David Ricardo
Raquel Mendonça
Bruno Tafarello
Thales Montagnana

1ª edição

Matemática 2

Discreta

Editora *DRBT*

Sumário

Conhecendo seu livro...

Exemplos em forma de exercício

Imagine-se indo almoçar em uma praça de alimentação. Você tem interesse em comer um lanche e há duas lanchonetes abertas. A lanchonete Vegetáia oferece 8 tipos de sanduíches naturais diferentes, já a lanchonete Rei do Hambúrguer oferece 6 tipos de hambúrguer distintos. Quantos opções de lanches você tem para o almoço?
Como as lanchonetes oferecem lanches distintos, para encontrarmos o total de possibilidades de almoço precisamos apenas **somar** as possibilidades de cada lanchonete. Sendo assim, o número total de possibilidade é 8+6=14.

Ao final de cada seção existem exercícios para praticar

Lembrete

Ao final de cada seção

Exercícios de Vestibular

CAPÍTULO 1

Análise Combinatória

A análise combinatória é um ramo da matemática que se especializa em técnicas de contagem. Muitas vezes não estamos interessados em especificar quais são os elementos de determinado conjunto, mas sim quantos são. Esta quantidade é muito útil quando trabalhamos com probabilidades ou equações de números inteiros.

Por exemplo, quantas são as soluções inteiras não-negativas da equação x+y+z=3. Podemos rapidamente listar as soluções (3,0,0), (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,0,2), (1,1,1), (0,1,2), (0,2,1), (0,3,0), (0,0,3) e então, contando uma a uma, obtemos 10 soluções distintas. Esse é um possível método de contagem, ele consiste em listar todas as possíveis soluções ou eventos e contar um a um.

Mesmo funcionando, este método exige muito tempo e capacidade computacional. Imagine-se encontrando quantas são as soluções inteiras não-negativas da equação x+y+z+w=20.

Para resolver este problema vamos estudar as técnicas de contagem a seguir.

1.1 Princípio Aditivo e Multiplicativo

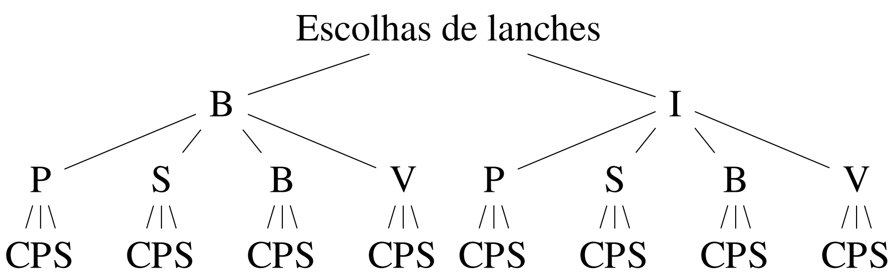
A contagem possui dois princípios básicos que vão servir de guia para tudo o que vamos estudar, estes recebem o nome de Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo. Para ilustrar estes dois princípios vamos observar os seguintes exemplos:

Imagine-se indo almoçar em uma praça de alimentação. Você tem interesse em comer um lanche e há duas lanchonetes abertas. A lanchonete Vegetáia oferece 8 tipos de sanduíches naturais diferentes, já a lanchonete Rei do Hambúrguer oferece 6 tipos de hambúrguer distintos. Quantos opções de lanches você tem para o almoço?
Como as lanchonetes oferecem lanches distintos, para encontrarmos o total de possibilidades de almoço precisamos apenas **somar** as possibilidades de cada lanchonete. Sendo assim, o número total de possibilidade é 8+6=14.

O princípio ilustrado anteriormente recebe o nome de **Princípio Aditivo**. Este princípio pode ser matematicamente enunciado da seguinte maneira: Sejam A e B conjuntos disjuntos ($A \cap B = \varnothing$) com m e n elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui m+n elementos.
O **Pincípio Aditivo** infere que se tivermos dois eventos A e B que podem ocorrer de e maneiras, respectivamente, então ambos ocorrerão independentemente de $m+n$ maneiras.

Indo jantar, você decide parar na lanchonete METRÔ que lhe dá a opção de montar seu próprio lanche. Para isto, você deve escolher entre 2 tipos de pão (branco ou integral), 4 tipos de recheio (presunto, salame, bacon ou vegetariano) e 3 tipos de queijo (cheddar, prato ou suíço). Quantos lanches distintos podem ser montados com estas opções?

Ao invés de visualizarmos os lanches descrevendo um por um, podemos ilustrar todos eles por meio das escolhas de pão, recheio e queijo na seguinte árvore de possibilidades:



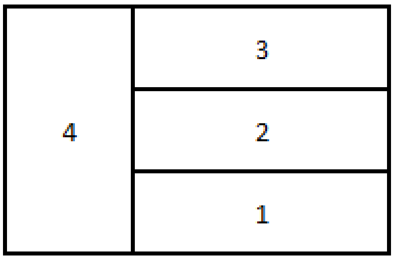
Ao seguir um ramo desta árvore até o fim ela vai te levar para um possível sanduiche gerado pelas escolhas tomadas. Sendo assim, contando todas as últimas pontas concluímos que podemos montar 24 sanduíches diferentes.

A árvore de possibilidades é muito útil para ilustrar todos os possíveis lanches a serem montados. Porém, se aumentássemos o número de pães, recheios e queijos e colocando a possibilidade de adicionais e saladas, teríamos uma árvore muito grande e nem um pouco prática. Podemos mesmo assim encontrar a quantidade de lanches possíveis pensando nas escolhas a serem tomadas.
Note que as escolhas de pão não afetam no número de opções de recheio ou de queijo e vice-versa. Sendo assim, para cada escolha de pão teremos 4 opções de recheio e para cada opção de recheio teremos 3 opções de queijo. Sendo assim, para encontrarmos o total de lanches, basta multiplicarmos as opções em cada etapa da montagem:

$$\begin{array}{ccc} Pão\rightarrow & Recheio \rightarrow & \text{Queijo} \\ 2\cdot & 4\cdot & 3 \end{array}$$

Utilizando este pensamento podemos calcular o número de lanches trabalhando com a quantidade de opções que temos para cada etapa da montagem de forma independente.
O princípio ilustrado acima corresponde ao **Princípio Multiplicativo**.
Este princípio pode ser enunciado da seguinte maneira: Sejam A e B eventos que podem ocorrer de m e n maneiras respectivamente. Se o evento A não afetar no **número de maneiras** que o evento B pode ocorrer, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$
Caso o evento A afete no número de maneiras que o evento B pode ocorrer não poderemos utilizar o princípio multiplicativo.

Deseja-se colorir a bandeira abaixo utilizando 5 cores: verde, vermelho, amarelo, azul e laranja. A restrição para colorir a bandeira é que faixas adjacentes não tenham cores iguais.



De quantas maneiras podemos pintá-la? Para resolver os problemas de análise combinatória é muito importante se colocar na posição de quem está resolvendo o problema, verificar quais são as decisões as serem tomadas e ordenar estas decisões. Sendo assim decidimos pintar primeiramente as faixas horizontais para depois pintarmos a faixa vertical. Para a primeira faixa temos 5 opções de cor, para a segunda temos 4 pois tem que ser diferente da primeira, para a terceira faixa também temos 4 opções pois ela tem que ser diferente da segunda. E para a faixa vertical?
Caso a primeira e a terceira faixa tenham a mesma cor teremos 3 opções de cor para a faixa vertical, caso a primeira e a terceira faixa tenham cores diferentes teremos 2 opções de cor para a faixa vertical. Sendo assim não podemos aplicar diretamente o princípio multiplicativo.
Para conseguirmos utilizar o princípio teremos que dividir o problema em 2 casos:

1º caso: Faixa 1 e 3 tem mesma cor
Neste caso teremos 5 maneiras de pintar a primeira e a terceira faixa e 4 maneiras para pintar a segunda. Como a faixa vertical tem que ser distinta das outras 3 então teremos 3 maneiras de pinta-la. Sendo assim, o número de maneiras será:
$5\cdot4\cdot3\cdot=60$ maneiras

2ºcaso: Faixa 1 e 3 tem cores diferentes
Neste caso teremos 5 maneiras de pintar a primeira faixa, 4 maneiras de pintar a segunda e 3 maneiras de pintar a terceira, pois ela é diferente da primeira e da segunda faixa. Para pintar a faixa vertical teremos 2 cores possíveis. Sendo assim, o número de maneiras será:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot = 120 \text{ maneiras}$$

Claramente os casos 1 e 2 são disjuntos pois ou as faixas tem mesma cor ou cores diferentes. Sendo assim, podemos aplicar o princípio aditivo e obteremos:

$$60 + 120 = 180 \text{ maneiras distintas de se pintar a bandeira}$$

Podemos mudar a ordem que escolhemos as faixas para pintar. Se tivéssemos começado pintando pela faixa vertical não teríamos que dividir o problema em dois casos distintos. Verifique você mesmo que o resultado obtido será o mesmo.

Os princípios aditivo e multiplicativo são a base para toda a análise combinatória e são suficientes para resolver os problemas que encontraremos. Mesmo assim, a seguir trabalharemos com alguns casos recorrentes para torna-los mais naturais.

EXERCÍCIOS

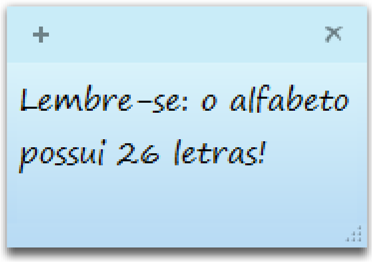
1. Gustavo vai se formar no Ensino Médio e precisa escolher uma madrinha. Sua lista final de opções possui, 12 amigas, 10 primas, 4 tias, sua mãe, suas 2 irmãs e sua avó. De quantos modos diferentes Gustavo pode escolher sua madrinha?

2. Marcos fez uma pesquisa para o trabalho de Educação Física perguntando aos seus colegas da escola para quais times eles torciam. O resultado foi colocada na tabela a seguir:

Time	Torcedores
Corinthians	12
Vitória	84
Grêmio	95
Paysandu	54
Brasiliense	17
Nenhum	62

Quantas pessoas participaram da pesquisa?

3. No Brasil, as placas de automóvel têm 3 letras seguidas de 4 algarismos. Quantas são as possibilidades de placas diferentes?



4. Uma corrida possui 20 participantes. De quantos modos diferentes pode-se formar o pódio com os três primeiros colocados?

5. Na primeira fase de um campeonato de xadrez organizado em uma escola, cada participante joga uma única vez contra cada um dos outros. Sabendo que foram realizadas 66 partidas 66 partidas nessa fase, quantas pessoas participaram do campeonato?

6. Laura foi a um Restaurante de Massas e para montar seu prato ela deve escolher um tipo de massa, um molho e dois acompanhamentos diferentes, sendo que o molho é opcional. O cardápio abaixo mostra as opções de escolha:

Massas	Molhos	Acompanhamentos
Espaguete	Bolonhesa	Calabresa
Pene	Branco	Bacon
Fusili	Pesto	Tomate Seco
Raviole	Funghi	Queijo Ralado
Canelone		Brócolis
Farfalle		Azeitona Preta

De quantos modos diferentes Laura pode montar seu Prato?

7. Alexandre quer viajar de São Paulo para Salvador passando por Belo Horizonte. Consultando a internet, ele vê a possibilidade de ir de São Paulo para Belo Horizonte de carro pela rodovia A, rodovia B ou rodovia C, de ônibus pela rodovia A ou rodovia B ou de avião. De Belo Horizonte para Salvador ele pode ir de carro pela rodovia X ou rodovia Y, de ônibus pela rodovia Y, de avião ou de trem. De quantos modos diferentes Alexandre pode fazer o percurso de São Paulo à Salvador?

8. Em um jogo de vídeo game, existem 6 ilhas. O início do jogo é na ilha 1 e o término é na ilha 6, porém os jogadores experientes sabem que existem uma ilha secreta que faz a interligação entre as 6 ilhas, ou seja, é possível, por exemplo, passar da ilha 1 para a ilha 6 e finalizar o jogo sem ser necessário percorrer as outras ilhas. Ou também é possível passar da ilha 3 para a ilha 5 sem ser necessário percorrer a ilha 4. Sabendo que sempre se passa para alguma ilha á frente e nunca se volta, de quantas maneiras diferentes é possível terminar o jogo?

9. Guilherme e André forma jogar tênis juntos e decidiram quem venceria de tal forma: Se Guilherme ganhar 2 sets seguidos, ele vencerá. Se André ganhar 3 sets de qualquer forma, consecutivos ou alternados, ele será o vitorioso. De quantas formas diferentes o jogo poderá se desenrolar?

10. Numa prova de 50 testes, com 4 alternativas cada, de quantas formas diferentes posso preencher um cartão resposta?

1.2 Permutações

Quando perguntamos quantas permutações são possíveis num conjunto queremos saber de quantas maneiras podemos trocar a ordem dos elementos do conjunto.

De quantas maneiras podemos montar uma fila com 6 pessoas? Claramente o quê temos que fazer é decidir quem vai ao primeiro lugar, no segundo lugar e assim sucessivamente. Notando que todas as pessoas da fila são distintas, o número total de maneiras de se fazer isso é:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ maneiras}$$

Fatorial: Ao longo deste capítulo trabalharemos com várias multiplicações como as vistas no exemplo anterior. Para isto, vamos introduzir uma nova notação, chamada fatorial.
Seja n um número natural, definimos $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Também definiremos $0! = 1$ e $1! = 1$

EXERCÍCIOS

1. Calcule:
   (a) $6!$
   (b) $4 \cdot 2!$
   (c) $0! + 4!$
   (d) $5! - 4!$
   (e) $\frac{10!}{6!}$

2. Simplifique as expressões
   (a) $\frac{n!}{(n-1)!}$
   (b) $\frac{(n+2!}{(n+3)!}$
   (c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!+(n+3)!}$
   (d) $\frac{(n-1)!+n}{(n+1)!}$

3. Resolva as equações:
   (a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12$
   (b) $\frac{(n+10!}{(n+8)!} = 30$

O exemplo anterior ilustra o que denominamos **Permutação Simples**. Generalizando o pensamento do exemplo, podemos calcular o número de maneiras de colocarmos n objetos distintos em fila da seguinte maneira:

$P_n = n \cdot (n-1) \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Deseja-se arrumar 8 livros distintos em uma estante, sendo 3 deles de matemática. De quantas maneiras podemos arrumar os livros de modo com que os de matemática fiquem juntos?
Se os livros de matemática ficam juntos podemos considerar os 3 livros como um único objeto: um pacote de livros de matemática. Agora temos que arrumar 6 objetos (5 livros e o pacote de livros de matemática) em fila. Sendo assim, podemos fazer isso de $P6$=6! maneiras.
Sendo assim, como devemos organizar os objetos na estante e para cada organização destes temos uma possível fila de livros de matemática dentro do pacote, o número de maneiras de organizar os 8 livros na estante de modo com que os de matemática fiquem juntos é:

$$P_6P_3 = 6!3! {=} 720 \cdot 6 = 4320 \text{ maneiras}$$

Um questionamento que naturalmente surge é em relação a obrigatoriedade de elementos distintos. E se tivermos elementos repetidos? Para isso, observe o próximo exemplo:

Quantos são os anagramas da palavra casa?

Um anagrama é uma permutação das letras da palavra original. Por exemplo, a palavra caas é um anagrama da palavra casa. Não podemos aplicar uma permutação simples neste caso pela presença de dois a's. Sendo assim, vamos diferir um a do outro e listar todas as possíveis permutações.

csaa scaa casa saca caas saac acas asac acsa asca aacs aasc
csaa scaa casa saca caas saac acas asac acsa asca aacs aasc

Observamos facilmente que segunda linha de permutações ocorre apenas trocando os a's de posição. Sendo assim, temos que desconsidera-la, removendo metade das permutações. Portanto, o número de anagramas da palavra casa é:

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} {=} 12$$

O caminho mais simples é então considerarmos todos os elementos distintos e posteriormente removermos a permutação dos elementos repetidos.

Quantos são os anagramas da palavra Araraquara?
Se formos listar todos os possíveis anagramas gastaremos muito tempo. Então vamos tentar utilizar o pensamento do exemplo anterior.
Como a palavra Araraquara tem 10 letras, se todas fossem distintas, teríamos 10! Anagramas. Precisamos agora remover os anagramas que calculamos a mais permutando os a's e os r's repetidos. Vamos inicialmente remover as permutações dos a's.
Note que, para cada anagrama da palavra os a's permutam dentro de lacunas específicas. Tome como exemplo a palavra padrão Araraquara. Quando calculamos os anagramas considerando os a's distintos contamos a mais os casos em que trocamos apenas os a's de posição, não gerando uma palavra nova. Sendo assim, de quantas maneiras podemos trocar apenas os a's de posição? Observe que podemos manter as outras letras fixas e apenas colocar os a's na palavra, como abaixo

$$\_r\_r\_qu\_r\_$$

Sendo assim, podemos colocar os a's nas lacunas de 5! maneiras, já que temos 5 opções para o primeiro, 4 para o segundo e assim sucessivamente. Então, se quisermos remover estas permutações, basta dividirmos o total de permutações encontradas por 5!, já que cada anagrama da lista pode ser reescrito 5! vezes apenas trocando os a's de posição. Utilizando o mesmo raciocínio para os r's repetidos, também devemos dividir o resultado por 3!, já que estes se permutam entre side 3! maneiras.
Então, o número de anagramas da palavra Araraquara é

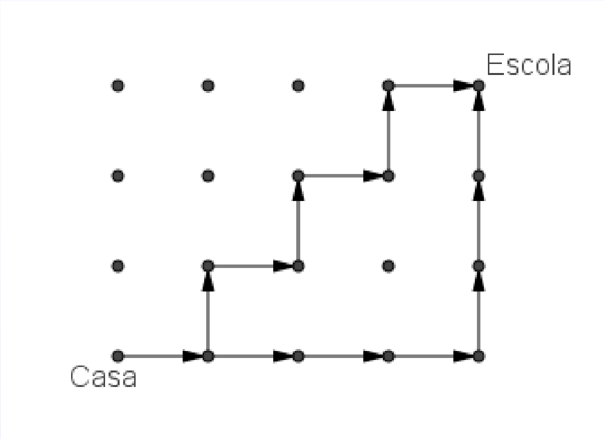
$$\frac{10!}{5!3!} = 540$$

Os números em análise combinatória tendem a ser muito grandes. Então, para evitar um gasto desnecessário de tempo com contas, apenas as deixaremos indicadas.
Os dois exemplos anteriores ilustram o quê chamamos de **Permutação com Repetição**. Generalizando o pensamento anterior, temos que o número de maneira de enfileirarmos n elementos, dos quais $k_1, k_2, k_3, ..., k_m$ são repetidos é dado por:

$$P_n^{k_1,k_2,k_3,...,k_m} = \frac{n!}{k_1,k_2,k_3,...,k_m}$$

As fórmulas dentro de análise combinatória apenas generalizam pensamentos. Elas derivam diretamente dos princípios vistos no início do capítulo, portanto não é essencial que o aluno as decore, tendo em vista que a dificuldade não está em aplicar a fórmula, e sim conseguir transformar o problema em um modelo matemático coerente no qual é possível aplica-las. O exemplo a seguir ilustra bem este comentário.

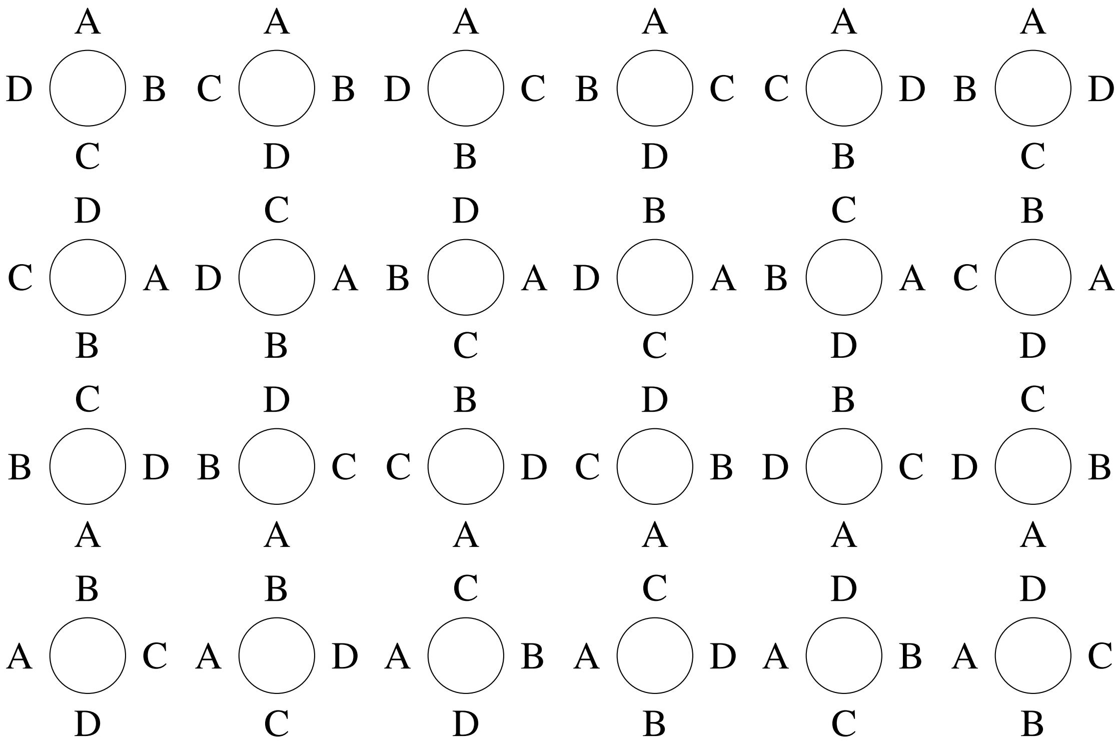
Uma pessoa quer ir de sua casa a escola. O mapa que mostra as quadras próximas de sua casa e da escola está abaixo.



Como a pessoa não quer gastar tempo desnecessário ela apenas anda na direção da escola. Isto é, apenas anda para leste e norte no mapa. Quantos caminhos distintos esta pessoa pode fazer?
A princípio não vemos este problema como sendo uma permutação. Porém, ao analisarmos o problema calmamente, notamos que a pessoa é obrigada a andar 4 quadras na direção leste e 3 quadras na direção norte fazendo isso na ordem que preferir. Ou seja, se L simboliza que a pessoa andou uma quadra leste e N uma quadra norte, então um possível caminho seria (N,N,N,L,L,L,L) e outro seria (N,L,L,N,N,L,L). Claramente todos os caminhos possíveis são anagramas da palavra NNNLLLL que pode ser calculado por

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{3!4!} = 35 \text{ caminhos distintos}$$

De quantas maneiras 4 pessoas podem se sentar ao redor de uma mesa redonda? Vamos esquematizar todas as possíveis formas das pessoas sentarem em volta da mesa.



Note que os elementos da primeira coluna foram gerados mantendo a pessoa A fixa no topo e permutando as outras três. Já os elementos das linhas foram gerados girando-se o primeiro elemento da linha no sentido anti-horário.
Como consideramos idênticas as distribuições geradas apenas a partir da rotação de uma original precisamos desconsidera-las. Note que temos 4 possíveis rotações para cada distribuição, sendo assim, para remove-las vamos dividir o total de permutações por 4. Então, o número de maneiras de distribuir 4 pessoas em uma mesa redonda é :

$$\frac{4!}{4!} = 3! = 6 \text{ maneiras}$$

Este exemplo ilustra o quê chamamos de **Permutação Circular**. Generalizando o pensamento anterior, podemos distribuir n elementos em roda de

$$PC_n = \frac{n!}{n} = \text{(n-1)!}$$

EXERCÍCIOS

1. Quantos anagramas tem a palavra
   (a) BRASIL
   (b) GUITARRA
   (c) CALCULADORA
   (d) PARALELEPÍPEDO
2. Considerando os dígitos 1, 3, 4 ,6 e 7, quantos números de 5 algarismos distintos podemos formar?
3. Para acessar sua conta bancária via internet, Carlos precisa criar uma senha composta por 6 letras distintas seguidas de 4 algarismos distintos. Ele optou por utilizar as letras de seu nome e os algarismos do ano de seu nascimento (1987). Quantas senhas diferentes Carlos pode criar?
4. Em um município, a fiscalização inspeciona todo mês uma única vez cada um dos 8 postos de gasolina locais. A fim de surpreender os postos, por motivos de adulteração de combustível, os fiscais alternam a ordem em que as inspeções são realizadas. Durante quantos tempo os fiscais podem realizar esse procedimento sem que haja repetição na ordem dos postos inspecionados?
5. Quantos são os anagramas da palavra SONHAR que começam e terminam por vogal?
6. Você dispõe de 9 livros: 3 de Matemática, 4 de Física e 2 de Química. Todos são distintos.
   (a) Qual o número de maneiras distintas de dispor esses 9 livros lado a lado numa mesma prateleira?
   (b) Qual o número de maneiras de dispor esses livros deixando juntos os da mesma disciplina?
7. Cinco rapazes e duas moças devem ocupar os sete lugares de uma mesma fila de um cinema.
   (a) De quantas maneiras distintas eles podem ocupar esses sete lugares?
   (b) De quantos modos eles podem ocupar esses sete lugares se as moças devem ficar juntas?
   (c) De quantos modos eles podem ocupar esses sete luga-

res se as moças devem ficar separadas?

8. Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 e escrevem-se assim números com cinco algarismos distintos, colocando-os em ordem crescente.
   (a) Qual o lugar ocupado pelo número 53.719;
   (b) Qual a soma dos números assim formados?
9. De quantas maneiras podemos dispor 7 objetos $(O_1, O_2, O_3, \ldots, O_7)$ circularmente e equidistantes entre si de modo que:
   (a) Não haja restrições.
   (b) $O_1 e O_2$ fiquem sempre juntos.
   (c) $O_1 e O_2$ sempre permaneçam juntos e $O_1 a esquerda de O_2$.
   (d) $O_1, O_2 e O_3$ sempre permaneçam juntos.
   (e) $O_1, O_2 e O_3$ permaneçam juntos e O_2 sempre entre $O_1 e O_3$
   (f) a soma dos índices de dois elementos consecutivos sempre resulte em oito, quando possível.
10. Uma roda Gigante é constituída de 15 acentos duplos. Assim sendo de quantos modos podemos dispor 15 casais nesse Brinquedo de modo que sempre cada casal permaneça junto?

1.3 Arranjo

Quando abordamos permutação queríamos ordenar um conjunto inteiro de elementos. Mas e se apenas quiséssemos ordenar um pedaço dele? Para ordenar apenas um pedaço do conjunto teremos o quê chamaremos de arranjo, ilustrado abaixo.

O pódio de uma competição é composto pelos 3 primeiros colocados, diferenciando as posições de cada um. Quantos pódios distintos podem ser formados em uma competição com 10 atletas?
Para montar o pódio temos que escolher um atleta para a primeira posição, um para a segunda e outro para a terceira. Sendo assim, podemos montar o pódio de

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ maneiras}$$

O que fizemos foi, ao invés de ordenar todos os atletas, selecionar um grupo de 3 atletas do total e ordena-los. Para escrevermos a expressão acima utilizando a notação de fatorial, multiplicamos o numerador e o denominador por 7!, obtendo:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = \frac{10!}{7!}$$

O que acabamos de ilustrar é o quê chamamos de Arranjo Simples. Generalizando o pensamento anterior, o número de maneiras de ordenarmos p elementos de um conjunto com n elementos distintos é dado por:

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p!)}}$$

De quantas maneiras 5 pessoas podem se sentar em uma fileira de cinema com 10 cadeiras?
Podemos pensar como as pessoas que vão sentar nas cadeiras. A primeira pessoa tem 10 opções de cadeira para sentar, a segunda terá 9 pois já haverá uma cadeira ocupada, a terceira terá 8 e assim sucessivamente. Logo, o número de maneiras será

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{10!}{5!} maneiras$$

Também poderíamos pensar que estamos formando 5-uplas (_,_,_,_,_), onde o primeiro elemento é a cadeira em que a primeira pessoa sentará, o segundo elemento é a cadeira que a segunda pessoa sentará e assim sucessivamente.
Logo $(c_1, c_4, c_7, c_3, c_9)$ é uma possível distribuição de pessoas em cadeiras, onde c_i representa a i-ésima cadeira.
Note que o quê estamos fazendo é retirando um grupo de 5 cadeiras do total de 10 e ordendo-as. Sendo assim, o número de maneiras de se fazer isso é:

$$A_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} maneiras$$

O caminho para resolver um problema de análise combinatória não é único. Porém, independentemente do método utilizado o resultado de um exemplo será sempre o mesmo.

EXERCÍCIOS

1. Uma sala possui 12 portas. De quantas maneiras uma pessoa pode:
   (a) Entrar e sair dessa sala?
   (b) Entrar por uma porta e sair por outra porta diferente?

2. Uma empresa possui uma linha de 12 produtos diferentes. O departamento de marketing dessa empresa, em uma campanha publicitária, realizará 3 tipos de anúncio de divulgação dos produtos: outdoor, revista e televisão. Sabendo que em cada tipo de anúncio apenas um dos produtos será divulgado e que um produto não será anunciado de 2 formas diferentes, de quantas maneiras distintas essa empresa poderá compor a campanha publicitária?

3. Para acessar sua conta bancária via internet, uma pessoa tem de cadastrar uma senha composta por 5 caracteres distintos, podendo utilizar as 26 letras do alfabeto, os algarismos de 0 a 9 e os caracteres $\triangle$,$\heartsuit$,$\clubsuit$ e ∂ . De quantas maneiras diferentes essa pessoa pode cadastrar a senha?

4. A prova mais famosa da Natação nas Olimpíadas é o 50m livre, considerando o vencedor como o nadador mais rápido do mundo. Sabendo que a final dessa prova é composta por oito nadadores e que não há empate, de quantas maneiras distintas o pódio dessa modalidade pode ser composto?

5. A partir dos algarismos, 1, 4, 6, 7 e 9 calcule a quantidade de números:
   (a) Com 4 algarismos que podem ser formados;
   (b) Com 4 algarismos distintos que podem ser formados;
   (c) Múltiplos de 4 com 4 algarismos que podem ser formados;
   (d) Ímpares de 4 algarismos distintos que podem ser formados;

6. Dispomos de dez cores e queremos pintar uma bandeira de 6 listras, cada listra com uma cor.
   (a) De quantas maneiras podemos pintar essa bandeira com todas as listras de cores distintas?
   (b) De quantas maneira podemos pintar essa bandeira, sabendo que listras adjacentes não podem ter a mesma cor?

7. Quantos números existem entre 100 e 1000, escritos com algarismos distintos?
8. Uma urna A contém 5 bolas enumeradas de 0 a 4. Outra urna B contém 6 bolas enumeradas de 4 a 9. Qual é o número de sequências numéricas que podemos obter se extrairmos, sem reposição, duas bolas da urna A e três bolas da urna B?

;

9. Em uma reunião de um condomínio, com pauta ara eleição dos membros de sua administração, dez pessoas se habilitam para ocupar três cargos: síndico, tesoureiro e secretário.
   (a) De quantas maneiras essa escolha pode ser feita?
   (b) Se uma dessas dez pessoas solicita que não seja escolhida para ser síndico, a escolha pode ser feita de quantas maneiras?

10. Oito clientes de um banco, dos quais três são mulheres, estão na fila única dos caixas. De quantas maneiras as pessoas dessa fila podem se posicionar de modo que as mulheres fiquem juntas?

1.4 Combinações

Nas seções anteriores, abordamos sempre problemas em que considerávamos a ordem dos elementos importantes. Mas e se quiséssemos desconsidera-la? O exemplo abaixo ilustra esta idéia.

Em uma sala com 10 alunos deseja-se formar uma comissão de formatura com 4 pessoas. De quantas maneiras podemos montar essa comissão?
Seguindo o pensamento que tínhamos anteriormente, o número de maneiras de organizar este grupo seria:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Porém, quando contamos desta forma estamos considerando os casos em que apenas mudamos a ordem dos elementos como distintos, por exemplo, $A, B, C, D \neq B, A, D, C$. Como o que estamos montando é um grupo de pessoas, a ordem de seleção destas não é importante. Então como faremos para desconsiderar estas permutações? Ora, como o grupo possui 4 elementos, o número de maneiras de trocar a ordem desses elementos é dado por P_4=4!. Por exemplo, podemos reescrever o grupo A,B,C,D de 4! Maneiras diferentes. Então, precisamos desconsiderar essas permutações. O que faremos então é dividir o resultado apresentado pelo número de permutações indesejadas, obtendo então:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Uma outra forma de representar a combinação é utilizando uma notação que chamamos de número binomial, mostrada abaixo:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Essa notação será muito utilizada nos próximos capítulos.

Em um campeonato escolar deseja-se montar 3 times de futebol de salão em uma sala com 18 alunos. Cada time terá 6 jogadores. De quantas maneiras distintas podemos distribuir os 18 alunos nos 3 times?
Claramente a ordem dos membros no time não é importante, vamos então montar os times, um de cada vez.
Para montar o primeiro time, vamos selecionar 6 dos 18 alunos da turma. Seguindo o pensamento do exemplo anterior, Isso pode ser feito de

$$C_{18,6} = \frac{18!}{12!6!} \text{ maneiras}$$

Agora que montamos o primeiro time, vamos montar o segundo time. Para isto temos que selecionar 6 alunos dos 12 restantes. Que pode ser feito de

$$C_{12,6} = \frac{12!}{16!6!} \text{ maneiras}$$

Para montar o terceiro time basta selecionar 6 dos 6 alunos restantes. O quê pode ser feito de

$$C_{6,6} = \frac{6!}{0!6!} \text{ maneiras}$$

Como desejamos montar os 3 times, pelo princípio multiplicativo teremos

$$C_{18,6} \cdot C_{12,6} \cdot C_{6,6} = \frac{18!}{12!6!} \cdot \frac{12!}{16!6!} \cdot \frac{6!}{0!6!} = \frac{18!}{6!6!6!} \text{ maneiras}$$

Deseja-se dividir 7 pessoas em duas salas. Na primeira colocaremos 4 pessoas e na segunda 3. De quantas maneiras podemos fazer isso?
Assim como no exemplo dos times, vamos distribuir primeiro as pessoas na sala 1 e depois na sala 2. Para a sala 1 temos que selecionar um grupo de 4 pessoas dentre as 7. Isso pode ser feito de

$$C_{7,4} = \frac{7!}{3!4!} \text{ maneiras}$$

Após selecionar as pessoas para a sala 1 basta apenas colocar o restante na sala 2, que pode ser feito de maneira única. Sendo assim, o número de maneiras de se colocar as pessoas nas duas salas é dado pela quantidade de grupos que podemos colocar na primeira sala, já que o restante automaticamente vai para a segunda.
E se tivéssemos começado distribuindo as pessoas na segunda sala?
Como dito anteriormente, independentemente do método utilizado para contar o resultado deve ser o mesmo. Então, vamos fazer este caminho. Para a sala 2, devemos selecionar um grupo de 3 pessoas dentre as 7. Podemos fazer isso de

$$C_{7,3} = \frac{7!}{4!3!} \text{ maneiras}$$

Analogamente, como já selecionamos os indivíduos para a sala 2 devemos apenas colocar o restante na sala 1, que pode ser feito de maneira única. Note que a segunda solução apresenta o mesmo número de maneiras que a primeira, concluímos então que

$$C_{7,4} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7!}{4!3!} = C_{7,3} \text{ maneiras}$$

Ao selecionarmos um grupo de 3 elementos dentre os 7 originais, selecionamos na verdade dois grupos: um de 3 elementos, que são desejados, e um de 4 elementos, que são indesejados. Analogamente, ao selecionarmos 4 elementos desejados dentre 7 também selecionamos 3 elementos indesejados.

Desta maneira, podemos generalizar este pensamento e teremos a seguinte propriedade:

$$C_{n,p} = C_{n,n-p} \text{ ou } \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Ana, Beatriz, Claudio, Daniel, Eduardo, Fernanda e Heitor desejam montar uma comissão de 3 pessoas. Quantas comissões podem ser formadas com Ana? Quantas podem ser montadas sem Ana? Quantas comissões podem ser formadas no total?
Primeiramente vamos montar as comissões que tenham Ana. Para isto, basta selecionarmos Ana e mais duas pessoas dentre as 6 restantes, o quê pode ser feito de

$$C_{6,2} = \frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ maneiras}$$

Para montarmos as comissões sem Ana temos que remove-la do conjunto original de pessoas que podem ser escolhidas, sobrando 5 membros, e então selecionarmos 3 destes. Podemos fazer isso de

$$C_{6,3} = \frac{3!}{3!3!} = 20 \text{ maneiras}$$

Para montar comissões sem restrição, basta selecionarmos 3 pessoas dentre as 7 possíveis. Fazendo isso, obtemos:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!4!} = 35 \text{ maneiras}$$

Ou então poderíamos somar os dois casos anterior, pois ou Ana faz parte da comissão ou não faz. Logo os dois primeiros casos já abrangem todas as possibilidades. Concluímos então que

$$C_{6,2} + C_{6,3} = C_{7,3}$$

Claramente, ao montarmos um grupo, se considerarmos todos os casos em que um elemento específico faz parte e depois todos os casos em que ele não faz parte consideramos todos os possíveis casos. Sendo assim, podemos generalizar este pensamento e obter a seguinte propriedade:

$$C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1} \text{ ou } \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Ambas as propriedades ilustradas podem ser encontradas utilizando as fórmulas de combinação e realizando passos algébricos de simplificação com fatorial. Porém, o argumento combinatório apresentado justifica ambas as propriedades de forma muito mais elegante.

EXERCÍCIOS

1. De um grupo de 18 atletas de equipe de vôlei, o técnico deve selecionar 12 para a disputa de uma partida. Considerando que todos os atletas podem atuar em qualquer posição, de quantas maneiras diferentes essa seleção pode ser realizada?

2. Uma escola enviará a um congresso quatro dos seus vinte professores. De quantas maneiras distintas pode ser formado o grupo de professores que participarão do congresso?

3. No preparo da banana Split, uma sorveteria oferece 14 sabores de sorvete, dos quais o freguês pode escolher 3. Sabendo que certo freguês deseja escolher 3 sabores diferentes, de quantas maneiras pode ser preparada essa banana Split?

4. Usando 5 vogais e os algarismos de 0 a 9, quantos conjuntos de cinco elementos conseguimos formar, sendo duas letras e três algarismos?

5. Os sites de rede social são aqueles elaborados com o objetivo de auxiliar seus membros a criar novas amizades e promover o relacionamento entre pessoas com afinidades. Em um desses sites, os usuários podem agrupar os amigos cadastrados de acordo com certos critérios. O quadro a seguir apresenta como estão agrupados os amigos do João.

Grupo	Número de amigos
Trabalho	12
Escola	10
Família	9
Outros	15

Sabendo que João deseja enviar uma mensagem para 10 amigos, sendo 3 do grupo Trabalho, 3 do grupo Escola, 3 do grupo Família e 1 do grupo Outros, de quantas maneiras diferentes essa pessoa pode enviar a mensagem?

6. Ao ser infectada por certo vírus,

uma pessoa pode apresentar 7 tipos de sintomas diferentes. Os órgãos de saúde pública definiram que, se um indivíduo apresentasse 4 desses sintomas, seria submetido a um tratamento médico preliminar enquanto os resultados dos exames não estivessem prontos. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode manifestar sintomas suficientes para que seja encaminhado a tratamento médico preliminar?

7. Uma fábrica produz 10 tipos diferentes de peças que, para serem transportadas, são colocadas em caixas com 6 peças. Sabendo que, por motivos técnicos, entre os 10 tipos de peças, apenas dois não podem ser colocados em uma mesma caixa, de quantas maneiras diferentes pode-se colocar as peças na caixa?

8. Para tratar de certo paciente, um hospital constituirá uma junta médica a partir dos médicos que lá trabalham. Se a junta for composta de 5 médicos, o hospital terá 15.504 opções de formação da junta. De quantas maneiras distintas essa junta pode ser formada se ela for composta de 4 médicos?

9. Em uma sala de aula, há 15 moças. Com o total de alunos dessa turma é possível formar 30030 comissões distintas de 5 pessoas cada, sendo que, dessas, 3 serão sempre moças. Quantos alunos há nessa sala de aula?

10. Considere sete pontos distintos sobre um reta e quatro pontos distintos sobre outra reta, paralela a primeira. Quantos triângulos podemos obter ligando três quaisquer desses onze pontos?

Retomando a Introdução

Após estudarmos esses casos da análise combinatória, podemos finalmente resolver o problema original do capítulo que consistia em encontrar o número de soluções inteiras não-negativas da equação $x + +y + z + w = 20$. Podemos representar este problema por um equivalente, que envolveria distribuir 20 bolas idênticas em 4 urnas. Uma forma de distribuir as bolas nas urnas está esquematizada abaixo.

$$\circ\ \circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ \mid \circ \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ$$

As bolas que estão anterior a primeira barra representam as que vão para a urna 1, as que estão entre a primeira e a segunda barra representantam as que vão pra urna 2 e assim por diante. Podemos entender o primeiro conjunto como o valor x, o segundo y, o terceiro z e o quarto w. Sendo assim, a solução descrita acima seria $x = 4, y = 4, z = 1$ e $w = 11$ Agora precisamos pensar de quantas maneiras podemos distribuir estas barras. Um possível jeito de fazer isso é imaginar que todas as soluções possíveis do problema são permutações do exemplo apresentado. Então precisamos encontrar o número de permutações de 23 elementos (20 bolas e 3 barras) sendo que 20 deles são idênticos (bolas) e outros 3 também (barras). Então, o número de soluções inteiras não-negativas é dado por:

$$P_{23}^{20,3} = \frac{23!}{20!3!}$$

Exercícios de Vestibular

1. (PUC-SP) O total de números naturais de três algarismos distintos que existem no nosso sistema de numeração é:
   (a) 650
   (b) 615
   (c) 640
   (d) 649
   (e) 648

2. A quantidade de números inteiros compreendidos entre 30.000 e 65.000 que podemos formar utilizando somente os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7, de modo que não figurem algarismos repetidos, é:
   (a) 48
   (b) 66
   (c) 96
   (d) 120

3. (UFU-MG) De quantas maneiras três mães e seus respectivos três filhos podem ocupar uma fila com seis cadeiras, de modo que cada mãe sente junto de seu filho?
   (a) 6
   (b) 18
   (c) 12
   (d) 36
   (e) 48
4. (PUC-SP) Com os elementos do conjunto $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ são formados números com três algarismos distintos. A quantidade de números formados, cuja soma dos algarismos é um número par, é:
   (a) 30
   (b) 36
   (c) 52
   (d) 60
   (e) 72

5. (UFRN) A quantidade de números pares de 5 algarismos, sem repetição, que podemos formar com os dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 é igual a:
   (a) 720
   (b) 1140
   (c) 2160
   (d) 2280
   (e) 3600

6. (UFBA) Uma firma deseja imprimir calendários de diversos modelos variando a quantidade de meses em cada folha do calendário, desde que o número de meses incluídos em cada folha de determinado modelo seja constante. O número de modelos que podem ser feitos é:
   (a) 6
   (b) 12
   (c) 28
   (d) 794

(e) 13345

7. (PUC-RS) Com os algarismos significativos formam-se todos os números de quatro algarismos distintos, sendo que "x" deles possuem um algarismo ímpar na ordem das centenas. O valor de "x" é:
   (a) 336
   (b) 567
   (c) 1680
   (d) 3335
   (e) 3403

8. (CESGRANRIO-RJ) Um mágico se apresenta em público vestindo calça e paletó de cores diferentes. Para que ele possa se apresentar em 24 sessões com conjuntos diferentes, o número mínimo de peças (número de paletós mais número de calças) de que precisa é:
   (a) 24
   (b) 11
   (c) 12
   (d) 10
   (e) 8

9. Se 5 moedas distinguíveis forem lançadas simultaneamente, o número de maneiras possíveis de elas caírem é dado por:
   (a) 25
   (b) 10
   (c) 32
   (d) 120
   (e) 240

10. (MACK-SP) O total de números, formados com os algarismos distintos, maiores que 50.000 e menores que 90.000 e que são divisíveis por 5, é:
    (a) 1596
    (b) 2352
    (c) 2686
    (d) 2788
    (e) 4032

11. (PUC-SP) Chamam-se "palíndromos" números inteiros que não se alteram quando é invertida a ordem de seus algarismos (por exemplo: 383, 4.224, 74.847). O número total de palíndromos de cinco algarismos é:
    (a) 900
    (b) 1000
    (c) 1900
    (d) 2500
    (e) 5000

12. (USP-SP) Quantos números ímpares de 4 algarismos, sem repetição, podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?
    (a) 120
    (b) 60

(c) 30
(d) 180
(e) 90

13. (FUVEST-SP) O número de anagramas da palavra FUVEST que começa e termina por vogal é?
(a) 24
(b) 48
(c) 96
(d) 120
(e) 144

14. (FEI-SP) Obter o número de anagramas da palavra REPÚBLICA nos quais as vogais se mantêm nas respectivas posições.

15. (UFCE) A quantidade de números inteiros compreendidos entre 30.000 e 65.000 que podemos formar utilizando somente os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7, de modo que não figurem algarismos repetidos, é:
(a) 48
(b) 66
(c) 96
(d) 120

16. (UFRN) Quantos números de 7 dígitos, maiores que 6.000.000, podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 4, 6, 7 e 9, sem repeti-los?
(a) 1800
(b) 720
(c) 5400
(d) 2160

17. (PUC-SP) Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?
(a) 15
(b) 24
(c) 18
(d) 16

18. (UFPE) Qual o maior inteiro n para que 20! Seja divisível por 3^n?
(a) 2
(b) 7
(c) 8
(d) 9
(e) 20

19. (FGV-SP) Quantos números diferentes obtemos reagrupando os algarismos do número 718.844?
(a) 90
(b) 720
(c) 15
(d) 30
(e) 180

CAPÍTULO 2

Binômio de Newton e Triângulo de Pascal

Ao longo do ensino fundamental foram apresentadas algumas identidades matemáticas importantes. Uma delas, um produto notável, conhecido como o quadrado da soma:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Apresentaremos ao longo deste capítulo as expansões para todas as potências naturais da soma de dois números. Isto é,

$$(a+b)^n, onde n \in \mathbb{N}$$

Este desenvolvimento é conhecido como Binômio de Newton. A atribuição desta expansão a Isaac Newton é errônea, tendo em vista que é anterior a ele. Newton na verdade, expandiu o desenvolvimento desta para potências Racionais, que não serão abordadas no capítulo. Para facilitar esta expansão também utilizaremos o Triangulo de Pascal, que também será abordado no capítulo. Apesar de ser conhecido desde o século 11 na China, o triangulo é atribuído a Pascal por este produzir o primeiro tratado matemático em 1653 exclusivamente a respeito do triângulo. Podemos utilizar este conteúdo para resolver a um problema parecido com os apresentados no capítulo anterior. Desta vez temos o interesse em descobrir de quantas maneiras podemos distribuir 5 pessoas em duas salas distintas.

2.1 Binômio de Newton

Para compreender a expansão genérica do binômio, vamos realizar e discutir a expansão do binômio na potência 3. Vamos primeiramente realizar uma expansão plenamente algébrica, utilizando a propriedade da distributividade:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) \quad (a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)(a+b) \quad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3a$$

Podemos realizar esta expansão utilizando análise combinatória, vista no capítulo anterior. Para realizar a expansão do binômio devemos observar que de cada fator escolhemos entre "a" ou "b", tendo então as seguintes possibilidades de escolha:

- 3 a's e nenhum b, gerando o termo a^3b^0
- 2 a's e 1 b, gerando o termo a^3b^1
- 1 a e 2 b's, gerando o termo a^1b^2
- Nennhum a e 3 b's, gerando o termo a^0b^3

Podemos então contar de quantas maneiras podemos fazer essas escolhas baseando-nos no número de b's escolhidos:

- **Escolher 3 a's e nenhum b**: Estamos escolhendo nenhum b dentre os 3 fatores possíveis. Podemos fazer isto de $\binom{3}{0}$ maneiras.
- **Escolher 2 a's e 1 b**: Estamos escolhendo 1 b dentre os 3 fatores possíveis. Podemos fazer isto de $\binom{3}{1}$ maneiras.
- **Escolher 1 a e 2 b's, gerando o termo a^1b^2**: Estamos escolhendo nenhum b dentre os 3 fatores possíveis. Podemos fazer isto de $\binom{3}{2}$ maneiras.
- **Escolher nenhum a e 3 b's, gerando o termo a^0b^3**: Estamos escolhendo nenhum b dentre os 3 fatores possíveis. Podemos fazer isto de $\binom{3}{3}$ maneiras.

Com isto, temos o número de maneiras que cada potência da expansão pode ser escolhida. Sendo assim, temos o seguinte desenvolvimento:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}\ a^2b^1 + \binom{3}{2}\ a^1b^2 + \binom{3}{3}\ b^3$$

Substituindo os valores acima, temos a mesma expressão obtida pelo desenvolvimento algébrico:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Vamos então expandir este pensamento para qualquer potência natural do binômio.

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)...(a+b)$$

Sendo assim, **se selecionarmos um número *p* de b's e um número *(n-p)*a's** teremos o termo $a^{n-p}b^p$ e podemos fazer esta seleção de $\binom{n}{p}$ **maneiras.**

Portanto, sendo a e b números Reais e n um número natural, a expansão do **Binômio de Newton** será:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\ a^n b^0 + \binom{n}{1}\ a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}\ a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}\ a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}\ a^0 b^n$$

Ou, também

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\ a^{n-p}b^p$$

Note que o primeiro termo no binômio será calculado para p=0, o segundo para p=1, o terceiro para p=2 e assim sucessivamente. Chamaremos então de **Termo Geral do Binômio** que está na posição **p+1**, o termo

$$T_p + 1 = \binom{n}{p}\ a^{n-p}b^p$$

Vamos encontrar o coeficiente do termo x^4 da expansão de $(2x+4)^6$. O termo geral para esta expansão é:

$$T_p + 1 = \binom{6}{p}\ (2x)^{6-p}4^p$$

Como o expoente de x do termo desejado é 4 então temos que 6-p= 4 $\leftrightarrow$ p=2. Então, o termo geral para p=2 é:

$$T_2 + 1 = T_3 = \binom{6}{2}\ (2x)^{6-2}4^2 = 15 \cdot 2^4 \cdot x^4 \cdot 4^2 = 3840x^4$$

Sendo 3840 o coeficiente procurado.

EXERCÍCIOS

1. Desenvolva os binômios:
   (a) $(x+y)^5$
   (b) $(2a-b)^4$
   (c) $\left(2x-\frac{y}{4}\right)^6$
   (d) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^4$

2. Calcule o valor das expressões a seguir:
   (a) $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$
   (b) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}-\binom{4}{3}-\binom{4}{4}$

3. Simplifique:
   (a) $\binom{2+8}{2}+\binom{2+8}{2+1}-\binom{2+8+1}{8}=$
   (b) $\binom{r+s}{s}+\binom{r+s}{s+1}-\binom{r+s+1}{r}=$

4. Resolva as equações a seguir:
   (a) $\binom{4a+2}{6}=\binom{4a+1}{a+1}+\binom{4a+1}{a+2}$
   (b) $\binom{6}{t}=\binom{4}{2t}$

5. Determine a soma dos coeficientes dos termos nos desenvolvimentos dos binômios:
   (a) $(7a-6b)^6$
   (b) $(3x-4y)^7$
   (c) $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^9$
   (d) $(-7x+9y)^8$

6. Determine o coeficiente do termo a^5 no desenvolvimento da expressão:
   $(a+1)^5+(a+1)^6+(a+1)^7$

7. Qual é o oitavo termo do desenvolvimento do binômio $\left(-2x+\frac{1}{3}\right)^{10}$

8. Determine o termo central e calcule, caso exista, o termo independente de x (termo sem parte literal) no desenvolvimento dos seguintes binômios:
   (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-4\right)^4$
   (b) $(y^2+3)^6$
   (c) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-x^3\right)^8$

9. No desenvolvimento do binômio $\left(x^2 - \frac{2}{y}\right)^{20}$, com expoentes decrescentes de x, qual é o termo em x^{18}

10. Usando a definição de número binomial, mostre que as igualdades são verdadeiras:
   (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
   (b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

2.2 Triângulo de Pascal

Para realizarmos a expansão do binômio precisamos calcular seus coeficientes que contém expressões da forma $\binom{n}{p}$. Para facilitarmos este processo, construiremos uma tabela de formato triangular que recebe o nome **Triângulo de Pascal**. Para isto, vamos dispor os elementos em linhas e colunas de forma que o elemento da n-ésima linha e p-ésima coluna será dado por $\binom{n}{p}$. Ou seja,

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \text{Coluna } 0 & \text{Coluna } 1 & \text{Coluna } 2 & \text{Coluna } 3 & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\text{Linha } 0 \quad \longrightarrow & \binom{0}{0} & & & & \\
\text{Linha } 1 \quad \longrightarrow & \binom{1}{0} & \binom{0}{1} & & & \\
\text{Linha } 2 \quad \longrightarrow & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\text{Linha } 3 \quad \longrightarrow & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Calculando esses termos utilizando a definição apresentada no capítulo anterior, obtemos o **Triângulo de Pascal**:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Para montar o triângulo de maneira prática utilizaremos a seguinte propriedade de números binomiais apresentada na seção 4 do capítulo anterior.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Esta propriedade diz que ao somarmos dois elementos consecutivos de uma linha $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ obtemos o elemento imediatamente abaixo do segundo $\binom{n+1}{p+1}$. Po exemplo:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
1 & + & 1 & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
1 & & 3 & & 3 & + & 1 & & & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

Com esta propriedade não precisamos calcular os termos do triângulo de maneira mais ágil sem precisar utilizar a definição. Note que os termos da n-ésima linha do triângulo correspondem aos coeficientes da expansão do Binômio de Newton na potência n. Ou seja,

$(a+b)^1 = a+b$
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+b^2$
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
Sendo assim, para realizarmos a expansão do binômio basta apenas olharmos para a linha desejada do Triângulo de Pascal. A relação descrita acima nos permite demonstrar o **Teorema das Linhas**: A soma dos elementos da n-ésima linha do triângulo é igual a 2^n. Ou seja,

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Para esta demonstração vamos olhar para a expansão de $(1+1)^n$:

$$(1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^{n-p}\, 1^p$$

Ora, $(1+1)^n = 2^n$ e $1^{n-p} = 1^p = 1$ para quaisquer n e p naturais. Sendo assim, da igualdade acima temos,

$$2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^{n-p}\, 1^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1 \cdot 1 = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$$

Demonstrando o **Teorema das Linhas**.
Outras propriedades do triângulo serão enunciadas e terão suas demonstrações como exercício.

EXERCÍCIOS

1. Quantos elementos têm a oitava linha do triângulo de Pascal? Qual é a soma desses elementos?

2. Determine a soma de todos os elementos do triângulo de Pascal até a linha 7.

3. Uma das propriedades do triângulo de Pascal é chamada de **Soma das Colunas**,

enunciada a seguir:

"A soma dos elementos da coluna k, desde o primeiro termo até o elemento da linha n, é igual a $\binom{n+1}{k+1}$*"*

Um exemplo dessa propriedade seria a igualdade:

$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}=\binom{7}{4}$

Escreva o triângulo de Pascal até a linha 7 e verifique com três exemplos a propriedade descrita acima.

4. Outra propriedade do triângulo de Pascal é chamada de **Soma das Diagonais**, enunciada a seguir:

   "A soma dos elementos da diagonal n, desde o primeiro termo até o k-ésimo elemento, é igual a $\binom{n+k}{k-1}$*"*

   Um exemplo dessa propriedade seria a igualdade:

   $\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}=\binom{6}{3}$

   Escreva o triângulo de Pascal até a linha 7 e verifique com três exemplos a propriedade descrita acima.

5. Aplicando o cálculo da soma dos elementos de uma mesma coluna, obtenha o valor da expressão a seguir:

   $[\binom{6}{6}+\binom{7}{6}+\binom{8}{6}+\binom{9}{6}+\binom{10}{6}]$ / $\binom{11}{5}$ - 2 =

Retomando a Introdução

Para a solução do problema apresentado no começo do capítulo, vamos pensar em como podemos representar as escolhas das pessoas. Se temos duas salas, podemos referenciar a primeira como sendo a sala "a" e a segunda como a sala "b". Sendo assim a escolha que temos que fazer é entre colocar uma pessoa na sala "a" ou na sala "b". Note que essas escolhas são análogas às escolhas da expansão do binômio. Podemos escolher para a primeira pessoa a sala "a" ou "b", para a segunda pessoa a mesma coisa e assim por diante. Sendo assim, podemos representar as possíveis distribuições das 5 pessoas nas salas "a" e "b" pela seguinte expansão:

$$(a+b)^5 = 1a^6 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + b^5$$

Onde o coeficiente $\binom{n}{p}$ da potência $a^{n-p}b^p$ representa o número de maneiras de colocar $n-p$ pessoas na sala "a" e p pessoas na sala "b". Se queremos o número total de formas de fazermos isto, basta somar os coeficientes das potências e, pelo teorema das linhas, temos:

$$\sum_{p=0}^{5} \binom{5}{p} = 2^5 = 32 \text{ maneiras}$$

Uma maneira análoga de resolver o problema seria pensando nas opções das pessoas. Para a primeira pessoa temos 2 opções de sala para colocá-la, para a segunda também e assim sucessivamente. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

A vantagem da expansão do binômio em relação ao segundo método é que temos de maneira explicita as formas de se distribuir e o número de maneiras que podemos realizar cada uma dessas distribuições.

EXERCÍCIOS DE VESTIBULAR

1. (Fgv 2013) Desenvolvendo-se o binômio $P(x) = (x+1)^5$, podemos dizer que a soma de seus coeficientes é
   (a) 16
   (b) 24
   (c) 32
   (d) 40
   (e) 48
2. (Espcex (Aman) 2015) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$, é igual a
   (a) 110
   (b) 210
   (c) 310
   (d) 410
   (e) 510
3. (Fgv 2012) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{x^3}\right)^{12}$,é
   (a) 26
   (b) 169
   (c) 220
   (d) 280
   (e) 310
4. (FEI-SP) A soma de todos os coeficientes do desenvolvimento de $(14x - 13y)^{237}$ é:
   (a) 0
   (b) 1
   (c) -1
   (d) 331.237
   (e) 1.973.747
5. (UNIVALI-SC) Desenvolvendo o binômio $(x^2-2)^5$, temos $x^{10} + mx^8 + 40x^6 - 80x^4 + 80x^2 + n$, portanto m+n é:
   (a) 40
   (b) 42
   (c) -99
   (d) -42
   (e) -48
6. (CESGRANRIO-RJ) No desenvolvimento de $(x+y)^n$ a diferença entre os coeficientes do terceiroo e do segundo termos é igual a 54. Podemos afirmar que o termo central:
   (a) é o quinto termo
   (b) é o sexto termo
   (c) é o sétimo termo
   (d) é o oitavo termo
   (e) não possui termo central
7. (UFOP-MG) Para que se tenha um dos termos do desenvolvimento de $(x+a)^{11}$ igual a $1.386x^6$, o valor de a deve ser:
   (a) $\sqrt[6]{3}$
   (b) $2\sqrt[6]{3}$
   (c) $\sqrt{10}$
   (d) 3
   (e) $\sqrt[3]{10}$
8. (FEI-SP) No desenvolvimento de $(1+2x^2)^6$, o coeficiente de x^8 é:
   (a) 60
   (b) 120

(c) 240
(d) 480
(e) 960

9. (PUC-MG) No desenvolvimento do binômio $\left(x - \frac{a}{x}\right)^6$, o coeficiente do termo em x^4 é 12. O valor de a é:
(a) -3
(b) -2
(c) -1
(d) 2
(e) 3

10. (UFES) Qual o termo central de $(x-3)^6$?
(a) $-540x^3$
(b) $-3240x^3$
(c) $3240x^3$
(d) $540x^3$
(e) $540x^4$

11. (Pucrs 2005) No triângulo de Pascal

n=0 1
n=1 1 1
n=2 1 2 1
n=3 1 3 3 1
n=4 1 4 6 4 1
...

a soma dos elementos da linha n com os da linha n+1 é
(a) $n.(n+1)$
(b) $2^n.2^{n+1}$
(c) 3.2^n
(d) 2.2^{n+1}
(e) $3^n.2^{n+1}$

Bibliografía

Books

- GREENE, W.H. (2003) “Econometric Analysis”5ª edición. Prentice Hall N.J. Capítulo 21

- WOOLDRIDGE, J.M. (2010) “Introducción a la Econometría: Un Enfoque Moderno". 4ª edición. Cengage Learning. Capítulo 17

- R. B. J. T. Allenby, Alan Slomson. (2010) "How to count : an introduction to combinatorics"

- José Plínio O. Santos, Margarida P. Mello, Idani T. C. Murari (2007) "Introdução à análise combinatória"

- FERNANDEZ, P.J. Introdução à teoria das probabilidades. LTC-Livros Técnicos e Científicos. Editora Universidade de Brasília, 1973.

- HOEL, P.G., PORT, S.C. E STONE, C.J. Introdução à teoria das Probabilidades. Rio de Janeiro: Livraria Interciência, 1978.

- MORGADO, Augusto César; et al. Análise combinatória e probabilidade. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2001.

- FIGUEIREDO, Luiz Manoel. Matemática Discreta. Vol 1 e 2. 3. ed. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj/Consórcio Cederj, 2005.

- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David Mauro; PÉRIGO, Roberto. Matemática. São Paulo: Atual, 1997. 651p.

- LIPSCHUTZ, Seymour. Probabilidade. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil LTDA, 1972.

- MIRSHAWKA, Victor; SONNINO, Sérgio. Elementos de análise combinatória. 4.ed. São Paulo: Nobel, 1967. 106p.