verdade da equação $\log 2^{3x-6} = \log 5^{1-x}$.

9. Sabendo-se que $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,477$, calcule o valor de $\log_9 512$.

10. Determine o valor de $\log_{50} 100$, sabendo que $\log 5 = a$.

VESTIBULARES

11. (UFRN) O Valor da expressão $\log_2 64 - \log_3 27$ é:

    (a) 3

    (b) 13

    (c) 17

    (d) 31

    (e) 37

12. (CESGRANRIO) Sendo a e b as raízes da equação $x^2 + 100x - 10 = 0$, calcule o valor de $\log(1/a + 1/b)$.

13. (VUNESP) Sejam x e y números reais, com $x > y$. Se $\log_3(x–y) = m$ e $(x+y) = 9$, determine:

    a) O valor de $\log_3(x+y)$;

    b) $\log_3(x^2 - y^2)$, em função de m.

14. (IME) Considerando $\log_2 = a$ e $\log 3 = b$, encontre em função de a e b, o logaritmo do número $\sqrt[5]{11,25}$.

15. (FUVEST) Sabendo-se que $5^n = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:

(a) $^2/_n$

(b) $2n$

(c) $2 + n^2$

(d) $2 + 2n$

(e) $(2 + 2n)/n$

16. (UCS) O valor de

$$(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}}$$

é:

(a) $\sqrt{3}$

(b) $\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{6}$

(d) 2

(e) 2^3

17. (FUVEST) Determine a solução (x, y), $y > 1$, para o sistema de equações:

$$\begin{cases} \log_y(9x - 35) = 6 \\ \log_{3y}(27x - 81) = 3 \end{cases}$$

18. (UNICAMP) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \log_2 x + log_4 y = 4 \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$$

19. (VUNESP) Se $\log_3 a = x$, então $\log_9 a^2$ é igual a:

(a) $2x^2$

(b) x^2

(c) $x + 2$

(d) $2x$

(e) x

20. (FUVEST) Se $x = \log_4 7$ e $y = \log_{16} 49$, então $x - y$ é igual a:

(a) $\log_4 7$

(b) $\log 7$

(c) 1

(d) 2

(e) 0