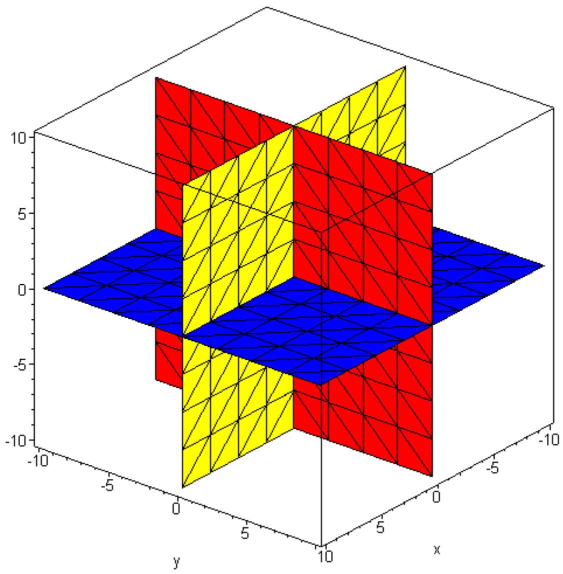
A Matemática no Ensino Médio

Volume 3

Diego Nacimento

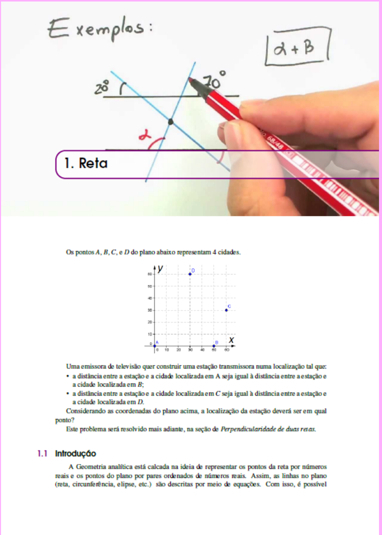


PUBLICADO PELA EDITORA

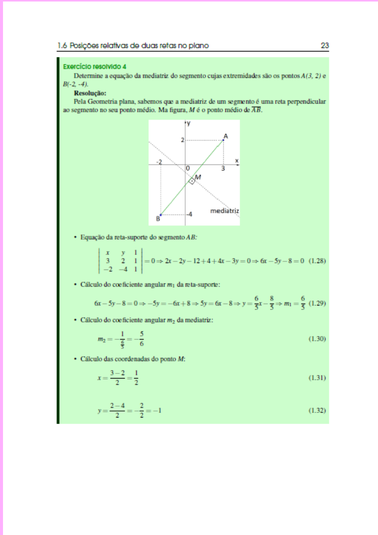
BOOK-WEBSITE.COM

Primeira impressão, junho de 2015

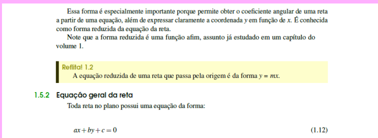
Conhecendo seu livro



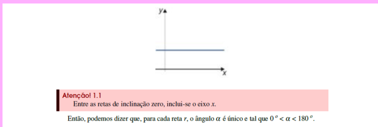
(a) Abrindo o capítulo: Texto introdutório com o objetivo de apresentar, por meio de uma situação real, o conteúdo que será estudado no capítulo.



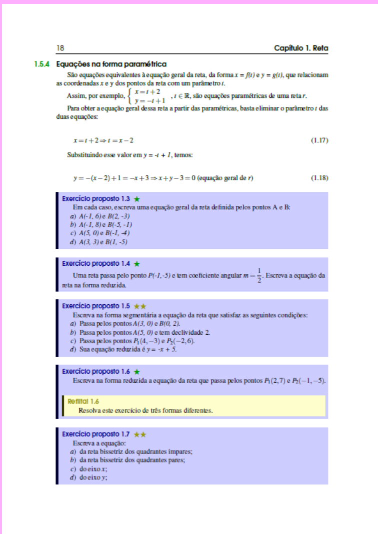
(b) Exercício resolvido passo a passo: Caixas verdes que apresentam, a resolução detalhada de uma questão ou problema. Não são modelos a serem seguidos, mas visam inspirar e indicar estratégias de resolução.



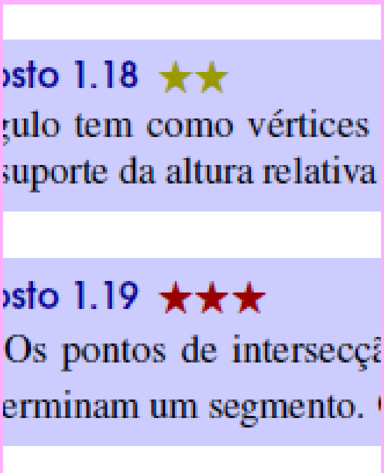
(c) Reflita: Caixas amarelas que trazem questões para reflexão.



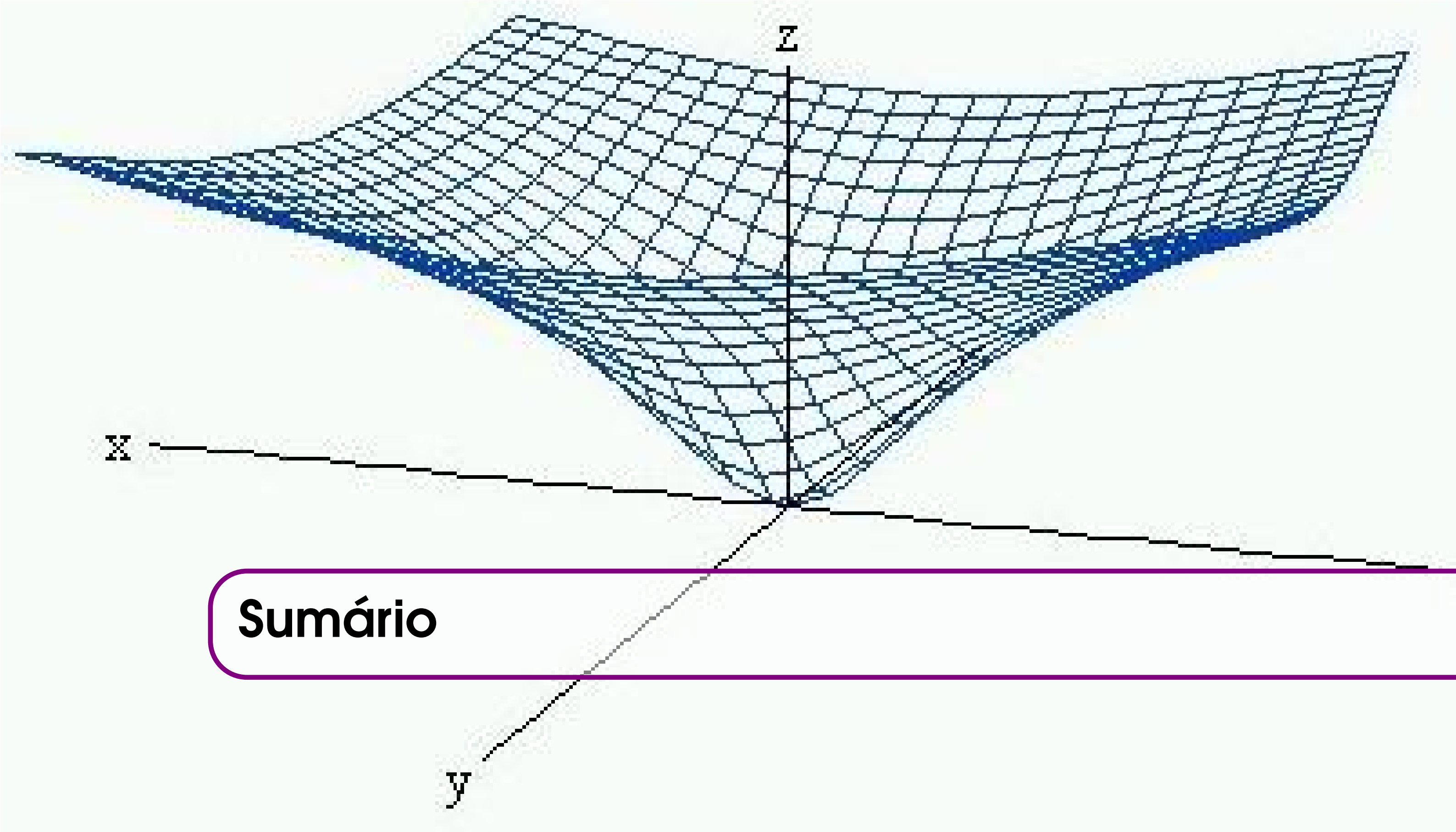
(d) Atenção: Caixas vermelhas que trazem dicas impostantes para o estudo.



(e) Exercícios propostos: Caixas azuis que trazem exercícios essenciais para a aprendizagem. Ajudam a fixar e aprofundar os conteúdos estudados.

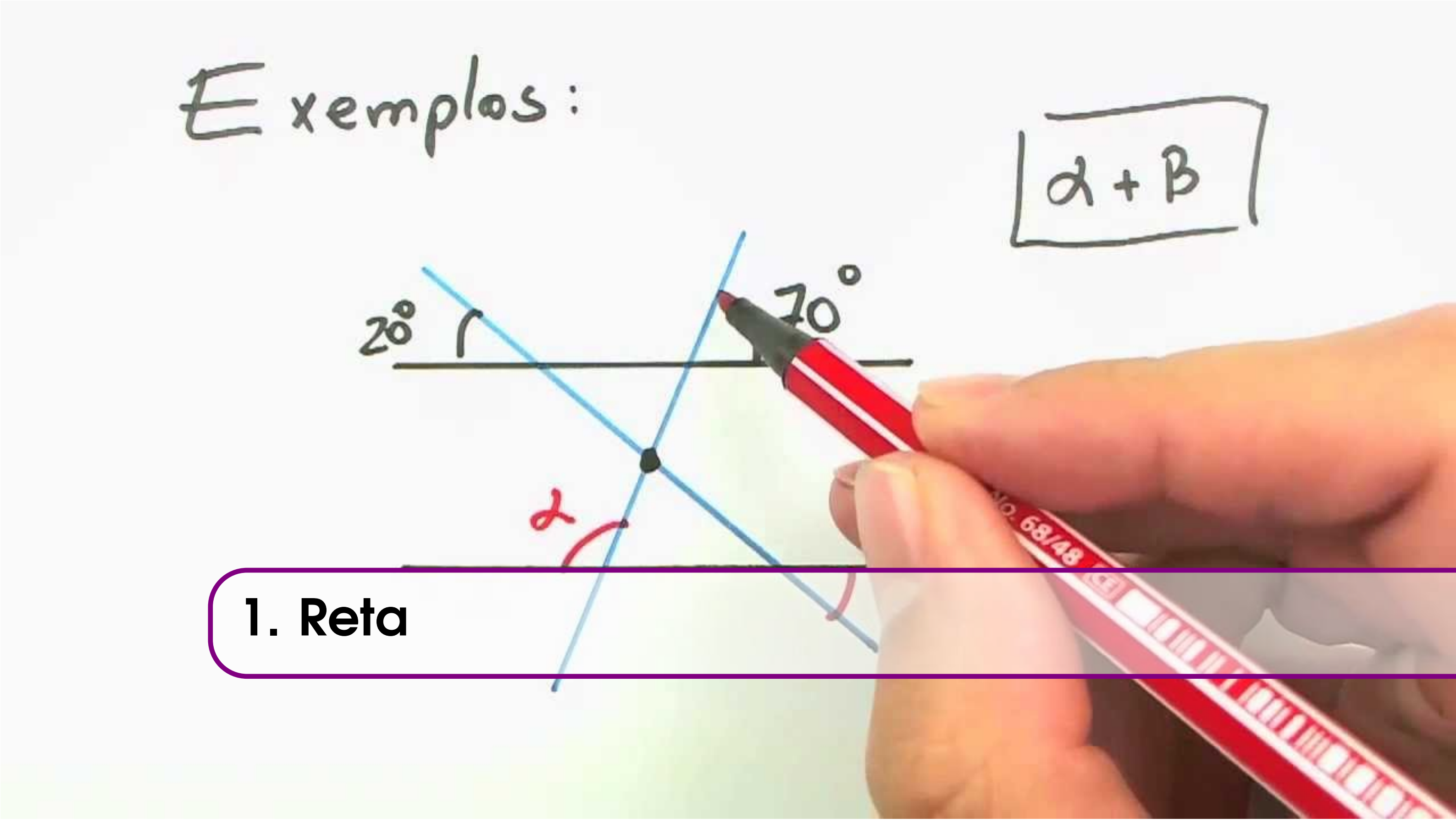


(f) Dificuldade dos exercícios: Estrelas coloridas que classificam os exercícios em Fáceis (★), Médios (★★) e Difíceis (★★★).



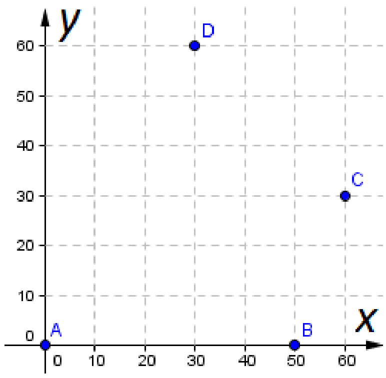
Sumário

Unidade 1



1. Reta

Os pontos A, B, C, e D do plano abaixo representam 4 cidades.



Uma emissora de televisão quer construir uma estação transmissora numa localização tal que:

- a distância entre a estação e a cidade localizada em A seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em B;
- a distância entre a estação e a cidade localizada em C seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em D.

Considerando as coordenadas do plano acima, a localização da estação deverá ser em qual ponto?

Este problema será resolvido mais adiante, na seção de *Perpendicularidade de duas retas*.

1.1 Introdução

A Geometria analítica está calcada na ideia de representar os pontos da reta por números reais e os pontos do plano por pares ordenados de números reais. Assim, as linhas no plano (reta, circunferência, elipse, etc.) são descritas por meio de equações. Com isso, é possível tratar algebricamente muitas questões geométricas, como também interpretar de forma geométrica algumas situações algébricas.

Essa integração entre Geometria e Álgebra foi responsável por grandes processos na Matemática e nas outras ciências em geral.

Em Geometria analítica estudaremos várias figuras (incluindo as que não representam função) e suas propriedades geométricas por meio de processos algébricos (equações, inequações, sistemas, etc.). Para isso, algumas ideias estudadas nos capítulos 3 (Funções) e 4 (Função afim) do volume 1 serão retomadas e aprofundadas e outras serão introduzidas.

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deninida por $f(x) = ax + b$ (ou $y = ax + b$), com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, tem como gráfico uma reta não paralela ao eixo y.

Pela equação é possível estudar propriedades dessa reta, assim como, a partir de uma propriedade da reta, pode-se identificar uma equação.

Exemplos:

1^o) A reta de equação $y = 3x + 7$ é paralela à reta de equação $y = 3x - 8$.

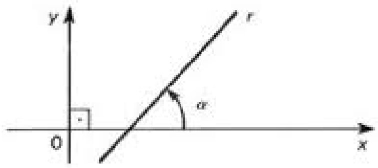
2^o) Se a reta passa pela origem $O(0,0)$, então sua equação é da forma $y = ax$ ou $y = ax + b$, com $b = 0$.

Conteúdo do capítulo: Geometria /Relações Geometria analítica

- Reta: equação e estudo dos coeficientes.

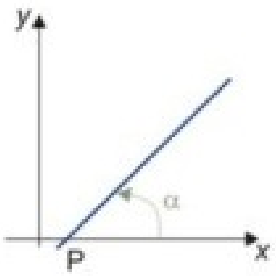
Habilidades esperadas: Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garamtem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas.

1.2 Inclinação de uma reta

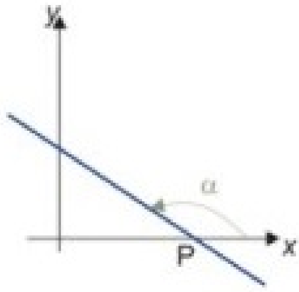


Seja α a medida do ângulo que a reta r forma com o eixo x. A medida α do ângulo é considerada do eixo x para a reta r, no sentido anti-horário, e denomina-se inclinação da reta r.

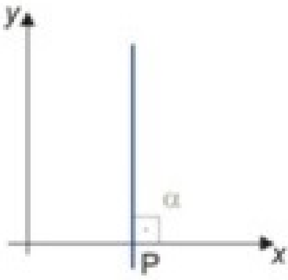
Quanto à inclinação de retas não paralelas ao eixo x, podemos ter:



(a) $0^o < \alpha < 90^o$

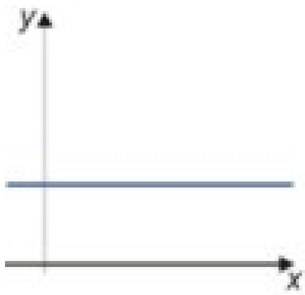


(b) $90^o < \alpha < 180^o$



(c) $\alpha = 90^o$

Se a reta r é paralela ao eixo x, dizemos que sua inclinação é zero, ou seja , $\alpha = 0^o$.



Atenção! 1.1
Entre as retas de inclinação zero, inclui-se o eixo x.

Então, podemos dizer que, para cada reta r, o ângulo α é único e tal que $0^o < \alpha < 180^o$.

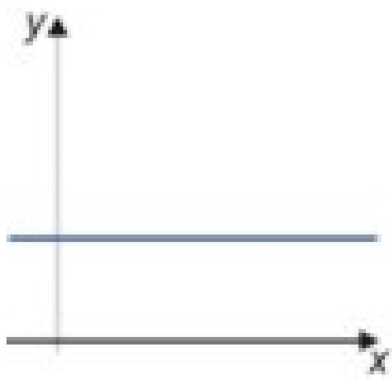
1.3 Coeficiente angular de uma reta

Consideremos uma reta r de inclinação α em relação ao eixo x.

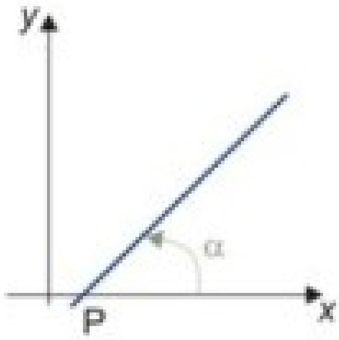
O **coeficiente angular** ou a **declividade** dessa reta r é o número real m que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α, ou seja:

$$\boxed{m = \tan\alpha}$$

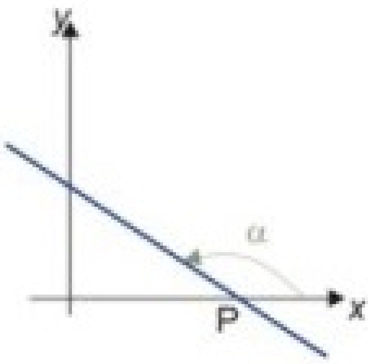
Vamos observar os vários casos, considerando $0^o \leq \alpha < 180^o$:



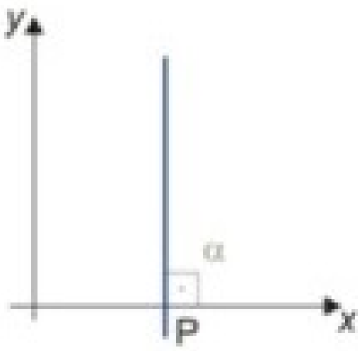
(a) Para $\alpha = 0^o$, temos $m = \tan\alpha = \tan 0^o = 0$.



(b) Para $0^o < \alpha < 90^o$, temos $\tan\alpha > 0 \Rightarrow m > 0$.



(c) Para $90^o < \alpha < 180^o$, temos $\tan\alpha < 0 \Rightarrow m < 0$.



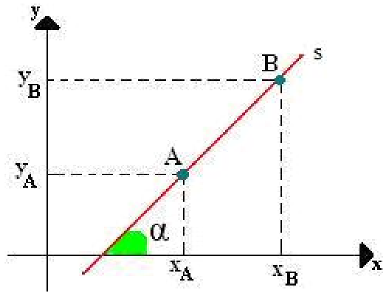
(d) Para $\alpha = 90^o$, a $\tan\alpha$ não é definida. Dizemos então que, quando $\alpha = 90^o$, isto é, quando a reta é vertical, ela não tem declividade.

Vejamos agora que é possível calcular o coeficiente angular de uma reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos.Vale ressaltar que para $\alpha = 0^o$ (reta horizontal) a declividade é 0 e para $\alpha = 90^o$ (reta vertical) não há declividade.

Atenção! 1.2

Dois pontos distintos determinam uma única reta.

Para representarmos uma reta não vertical em um plano cartesiano é preciso ter no mínimo dois pontos pertencentes a ela. Desse modo, considere uma reta s que passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ e possui um ângulo de inclinação com o eixo Ox igual a α.



Seja s a reta determinada por $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ e seja $C(x_B, y_A)$. No triângulo retângulo ABC ($\hat{C}$ é reto), temos:

$$\tan\alpha = \frac{d(C,B)}{d(A,C)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{1.1}$$

Observe que $x_B \neq x_A$, já que s não é paralela ao eixo y.

Podemos concluir que se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são dois pontos distintos quaisquer na reta s, que não é paralela ao eixo y ($x_A \neq x_A$), a declividade ou o coeficiente angular de s, que indicaremos por m, é dada por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_b - x_A} \tag{1.2}$$

Assim, temos duas maneiras de obter o coeficiente ângular de uma reta, quando ele existir:

- Conhecendo a inclinação α da reta, calculamos $m = \tan\alpha$;
- Conhecendo dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ da reta, calculamos

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_b - x_A} \tag{1.3}$$

Atenção! 1.3
Podemos usar $y_B - y_A$ no numerador desde que, no denominador, usemos $x_B - x_A$

Observações: Agora você pode utilizar outro método para verificar o alinhamento de três pontos, comparando os coeficientes angulares das retas pelos pontos dois a dois. Por exemplo, na verificação do alinhamento de três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_B, y_A)$, podemos verificar se ocorre

$$\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \tag{1.4}$$

Fica a seu critério usar esse método ou continuar utilizando o determinante para verificar o alinhamento ou não de três pontos.

Exercício proposto 1.1 ★

Determine o coeficiente angular (ou declividade) da reta que passa pelos pontos:

a) $A(3,2)$ e $B(-3,-1)$
b) $A(2,-3)$ e $B(-4,3)$
c) $P_1(3,2)$ e $P_2(3,-2)$
d) $P_1(-1,4)$ e $P_2(3,2)$
e) $P(5,2)$ e $Q(-2,-3)$
f) $A(200,100)$ e $B(300,80)$

Exercício proposto 1.2 ★

Se α é a medida da inclinação de uma reta e m é a sua declividade (ou coeficiente angular), copie e complete a tabela:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o
m								

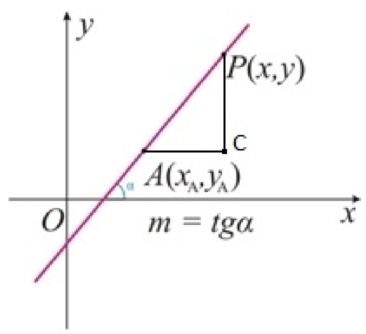
Reflita! 1.1

Use régua e transferidor para traçar a reta r que passa por $(0,5)$ e ter coeficiente angular $-\sqrt{3}$.

1.4 Equação fundamental da reta

Já vimos que dois pontos distintos determinam uma reta, ou seja, dados dois pontos distintos, existe uma única reta que passa pelos dois pontos.

Da mesma forma, um ponto $P_A(x_A,y_A)$ e a declividade m determinam uma reta r, Considerando $P(x,y)$ um ponto genérico dessa reta, veremos que se pode chegar a uma equação, de incógnitas x e y, a partir dos números x_A, y_A e m, que será chamada equação fundamental da reta r.



$$\tan\alpha = \frac{d(C,P)}{d(P_A,C)} \Rightarrow m = \frac{y-y_A}{x-x_A} \Rightarrow y-y_A = m(x-x_A) \tag{1.5}$$

Observações:

1ª) A equação $y-y_A = m(x-x_A)$ independe de m ser positivo ou negativo e da localização do ponto P_A.
2ª) Se a reta é paralela ao eixo x, temos $m=0$ e a equação da reta será dada por $y=y_A$.
3ª) Se a reta é paralela ao eixo y, todos os pontos da reta têm a mesma abscissa e a equação será dada por $x=x_A$.

Exercício resolvido 1

Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A(-1,4)$ e tem coeficiente angular 2.

Resolução:

Usando a equação fundamental da reta $y - y_A = m(x - x_A)$, temos:

$$y-4=2(x-(-1)) \Rightarrow y-4=2(x+1) \Rightarrow y-4=2x+2 \Rightarrow -2x+y-6=0 \Rightarrow 2x-y+6=0 \tag{1.6}$$

A equação procurada é $2x - y + 6 = 0$.

Exercício resolvido 2

Determine a equação da reta que passa pelos pontos $A(-1,-2)$ e $B(5,2)$.

Resolução:

Já sabemos como calcular o coeficiente angular da reta determinada pelos pontos $A(-1,-2)$ e $B(5,2)$:

$$m = \frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{2+2}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \tag{1.7}$$

Usando o ponto $A(-1,-2)$, temos:

$$y-(-2) = \frac{2}{3}(x-(-1)) \Rightarrow y+2 = \frac{2}{3}(x+1) \Rightarrow 3y+6 = 2x+2 \Rightarrow 2x-3y-4=0 \tag{1.8}$$

A equação da reta AB é $2x - 3y - 4 = 0$.

Outra resolução:

Chamando de $P(x,y)$ um ponto genérico da reta AB , podemos afirmar que P, A e B estão alinhados.

Logo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+5y-2+10-2x+y=0 \Rightarrow -4x+6y+8=0 \Rightarrow 2x-3y-4=0 \tag{1.9}$$

A equação da reta AB é $2x - 3y - 4 = 0$.

1.5 Formas da equação da reta

1.5.1 Forma reduzida da equação da reta

Vimos que a equação da reta que passa por um ponto $P_A(x_A, y_A)$ com declividade m é dada por:

$$y - y_A = m(x - x_A) \tag{1.10}$$

Se escolhermos o ponto particular $(0, n)$, isto é, o ponto em que a reta intersecta o eixo y, para o ponto (x_1, y_1), pela equação anterior teremos:

$$y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow y = mx + n \tag{1.11}$$

O número real n, que é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo y, é chamado coeficiente linear da reta.

$\underbrace{y = mx + n}$

m: coeficiente angular
n: coeficiente linear

Essa forma é especialmente importante porque permite obter o coeficiente angular de uma reta a partir de uma equação, além de expressar claramente a coordenada y em função de x. É conhecida como forma reduzida da equação da reta.

Note que a forma reduzida é uma função afim, assunto já estudado em um capítulo do volume 1.

> **Reflita! 1.2**
> A equação reduzida de uma reta que passa pela origem é da forma $y = mx$.

1.5.2 Equação geral da reta

Toda reta no plano possui uma equação da forma:

$$ax + by + c = 0 \tag{1.12}$$

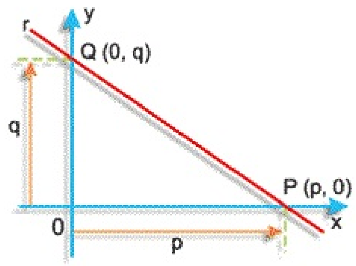
na qual a, b e c são constantes e a e b não são simultaneamente nulos.
Ela é denominada equação geral da reta.

Exemplos:
A reta:

- $y = -\frac{3}{4}x + 1$ pode ser escrita na forma geral por $3x + 4y - 4 = 0$.
- $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ pode ser dada na forma geral por $5x + 2y - 10 = 0$.
- $y = 5$, que é paralela ao eixo x, pode ser dada por $0x + 1y - 5 = 0$.
- $y - 3 = 5(x - 1)$ pode ser dada por $5x - 1y - 2 = 0$.

1.5.3 Forma segmentária da equação da reta

Consideremos uma reta r que não passa por $(0,0)$, intersecta o eixo Ox no ponto $P(p,0)$ e intersecta o eixo Oy no ponto $Q(0,q)$



Calculando o coeficiente angular, temos:

$$m = \frac{(0-q)}{(p-0)} \Rightarrow m = -\frac{q}{p} \tag{1.13}$$

Usando a forma reduzida $y = mx - n$, em que $m = -\frac{q}{p}$ e $n = b$, vem:

$$y = -\frac{q}{p}x + q \Rightarrow py = -qx + pq \Rightarrow qx + py = pq \tag{1.14}$$

Dividindo os dois membros por pq ($p \neq 0$ e $q \neq 0$), temos:

$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq} \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \tag{1.15}$$

Esta é a denominada forma segmentária da equação da reta que não passa por $(0,0)$ e intersecta os eixos nos pontos $(p,0)$ e $(0,q)$.

Reflita! 1.3

Podemos chegar ao mesmo resultado considerando um ponto genérico $P(x,y)$ e fazendo $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Exemplos:

1º) A forma segmentária da equação da reta que corta os eixos em $(5,0)$ e $(0,-2)$ é $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2}$.

2º) A reta cuja equação na forma segmentária é $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ corta os eixos em $(5,0)$ e $(0,2)$.

3º) Se $y = 2x - 5$ é a equação de uma reta na forma reduzida, podemos chegar à forma segmentária:

$$y = 2x - 5 \Rightarrow 2x - y = 5 \Rightarrow \frac{2x}{5} - \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{-5} = 1 \tag{1.16}$$

Essa reta corta os eixos em $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ e $(0,-5)$.

Observações:

1º) Vimos que a equação da reta pode ser escrita de várias formas. Na resolução de exercícios devemos escolher a mais conveniente em relação aos dados e à proposta do problema. Assim:

- na forma $y - y_A = m(x - x_A)$, identificamos a inclinação α da reta $(m = tan\alpha)$ e um ponto da reta (x_A, y_A);
- na forma reduzida $y = mx + n$, identificamos a inclinação α $(m = \tan\alpha)$, o ponto de intersecção da reta com o eixo $y(0, n)$ e ainda o ponto $(1, m+n)$;
- na forma segmentária $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$ identificamos os pontos de intersecção da reta com os eixos: $(p, 0)$ e $(0, q)$;
- quando fazemos $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, identificamos sem fazer cálculos dois pontos da reta, (x_1, y_1) e (x_2, y_2);
- a forma geral $ax + by + c = 0$ pode ser obtida a partir de qualquer uma das anteriores.

2º) A mesma reta pode ter diversas representações na forma geral, ou seja, $x + 2y - 1 = 0$, $2x + 4y - 2 = 0$, $-x - 2y + 1 = 0$ e infinitas equações equivalentes a essas. Por essa razão, é preferível escrever "obter uma equação geral da reta" a "obter a equação geral da reta".

3º) Dada uma equação geral de uma reta $r : ax + by + c = 0$, seu coeficiente angular pode ser obtido rapidamente usando $m_r = \dfrac{-a}{b}$.

4º) A reta r tal que $ax + by + c = 0$ intersecta os eixos nos pontos $\left(-\dfrac{c}{a}, 0\right)$ e $\left(0, -\dfrac{c}{b}\right)$.

Reflita! 1.4

Justifique a 3^a e a 4^a observações.

Exemplo:

Vamos escrever nas formas reduzida, segmentária e geral a equação que passa pelo ponto $(1, -6)$ e tem inclinação de 135^o.

Pelos dados do problema é mais conveniente escrever inicialmente na forma $y - y_A = m(x - x_A)$.

Como $\alpha = 135^o$, então:

$m = \tan\alpha = \tan 135^o = -1$

E, como a reta passa por $(1, -6)$, temos: $y + 6 = -1(x - 1)$

Daí vem:

- forma reduzida: $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 1 - 6 \Rightarrow y = -x - 5$
- forma segmentária: $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow x + y = -5 \Rightarrow \dfrac{x}{-5} + \dfrac{y}{-5} = 1$
- forma geral: $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow x + y - 1 + 6 = 0 \Rightarrow x + y + 5 = 0$

Reflita! 1.5

- Essa reta tem inclinação de 135^o, passa pelo ponto $(1, -6)$ e corta os eixos em $(-5, 0)$ e $(0, -5)$. Desenhe-a.
- O triângulo que ela determina com os eixos é um triângulo isósceles. Calcule a medida da hipotenusa.

1.5.4 Equações na forma paramétrica

São equações equivalentes à equação geral da reta, da forma $x = f(t)$ e $y = g(t)$, que relacionam as coordenadas x e y dos pontos da reta com um parâmetro t.

Assim, por exemplo, $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -t+1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, são equações paramétricas de uma reta r.

Para obter a equação geral dessa reta a partir das paramétricas, basta eliminar o parâmetro t das duas equações:

$$x = t+2 \Rightarrow t = x-2 \tag{1.17}$$

Substituindo esse valor em $y = -t+1$, temos:

$$y = -(x-2)+1 = -x+3 \Rightarrow x+y-3 = 0 \text{ (equação geral de } r\text{)} \tag{1.18}$$

Exercício proposto 1.3 ★

Em cada caso, escreva uma equação geral da reta definida pelos pontos A e B:

a) $A(-1,6)$ e $B(2,-3)$
b) $A(-1,8)$ e $B(-5,-1)$
c) $A(5,0)$ e $B(-1,-4)$
d) $A(3,3)$ e $B(1,-5)$

Exercício proposto 1.4 ★

Uma reta passa pelo ponto $P(-1,-5)$ e tem coeficiente angular $m = \frac{1}{2}$. Escreva a equação da reta na forma reduzida.

Exercício proposto 1.5 ★★

Escreva na forma segmentária a equação da reta que satisfaz as seguintes condições:

a) Passa pelos pontos $A(3,0)$ e $B(0,2)$.
b) Passa pelos pontos $A(5,0)$ e tem declividade 2.
c) Passa pelos pontos $P_1(4,-3)$ e $P_2(-2,6)$.
d) Sua equação reduzida é $y = -x+5$.

Exercício proposto 1.6 ★

Escreva na forma reduzida a equação da reta que passa pelos pontos $P_1(2,7)$ e $P_2(-1,-5)$.

Reflita! 1.6

Resolva este exercício de três formas diferentes.

Exercício proposto 1.7 ★★

Escreva a equação:

a) da reta bissetriz dos quadrantes ímpares;

b) da reta bissetriz dos quadrantes pares;

c) do eixo x;

d) do eixo y;

Exercício proposto 1.8 ★★

Passe a equação da reta para a forma indicada:

a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$, para a forma reduzida;

b) $y-6=\frac{1}{2}(x+4)$, para a forma geral;

c) $3x+9y-36=0$, para a forma segmentária;

d) $\begin{cases} x=3-t \\ y=t+2 \end{cases}$, para a forma geral.

Exercício proposto 1.9 ★

Dada a reta que tem equação $3x+4y=7$, determine sua declividade.

Exercício proposto 1.10 ★

Determine a equação da reta de coeficiente angular $m=-2$ e que intersecta o eixo y no ponto $A(0,-3)$.

1.6 Posições relativas de duas retas no plano

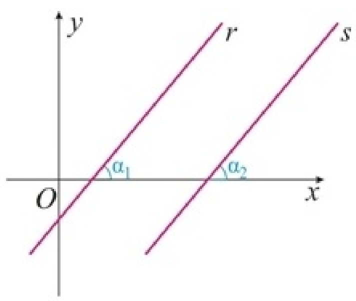
Duas retas, r e s, contidas no mesmo plano são paralelas ou concorrentes.

1.6.1 Retas paralelas

Sendo α_1 a inclinação da reta r e α_2 a inclinação da reta s, temos:

$$m_1=m_2 \Rightarrow \tan\alpha_1=\tan\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2 \ (\alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ estão entre } 0^o \text{ e } 180^o) \tag{1.19}$$

Se as inclinações são iguais, as retas são paralelas ($r//s$).



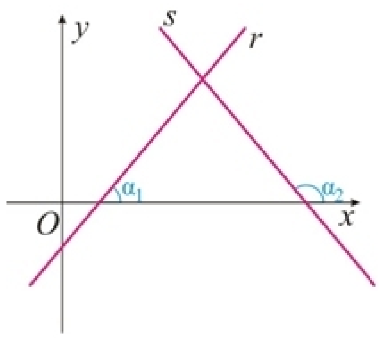
Duas retas distintas e não verticais, r e s, são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais $(m_1 = m_2)$.

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \tan\alpha_1 = \tan\alpha_2 \Rightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow r//s \tag{1.20}$$

Atenção! 1.4
Se, além do mesmo coeficiente angular, elas tiverem também o mesmo coeficiente linear, as retas serão coincidentes (paralelas e iguais).

1.6.2 Retas concorrentes

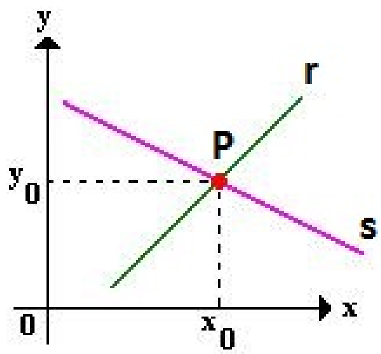
Duas retas do mesmo plano com coeficientes angulares diferentes não são paralelas; logo, são concorrentes.



Duas retas distintas e não verticais, r e s, são concorrentes se, e somente se, seus coeficientes angulares são diferentes $(m_1 \neq m_2)$.

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \tan\alpha_1 \neq \tan\alpha_2 \Rightarrow m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow r \text{ e } s\text{: concorrentes} \tag{1.21}$$

1.6.3 Intersecção de duas retas



A figura acima mostra duas retas, r e s, do mesmo plano, que se intersectam no ponto $P(x_0, y_0)$.

Como P pertence às duas retas, suas coordenadas devem satisfazer simultaneamente às equações dessas duas retas.

Logo, para determiná-las, basta resolver o sistema formado pelas equações das duas retas.

Observação: Pela resolução de sistemas podemos verificar a posição relativa de duas retas de um mesmo plano. Assim, temos:

- sistema possível e determinado (um único ponto comum): retas concorrentes;
- sistema possível e indeterminado (infinitos pontos comuns): retas coincidentes;
- sistema impossível (nenhum ponto comum): retas paralelas distintas.

Exercício resolvido 3

Determine as coordenadas do ponto P de intersecção das retas r e s, de equação $3x+2y-7=0$ e $x-2y-9=0$, respectivamente.

Resolução:

Nosso problema consiste em resolver o sistema formado pelas equações das duas retas:

$$\begin{cases} 3x+2y-7=0 \\ \underline{x-2y-9=0} \end{cases}$$

$$4x-16=0 \Rightarrow 4x=16 \Rightarrow x=4 \tag{1.22}$$

Substituindo na segunda equação, por exemplo, temos:

$$4-2y-9=0 \Rightarrow -2y=5 \Rightarrow y=-\frac{5}{2} \tag{1.23}$$

Logo, as coordenadas do ponto de intersecção são 4 e $-\frac{5}{2}$. Ou seja, $P\left(4,-\frac{5}{2}\right)$.

Exercício proposto 1.11 ★

Qual é a posição da reta r, de equação $15x+10y-3=0$, em relação à reta s, de equação $9x+6y-1=0$?

Exercício proposto 1.12 ★

Se as retas de equações $(a+3)x+4y-5=0$ e $x+ay+1=0$ são paralelas, calcule o valor de a.

Exercício proposto 1.13 ★

Em cada caso, determine a equação da reta que passa pelo ponto P e é paralela à reta da equação dada:

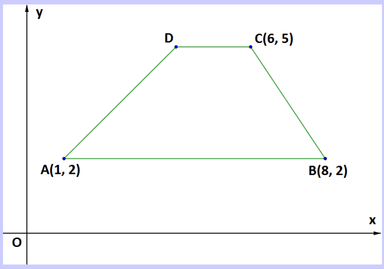
a) $P(1,2)$ e $8x+2y-1=0$
b) $P(-4,2)$ e $y-2=0$
c) $P(-1,3)$ e $2x-5y+7=0$

Exercício proposto 1.14 ★★

(Vunesp-SP) Num sistema de eixos cartesianos ortogonais, $x+3y+4=0$ e $2x-5y-2=0$ são, respectivamente, as equações das retas r e s. Determine as coordenadas dos pontos de intersecção de r com s.

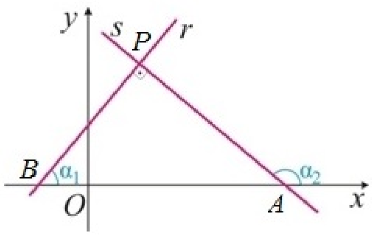
Exercício proposto 1.15 ★★

A figura mostra um trapézio $ABCD$. Determine a equação da reta-suporte da base menor do trapézio.



1.6.4 Perpendicularidade de duas retas

A figura mostra a reta r, de inclinação α_1, e a reta s, de inclinação α_2, tal que r e s são perpendiculares.



Pela Geometria plana, no triângulo ABP temos:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^o \Rightarrow \tan\alpha_2 = \tan(\alpha_1 + 90^o) \Rightarrow \tan\alpha_2 = \frac{\text{sen}(\alpha_1 + 90^o)}{\cos(\alpha_1 + 90^o)} = \frac{\text{sen }\alpha_1 \times \cos 90^o + \text{sen } 90^o \times \cos\alpha_1}{\cos\alpha_1 \times \cos 90^o - \text{sen }\alpha_1 \times \text{sen } 90^o} \tag{1.24}$$

Como $sen90^o = 1$ e $\cos 90^o = 0$, temos:

$$\tan\alpha_2 = \frac{0 + \cos\alpha_1}{0 - \text{sen}\alpha_1} = \frac{\cos\alpha_1}{-\text{sen}\alpha_1} = -\cot\alpha_1 = -\frac{1}{\tan\alpha_1} \tag{1.25}$$

Sabendo que $\tan\alpha_1 = m_1$ e $\tan\alpha_2 = m_2$, temos:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}, \text{ com } m_1, m_2 \neq 0 \tag{1.26}$$

Então, se uma reta s, com coeficiente angular m_2, é perpendicular a uma reta r, com coeficiente angular m_1, temos:

$m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ (com $m_1, m_2 \neq 0$)

Reciprocamente, pode-se provar que, dadas uma reta s, de coeficiente angular m_2, e uma reta r, de coeficiente angular m_1, se $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$, então é perpendicular a r.

Podemos concluir então que, dadas as retas r e s, de coeficientes angulares m_1 e m_2, temos:

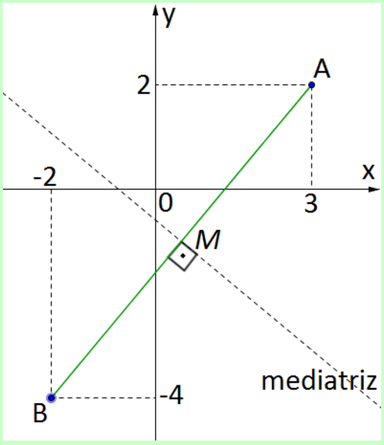
$$r \perp s \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} \text{ ou } r \perp s \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1 \tag{1.27}$$

Exercício resolvido 4

Determine a equação da mediatriz do segmento cujas extremidades são os pontos $A(3,2)$ e $B(-2,-4)$.

Resolução:

Pela Geometria plana, sabemos que a mediatriz de um segmento é uma reta perpendicular ao segmento no seu ponto médio. Ma figura, m é o ponto médio de $\overline{AB}$.



- Equação da reta-suporte do segmento AB:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x-2y-12+4+4x-3y=0 \Rightarrow 6x-5y-8=0 \quad (1.28)$$

- Cálculo do coeficiente angular m_1 da reta-suporte:

$$6x-5y-8=0 \Rightarrow -5y=-6x+8 \Rightarrow 5y=6x-8 \Rightarrow y=\frac{6}{5}x-\frac{8}{5} \Rightarrow m_1=\frac{6}{5} \quad (1.29)$$

- Cálculo do coeficiente angular m_2 da mediatriz:

$$m_2=-\frac{1}{\frac{6}{5}}=-\frac{5}{6} \quad (1.30)$$

- Cálculo das coordenadas do ponto m:

$$x=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2} \quad (1.31)$$

$$y=\frac{2-4}{2}=-\frac{2}{2}=-1 \quad (1.32)$$

O problema, agora, fica reduzido a determinar uma equação da reta que passa pelo ponto $M\left(\frac{1}{2},-1\right)$ e que tem coeficiente angular $-\frac{5}{6}$:

$$y-y_1=m_2(x-x_1)\Rightarrow y+1=-\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y+1=-\frac{5x}{6}+\frac{5}{12} \quad (1.33)$$

$$\Rightarrow 12y+12=-10x+5\Rightarrow 10x+12y+7=0 \quad (1.34)$$

Logo, uma equação da mediatriz do segmento é $10x+12y+7=0$.

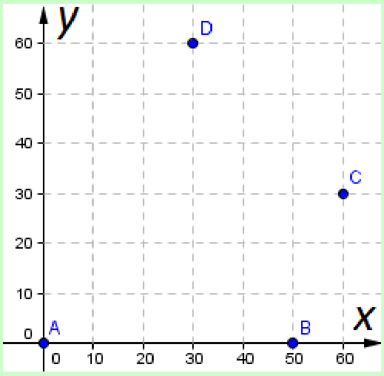
Reflita! 1.7

A mediatriz de $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ tal que $d(P,A)=d(P,B)$, isto é, dos pontos equidistantes de A e B. Resolva este exercício usando essa informação.

Exercício resolvido 5

Agora resolveremos o problema inicial apresentado no início do capítulo:

(Ibmec-SP)Os pontos A, B, C, e D do plano abaixo representam 4 cidades.



Uma emissora de televisão quer construir uma estação transmissora numa localização tal que:

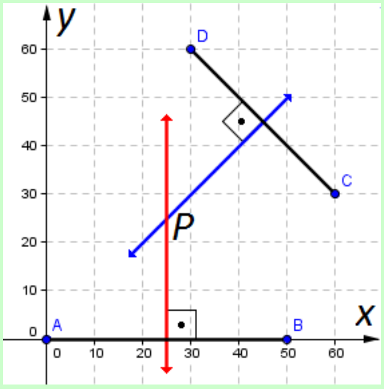
- a distância entre a estação e a cidade localizada em A seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em B;
- a distância entre a estação e a cidade localizada em c seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em D.

Considerando as coordenadas do plano acima, a localização da estação deverá ser o ponto:

a) $(10,10)$.
b) $(10,20)$.
c) $(25,10)$.
d) $(20,20)$.
e) $(25,25)$.

1. **Lendo e compreendendo**

   a) O que é dado no problema?
   A localização das quatro cidades: $A(0,0)$, $B(50,0)$, $C(60,30)$ e $D(30,60)$; as regras de localização da estação transmissora (equidistante de A e B, e equidistante de C e D).



   b) O que se pede?
   Pede-se a localização da estação transmissora de televisão, de acordo com as regras enunciadas no texto.

2. **Planejando a solução**

   De acordo com o que foi estudado, sabemos que, se queremos localizar um ponto P equidistante de outros dois(A e B, por exemplo), esse ponto P estará na mediatriz do segmento AB. Assim, a estação transmissora (o ponto P) estará na intersecção das mediatrizes do segmento AB e do segmento CD.
   Para obter cada demiatriz, vamos fazer o seguinte: obtemos o ponto médio e a declividade m de cada segmento. Com a declividade do segmento, obtemos a declividade da perpendicular a ele (ou seja, da mediatriz). De posse do ponto médio e da declividade da mediatriz, obtemos a equação de cada mediatriz.
   Tendo a equação de cada mediatriz, obtemos o ponto de intersecção P, que é a solução do problema proposto.

3. **Executando o que foi planejado**

   - *Mediatriz do segmento AB*
     Inicialmente vamos obter o ponto M, médio de $\overline{AB}$. Sabemos que $A(0,0)$, e $B(50,0)$. Assim:

$$M\left(\frac{0+50}{2}, \frac{0+0}{2}\right) \Rightarrow M(25,0) \tag{1.35}$$

     Como o segmento AB é horizontal, sua mediana é vertical, passando pelo ponto M. Retas verticais são do tipo $x = x_0$, portanto a meatriz procurada é $x = 25$.

- *Mediatriz do segmento CD*
  Inicialmente vamos obter o ponto N, médio de $\overline{CD}$. Sabemos que $C(60,30)$ e $D(30,60)$. Assim:

$$N\left(\frac{60+30}{2},\frac{30+60}{2}\right) \Rightarrow N(45,45) \tag{1.36}$$

A declividade do segmento CD é dada por $m_1 = \dfrac{60-30}{30-60} = \dfrac{30}{-30} = -1$.
Como o ponto N e a declividade m_2, podemos obter a equação da reta, usando uma equação do tipo $y - y_0 = m(x - x_0)$. Assim, a equação será:

$$y - 45 = 1(x-45) \Rightarrow y - 45 = x - 45 \Rightarrow y = x \tag{1.37}$$

Essa é a equação da mediatriz do segmento CD.

Finalmente, vamos obter o ponto de intersecção das duas mediatrizes, resolvendo o sistema formado pelas respectivas equações:

$$\begin{cases} x = 25 \text{ (mediatriz de } \overline{AB}) \\ y = x \text{ (mediatriz de } \overline{CD}) \end{cases} \Rightarrow x = 25 \text{ e } y = 25 \rightarrow P(25,25) \tag{1.38}$$

4. **Emitindo a resposta**
   A resposta é a alternativa **e**.

Exercício proposto 1.16 ★

Determine a equação da reta que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r em cada um dos dos seguintes casos:

a) $P(-3,2)$ e equação de $r: 3x+4y-4=0$.
b) $P(2,6)$ e equação de $r: 2x-y+3=0$.
c) $P(3,5)$ e equação de $r: y-4=0$.

Exercício proposto 1.17 ★★

Se um triângulo tem como vértices os pontos $A(2,1)$, $B(-2,-4)$ e $C(0,2)$, determine a equação da reta-suporte da altura relativa ao lado AB do triângulo.

Exercício proposto 1.18 ★★

(Fuvest-SP) São dados pontos $A(2,3)$ e $B(8,5)$. Tetermine a equação de mediatriz de $\overline{AB}$.

Exercício proposto 1.19 ★★★

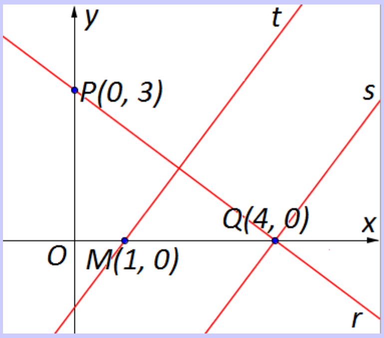
Determine as coordenadas do ponto n, simétrico ao ponto $M(2,4)$ em relação à reta r, de equação $x-y-6=6$.

Exercício proposto 1.20 ★★★

(Fuvest-SP) Os pontos de intersecção da reta r, de equação $y = \dfrac{x}{2}+2$, com o eixo de coordenadas, determinam um segmento. Qual é a equação da mediatriz desse segmento?

Exercício proposto 1.21 ★★★

(FEI-SP) A reta s é perpendicular à reta r, e a reta t é paralela à reta s. Determine a equação da reta s e a equação da reta t.



Exercício proposto 1.22 ★★★

(FEI-SP) Num triângulo retângulo ABC, de hipotenusa BC, tem-se $B(1,1)$ e $C(3,2)$. O cateto que passa pelo vértice B é paralelo à reta ℓ, cujo coeficiente angular é $\frac{3}{4}$. Determine as equações das retas-suporte dos catetos AB e AC.

Bibliografia

Livros

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto & Aplicações*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011.
DANTE, L. R. *Matemática: Contexto & Aplicações*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.
MARCONDES, C. A; GENTIL, N.; SÉRGIO. *MATEMÁTICA*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2000.

Figuras

http://www.mat.ufmg.br/gaal/
http://pt.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes
http://rafaelnink.com/blog/2008/01/17/winplot-graficos-matematicos/
https://www.youtube.com/watch?v=2ziRofPOXeg
http://www.colegioweb.com.br/geometria-analitica-i/estudo-da-reta.html
http://calculo.iq.unesp.br/Calculo1/CoeficienteAngularReta.htm
http://www.brasilescola.com/matematica/calculo-coeficiente-angular-uma-reta.htm
http://www.brasilescola.com/matematica/retas-paralelas.htm
http://www.infoescola.com/geometria-analitica/equacoes-da-reta/
http://www.objetivo.br/ConteudoOnline/mp/Conteudo.aspx?codigo=1452&token=5%2F2Yd2%2Bzzv%2F29umTApxi0Q%3D%3D
http://www.infoescola.com/geometria-analitica/posicoes-relativas-de-duas-retas/
http://www.xtrawell.com/basi-scientifiche/bibliografia/
http://v4-usiminas.infoinvest.com.br/ptb/797/Relatorio%20Anual%202008%2029%20abril%202009_html/Relatorio%20Anual%202008%2029%20abril%202009.html

Índice Remissivo