UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

MA225 Análise de Livros Didáticos

Publicado em Junho de 2015

Sumário

Agradecimentos

Agradecemos a Andrea Hidalgo por criar este template e disponibizá-lo no site `https://www.overleaf.com/`.

1. Conjuntos

1.1 Noção de conjuntos

Qualquer um pensaria que se deve começar aprendendo a matemática pelos números, mas não é assim. A matemática começou quando começamos a ter ordem pra agrupar e começamos a criar conjuntos.
Antes de que o homem pudesse entender o conceito de número, ele teve que compreender de onde vieram e o que representavam, portanto, os números então são algo que segue a compreensão dos conjuntos.

> Um **conjunto** é um agrupamento de vários objetos. Esses objetos podem ser qualquer coisa, na matemática costumamos trabalhar com números e dizemos que esses objetos são **elementos do conjunto**.

Exemplos:

1. Uma coleção de revistas é um conjunto, e cada uma dessas revistas é um elemento que pertence a esse conjunto.

2. Os alunos de uma sala de aula formam um conjunto. Você é um elemento que pertence a esse conjunto.

Se um objeto **a** é elemento de um conjunto **A**, dizemos que: **a** pertence a **A** e escrevemos $a \in A$.
Se o objeto **a** não for elemento do conjunto **A**, dizemos que: **a** não pertence a **A** e escrevemos $a \notin A$.

Exemplos:

1. Santa Catarina $\in$ estados da região Sul

2. Goiás $\notin$ estados da região Sul

1.2 Representação de um conjunto

Geralmente representamos um conjunto por letras maiúsculas (A, B, C, etc.) e os elementos por letras minúsculas (a, b, c, etc.). Vejamos as três formas principais de se representar um conjunto:

1.2.1 Representação tabular

A **representação tabular** de um conjunto é aquela em que os elementos são apresentados entre chaves e separados por vírgula ou por ponto e vírgula.

Exemplos:

1. A = {a, e, i, o, u}
2. B = {1, 2, 3, 4}
3. C = {3,2; 0,5; 4,1; 6,9}

1.2.2 Representação por uma propriedade

A representação de um conjunto A por meio de uma **propriedade** é aquela em que os elementos são descritos por uma condição que eles satisfazem.

Representa-se o conjunto A por:

$$A = \{x \mid x \text{ satisfaz a condição p}\}$$

(lê-se: "A é o conjunto de **todos** os elementos x, tal que x satisfaz a condição p")

Exemplos:

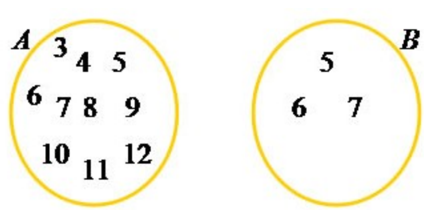
1. $A = \{x \mid \underbrace{x \text{ é país da América do Sul}}_{\text{condição p}}\}$
2. $B = \{x \mid \underbrace{x \text{ é número inteiro que satisfaz a condição } x^2 - 4 = 0}_{\text{condição p}}\}$
   Essa condição pode ser expressa pelo conjunto $B = \{-2, 2\}$.

1.2.3 Representação por um diagrama de Venn

A representação de um conjunto por um **diagrama de Venn** é aquela em que os elementos são simbolizados por pontos interiores a uma região plana, delimitada por uma linha fechada que não se entrelaça.

Exemplo:

$$A = \{x \mid 2 < x \leq 12\} \text{ e } B = \{x \mid 4 < x < 8\}$$



1.2.4 Exercícios propostos

1. Represente os seguintes conjuntos indicando seus elementos:

   (a) $A = \{x \mid x$ é letra da palavra Ipanema$\}$
   (b) $B = \{x \mid x$ é sílaba da palavra Paraná$\}$
   (c) $C = \{x \mid x$ é número ímpar maior que 5 e menos que 10$\}$
   (d) $D = \{x \mid x$ é número par maior que 10$\}$
   (e) $E = \{x \mid x$ é número tal que $x^2 - 5x + 6 = 0\}$

2. Escreva uma propriedade que define os conjuntos:

   (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   (b) $B = \{4, 6, 8, 10\}$
   (c) $C = \{$Amazonas, Acre, Rondônia$\}$

1.3 Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos são **iguais** quando possuem exatamente os mesmos elementos. Podemos dizer também que dois conjuntos são iguais quando todo elemento de A é também elemento de B.

Exemplo:
Se A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {5, 4, 3, 2, 1}, então $A = B$.

Se A é *não igual* a B, então A é diferente de B e denotamos por $A \neq B$.

1.4 Conjuntos vazio, unitário e universo

O conjunto **vazio** é aquele que não possui elemento algum. Representa-se o conjunto vazio por $\emptyset$ ou por $\{\}$.

Exemplos:

1. $A = \{x \mid x$ é número e $0 \cdot x = 5\} = \emptyset$

2. $B = \{x \mid x$ é palavra proparoxítona não acentuada, em português$\} = \{\}$

O conjunto **unitário** é todo conjunto formado por um único elemento.

Exemplos:

1. $A = \{5\}$

2. $B = \{x \mid x$ é estrela do sistema solar$\} = \{Sol\}$

O conjunto **universo** é o conjunto de todos os valores que os elementos podem assumir no contexto trabalhado. Indica-se por U.

Exemplo:
Seja $U = \{1,2,3,4,5,6\}$, então:

$$A = \{x \mid x \text{ é um número par}\} = \{2,4,6\}$$

Observação:
Se não tivéssemos o conjunto universo para delimitar os elementos do conjunto A, então teríamos infinitos números pares.

1.4.1 Exercícios propostos

1. Verifique se $A = B$ ou $A \neq B$ nos seguintes casos:

   (a) $A = \{a,b,c\}$ e $B = \{b,c,a\}$
   (b) $A = \{1,3,5\}$ e $B = \{x \mid x \text{ é número natural ímpar e } x < 7\}$
   (c) $A = \{2,4\}$ e $B = \{x \mid x \text{ é algarismo par do número } 45210\}$
   (d) $A = \{0,2\}$ e $B = \{x \mid x^2 - 2x = 0\}$

2. Considerando $U = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ como conjunto universo, determine o conjunto solução de:

   (a) $\{x \in U \mid x + 2 \neq 5\}$
   (b) $\{x \in U \mid x + 5 = 2\}$
   (c) $\{x \in U \mid 3 < x < 5\}$
   (d) $\{x \in U \mid x \text{ é ímpar maior que } 5\}$
   (e) $\{x \in U \mid x \text{ é múltiplo de } 3\}$

1.5 Subconjuntos e a relação de inclusão

Consideremos dois conjuntos, **A** e **B**. Se todos elementos de **A** forem também elementos de **B** dizemos que **A** é um subconjunto de **B** ou que **A** está contido em **B**. Denotamos por $A \subset B$.

Se **A** não for subconjunto de **B**, escrevemos $A \not\subset B$. Nesse caso, existe pelo menos um elemento de **A** que não pertence a **B**.

Exemplos:

1. Considerando **P** o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, temos:

   $$\mathbf{P} = \{2,4,6,8,10,\ldots\} \text{ e } \mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,\ldots\}$$

   Nesse caso, $\mathbf{P} \subset \mathbb{N}$, pois todos os elementos de **P** pertencem a $\mathbb{N}$.

2. Se **A** é o conjunto dos retângulos e **B** é o conjunto dos quadriláteros, então $A \subset B$, pois todo retângulo é um quadrilátero.

Relação de inclusão

A relação $A \subset B$ chama-se **relação de inclusão**. Seguem algumas propriedades dessa relação:

P1. Todo conjunto é subconjunto de si mesmo.

Exemplos:
(a) $\{5,4,0\} \subset \{5,4,0\}$
(b) $\emptyset \subset \emptyset$

P2. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

$$\emptyset \subset A, \forall A$$

P3. Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = C$ (propriedade antissimétrica).

P4. Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$ (propriedade transitiva).

Observação:
O símbolo $\forall$ é lido “qualquer que seja” ou também “para todo”.

1.5.1 Exercícios propostos

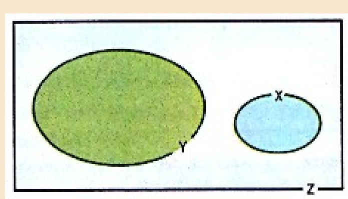
1. Considerando que:

   - A é o conjunto dos números naturais ímpares menores que 10;
   - B é o conjunto dos dez primeiros números naturais;
   - C é o conjunto dos números primos menores que 9;

   Use os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$ e relacione esses conjuntos na ordem dada:

   (a) A e B
   (b) C e A
   (c) C e B
   (d) A e C

2. Observe o diagrama a seguir. Os conjuntos X, Y e Z não são vazios. Escreva algumas relações verdadeiras entre eles usando os símbulos $\subset$ ou $\not\subset$.



1.6 Conjunto das partes

Dado um conjunto A, é possível escrever todos os subconjuntos (ou todas as partes) de A. Esse conjunto formado por todos os subconjuntos de A é chamado de **conjunto das partes** de A e denotamos por $P(A)$.

Exemplo:

Dado o conjunto $A = \{a, e, i\}$, temos:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a,e\}, \{a,i\}, \{e,i\}, \{a,e,i\}\}$$

Observe que $\{a\}, \{a,i\}, \{e,i\}$, por exemplo, são **elementos** de $P(A)$. Portanto, escrevemos

$$\{a\} \in P(A),\ \{a,i\} \in P(A) \text{ e } \{e,i\} \in P(A),$$

e não

$$\{a\} \subset P(A),\ \{a,i\} \subset P(A) \text{ e } \{e,i\} \subset P(A).$$

Veja que $\emptyset \subset P(A)$ e $\emptyset \in P(A)$.

Observações:

1. $\emptyset$ não tem nenhum elemento e $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ tem 1 elemento.
2. $A = \{a\}$ tem 1 elemento e $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$ tem 2 elementos.
3. $A = \{a, e\}$ tem 2 elemento e $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{a,e\}\}$ tem 4 elementos.
4. $A = \{a, e, i\}$ tem 3 elemento e $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a,e\}, \{a,i\}, \{e,i\}, \{a,e,i\}\}$ tem 8 elementos.

Lembre-se de que $2^0 = 1; 2^1 = 2; 2^2 = 4; 2^3 = 8$. É possível afirmar então que, se A tem n elementos, $P(A)$ tem 2^n elementos.

1.7 Conjunto complementar

Sejam A um conjunto e U o conjunto universo. Chama-se **complementar** de A, que indicamos por $\complement_U^A$ *ou* $A^\complement$ (lê-se: "complementar de A em relação a U"), o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a U e não pertencem a A.

$$A \subset U \Leftrightarrow \complement_U^A = \{x \mid x \in U \ e \ x \notin A\}$$

Exemplo:
Seja $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $A = \{0,2,4,6,8\}$, então $A^\complement = \{1,3,5,7,9\}$.

1.7.1 Exercícios propostos

1. Dados $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, determine:

   (a) $P(A)$;
   (b) $P(B)$;
   (c) o número de elementos de $P(A)$;
   (d) o número de elementos de $P(B)$;

2. Dados $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$, $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{7, 9, 11\}$ e $C = \{1, 5, 7, 11, 15\}$, determine:

   (a) $\complement_U^A$

   (b) $\complement_U^B$

   (c) $\complement_U^C$

   (d) $\complement_C^A$

3. Dado o conjunto $A = \{m, \{n\}, \{p, q\}\}$, verifique quais afirmações são falsas:

   (a) $m \in A$;
   (b) $\emptyset \subset A$;
   (c) $\{m\} \in A$;
   (d) $\{n\} \in A$;
   (e) $\{n\} \subset A$;
   (f) $n \notin A$;
   (g) $p \in A$;
   (h) $\{p, q\} \in A$;
   (i) $\{\{n\}\} \subset A$;
   (j) $\{\{p, q\}\} \subset A$;

4. (F. M. SANTA CASA - SP) Indica-se com $P(A)$ o conjunto das partes de um conjunto A. O número de elementos do conjunto $P(P(\emptyset))$ é:

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3
   (e) 4

1.8 Operações entre conjuntos

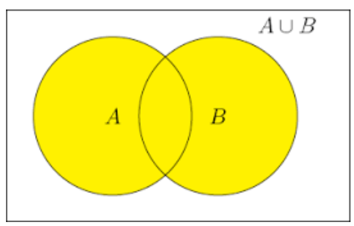
Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C1, C2 e C3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo ele verifica que C1 e C2 terão 10 páginas em comum; C1 e C3 terão 6 páginas em comum; C2 e C3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C1. Para montagem dos três catálogos, de quantas páginas originais de impressão o fabricante necessitará?

O problema acima foi adaptado do ENEM, e para resolvê-lo necessitamos de alguns conhecimentos sobre as operações com conjuntos os quais serão abordados aqui.

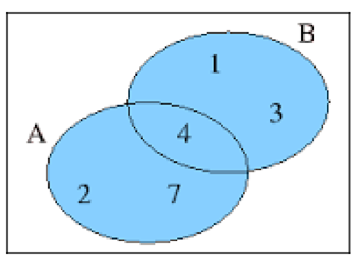
1.8.1 União

A **união** entre dois conjuntos, A e B, que indicamos por A∪B, é o conjunto dos elementos que pertencem a A ou a B.
A∪B $=\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Podemos representar a união entre conjuntos por meio de diagramas de Venn:



Exemplo:
Dados os conjuntos A = {2, 4, 7} e B = {1,3,4}, temos: A∪B = {1,2,3,4,7}



Propriedades da união de conjuntos:

P1. Se B é subconjunto de A, então A∪B = A; e, se A∪B = A, então B é subconjunto de A, ou seja: B⊂ A↔ A∪B = A

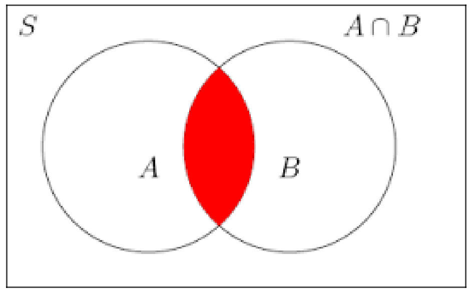
P2. A∪B = B∪A

P3. (A∪B)∪C = A∪(B∪C)

1.8.2 Intersecção

A **intersecção** entre dois conjuntos, A e B, que indicamos por A∩B, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e a B.
A∩B ={x | x ∈ A e x ∈ B}

Podemos representar a intersecção entre conjuntos por meio de diagramas de Venn:



Observação:
Quando a intersecção entre os conjuntos A e B é o conjunto vazio, dizemos que A e B são **disjuntos**.

Exemplos:

1. Dados os conjuntos A = {2, 3, 5, 6} e B = {0, 1, 2, 3, 4}, temos: A∩B = {2, 3}

2. Sendo A o conjunto dos números pares e B o conjuntos dos números ímpares, temos: A∩B = ∅.

Propriedades da intersecção entre conjuntos:

P1. B⊂A ↔ A∩B = B

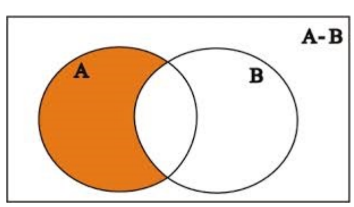
P2. A∩B = B∩A

P3. (A∩B)∩C = A∩(B∩C)

1.8.3 Diferença

A **diferença** de dois conjuntos, A e B, que indicamos por A–B, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.
A–B ={x | x ∈ A e x ∉ B}

Podemos representar o conjunto diferença por meio de diagramas:



Exemplos:

1. Dados os conjuntos A = { - 1, 0, 1, 2} e B = {0, 2, 4, 6}, temos: A – B = { -1, 1}

2. Considerando os conjuntos do exemplo 1 temos: B – A = {4, 6}

Observação:
Note que a diferença não é comutativa, de modo geral, temos que A – B $\neq$ B – A.

1.8.4 Exercícios propostos

1. Considerando os conjuntos A = { -2, -1, 0, 1, 2}, B = {5, 6, 7, 8}, C = {1, 2, 5} e D = {1, 3, 4} determine:
   (a) A∪B
   (b) B∪ C∪D
   (c) A∩C
   (d) A∩B∩C
   (e) A–B
   (f) D–C
   (g) (A∪C)∩(B∪D)
   (h) (C–D)∩A

2. Sejam os conjuntos X = {3, 6, 9, 14, 18, 20} Y = {x | x é múltiplo positivo de 3} e Z = {x | x é divisor positivo de 12}, determine o conjunto:
   (a) X–Y
   (b) X–Z
   (c) Z–Y
   (d) (X∪Z)–Y
   (e) (Z∩Y)–(X∩Z)

3. (UFAL) Se A e B são dois conjuntos não vazios tais que:
   A∪B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, A – B = {1, 3, 6, 7} e B – A = {4, 8}
   então, A∩B é o conjunto:
   (a) {1, 4}
   (b) { }
   (c) {2, 5}
   (d) {6, 7, 8}
   (e) {1, 3, 4, 6, 7, 8}

4. Faça um diagrama para representar cada um dos conjuntos abaixo:
   (a) C∪(A∩B)
   (b) B∩(A∪B)
   (c) A–(B∩C)
   (d) A–(B∪C)

1.8.5 Número de elementos da união de conjuntos

Considere a seguinte situação:

Uma atividade com duas questões foi aplicada em uma turma de 40 alunos. Os resultados indicam que 35 alunos acertaram a 1ª questão, 25 acertaram a 2ª questão e que 20 alunos acertaram as duas questões. Os dados sugerem que a soma das partes é maior do que o todo: 35 + 25 + 20 = 80 > 40.

Analisando o problema, temos:
$n(A) = 35 \to$ número de alunos que acertaram a 1ª questão
$n(B) = 25 \to$ número de alunos que acertaram a 2ª questão
$n(A \cap B) = 20 \to$ número de alunos que acertaram a 1ª e a 2ª questão
$n(A \cup B) = 40 \to$ número de alunos que acertaram a 1ª ou a 2ª questão

Note que $n(A)$ inclui $n(A \cap B)$ e que $n(B)$ também inclui $n(A \cap B)$, por isso para determinar o número de elementos da união devemos somar o número de elementos de A e B e subtrair o números de elementos da intersecção entre os conjuntos.

Quando **A** e **B** são conjuntos finitos, têm-se:

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}.$$

No caso geral em que A e B são conjuntos disjuntos temos $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Podemos usar esse fato para resolver problemas sobre a quantidade de elementos de conjuntos finitos, vejamos o exemplo.

Exemplo:

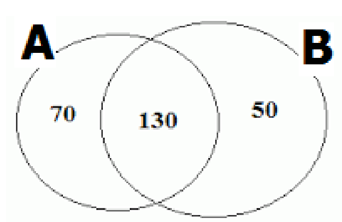
Um instituto de pesquisa entrevistou 250 indivíduos, perguntando sobre sua rejeição aos partidos A e B. Verificou-se que 200 pessoas rejeitavam o partido A; que 180 pessoas rejeitavam o partido B. Qual é o número de pessoas que rejeitavam os dois partidos?

$n(A) = 200$
$n(B) = 180$
$n(A \cup B) = 250$

Como $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Longrightarrow n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
$n(A \cap B) = 200 + 180 - 250$
$n(A \cap B) = 130$

Logo, 130 pessoas rejeitavam os dois partidos.

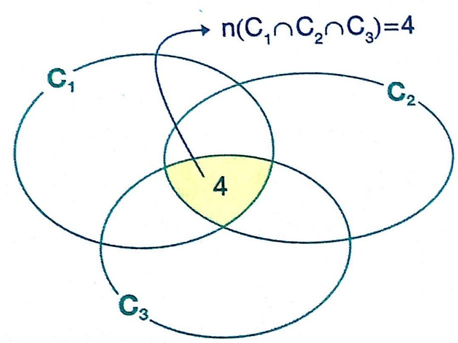
O problema pode ser visualizado no diagrama a seguir:



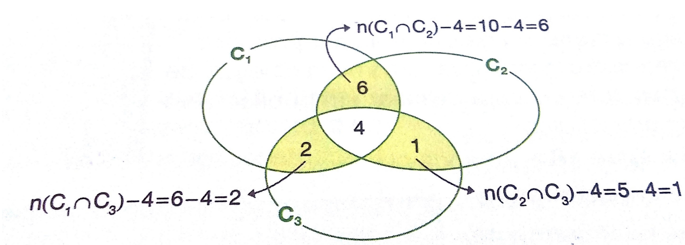
Agora, podemos resolver o problema proposto no início desta seção.

Resolução do problema inicial

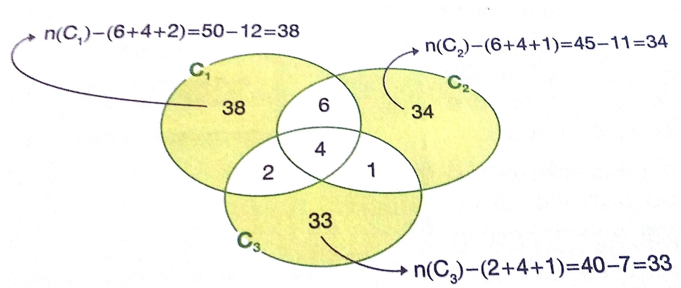
Inicialmente, chamamos de C_1, C_2 e C_3 o conjunto das páginas dos catálogos C1, C2 e C3, respectivamente, ou seja:
n(C_1) = 50
$n(C_2)$ = 45
n(C_3) = 40
n($C_1 \cap C_2$) = 10
n($C_1 \cap C_3$) = 6
n($C_2 \cap C_3$) = 5
n($C_1 \cap C_2 \cap C_3$) = 4
Anotamos no diagrama o número de páginas comuns aos três catálogos.



Em seguida, anotamos no diagrama o número de páginas comuns a dois catálogos subtraídos do valor já registrado.



Finalmente, anotamos no diagrama o número de páginas de cada catálogo subtraídos dos valores já registrados.



Calculamos o total de páginas necessárias para a montagem dos três catálogos:
$n(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = 38 + 6 + 34 + 2 + 4 + 1 + 33 = 118$

Portanto, o fabricante necessitará de um total de 118 páginas originais de impressão.

Observação:
No caso de três conjuntos, A, B e C, a fórmula que indica o **número de elementos da união** ABC é:
$nA \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

1.8.6 Exercícios propostos

1. Foi realizada uma pesquisa com 350 pessoas para avaliar a eficácia de um anúncio na divulgação de dois produtos novos, A e B. Ao final da pesquisa, constatou-se que, dos entrevistados, precisamente:

   280 conheciam o produto A;
   80 conheciam os dois produtos;
   20 não conheciam nenhum dos dois produtos.
   De acordo com esses dados, quantas pessoas entrevistadas conheciam apenas o produto B?

2. Uma pesquisa de mercado foi realizada para verificar a audiência de três programas de televisão. Ao todo, 1200 famílias foram entrevistadas e obtiveram-se os seguintes resultados:

   370 famílias assistem ao programa A;
   300 ao programa B e 360, ao programa C.
   Desse total, 100 famílias assistem aos programas A e B;
   60 aos programas B e C;
   30 aos programas A e C e 20 famílias assistem aos três programas.
   Com base nesses dados, responda:

   (a) Quantas famílias assistem ao programa A e não assistem ao programa C?
   (b) Quantas famílias assistem ao programa B e C e não assistem ao programa A?
   (c) Qual é o programa de maior fidelidade, ou seja, aquele cujos expectadores somente assistem a ele?

3. Em uma cidade com 50 000 habitantes, a população tem acesso a 3 jornais, sendo que 40% da população lê o jornal A, 28% ao jornal B, 58% ao jornal C, 20% lê somente o jornal A, 12% lê somente o jornal B, 35% lê somente o jornal C e 11% lê somente os jornais A e C. Considerando que A, B e C possuem leitores em comum a dois jornais, determine o número de habitantes que leem mais de um jornal.

1.9 Conjuntos numéricos

Os primeiros números concebidos pelo homem surgiram da necessidade de contar. Com e evolução da humanidade outras necessidades surgiram, como por exemplo, a de medir. Os números utilizados para contar e para medir são classificados em categorias as quais serão descritas a seguir.

1.9.1 Conjunto dos números naturais

Da necessidade de quantificar os membros da comunidade, o rebanho de animais etc., o homem começou a realizar contagens e registrar quantidades; dessa necessidade surgiram os números naturais. Assim, denominamos naturais os números que representam quantidades de elementos.

Indicamos por $\mathbb{N}$ o **conjunto dos números naturais**.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$

Um subconjunto importante dos números naturais é o conjunto $\mathbb{N}^*$ que é obtido excluindo-se o zero de $\mathbb{N}$. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$
O conjunto dos números naturais é infinito e ordenado, pois dados quaisquer dois números naturais distintos a e b, temos a < b, ou a > b.

Propriedades dos números naturais:

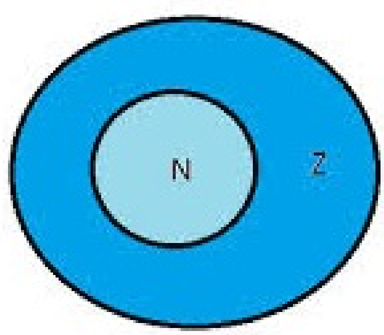
P1. Todo número natural tem sucessor.
P2. A soma de dois números naturais quaisquer é um número natural.
P3. O produto de dois números naturais quaisquer é um número natural.

Observação:
De acordo com a segunda propriedade é sempre possível efetuar a adição de dois números naturais, porém a subtração de dois números naturais nem sempre é possível; com isso surgiu a necessidade de se ampliar esse conjunto incluindo os números negativos.

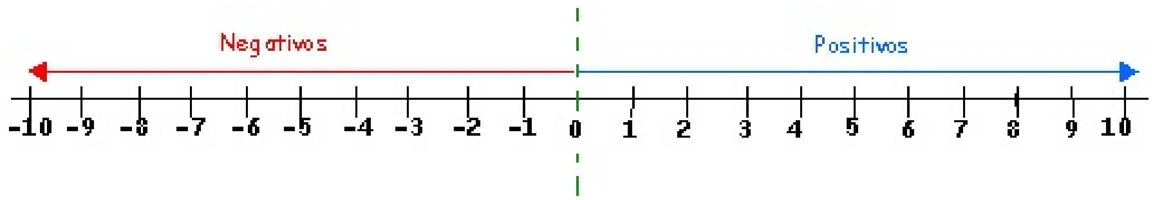
1.9.2 Conjuntos dos números inteiros

Denominamos **conjunto dos números inteiros**, que indicamos por $\mathbb{Z}$, o conjunto
$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Como dito anteriormente, os números inteiros surgiram da necessidade de ampliar o conjunto dos números naturais. Esta ampliação se deu com a inclusão dos números negativos, da união dos negativos com os números naturais formou-se o conjunto dos números inteiros. Com isso podemos afirmar que todo número natural é também um número inteiro e concluir que o conjunto dos números naturais é um subconjunto dos números inteiros.



Assim como os números naturais, os números inteiros também são infinitos e ordenados. Podemos representar os números inteiros por meio de uma reta onde cada ponto da reta corresponde a um número inteiro. Veja:



Propriedades dos números inteiros

P1. Todo números inteiro tem antecessor e sucessor.
P2. A soma de dois números inteiros é um número inteiro.
P3. A diferença entre dois números inteiros é um número inteiro.
P4. O produto de dois números inteiros é um número inteiro.

Observação:
De acordo com a propriedade 4 se multiplicarmos dois números inteiros o produto também será um número inteiro, mas isso nem sempre ocorre na divisão, assim foi necessária a ampliação deste conjunto surgindo os números racionais.

1.9.3 Conjuntos dos números racionais

Todo número que pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo, é chamado de **número racional**. O conjunto indicamos pela letra $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$

Os números fracionários surgiram da divisão não exata entre dois números inteiros, como por exemplo 2:3. No conjunto dos números racionais o resultado da divisão 2:3 pode ser representado por $\frac{2}{3}$.

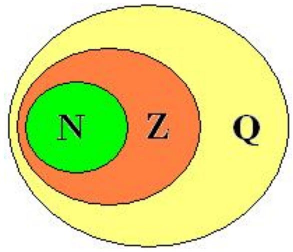
Exemplos:

1. Os números $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{4}$ e $-\frac{2}{9}$ são números racionais pois estão representados por uma razão entre dois inteiros.

2. O número 1,4 é um número racional pois pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros:
   $1{,}4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

3. Os números 2, -1 e 0 são racionais, pois também podem ser representados como razão entre dois números inteiros:
   $2 = \frac{6}{3}$ $\quad$ $-1 = -\frac{3}{3}$ $\quad$ $0 = \frac{0}{2}$

Todo número inteiro é um número racional, pois pode ser representado sob a forma de razão entre dois inteiros. Podemos então concluir que o conjunto dos números inteiros é um subconjunto do conjunto dos números racionais.



Observação:
A equivalência de frações nos permite classificar o conjunto de todas as frações em grupos de frações equivalentes entre si. Assim $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, ...\}$ é uma classe de equivalência; $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}\}$ é outra classe de equivalência. Cada classe de equivalência chama-se número racional. Um número racional é o conjunto formadao por uma fração e todas as suas equivalentes.

Representação decimal dos números racionais

Exemplos:

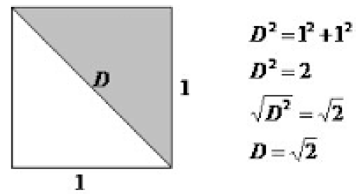
1. Decimal finita:
   (a) $\frac{1}{2} = 0{,}5$
   (b) $\frac{6}{5} = 1{,}2$
2. Decimal infinita ou dizima periódica:
   (a) $\frac{4}{9} = 0{,}44444...$
   (b) $\frac{13}{3} = 4{,}33333...$

Propriedades dos números racionais:

P1. A soma de dois números racionais quaisquer é um número racional.
P2. A diferença entre dois números racionais quaisquer é um número racional.
P3. O produto entre dois números racionais quaisquer é um número racional.
P4. O quociente entre dois números racionais, sendo o divisor diferente de zero, é um número racional.

1.9.4 Conjunto dos números irracionais

O uso dos números racionais está diretamente ligado com a necessidade humana de fazer medições. Até certo momento acreditava-se que esses números eram suficientes para expressar qualquer medida, porém os pitagóricos mostraram que isso não era verdade. Eles mostraram que a diagonal de um quadrado cujo lado mede uma unidade não podia ser expresso por meio de um número racional.



A representação decimal de $\sqrt{2}$ é 1,414213562373... que possui infinitas casas decimais não periódicas, portanto não pode ser representado na forma de fração, ou seja, não é um número racional.

Numero irracional é todo número que não pode ser escrito na forma de fração, ou seja, não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros (q não nulo). Indicamos o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{I}$.

Exemplos:

1. O número π que é obtido dividindo-se a medida do comprimento de qualquer circunferência pela medida de seu diâmetro. Veja sua representação decimal:
   π= 3,141592653589...

2. O número de Euler que é a base dos logaritmos naturais.
   e = 2,718281828459...

3. $\sqrt{3}$ = 1,7320508...

Demonstração de $\sqrt{2}$ é irracional:

Vamos supor que $\sqrt{2}$ é racional, isto é, que pode ser escrito na forma de fração.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Por hipótese a fração $\frac{p}{q}$ está simplificada ao máximo, ou seja, m.d.c.(p,q) = 1. Assim, p e q não podem ser simultaneamente pares, logo, p ou q tem que ser ímpar. Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado obtemos o seguinte desenvolvimento:

$$(\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$p^2 = 2q^2$$

Da última linha resulta que p^2 é um número par, pois é múltiplo de 2. Por consequência resulta que p também é par, pois se o quadrado de um número é par então o próprio número também é par. Assim somos forçados a concluir que q deve ser um número ímpar (já vimos que p e q não podem ser ambos pares), mas note o seguinte: Dizer que p é um número par é equivalente a dizer que p é múltiplo de 2, ou seja, existe um número inteiro k tal que $p = 2k$. Substituindo na expressão anterior temos:

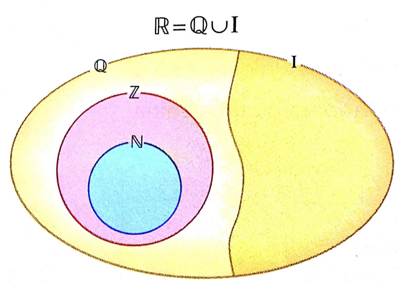
$$\begin{aligned}
p^2 &= 2q^2 \\
(2k^2) &= 2q^2 \\
4k^2 &= 2q^2 \\
2q^2 &= 4k^2 \\
q^2 &= \frac{4k^2}{2} \\
q^2 &= 2k^2
\end{aligned}$$

Da última linha podemos concluir que q também é par. Portanto temos um absurdo: q é par e q é impar (por hipótese)! Como não pode existir contradição na matemática concluímos que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma de fração, ou seja, não é racional.

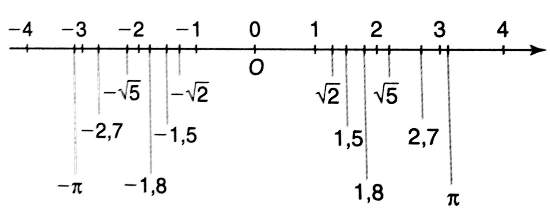
1.9.5 Conjunto dos números reais

Qualquer número racional ou irracional é chamado de **número real**. Indicamos o conjuntos dos números reais por $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é número racional ou irracional}\}$ ou $\mathbb{R} = \{\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\}$

As relações entre os conjuntos numéricos apresentados até aqui podem ser resumidas no diagrama a seguir.



A reta numérica que apresenta os números reais é denominada de reta real.
Observe a reta numérica e alguns números reais indicados.



1.9.6 Exercícios propostos

1. Classifique as afirmações a seguir em verdadeira ou falsa.

   (a) $0{,}333 \in \mathbb{R}$
   (b) $5 \in \mathbb{N}$
   (c) $-3 \in \mathbb{N}$
   (d) $\sqrt{-3} \in \mathbb{R}$
   (e) $\frac{6}{5} \in \mathbb{Q}$
   (f) $6{,}5 \notin \mathbb{Q}$
   (g) $0{,}7777 \in \mathbb{I}$
   (h) $5{,}666... \in \mathbb{Z}$

2. Classifique como verdadeiro ou falso:

   (a) Todo número natural representa a quantidade de elementos de algum conjunto finito.
   (b) Existe um número natural que é maior do que todos os demais.
   (c) Todo número natural tem sucessor.
   (d) Todo número natural tem antecessor.

3. Demonstre que a soma de dois números naturais pares quaisquer é um número natural par.

4. Represente na forma decimal as frações a seguir.

   (a) $\frac{65}{80}$
   (b) $\frac{25}{15}$
   (c) $\frac{26}{2}$
   (d) $\frac{2}{3}$

1.10 Intervalos

Após trabalharmos com conjuntos, podemos apresentar a noção de intervalos, pois estes são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Assim, podemos fazer as operações usuais de conjuntos.

1.10.1 Definição, notação e classificação de intervalos

Um **intervalo** é um conjunto que contém cada número real entre dois extremos indicados, podendo incluir ou não os próprios extremos.

Assim, dados dois números reais a e b , com $a < b$ temos os seguintes tipo de intervalos, seguidos de suas notações e representação gráfica:

1. Intervalo fechado $\{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}$ = $[a, b]$

2. Intervalo aberto $\{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}$ = (a, b)

3. Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita $\{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leq b\}$ = $(a, b]$

4. Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita $\{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\}$ = $[a, b)$

5. Intervalo ilimitado à direita e fechado na origem $\{x \in \mathbb{R} |\ x \geq a\}$ = $[a, +\infty)$

6. Intervalo à direita e aberto na origem $\{x \in \mathbb{R} |\ x > a\}$ = $(a, +\infty)$

7. Intervalo ilimitado à esquerda e fechado na origem $\{x \in \mathbb{R} |\ x \leq b\}$ = $(-\infty, b]$

8. Intervalo ilimitado à esquerda e aberto na origem $\{x \in \mathbb{R} |\ x \leq b\}$ = $(-\infty, b)$

Observações:

1. $-\infty$ e $+\infty$ não são números reais; apenas fazem parte das notações de intervalos ilimitados;
2. Qualquer intervalo de extremos a e b, com $a \neq b$, contém números racionais e irracionais;
3. Há outras formas de representar intervalos abertos, usando colchetes ao invés de parênteses. Como $(a, b]$ = $]a, b]$; (a, b) = $]a, b[$.

Exemplos:

1. Dê a notação de intervalo para cada conjunto de números reais a seguir.
   (a) $\{x \in \mathbb{R} |\ 4 < x < 9\}$

   Os números 4 e 9 são os extremos indicados do intervalo. Em notação escrevemos (4,9). Utilizamos dois parênteses pois nem 4 nem 9 estão inclusos no intervalo desejado.

   (b) $\{x \in \mathbb{R} |\ 2 \leq x < 6\}$

   Os números 2 e 6 são os extremos indicados do intervalo. Em notação escrevemos $[2,6)$. Como 2 está incluso no intervalo, utilizamos o colchete, enquanto o 6 não está incluso, portanto, utilizamos um parêntese.

2. Dê a notação de intervalo para cada conjunto de números reais apresentados nas retas a seguir:

   (a) Podemos perceber que os extremos do intervalo são compostos pelos números 2 e 5. Além disso, nos extremos na reta há uma pequena bola preta, que representa a inclusão dos números 2 e 5 no intervalo. Portanto, utilizamos os colchetes: $x = [2,5]$.

   (b) Podemos perceber que os extremos do intervalo é composto pelos números -1 e 7. Além disso, nos extremos na reta, há uma pequena bola branca à esquerda, que representa a exclusão do número -1 do intervalo, enquanto à direita tem-se uma bola preta. Portanto, utilizamos um parênteses e um colchete: $x = (-1,7]$.

   (c) Podemos perceber que os extremos do intervalo é composto por $-\infty$ e 5. Além disso, não há extremo esquerdo da reta pois este é infinito mas há o extremos direito, representado por uma bola preta.Portanto, utilizamos um parênteses para o infinito (sempre, seja este positivo ou negativo) e um colchete: $x = (-\infty,5]$.

1.10.2 Exercícios Propostos

1. Dê a notação de intervalo para cada conjunto de números reais a seguir.
   (a) $\{x \in \mathbb{R} |\ 0 \leq x \leq 5\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} |\ 9 \leq x\ < 89\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R} |\ 26 < x \leq 34\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{R} |\ x \geq -123\}$
   (e) $\{x \in \mathbb{R} |\ -10 < x < -2\}$
   (f) $\{x \in \mathbb{R} |\ x \leq -33\}$

2. Dê a notação de intervalo para cada conjunto de números reais apresentados a seguir.
   (a) figure 15
   (b) figure 16
   (c) figure 17
   (d) figure 18

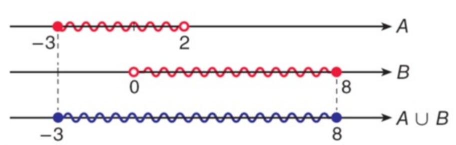
1.10.3 Operações com intervalos

Como os intervalos são subconjuntos de $\mathbb{R}$, podemos fazer as operações usuais de conjuntos. Para tanto podemos vizualizar essas operações, como nos exemplos a seguir.

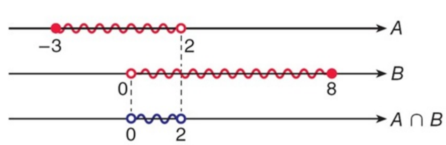
Exemplos:

Sejam A = $[-3,2)$ e B = $(0,8]$:

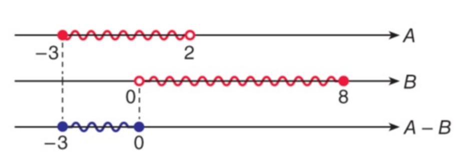
1. A $\cup$ B = $\{x \in \mathbb{R} |\ -3 \leq x \leq 8\}$ = $[-3,8]$.



2. A $\cap$ B = $\{x \in \mathbb{R} |\ 0 < x < 2\}$ = $(0,2)$;



3. A - B = $\{x \in \mathbb{R} |\ -3 \leq x \leq 0\}$ = $[-3,0]$;



1.10.4 Exercícios Propostos

1. Sendo A = $[3,7]$, B = $[5,10]$ e C = $]-2,6[$, determine:
   (a) $A \cap B$
   (b) $A \cap C$
   (c) $B \cap C$
   (d) $B \cup C$
   (e) $(A \cup B) \cap C$
   (f) $B - C$

1.11 Produto Cartesiano

Sejam dois conjuntos A e B, subconjuntos de um universo U. O conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B chama-se **produto cartesiano de A por B** ou **A cartesiano B**, e é indicado por **A x B**. A x B = $\{(x;y) |\ x \in A\ e\ y \in B\}$. Podemos definir, também, um produto cartesiano de mais de dois conjuntos. Por exemplo, sendo A, B e C conjuntos, temos: A x B x C = $\{(x;y;z) |\ x \in A\ e\ y \in B\ e\ z \in C\}$

Exemplos:

Seja A = $\{2,4\}$ e B = $\{3,5,7\}$. Determinar:

1. A x B

   A x B = $\{(2;3),(2;5),(2;7),(4;3),(4;5),(4;7)\}$

2. B x A

   B x A = $\{(3;2),(3;4),(5;2),(5;4),(7;2),(7;4)\}$

3. A^2

   A^2 = A x A = $\{(2;2),(2;4),(4;2),(4;4)\}$

1.11.1 Exercícios Propostos

1. Sendo A = $\{3,5\}$, B = $\{1,4\}$ e C = $\{4,6,9\}$ apresente:

   (a) A x B
   (b) B x A
   (c) B x C
   (d) C x B
   (e) A x B x C

1.12 Relação Binária

Dados dois conjuntos A e B e o produto cartesiano A x B. Se R é um subconjunto de A x B, isto é, se $R \subset$ A x B, então podemos dizer que R **é uma relação binária de A em B**.

Exemplo:

Sejam A = $\{3,4\}$ e B = $\{5,9\}$. Então, A x B = $\{(3;5),(3;9),(4;5),(4;9)\}$. Temos que alguns subconjuntos são:

$R_1 = \{(3;5),(4;5),(4;9)\}$;

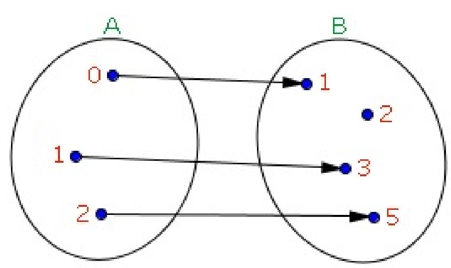
$R_2 = \emptyset$;

$R_3 = \{(3;9)\}$;

R_1, R_2 e R_3 são relações binárias entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B, pois todos são subconjuntos de A x B.

1.12.1 Diagrama de Flechas

Uma relação R entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B pode ser representada por diagramas como o abaixo, chamado de diagrama de flechas.



As flechas indicam quais pares ordenados pertencem à relação. Neste exemplo temos:

$R = \{(0;1),(1;3),(2;5)\}$

1.12.2 Domínio e Conjunto Imagem

Sendo $R \subset$ A x B, temos a seguinte relação:

Domínio: É o conjunto dos elementos de A que fazem parte dos pares ordenados constituintes de R e é representado por D(R).
Imagem: É o conjunto dos elementos de B que fazem parte dos pares ordenados constituintes de R e é representado por $Im(R)$.

No exemplo anterior, tinhamos $R = \{(0;1),(1;3),(2;5)\}$. Então, D($R$) = $\{0,1,2\}$ e $Im(R) = \{1,3,5\}$.

1.12.3 Relação Inversa

Dada uma relação binária R de A em B, definimos a **relação inversa** R^{-1} como o conjunto formado pelos pares ordenados obtidos a partir dos pares ordenados de R invertendo-se a ordem dos termos em cada par. Assim:
$R^{-1} = \{(y;x) \in B \times A |\ (x;y) \in R\}$

Exemplo:

Se $R = \{(0;1),(1;3),(2;5)\}$, então $R^{-1} = \{(1;0),(3;1),(5;2)\}$.

1.13 Exercícios Complementares

1. (FGV) Sendo A $= \{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$, pode-se afirmar que:
   (a) $\{1\} \notin$ A
   (b) $\{1\} \subset$ A
   (c) $\{1\} \cap \{2\} \not\subset$ A
   (d) $2 \in$ A
   (e) $\{1\} \cup \{2\} \in$ A

2. (UFPI) O número de subconjuntos de um conjunto A é igual ao dobro de subconjuntos de um conjunto B. Sabendo-se que A $\cup$ B tem 18 elementos e A $\cap$ B tem 5 elementos, então o númeor de elementos do conjuntos A é:
   (a) 8
   (b) 10
   (c) 12
   (d) 14
   (e) 16

3. (Unifor) Indica-se por n(X) o numero de elementos do conjunto X. Se A e B são conjuntos tais que $n(A \cup B) = 24$, $n(A - B) = 13$ e $n(B - A) = 9$, então:
   (a) $n(A) = 16$
   (b) $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 20$
   (c) $n(A) - n(B) = n(A - B)$
   (d) $n(A \cap B) = 3$
   (e) $n(B) = 11$

4. (UFF) Dado o conjunto P $= \{\{0\}, 0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$, considere as afirmativas:
   I. $\{0\} \in$ P   II. $\{0\} \subset$ P   III. $\emptyset \in$ P
   Com relação a essas afirmativas, conclui-se que:
   (a) todas são verdadeiras.
   (b) apenas a I é verdadeira.
   (c) apenas a II é verdadeira.
   (d) apenas a III é verdadeira.
   (e) todas são falsas.

5. (Fuvest) Sendo A $= \{2,3,5,6,9,13\}$ e B $= \{a^b | a \in A, b \in A \ e \ a \neq b\}$, o número de elementos de B que são números pares é:
   (a) 5
   (b) 8
   (c) 10
   (d) 12
   (e) 13

6. (Fatec) Para um conjunto M qualquer, a notação para o conjunto de pares de M é P(M). Se o conjunto A tem 16 elementos, então o número de elementos do conjunto P(P(A)) é:
   (a) 16^2
   (b) 16^6
   (c) 2^{16}
   (d) $2^{2^{16}}$
   (e) 2^{32}

7. (Vunesp) O número de subconjuntos de A $= \{1,2,3,4,5\}$ tais que $2 \notin$ A e $5 \notin$ A é:
   (a) igual ao número de subconjuntos de $\{1,3,4\}$
   (b) igual ao número de subconjuntos de $\{1,3,4,5\}$
   (c) menor que o número de subconjuntos de $\{1,3,4\}$
   (d) 12
   (e) 15

8. (UFU) O número de conjuntos distintos, os quais contêm o conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ e estão contidos no conjunto $\{1,2,3,...,16\}$, é igual a :

   (a) 16 (c) 64
   (b) 32 (d) 128

9. Sejam M e N conjuntos que possuem um único elemento em comum.Se o número de subconjuntos de é igual ao dobro do número de subconjuntos de N, o número de elementos do conjunto M $\cup$ N é:
   (a) o triplo do número de elementos de M.
   (b) o triplo do número de elementos de N.
   (c) o quádruplo do número de elementos de M.
   (d) o dobro do número de elementos de M.
   (e) o dobro do número de elementos de N.

10. (Vunesp) Suponhamos que:
    A $\cup$ B = { a, b, c, d, e, f, g, h }
    A $\cap$ B = { d, e } A - B = { a, b, c }
    Então:
    (a) B = { f, g, h }
    (b) B = { d, e, f, g, h }
    (c) B = { a, b, c, d, e }
    (d) B = { d, e }
    (e) B = $\emptyset$

11. (UFS) Se A e B são dois conjuntos não vazios e $\emptyset$ é o conjunto vazio, é verdade que, das afirmações:
    I. A $\cap$ $\emptyset$ = {$\emptyset$}
    II. (A - B) $\cup$ (B - A) = (A $\cup$ B) - (A $\cap$ B)
    III. { A $\cup$ B } = { A } $\cup$ { B }
    IV. $\emptyset$ $\in$ {$\emptyset$, A, B}
    são verdadeiras somente:

    (a) I e II. (d) III e IV.
    (b) II e III. (e) I, III e IV.
    (c) II e IV.

12. (Unifor) Se X e Y são dois conjuntos não vazios, então (X - Y) $\cup$ (X $\cap$ Y) é igual a:
    (a) a $\notin$ X
    (b) {a} $\not\subset$ X
    (c) {a} $\cap$ {a, b} $\notin$ X
    (d) b $\subset$ X
    (e) {a} $\cup$ {a, b} $\in$ X

13. (PUC) Se N = {1, 2, 3,...},
    A = {x $\in$ N| x é divisor de 24},
    B = {x $\in$ N| x é divisor de 16} e
    C = {x $\in$ N| x é divisor de 36},
    então (A - B) $\cap$ C é igual a:

    (a) {3, 18, 36} (d) $\emptyset$
    (b) {2, 6, 18} (e) {3, 6, 12}
    (c) {12,18}

14. (Mack) Se A e B são subconjuntos de U, e A’ e B’ seus respectivos complementares em U, então (A $\cap$ B) $\cup$ (A $\cap$ B’) é igual a:

    (a) A’ (d) A
    (b) B’ (e) A’ - B’
    (c) B

15. (UFU) Se A e B são dois subconjuntos não vazios de U tais que $\complement_U^{B\,\cap\,A} = \emptyset$, então tem-se necessariamente:

    (a) A $\subset$ B (d) $\complement_U^A \subset \complement_U^B$
    (b) B $\subset$ A (e) B $\cap$ $\complement_U^A = \emptyset$
    (c) A $\cap$ B = $\emptyset$

16. (Mack) A intersecção dos conjuntos
    A = {x $\in$ R| -2 $\leq$ x $\leq$ 1} e B = {x $\in$ R| -2 $\leq$ x $\leq$ 2} é:
    (a) $\emptyset$
    (b) A
    (c) B
    (d) {x $\in$ R| -2$\leq$ x $\leq$ 2}
    (e) {x $\in$ R| -1 $\leq$ x <2}

17. (Fatec) Se A = $]-3;2] \cup [3;6[$ e $\complement_R^B$ = $]-\infty;1[$, então A ∩ B é igual a:

(a) $]1;+\infty[$
(b) $[1;2] \cup [3;6[$
(c) $]2;3[\cup[6;+\infty[$
(d) $]1;2] \cup [3;6[$
(e) $]-\infty;6[$

18. (Mack) Se P = $[-3;1[$, T = {x ∈ R| -1 ≤ x < 2} e S = $[1;\frac{5}{4}[$, então S - (P ∩ T) é o intervalo:

(a) $]-2;1]$
(b) $]1;\frac{5}{4}[$
(c) $]-2;+\infty[$
(d) $[-1;1[$
(e) $[-2;-1[\cup[1;\frac{5}{4}[$

19. (UFV) Os pares ordenados $(1;2)$, $(2;6)$, $(3;7)$, $(4;8)$ e $(1;9)$ pertencem ao produto cartesiano A x B. Sabendo-se que A x B tem 20 elementos, é correto afirmar qua a soma dos elementos de A é:

(a) 9
(b) 11
(c) 10
(d) 12
(e) 15

20. (Uece) Sejam: A = $\{2,4,6,...,62,64\}$ e B = $\{(m;n) \in A \text{ x } A|\ m+n = 64\}$.
O número de elementos de B é igual a:

(a) 31
(b) 32
(c) 62
(d) 64

21. (ITA) Sejam E, F, G e H subconjuntos não vazios de R. Considere as afirmações:

I. Se $(E \text{ x } G) \subset (FxH)$, então E ⊂ G e G ⊂ H.
II. Se $(E \text{ x } G) \subset (F \text{ x } H) = F \text{ x } H$, então $(E \text{ x } G) \cup (F \text{ x } H) = F \text{ x } H$.
III. Se $(E \text{ x } G) \cup (F \text{ x } H) = F \text{ x } H$, então $(E \text{ x } G) \subset (F \text{ x } H)$.

Então:
(a) apenas a afirmação I é verdadeira.
(b) apenas a afirmação II é verdadeira.
(c) apenas as afirmações II e III são verdadeiras.
(d) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
(e) todas as afirmações são verdadeiras.

Referências

[1] Dante, Luiz Roberto, *Matemática Contexto e Aplicações*. Editora Ática, São Paulo, 3ª ed. 2008.

[2] Paiva, Manoel, *Matemática Paiva - Volume 1*. Editora Moderna, São Paulo, 1ª ed. 2009.

[3] Bianchini, Edwaldo; Paccola, Herval, *Matemática - Volume 1*. Editora Moderna, são Paulo, 1ª ed. 1990.

[4] `http://www.brasilescola.com/matematica/`

[5] `http://www.gcfaprendelivre.org/matematica/curso/los_conjuntos/entender_los_conjuntos/1.do`