MA225 - TRABALHO 1
ANÁLISE VERTICAL
LIVRO MATEMÁTICA MACHADO

GRUPO A
David R. B. L. Silva - RA: 042885
Douglas S. do Carmo - RA: 138265
Fernanda A. de Oliveira - RA: 146049
Juscier A. M. de Melo - RA: 091815

Setembro 2016

INTRODUÇÃO

O objetivo do trabalho é analisar verticalmente o livro Matemática Machado, propondo, quando possível, soluções para os problemas encontrados.
O autor do livro, Antonio dos Santos Machado, é licenciado em Matemática pelo IME - USP, mestre em Estatística pelo IME - USP, professor assistente do IME - USP e professor do curso Integraus - São Paulo.
Nosso grupo escolheu a Parte 4 do livro que é denominada de Álgebra e trata sobre Estudo das matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares.
A análise será feita com base em uma metodologia baseada na proposta do matemático Elon Lages Lima em seu texto "Fundamentos para a análise dos livros-texto de Matemática para o Ensino Médio", exibindo críticas e propondo possíveis soluções.

METODOLOGIA

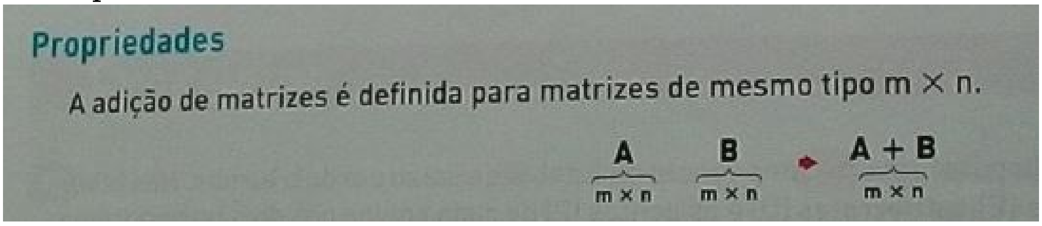
Para a análise dos livros didáticos de Matemática optamos por seguir em partes a metodologia proposta pelo Elon Lages Lima em seu texto Fundamentos para a Análise dos Textos com algumas adaptações dentro dos três componentes apontados por ele como os principais. Sendo assim, seguimos com três pilares: Conceituação, Manipulação e Aplicação, e além desses, um pilar para Elogios. A Conceituação está dividida em 5 tópicos, Manipulação em 2 tópicos e Aplicação em 3 tópicos.

Conceituação:

E1 Erro de definição:
Os erros de definição podem ser considerados erros críticos, pois levam o leitor a ter um conceito errado sobre tal assunto. Pontuamos os erros de definição como aqueles que possuem:

- conceitos mal formulados
- falha na lógica da definição, ao invés da definição ser completa em si, ela utiliza de obrigatoriedades que não aparecem em seu critério.
- imprecisão, quando a definição não está clara e inteligível do que se está definindo.

Exemplo:



Propriedades

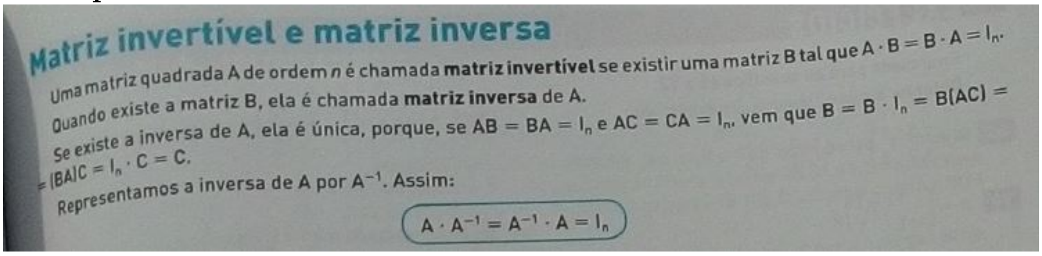
A adição de matrizes é definida para matrizes de mesmo tipo m × n.

$$\underbrace{A}_{m \times n} \quad \underbrace{B}_{m \times n} \rightarrow \underbrace{A+B}_{m \times n}$$

E2 Erro na Língua Portuguesa

Decidimos inserir esse tópico apenas para apontar os erros de português mais evidentes.

Exemplo:



Matriz invertível e matriz inversa

Uma matriz quadrada A de ordem n é chamada **matriz invertível** se existir uma matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Quando existe a matriz B, ela é chamada **matriz inversa** de A.

Se existe a inversa de A, ela é única, porque, se $AB = BA = I_n$ e $AC = CA = I_n$, vem que $B = B \cdot I_n = B(AC) = (BA)C = I_n \cdot C = C$.

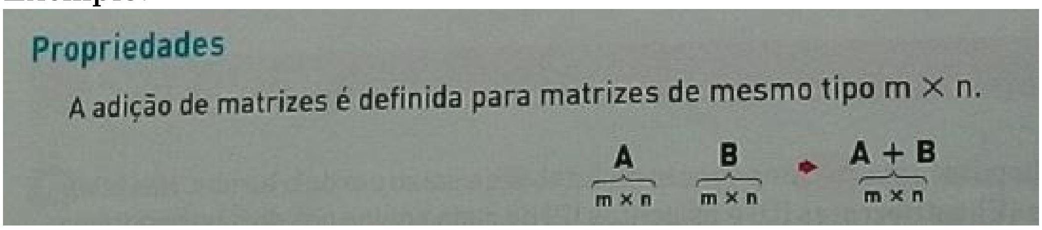
Representamos a inversa de A por A^{-1}. Assim:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

C1 Linguagem inadequada

Os problemas de linguagem inadequada são aqueles que utilizam de um descaso com a idade para qual o livro é proposto. Muitas vezes tal linguagem é formal demais, levando o aluno a não compreender o que está escrito nos textos ou simplista demais, deixando buracos e falhas em pontos importantes do que se está expondo.

Exemplo:



Propriedades

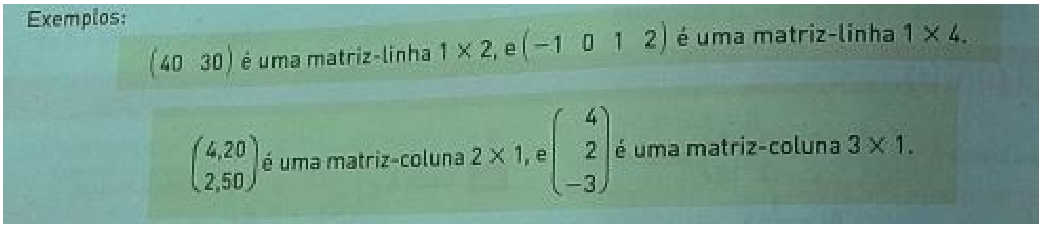
A adição de matrizes é definida para matrizes de mesmo tipo m × n.

$$\underbrace{A}_{m \times n} \quad \underbrace{B}_{m \times n} \rightarrow \underbrace{A+B}_{m \times n}$$

C2 - Estruturação

Os erros de estruturação são aqueles que vemos ao observar uma página mal organizada, uma passagem de tópicos/seções não linear, etc.

Exemplo:



Exemplos:

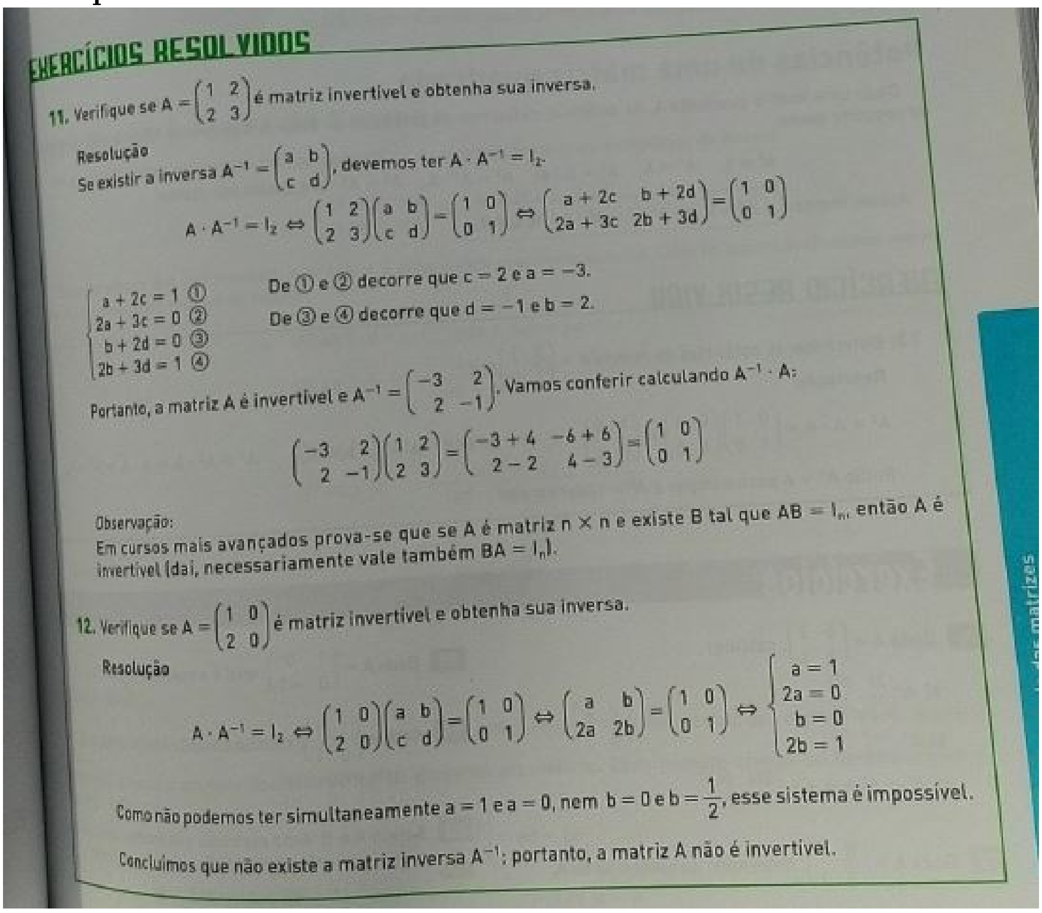
$\begin{pmatrix} 40 & 30 \end{pmatrix}$ é uma matriz-linha 1×2, e $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz-linha 1×4.

$\begin{pmatrix} 4{,}20 \\ 2{,}50 \end{pmatrix}$ é uma matriz-coluna 2×1, e $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ é uma matriz-coluna 3×1.

C3 - Falta algo

Esse tópico se refere a quando o autor deveria ter colocado uma observação, um exemplo, um comentário para complementar o assunto e não o colocou.

Exemplo:



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

11. Verifique se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ é matriz invertível e obtenha sua inversa.

Resolução

Se existir a inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, devemos ter $A \cdot A^{-1} = I_2$.

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2c = 1 & (1) \\ 2a + 3c = 0 & (2) \\ b + 2d = 0 & (3) \\ 2b + 3d = 1 & (4) \end{cases}$$

De (1) e (2) decorre que $c = 2$ e $a = -3$.
De (3) e (4) decorre que $d = -1$ e $b = 2$.

Portanto, a matriz A é invertível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vamos conferir calculando $A^{-1} \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 4 & -6 + 6 \\ 2 - 2 & 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observação:
Em cursos mais avançados prova-se que se A é matriz $n \times n$ e existe B tal que $AB = I_n$, então A é invertível (daí, necessariamente vale também $BA = I_n$).

12. Verifique se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ é matriz invertível e obtenha sua inversa.

Resolução

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a = 0 \\ b = 0 \\ 2b = 1 \end{cases}$$

Como não podemos ter simultaneamente $a = 1$ e $a = 0$, nem $b = 0$ e $b = \frac{1}{2}$, esse sistema é impossível.

Concluímos que não existe a matriz inversa A^{-1}; portanto, a matriz A não é invertível.

Manipulação:

M1 Obscuridade

A obscuridade durante a exemplificação de um exercício proposto é encontrada quando o autor pula passos pressupondo que o leitor já deva saber o que foi feito. Tais passos que, muitas vezes, não são óbvios ao leitor são tratados sem devida atenção e deixam lacunas na resolução.

Exemplo:

Quando algum dos coeficientes, *a*, *b*, *c* ou *d*, é nulo, é fácil resolver o sistema. Caso os quatro coeficientes sejam não nulos, podemos resolvê-lo assim:

M2 Manipulações desnecessárias

As manipulações desnecessárias são aqueles exemplos que poderiam ser deixados de lado para se ganhar tempo em outro que seria mais interessante e mais abrangente ao tema.

O excesso de exemplos repetidos leva o leitor a pensar que todos os exercícios/problemas sobre tal assunto serão apenas como aquele.

Exemplo:

Determinante de matriz n × n

Veremos agora uma regra (definição) para calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem n qualquer, $n \in \mathbb{N}^*$, aos quais nos referimos como "determinantes de ordem n". Segundo essa definição, utilizando os determinantes de 1ª ordem podemos calcular os de 2ª ordem, utilizando os de 2ª ordem calculamos os de 3ª ordem e assim por diante. Trata-se, portanto, de uma definição por recorrência: para calcular um determinante de ordem n, recorremos aos de ordem $n - 1$.

Definição

A toda matriz quadrada A associamos um número chamado **determinante de A**, que indicaremos por **det A**, de acordo com a seguinte regra:

1ª) Se $A = (a_{11})$, então $\det A = a_{11}$.

2ª) Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $n \geq 2$, então $\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$

em que C_{1j}, $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, representa o produto de $(-1)^{1+j}$ pelo determinante da matriz obtida eliminando em A a linha 1 e a coluna j.

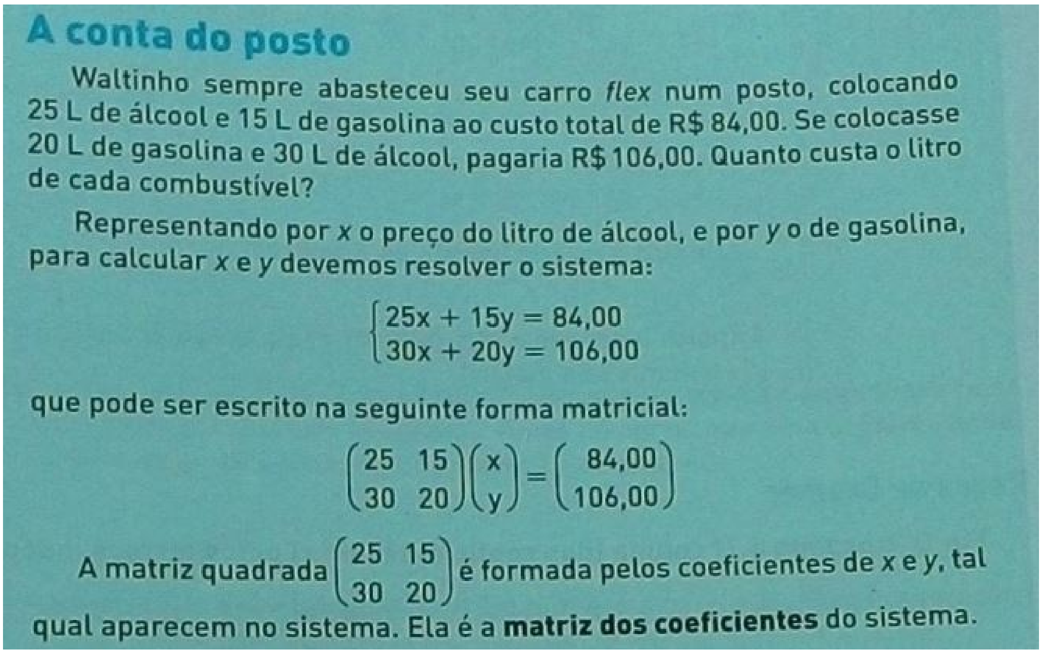
Nota: O número C_{1j} é chamado cofator do elemento a_{1j}. Segundo a definição, para calcular det A devemos multiplicar cada elemento da 1ª linha pelo seu cofator e somar os resultados.

Aplicação:

A1 Contexto

Muitos dos exercícios propostos estão fora de contexto com a realidade.

Exemplo:



A conta do posto

Waltinho sempre abasteceu seu carro *flex* num posto, colocando 25 L de álcool e 15 L de gasolina ao custo total de R$ 84,00. Se colocasse 20 L de gasolina e 30 L de álcool, pagaria R$ 106,00. Quanto custa o litro de cada combustível?

Representando por x o preço do litro de álcool, e por y o de gasolina, para calcular x e y devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 25x + 15y = 84{,}00 \\ 30x + 20y = 106{,}00 \end{cases}$$

que pode ser escrito na seguinte forma matricial:

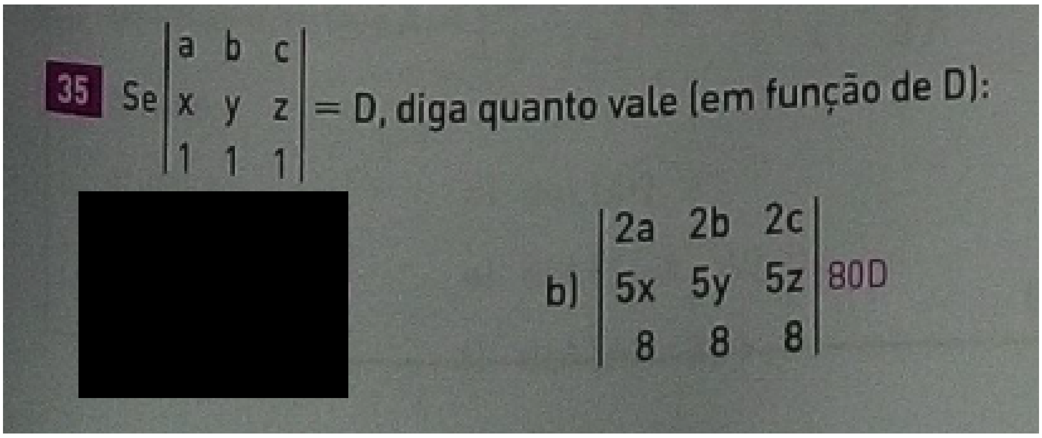
$$\begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 30 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84{,}00 \\ 106{,}00 \end{pmatrix}$$

A matriz quadrada $\begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 30 & 20 \end{pmatrix}$ é formada pelos coeficientes de x e y, tal qual aparecem no sistema. Ela é a **matriz dos coeficientes** do sistema.

A2 Dificuldade

Alguns exercícios possuem uma dificuldade muito superior a exemplificada e, caso não haja o acompanhamento de uma pessoa com conhecimento adequado, o leitor não irá conseguir resolver tal exercício. Outro problema que estará contemplado nesse item é o caso do exercício estar muito fácil, no entanto, poderia ser cobrado algo um pouco mais complexo.

Exemplo:



35 Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = D$, diga quanto vale (em função de D):

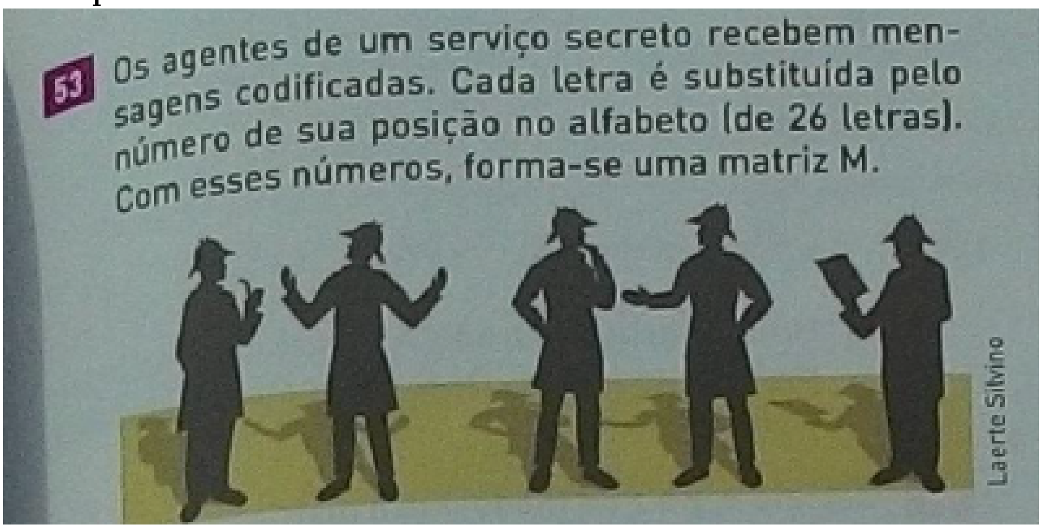
[redacted]

b) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 5x & 5y & 5z \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}$ 80D

A3 Ambiguidade

Enunciados que possuem ambiguidade e não são claros no que deve ser feito pelo leitor, deixando margem para uma interpretação equivocada e, muitas vezes, diferente da interpretação de outra pessoa, sendo que ambas podem ter razão.

Exemplo:



53 Os agentes de um serviço secreto recebem mensagens codificadas. Cada letra é substituída pelo número de sua posição no alfabeto (de 26 letras). Com esses números, forma-se uma matriz M.

Elogios:

E Elogios

Separamos um tópico para inserir os elogios em relação ao livro, seja quanto a exercícios ou exemplos bons, seja a didática, a forma da abordagem etc.

ANÁLISE DO LIVRO

CAPÍTULO 17 - Estudo das Matrizes

Noção de Matriz. Representação

- Página 280

C1 O autor usa a palavra tipo no lugar de ordem para descrever o tamanho da matriz.
Exemplo: Matriz do tipo m x n, enquanto o mais adequado seria matriz de ordem m x n.

C3 É dito quantos elementos existem em uma matriz de uma determinada ordem, mas sem a explicação simples que basta apenas multiplicar o número de linhas pelo número de colunas.

- Página 281

M2|A2 Questão 9 muita confusa e fora de contexto.

Igualdade

- Página 281

E1 O autor não usou a forma lógica de equivalência na definição de igualdade de matrizes.

- Página 282

E1 Coloca-se a igualdade de matrizes em forma lógica equivocada de implicação, enquanto deveria ser de equivalência, colocando o antecedente como consequente do argumento.

Adição de Matrizes

- Página 284

E1 O autor coloca a soma de matrizes em forma lógica equivocada de implicação, enquanto deveria ser de equivalência, faltando o recíproco da ordem na soma.

Multiplicação de número por matriz

- Página 287

E1 A forma lógica da multiplicação de números por matriz não deveria ser dado por implicação, teria que trocar o "se"pelo "dado"na definição e depois dado a igualdade como ":=".

Multiplicação de número por matriz

- Página 288

A1 Exemplo: "O custo do lanche da excursão"
O exemplo possui uma contextualização que não é absurda, porém, acreditamos que utilizar tabelas para ensinar multiplicação de matrizes não é um bom método, já que cada linha e coluna da tabela representará algo cotidiano, ao contrário das linhas e colunas da matriz. Além disso, o exemplo é artificial, de forma que o aluno acredite que a multiplicação de matrizes é "inútil", pois o exemplo em questão é facilmente respondido de outras formas, mostrando claramente que a utilização da multiplicação de matrizes para resolução é um método forçado.

C2 Explicação de matriz-linha e matriz-coluna abaixo do exemplo "O custo do lanche da excursão"
A nota deveria estar na caixa amarela, e não nos exemplos, pois ela é a generalização da explicação, isto é, ela deveria estar mais destacada que os exemplos.

M1 Exemplo: "O resultado do concurso"
A resolução poderia estar melhor explicada e não apenas calculada pela tabela. Novamente o problema da multiplicação de matrizes utilizando tabelas.

- Página 289 - 290

M1|C3 A explicação da multiplicação de matrizes, ou seja, a generalização não é explicada, apenas inserida como um novo tópico. Além disso, não se relaciona a multiplicação com a adição de matrizes.

A2 Os exercícios resolvidos e os exercícios são fáceis, não exigindo um pouco mais dos alunos. Alguns exercícios um pouco mais complicados poderiam fazer parte do capítulo.

A2 Exercícios resolvidos

O exercício resolvido número 6 é bastante fácil e pouco motivador para os alunos pois se trata sempre de matrizes 1 x n ou n x 1. Além disso, apesar de ter explicado acima sobre a relação entre o número de linhas da matriz à esquerda e o número de colunas da matriz à direita, acreditamos que seria importante sinalizar melhor isso ao resolver os exercícios, assim como foi feito no item c) deste mesmo exercício, explicando porque AD não existe.

O exercício resolvido 7 é ótimo para exibir aos alunos que a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, sejam A e B matrizes, em que o número de linhas de A é igual ao número de colunas de B, nem sempre vale que AB = BA.

Assim como no exercício resolvido 6, no 7 seria interessante sinalizar melhor a relação entre o número de linhas da matriz à esquerda e o número de colunas da matriz à direita.

- Página 291

A2 Exercícios

Os exercícios do capítulo, apesar de serem coerentes com os exercícios resolvidos em quesito dificuldade, não são desafiadores para os alunos. Seria interessante possuir alguns exercícios um pouco mais complexos com matrizes de ordem um pouco maior.

- Página 292 - 293

A2|C3 Exercícios resolvidos

Novamente, os exercícios resolvidos são fáceis e com matrizes de ordem no máximo 2. Nesse tópico sobre comutatividade de matrizes, seria interessante salientar que é fácil verificar a propriedade para matrizes de ordem pequena, porém, o teste se torna complicado com matrizes de ordem maior que 5, por exemplo.

A2|A3 Exercícios

Os exercícios do capítulo, apesar de serem coerentes com os exercícios resolvidos em quesito dificuldade, não são desafiadores para os alunos. Seria interessante possuir alguns exercícios um pouco mais complexos.

Outro problema encontrado nesses exercícios é a tentativa de contextualização. Ao analisar o exercício 53, é possível notar o quão falsa é a contextualização. Caso se torne difícil de contextualizar ou fique algo muito irreal, acreditamos que seria melhor deixar um exercício puramente matemático, sem uma "historinha"por trás.

Matriz Identidade

- Página 294

E Após explicar e definir a matriz identidade, o autor inseriu uma nota histórica sobre o símbolo de Kronecker, o que acreditamos ser importante para situar o aluno ou apenas por acrescentar uma curiosidade.

Matriz invertível e matriz inversa

- Página 295

E2 Na explicação de inversa da matriz, as que possuem inversa são chamadas de invertíveis, porém, de acordo com o dicionário, a maneira certa de dizer é matriz inversível. Podemos verificar o padrão na tabela:

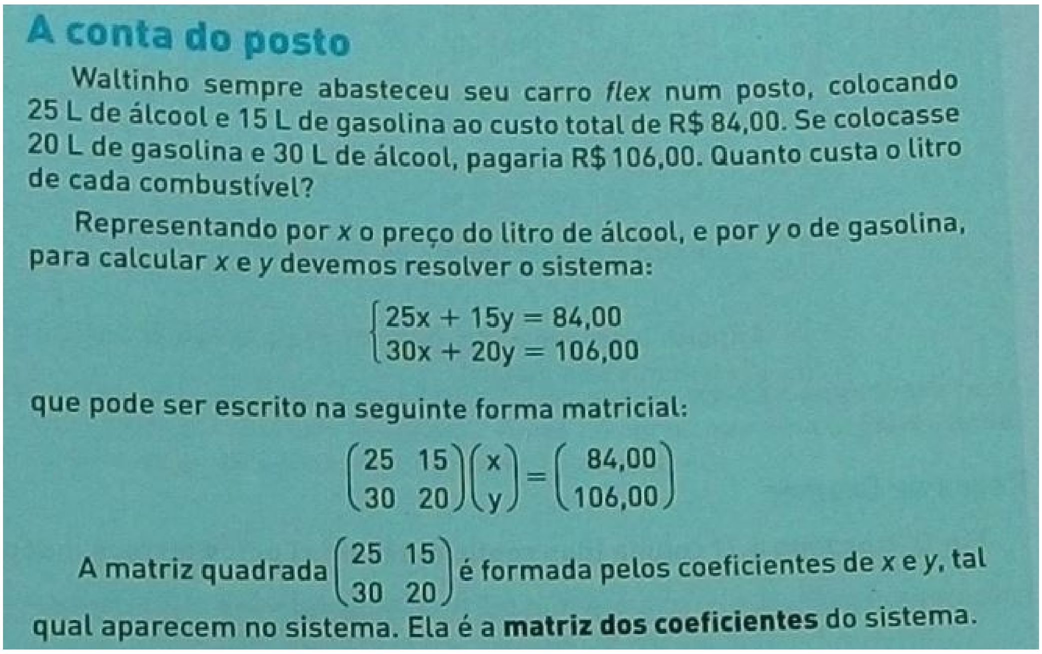
converter	conversão	convertido	convertível	conversível
reverter	reversão	revertido	revertível	reversível
inverter	inversão	invertido	invertível	inversível

C3 Outro problema em relação a inversa é que o autor a explica com um exemplo e dois exercícios resolvidos, onde as matrizes são todas 2 x 2. Acreditamos que um exemplo ou exercício resolvido de uma matriz 3 x 3 seria interessente. E cabe ao autor salientar que a utilização desse método manual se torna complexo e praticamente impossível com uma matriz n x n.

C3 Nesse tópico sobre matrizes inversíveis, seria importante destacar que uma matriz é não-inversível se seu determinante é igual a zero, ou seja, se uma de suas linhas (ou colunas) é múltipla da outra.

CAPÍTULO 18 - Determinantes

- Página 297



A conta do posto

Waltinho sempre abasteceu seu carro *flex* num posto, colocando 25 L de álcool e 15 L de gasolina ao custo total de R$ 84,00. Se colocasse 20 L de gasolina e 30 L de álcool, pagaria R$ 106,00. Quanto custa o litro de cada combustível?

Representando por x o preço do litro de álcool, e por y o de gasolina, para calcular x e y devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 25x + 15y = 84{,}00 \\ 30x + 20y = 106{,}00 \end{cases}$$

que pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 30 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84{,}00 \\ 106{,}00 \end{pmatrix}$$

A matriz quadrada $\begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 30 & 20 \end{pmatrix}$ é formada pelos coeficientes de x e y, tal qual aparecem no sistema. Ela é a **matriz dos coeficientes** do sistema.

A1 O livro começa o capítulo de determinantes com um exemplo de uma matriz sobre o preço de álcool e gasolina uma contextualização falsa, acreditamos que ficaria melhor usar o vestibular (taxas) como exemplo.

Introdução à regra de Cramer

- Página 297 - 298

M1 Na introdução à regra de cramer onde se lê: Quando algum dos coeficientes a, b, c ou d, é nulo é fácil resolver o sistema. O autor não mostra que realmente é fácil e nem coloca exemplo para confirmar este fato, resolveria se o autor desse exemplo mostrando como realmente é fácil ou demonstrasse porque é fácil.

M1 Em seguida o autor dá um exemplo de como resolver um sistema quando os coeficientes forem não nulos, não fica muito claro, pois ele usa apenas linguagem matemática. Resolveria se o autor tivesse escrito um pouco mais sobre as operações a serem feitas

- Página 298

M1 Para a regra de Cramer o autor usa a referência de D e a termos independentes mas na página anterior esses dois objetos não estão claros, logo depois, o autor volta falar de X e Y difícil de entender que é o mesmo X e Y da primeira equação.

Introdução ao cálculo de determinantes

- Página 299

E Um ponto positivo: o autor, no caso do cálculo de determinantes, dá explicitamente a expressão dos cálculo e começa com exemplos simples.

Determinante de Matrz n x n

- Página 301

M2 O autor preocupou-se muito com o formalismo no cálculo do determinante da matriz n x n.

- Página 302

M1 No exemplo resolvido 4 o autor deixa parte da solução a cargo do aluno, pois apresenta apenas a solução.

O teorema de Laplace

- Página 304 e 305

M1 No exemplo resolvido 6 e 7 o autor deixa parte da solução a cargo do aluno, pois apresenta apenas a solução.

Regra de Chió

- Página 306

M1 No exemplo o autor deixa parte da solução a cargo do aluno, pois apresenta apenas a solução.

- Página 307

M1 No exemplo resolvido 8 o autor não faz a solução completa.

Determinante da matriz kA

- Página 309

M2 No exercício resolvido número 10, vemos uma manipulação desnecessária, visto que o mesmo caso para uma matriz 3x3 com k = 10 foi abordado no exercício 32 (página 308). Isto faz com que este exemplo se torne apenas uma repetição do exercício anterior, modificando apenas o valor do determinante.
Para tornar mais produtivo, o exemplo poderia abordar um problema novo e um pouco mais complexo. Como por exemplo o cálculo da determinante no seguinte problema:

Seja a matriz: $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, de $det(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$, calcule o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3x & 3y & 3z \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ em função de $\mathcal{X}$.

A2 Um outro problema identificado nesta seção foi quanto ao exercício 35.b. Podemos observar que a dificuldade apresentada neste exercício está alem do que foi exemplificado ou mostrado em qualquer ponto do conteudo anteriormente, caracterizando então um problema com o nível de dificuldade apresentado pelo exercício.
Para que isso seja resolvido, poderia ser feito o que mostramos logo acima, um exemplo que aborde um problema similar a este proposto, para que o leitor tenha ideia do que deva ser feito.

C2 Um problema que identificamos na transição entre esta seção e a seguinte se encontra com relação ao uso indevido de um exercício. Este problema de estruturação se deve ao exercício 37, da página 309, que deveria servir como um exercício estímulo para o próximo assunto a ser abordado (Determinante do produto de matrizes), como este exercício está no meio dos demais, pode causar o seguinte questionamento "Mas o que esse exercício tem haver com este capítulo?".
Para solucionar este problema, este exercício poderia ser introduzido logo após o título da proxima seção, com um destaque de exercício proposto, talvez, para que o leitor identifique o que ele irá trabalhar nesta seção. E não estar na seção anterior, como o ocorrido.

Determinante do produto de matrizes

- Página 310

M1 Logo no início desta seção vemos um problema de obscuridade na manipulação, feita pelo autor, para demonstrar o porque o $det(\mathcal{A}B) = det(\mathcal{A}) * det(\mathcal{B})$.
O passo que fica um pouco confuso é a transição entre os seguintes passos na demonstração:

$$\begin{aligned}(1)det(A.B) &= amcn + amdq + bpcn + bpdq - ancm - andp - bqcm - bqdp \\ (2)det(A.B) &= ad(mq - np) - bc(mq - np)\end{aligned}$$

Para o leitor identificar que do passo (1) para o passo (2) foram colocados os termos ad e bc em evidência, e como este ficou com sinal negativo, pode ser muito trabalhoso. O autor poderia ter utilizado de um recurso gráfico para identificar estes passos, assim como, deixar mais claro ao leitor.

Determinante da matriz inversa

- Página 311

C3 No inicio desta sessão, podemos observar um pequeno erro do autor ao assumir o determinante da matriz identidade é 1 e dizer que isso é facil de ser verificado e não detalhar este ponto.
"Como $detI = 1$ (isso é fácil de ser verificado)
Tratamos isso como uma obscuridade na abordagem da definição, por assumir que um cálculo é damasiadamente fácil e por isso não merece ser mostrado.

- Página 312

C2 Ao olharmos para os exercícios 42 e 43 servem como uma introdução para o próximo tema a ser abordado. Sendo assim, ocorre novamente o problema de estruturação apontado na sessão Determinantes da matriz kA, quando narramos o ocorrido nos exercícios desta sessão.

Determinante nulo

- Página 312

C1|C3 Na introdução desta sessão, encontramos um erro de linguagem que pode confundir o leitor quanto a propriedade do teorema de Laplace.
Ao dizer que "Quando calculamos um determinante aplicando o teorema de Laplace, procuramos a linha ou coluna que tenha mais zeros. E se todos os elementos de uma linha ou coluna forem nulos,[...]
Neste caso, pelo teorema de Laplace, o determinante é nulo.
Se analisarmos como está escrito, o que entendemos é que o teorema de Laplace define que, para uma matriz em que haja uma linha ou coluna com 0, o determinante é 0 (nulo). Porém a ideia do teorema não é esta, mas sim mostrar como é possível calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem n, para$n \geq 2$.
O fato de ser uma particularidade do teorema para uma linha ou coluna de 0 o determinante ser 0, não quer dizer que o teorema seja, exclusivamente, para definir isso.
Acontece que, para este caso específico, em que há uma linha ou coluna de 0 faz-se necessário demonstrar que o determinante será 0. Caracterizando assim, não apenas um erro de linguagem, mas um problema de obscuridade, pois ele assume que o determinante é zero e não mostra o porque é 0.

- Página 313

M2 Ao encerrar esta sessão, o autor propõe um enigma. Porém, ao lermos o enigma não é possível entender e compreender qual sua relação com matrizes, uma vez que a proposta deste enigma é encontrar a menor distancia entre dois pontos.
Sendo assim, classificamos este erro como uma manipulação desnecessária, pois este enigma não tem relação alguma com o assunto abordado neste capítulo.

CAPÍTULO 19 - Sistemas Lineares

Equação linear - solução

- Página 315

E1 Logo no início desta sessão encontramos um erro, que não é possivel identificar ao certo qual sua modalidade.
Quando o autor vai definir uma equação linear ele descreve: "Uma equação linear a n incógnitas sobre [...]"
A princípio, parece que houve um erro de digitação, pois poderíamos entender como: "Uma equação linear a com n incógnitas sobre [...]". Porém, durante esta sessão e na seguinte, o autor sempre utiliza este termo quando irá utilizar uma equação linear. Logo, nos parece que há um erro de definição;

- Página 316

C2 Ocorre, novamente, nessa sessão o erro de estruturação apontado na sessão Determinantes da matriz kA. Desta vez no exercício 8.

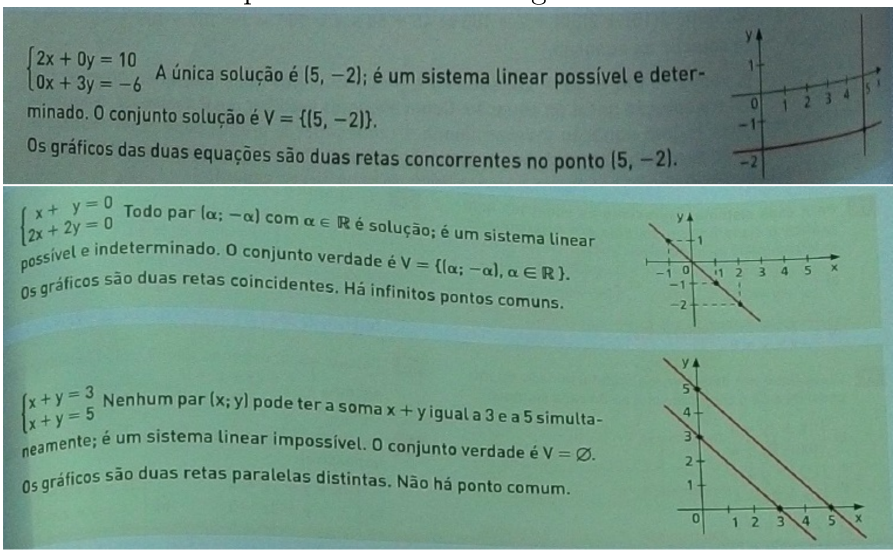
Sistema linear - solução

- Página 316

M1 Para esta sessão temos uma premissa muito importante, que ajudará o leitor a compreender melhor sobre sistemas lineares. Esta é que, espera-se que este tema tenha sido abordado no 7º ano do ensino fundamental, logo os livros deste ano devem servir de material de referência para compreender como é feito o calculo de sistemas lineares. Porém, isto não exclui o autor deste livro de mostrar nos seus cálculos como obteve o resultado para o sistema de equações.
Vemos este problema logo no primeiro exemplo, da página 316, quando o autor não mostra os cálculos utilizados para obter o resultado do sistema linear. Temos então um problema de obscuridade na manipulação.
Esse erro é recorrente para todos os exemplos sequentes tratados nesta sessão.

E Um ponto positivo nestes exemplos foi o uso do gráfico para mostrar a reta formada por cada equação, e o conjunto solução como os pontos de intersecção entre as retas que compõe o sistema.

Conforme podemos ver nas imagens abaixo:



$\begin{cases} 2x + 0y = 10 \\ 0x + 3y = -6 \end{cases}$ A única solução é $(5, -2)$; é um sistema linear possível e determinado. O conjunto solução é $V = \{(5, -2)\}$.

Os gráficos das duas equações são duas retas concorrentes no ponto $(5, -2)$.

$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ Todo par $(\alpha; -\alpha)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ é solução; é um sistema linear possível e indeterminado. O conjunto verdade é $V = \{(\alpha; -\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Os gráficos são duas retas coincidentes. Há infinitos pontos comuns.

$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ Nenhum par $(x; y)$ pode ter a soma $x + y$ igual a 3 e a 5 simultaneamente; é um sistema linear impossível. O conjunto verdade é $V = \varnothing$.

Os gráficos são duas retas paralelas distintas. Não há ponto comum.

CONCLUSÃO

Após realizarmos a análise do livro, concluímos que ele possui uma qualidade abaixo da média devido a quantidade de problemas encontrados.
Dos problemas encontrados, podemos montar a seguinte tabela:

Conceituação	E1	E2	C1	C2	C3	Total
Quantidade	5	1	2	4	7	19

Manipulação	M1	M2	Total
Quantidade	11	4	15

Aplicação	A1	A2	A3	Total
Quantidade	2	7	1	10

Dentre os citados, podemos acrescentar um problema geral que é a apresentação de Matrizes antes da apresentação de sistemas lineares. Visto, segundo os estudos de Arthur Cayley em seu artigo [1] decorre as propriedades de matrizes a partir de sistemas lineares, seria interessante se o autor invertesse os assuntos, de forma a explicar como a Matriz é construída a partir de um Sistema Linear. Com isso, o autor poderia utilizar fatos históricos para descrever o estudo das matrizes e sua origem. Ponto este que não encontramos em nenhum momento, uma nota histórica de matrizes.
Além disso, a contextualização de exercícios utilizando Matrizes não é algo simples, dessa forma, sugerimos que ao invés de contextualizar o exercício ou exemplo de forma falsa, utilize apenas conceitos matemáticos, sem colocar uma história notadamente falsa.
Notamos também que o autor utiliza muitos exercícios e exemplos simples, o que normalmente desmotiva os alunos.
Para concluir, podemos considerar que se feitas as alterações sugeridas por nós, o livro poderia ser melhorado em alguns pontos e seria mais proeficiente tanto para os alunos quanto para os professores.

ANÁLISE ESTATÍSTICA

Na Figura 1 abaixo listamos os tipos de erros encontrados pelo gráfico de setores.

Figura 1: Tipos de erros encontrados

Podemos ver que o erro de conceituação é o mais comum, o que torna o texto de uma certa forma "perigoso", já que esse tipo de erro leva o leitor a ter fundamentos equivocados sobre o assunto.

Na Figura 2 podemos ver quais tipos de erros de aplicação ocorrem mais juntamente com a sua frequência absoluta dada no gráfico de barras.

Podemos ver que o erro de dificuldade (A2) é o mais comum, nesse tipo de erro podemos encontrar passagens ou muito difíceis, o que torna o texto cansativo, ou muito fáceis, o que torna o aprendizado muito raso. Coerência é muito importante para um bom aproveitamento do material.

Na Figura 3 podemos ver quais tipos de erros de Conceituação ocorrem mais juntamente com a sua frequência absoluta dada no gráfico de barras.

Podemos ver que o erro C3 (falta algo!) é o mais frequente, o que compromete a completude do material.

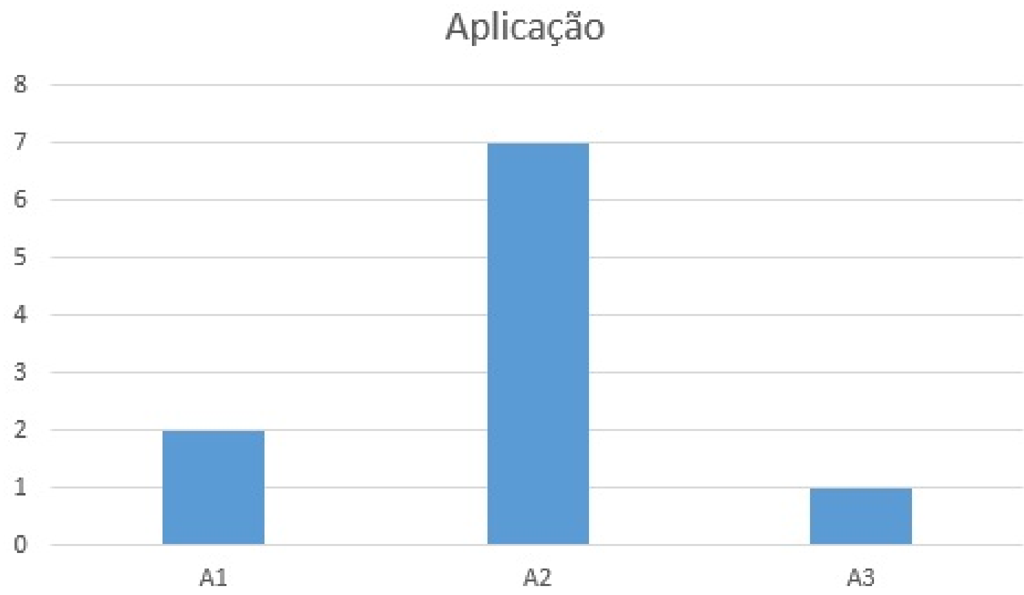


Figura 2: Aplicação

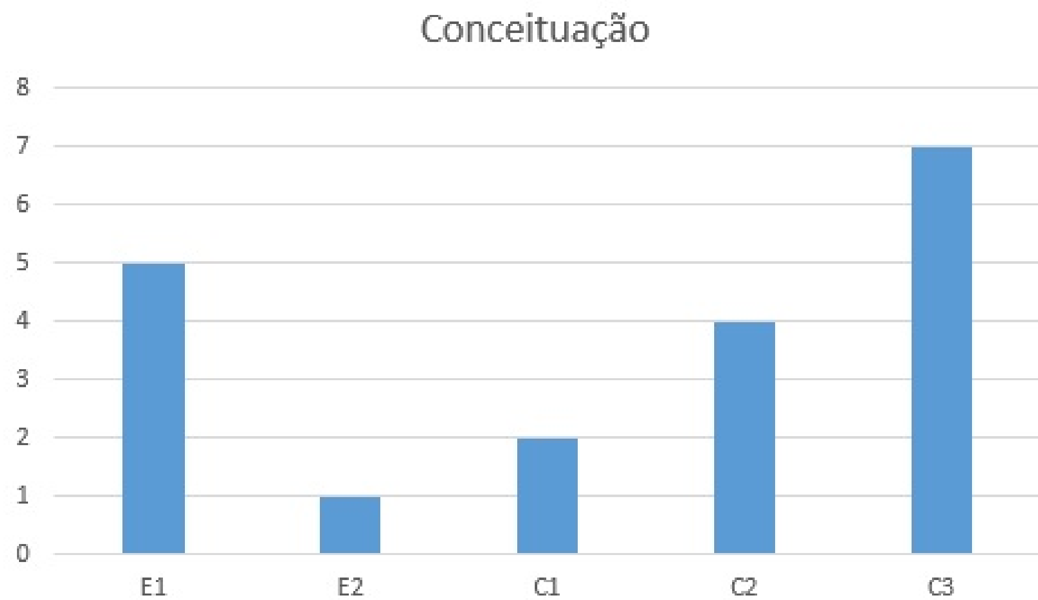


Figura 3: Conceituação

Na Figura 4 podemos ver quais tipos de erros de Manipulação ocorrem mais juntamente com a sua frequência absoluta dada no gráfico de barras.

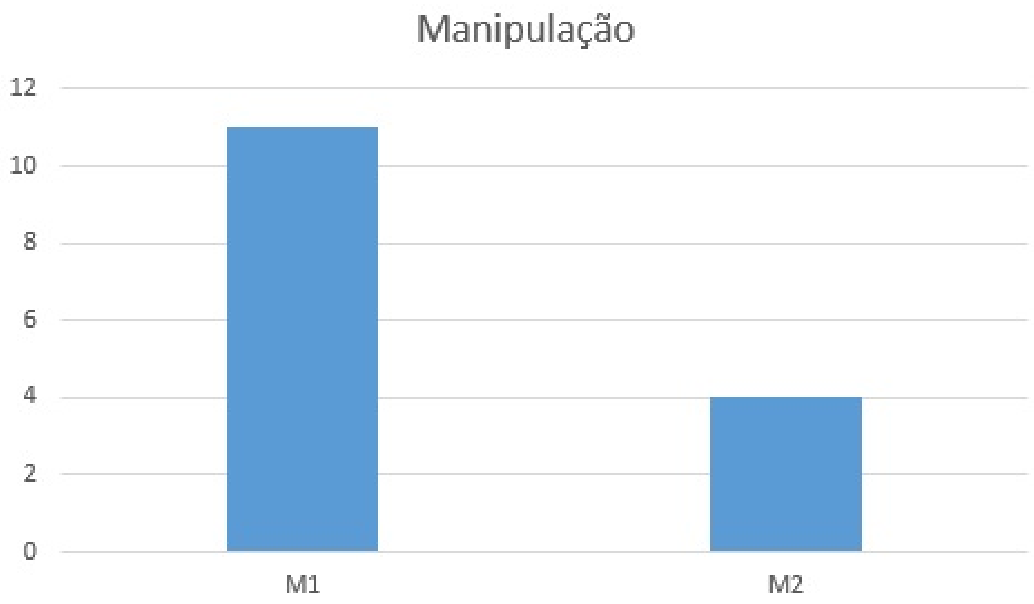


Figura 4: Manipulação

Encontramos o erro de obscuridade (M1) como o mais frequente, esse tipo de erro pode levar o leitor para o próximo passo sem ter conhecimento pleno do passo anterior.

Referências Bibliográficas

[1] Cayley, Arthur. *A Memoir on the Theory of Matrices, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 148 (1858), pp. 17-37*

[2] Machado, Antonio. *Matemática Machado - Volume único, Editora Atual*

[3] Lima, Elon Lages *Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*