Universidade Estadual de Campinas

MA225 - Análise de livros didáticos de matemática

TAREFA 3 - Análise de livros estrangeiros - GRUPO B

Kiselev's Geometry - Book I. Planimetry

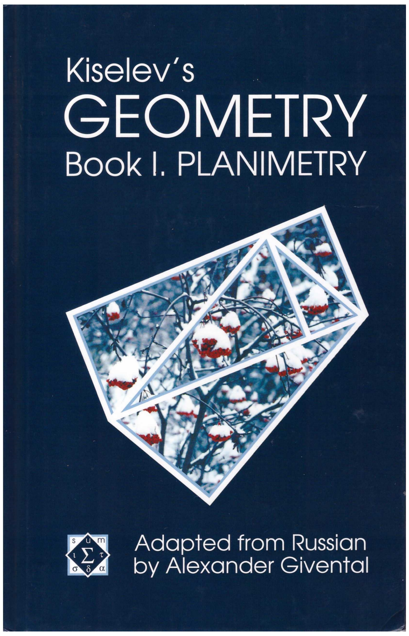
Ágatha Giacopini RA: 134730
Alana Felisardo RA: 115935
Alex Tavares RA: 101335

23 de maio de 2015

UNICAMP

Sumário

ANÁLISE DO CAPÍTULO REFERENTE AO TEMA "ÁREAS":



(a) Capa do livro: "Kiselev's Geometry - Book I. Planimetry"

Capítulo 5: Áreas

1 Introdução

Este estudo trata-se da análise do livro "Kiselev's Geometry - Book I. Planimetry", uma produção russa com tradução para o inglês. O livro ganhou destaque na Rússia, sendo adotado nas escolas da União Soviética por quase duas décadas, para estudantes entre 12 e 15 anos, correspondendo ao Ensino Fundamental brasileiro. A seguir, apresenta-se uma análise do livro baseado: na expêriencia particular de uma integrantes do grupo com o livro "Fundamentos da Matemática Elementar - Geometria Plana. Vol.9" (1) e através do Currículo do Estado de São Paulo(2). O uso do livro brasileiro não versa fazer uma análise horizontal com o estrangeiro, mas sim valer-se como material de referência do ensino brasileiro.

2 Metodologia

Nossa metodologia foi baseada numa análise prévia de ambos os textos, a fim de poder levantar critérios relevantes para uma análise comparativa. Dessa forma, os critérios provém de quatro principais eixos: **Organização**, **Conteúdo Comum**, **Conteúdo Díspar** e **Exercícios**.

2.1 Organização

1. Ordem de apresentação dos conteúdos: descrever a estrutura de apresentação e seu padrão (exemplo: teoria, exemplos, exercícios);

2. Layout: uso de figuras de forma proveitosa, caixas de informações, maneira de destacar os conteúdos.

2.2 Conteúdo Comum

1. Nível de formalismo da linguagem (caso se aproxime da linguagem utilizada a nível acadêmico, será considerada uma linguagem mais formal): verificar a estrutura de apresentação das definições e teoremas, e suas respectivas demonstrações, além da nomenclatura;

2. Comparar as demonstrações apresentadas em relação ao livro **(1)**;

2.3 Conteúdo Díspar

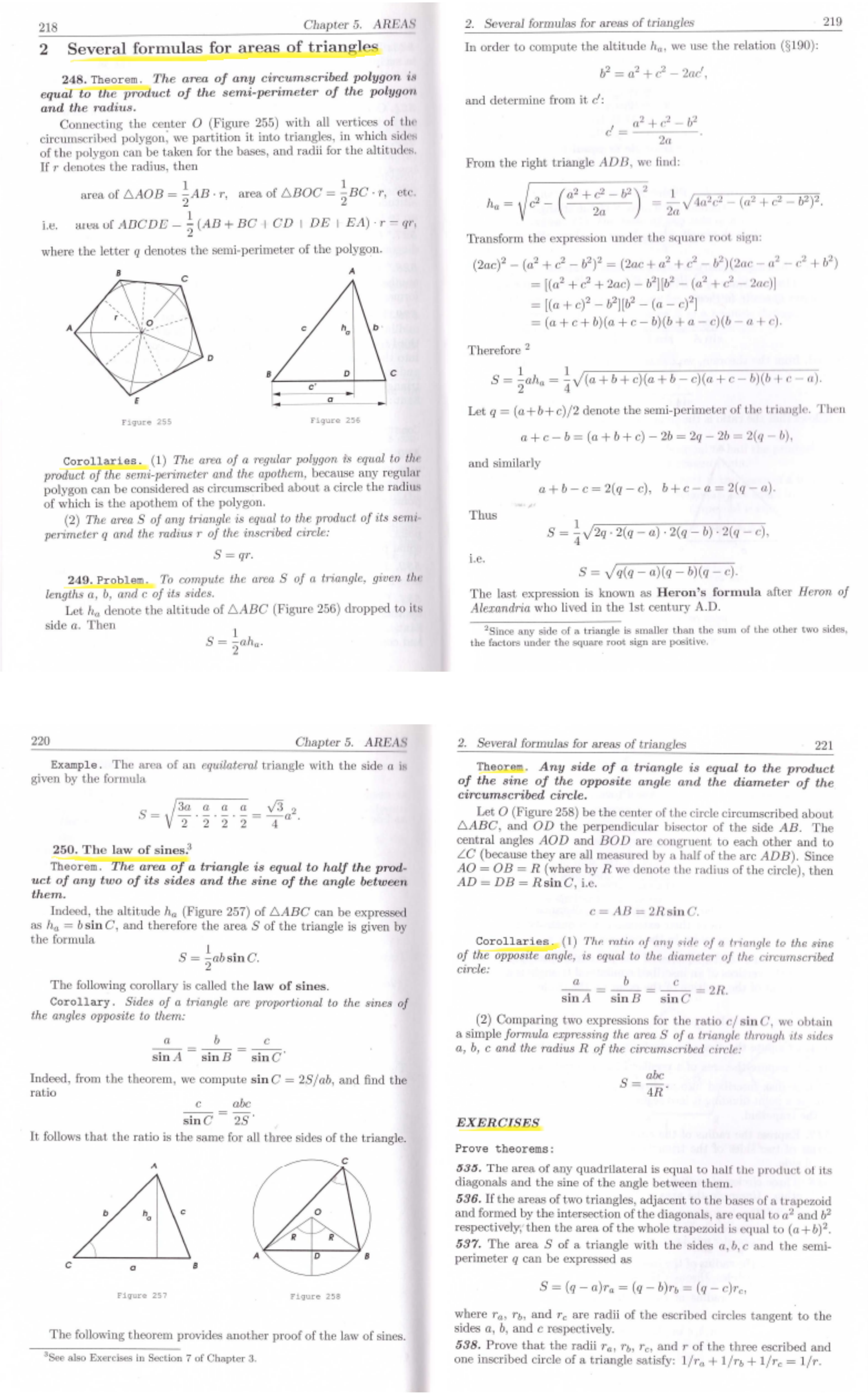
Trata-se de observar se o conteúdo é necessário ser ensinado ou se é apenas uma informação complementar. Se necessário, este conteúdo seria adequado para ser ensinado na 8º/9ºano do Ensino Fundamental II (explicitar para qual etapa do ensino brasileiro o livro seria indicado, segundo **(2)**).

2.4 Exercícios

Comparar as habilidades requeridas e a desenvolver em relação aos exercícios brasileiros: se buscam demonstração (exercícios mais teóricos) ou se investigam apenas o nível de manipulação e aplicação do conteúdo (prova de teoremas, calcule e construção). Além disso, investigaremos a quantidade de exercícios resolvida para uma mesma quantidade de tempo demanada do livro russo em relação ao **(1)**

3 Organização

O livro de Kiselev adota a seguinte recorrência: definição, teorema (a partir daqui pode vir um problema resolvido ou não) e bloco de exercícios. A seguir um exemplo de como isso acontece:



218 Chapter 5. AREAS

2 Several formulas for areas of triangles

248. Theorem. *The area of any circumscribed polygon is equal to the product of the semi-perimeter of the polygon and the radius.*

Connecting the center O (Figure 255) with all vertices of the circumscribed polygon, we partition it into triangles, in which sides of the polygon can be taken for the bases, and radii for the altitudes. If r denotes the radius, then

$$\text{area of } \triangle AOB = \frac{1}{2}AB \cdot r, \quad \text{area of } \triangle BOC = \frac{1}{2}BC \cdot r, \quad \text{etc.}$$

$$\text{i.e.} \quad \text{area of } ABCDE = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DE + EA) \cdot r = qr,$$

where the letter q denotes the semi-perimeter of the polygon.

Figure 255

Figure 256

Corollaries. (1) *The area of a regular polygon is equal to the product of the semi-perimeter and the apothem*, because any regular polygon can be considered as circumscribed about a circle the radius of which is the apothem of the polygon.

(2) *The area S of any triangle is equal to the product of its semi-perimeter q and the radius r of the inscribed circle:*

$$S = qr.$$

249. Problem. *To compute the area S of a triangle, given the lengths a, b, and c of its sides.*

Let h_a denote the altitude of $\triangle ABC$ (Figure 256) dropped to its side a. Then

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

2. Several formulas for areas of triangles 219

In order to compute the altitude h_a, we use the relation (§190):

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac',$$

and determine from it c':

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

From the right triangle ADB, we find:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}.$$

Transform the expression under the square root sign:

$$\begin{aligned}(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 &= (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)\\ &= [(a^2 + c^2 + 2ac) - b^2][b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)]\\ &= [(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]\\ &= (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c).\end{aligned}$$

Therefore [2]

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}.$$

Let $q = (a+b+c)/2$ denote the semi-perimeter of the triangle. Then

$$a + c - b = (a + b + c) - 2b = 2q - 2b = 2(q - b),$$

and similarly

$$a + b - c = 2(q - c), \quad b + c - a = 2(q - a).$$

Thus

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2q \cdot 2(q - a) \cdot 2(q - b) \cdot 2(q - c)},$$

i.e.

$$S = \sqrt{q(q - a)(q - b)(q - c)}.$$

The last expression is known as **Heron's formula** after *Heron of Alexandria* who lived in the 1st century A.D.

[2]Since any side of a triangle is smaller than the sum of the other two sides, the factors under the square root sign are positive.

220 Chapter 5. AREAS

Example. The area of an *equilateral* triangle with the side a is given by the formula

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

250. The law of sines.[3]

Theorem. *The area of a triangle is equal to half the product of any two of its sides and the sine of the angle between them.*

Indeed, the altitude h_a (Figure 257) of $\triangle ABC$ can be expressed as $h_a = b \sin C$, and therefore the area S of the triangle is given by the formula

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C.$$

The following corollary is called the **law of sines**.

Corollary. *Sides of a triangle are proportional to the sines of the angles opposite to them:*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Indeed, from the theorem, we compute $\sin C = 2S/ab$, and find the ratio

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S}.$$

It follows that the ratio is the same for all three sides of the triangle.

Figure 257

Figure 258

The following theorem provides another proof of the law of sines.

[3]See also Exercises in Section 7 of Chapter 3.

2. Several formulas for areas of triangles 221

Theorem. *Any side of a triangle is equal to the product of the sine of the opposite angle and the diameter of the circumscribed circle.*

Let O (Figure 258) be the center of the circle circumscribed about $\triangle ABC$, and OD the perpendicular bisector of the side AB. The central angles AOD and BOD are congruent to each other and to $\angle C$ (because they are all measured by a half of the arc ADB). Since $AO = OB = R$ (where by R we denote the radius of the circle), then $AD = DB = R \sin C$, i.e.

$$c = AB = 2R \sin C.$$

Corollaries. (1) *The ratio of any side of a triangle to the sine of the opposite angle, is equal to the diameter of the circumscribed circle:*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

(2) Comparing two expressions for the ratio $c/\sin C$, we obtain a simple *formula expressing the area S of a triangle through its sides a, b, c and the radius R of the circumscribed circle:*

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

EXERCISES

Prove theorems:

535. The area of any quadrilateral is equal to half the product of its diagonals and the sine of the angle between them.

536. If the areas of two triangles, adjacent to the bases of a trapezoid and formed by the intersection of the diagonals, are equal to a^2 and b^2 respectively, then the area of the whole trapezoid is equal to $(a+b)^2$.

537. The area S of a triangle with the sides a, b, c and the semi-perimeter q can be expressed as

$$S = (q - a)r_a = (q - b)r_b = (q - c)r_c,$$

where r_a, r_b, and r_c are radii of the escribed circles tangent to the sides a, b, and c respectively.

538. Prove that the radii r_a, r_b, r_c, and r of the three escribed and one inscribed circle of a triangle satisfy: $1/r_a + 1/r_b + 1/r_c = 1/r$.

Figura 2: Exemplo de layout do livro (p. 218-221)

Em relação aos livros brasileiros, nota-se que o Kiselev adota uma formatação de texto extremamente formal: seu designer de página trata-se de um latex num formato de artigo. Já os livros didáticos brasileiros conforme vão se aproximando do Ensino Médio, vão perdendo o uso de figuras, balões, ou uma edição textual mais dinâmica e atrativa para se tornarem cada vez mais próximos de uma apresentação acadêmica. No entanto, Kiselev adota uma formatação muito "seca" e formal para a idade proposta: suas páginas são em preto e branco, as figuras que aparecem são apenas relacionadas à demonstrações e em nenhum momento há algum interação do livro com o leitor, como algum quadro de destaque, ex: "pense nisto", etc.

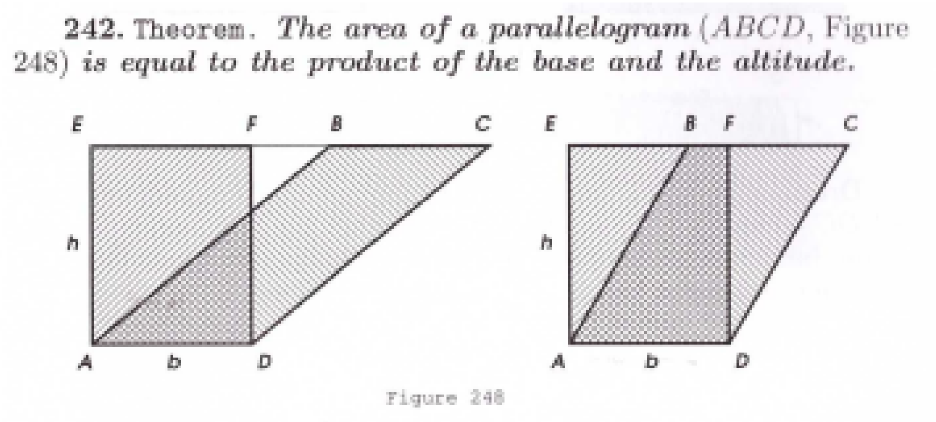


Figura 3: Exemplificação de uma figura para ilustrar o teorema (p. 213)

Esta forma de apresentação do conteúdo pode causar uma certa resistência ou insegurança por parte do aluno, já que o estudante brasileiro ainda não tem maturidade para se deparar com uma estrutura tão formal como a proposta pelo livro russo.

4 Conteúdo Comum

O livro do Kiselev começa o capítulo de áreas (capítulo 5, p. 209) criando uma ponte entre o conceito de área e o que a pessoa já conhece na sua vida (figura 4), para isso ele da alguns exemplo de como as pessoas veem área no seu dia-a-dia. Em seguida, ele traz "principais suposições sobre áreas", falando da relação de área com os números reais (mas não da função especificamente), e também apresenta algumas propriedades como equivalência de superficies, a propriedade aditiva e também a unidade de medida para áreas (figura 5). Segue definindo alguns elementos que serão usados para o cálculo de áreas como o que é base e o que é altura de um polígono, e até mesmo da alguns exemplos de altura, como a do retângulo e a do trapézio (figura 6). Já podemos ver no início do capítulo que o objetivo dele é construir o conteúdo.

1 **Areas of polygons**

237. The concept of area. We all have some idea about the quantity called *area*, from everyday life. For example, the harvest a farmer expects to collect from a piece of land depends not so much on the shape of the piece, but only on the size of land surface that the farmer cultivates. Likewise, to determine the amount of paint needed to paint a surface, it suffices to know the overall size of the surface rather than the exact shape of it.

We will establish here more precisely the concept of area of geometric figures, and develop methods for its computation.

238. Main assumptions about areas. We will assume that

Figura 4: Conceito de área (p. 209)

238. Main assumptions about areas. We will assume that the area of a geometric figure is a quantity, expressed by *positive* numbers, and is well-defined for *every polygon*. We further assume that the areas of figures possess the following properties:

(1) *Congruent figures have equal areas.* Figures of equal area are sometimes called **equivalent**. Thus, according to this property of areas, *congruent figures are equivalent*. The converse can be false: equivalent figures are not always congruent.

(2) *If a given figure is partitioned into several parts* (M, N, P, Figure 244), *then the number expressing the area of the whole figure is equal to the sum of the numbers expressing the areas of the parts.* This property of areas is called **additivity**. It implies, that *the area of any polygon is greater than the area of any other polygon enclosed by it.* Indeed, the difference between the areas of the enclosing and enclosed polygons is positive since it represents the area of a figure (namely of the remaining part of the enclosing polygon, which can

Figura 5: Parte de principais suposições sobre áreas (p. 209)

240. Base and altitude. Let us agree to call one of the sides of a triangle or parallelogram the **base** of these figures, and a perpendicular dropped to this side from the vertex of the triangle, or from any point of the opposite side of the parallelogram, the **altitude**.

In a rectangle, the side perpendicular to the base can be taken for the altitude.

In a trapezoid, both parallel sides are called bases, and a common perpendicular between them, an altitude.

The base and the altitude of a rectangle are called its **dimensions**.

Figura 6: Definição de base e altura (p. 210)

Ele mostra a área do retângulo como um teorema e demonstra esse teorema formalmente, formal até

demais para os alunos do Brasil que estão aprendendo área de polígonos pela primeira vez.
Em contrapartida, o livro Matemática Elementar usa razão entre os lados de um retângulo para chegar na fórmula da área.

241. Theorem. *The area of a rectangle is the product of its dimensions.*

This brief formulation should be understood in the following way: the number expressing the area of a rectangle in certain square units is equal to the product of the numbers expressing the length of the base and the altitude of the rectangle in the corresponding linear units.

In the proof of this theorem, three cases can occur:

(i) The lengths of the base and the altitude (measured by the same unit) are expressed by *whole* numbers.

Let a given rectangle (Figure 246) have the base equal to b linear units, and the altitude to h such units. Divide the base and the altitude into respectively b and h congruent parts, and draw through the division points two series of lines parallel respectively to the altitude and the base. Mutual intersections of these lines partition the rectangle into quadrilaterals. In fact each of these quadrilaterals (e.g. **K**) is congruent to the unit square. (Indeed, since the sides of **K** are parallel to the sides of the rectangle, then all angles of **K** are right; and the lengths of the sides of **K** are equal to the distances between the parallel lines, i.e. to the same linear unit.) Thus the rectangle is partitioned into squares of unit area each, and it remains to find the number of these squares. Obviously, the series of lines parallel to the base divides the rectangle into as many rectangular strips as there are linear units in the altitude, i.e. into h congruent strips. Likewise, the series of lines parallel to the altitude divides each of the strips into as many unit squares as there are linear units in the base, i.e. into b such squares. Therefore the total number of squares is $b \times h$. Thus

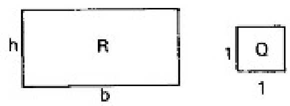
$$\text{the area of a rectangle} = bh,$$

Figura 7: Parte da demonstração do teorema da área do retângulo (p. 211)

243. *Retângulo*

Dado o retângulo $R(b, h)$ e fixado o quadrado $Q(1, 1)$ como unitário, temos:

Área do retângulo $R(b, h)$ = $= A_R = \dfrac{R(b, h)}{Q(1, 1)}$



315

$$A_R = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1)} = \frac{b}{1} \cdot \frac{h}{1} \Rightarrow A_R = (\text{medida de b}) \cdot (\text{medida de h})$$

que será representada simplesmente por:

$$\boxed{A_R = b \cdot h}$$

Figura 8: Demonstração da área do retângulo - Matemática Elementar (p. 315-316)

E assim, vai seguindo demonstrando a área de outros polígonos. O que o Kiselev faz de muito interessante, e que são poucos livros brasileiros que utilizam isso, inclusive o livro Matemática Elementar também utiliza, é demonstração de áreas através de imagens, por exemplo, demonstrar o porquê a área do triângulo é a metade da área de um paralelogramo (figura 9).

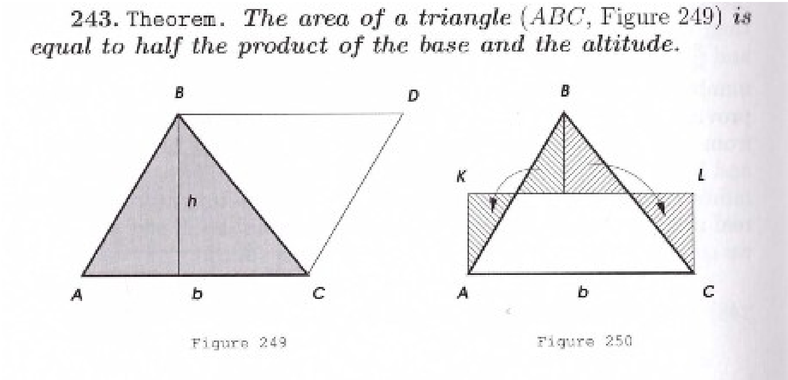


Figura 9: Teorema da área do triângulo (p. 214)

Outra coisa que o Kiselev usa nesse livro são corolários, algo que nem tínhamos ouvido falar antes de entrar no curso de graduação. A nomenclatura que ele usa é muito formal. O livro Matemática Elementar evita esse tipo de nomenclatura, até mesmo para definir as áreas dos outros polígonos ele nem apresenta em forma de teorema, só coloca o nome do polígono como subseção (figura 10).

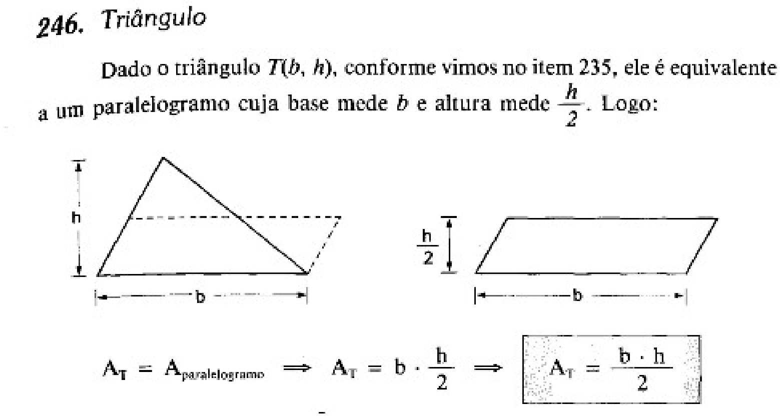


Figura 10: Definição da área do triângulo (p. 317)

A seção de "várias fórmulas para a área de triângulos" é algo que ambos os livros trazem no mesmo capítulo, porém, como já vem acontecendo desde o início do capítulo, o Kiselev traz algo mais formal, mais díficil de entender, quanto o livro Matemática Elementar, traz fórmulas prontas. Claro que já conseguimos analisar aqui que o objetivo dos livros são diferentes, enquanto o do Kiselev constrói o conteúdo, o Matemática Elementar, assim como grande parte dos livros brasileiros, induzem a famosa "decoreba" (figuras 11 e 12).

2 Several formulas for areas of triangles

248. Theorem. *The area of any circumscribed polygon is equal to the product of the semi-perimeter of the polygon and the radius.*

Connecting the center O (Figure 255) with all vertices of the circumscribed polygon, we partition it into triangles, in which sides of the polygon can be taken for the bases, and radii for the altitudes. If r denotes the radius, then

$$\text{area of } \triangle AOB = \frac{1}{2}AB \cdot r, \quad \text{area of } \triangle BOC = \frac{1}{2}BC \cdot r, \quad \text{etc.}$$

i.e. $$\text{area of } ABCDE = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DE + EA) \cdot r = qr,$$

where the letter q denotes the semi-perimeter of the polygon.

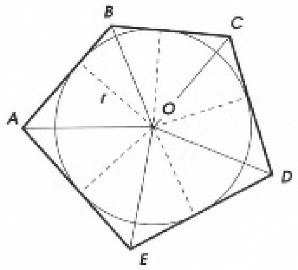


Figure 255

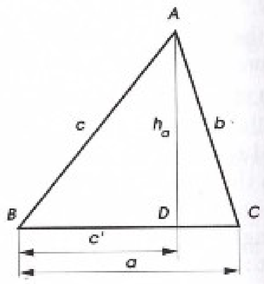


Figure 256

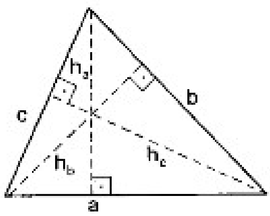
Figura 11: Várias fórmulas para área de triângulos - Kiselev (p. 218)

III. Expressões da área do triângulo

250. Em função dos lados e respectivas alturas.

Em vista do item 246:

$$S = \frac{1}{2}\,ah_a,\ S = \frac{1}{2}\,bh_b,\ S = \frac{1}{2}\,ch_c$$



251. Área do triângulo em função dos lados.

Dados: a, b, c e com $p = \dfrac{a+b+c}{2}$,

em vista do item 207, temos:

$$S = \frac{1}{2}\,ah_a$$

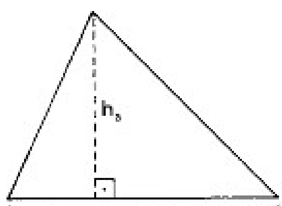


Figura 12: Expressões da área do triângulo - Matemática Elementar (p. 329)

A seção "área do círculo e suas partes/setores", é também abordado dentro do mesmo capítulo nos dois livros, porém no Currículo de São Paulo, é algo para ser abordado em outro ano, ou seja, enquanto o currículo propõe que seja ensinado área de polígono no 8º ano, ele também propõe que área do círculo (tudo sobre o círculo, desde a apresentação do número pi) seja ensinado no 9º ano do Ensino Fundamental. Nesta seção os padrões dos livros são mantidos, o Kiselev com sua estrutura mais formal, com teoremas e demonstrações e o Matemática Elementar com algo mais direto, dando fórmulas.

O conteúdo do Kiselev é adequado para a realidade brasileira, mesmo na faixa etária proposta pelo currículo do Estado de São Paulo, porém está um pouco formal para nossos alunos. São demonstrações formais, são nomenclaturas que eles desconhecem, ou seja, nomenclaturas que as pessoas aqui geralmente só estarão familiarizadas no ensino superior.

5 Conteúdo Díspar

A seção de Teorema de Pitágoras é de certa forma um conteúdo díspar, pois apesar dos livros brasileiros, em particular o livro Matemática Elementar, trazerem o Teorema de Pitágoras e até mesmo demonstrarem, seja geometricamente ou algebricamente, mas nunca vimos trazerem essa versão revisada, com algumas demonstrações diferentes (figura 13).

259. Theorem. ***The areas of squares constructed on the legs of a right triangle add up to the area of the square constructed on its hypotenuse.***

This proposition is yet another form of the Pythagorean theorem, which we proved in §188: *the square of the number measuring the length of the hypotenuse is equal to the sum of the squares of the numbers measuring the legs.* Indeed, the square of the number measuring the length of a segment is the number measuring the area of the square constructed on this segment.

There are many other ways to prove the Pythagorean theorem.

Euclid's proof. Let ABC (Figure 264) be a right triangle, and $BDEA$, $AFGC$, and $BCKH$ squares constructed on its legs and the hypotenuse. It is required to prove that the areas of the first two squares add up to the area of the third one.

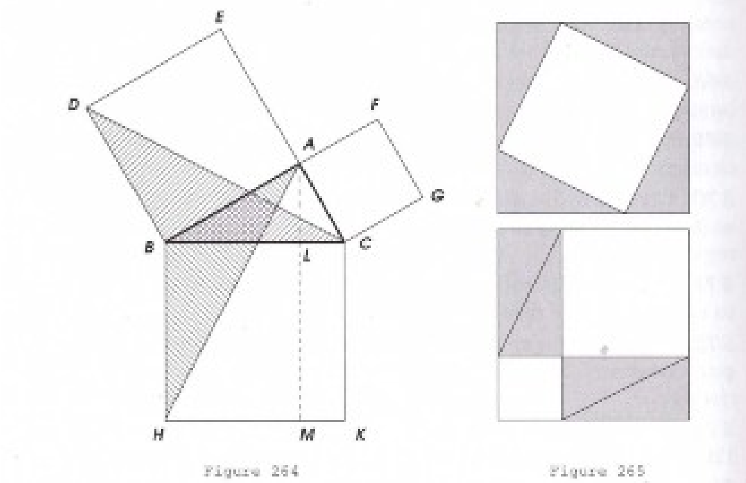


Figura 13: Teorema de Pitágoras - Kiselev (p. 230)

Como base de referência, o livro Matemática Elementar, traz uma simples demonstração algébrica e que é de fácil entendimento para os alunos brasileiros (figura 14), este é apresentado no capítulo que trata de triângulos retângulos antecedendo o capítulo sobre áreas. O Kiselev, trabalha com essa parte revisada dentro de áreas, pois ele utiliza as demonstrações geométricas, nas quais utiliza o conceito de área, neste livro especificamente, não é tratado sobre o teorema anteriormente.

c) Teorema de Pitágoras

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Demonstração

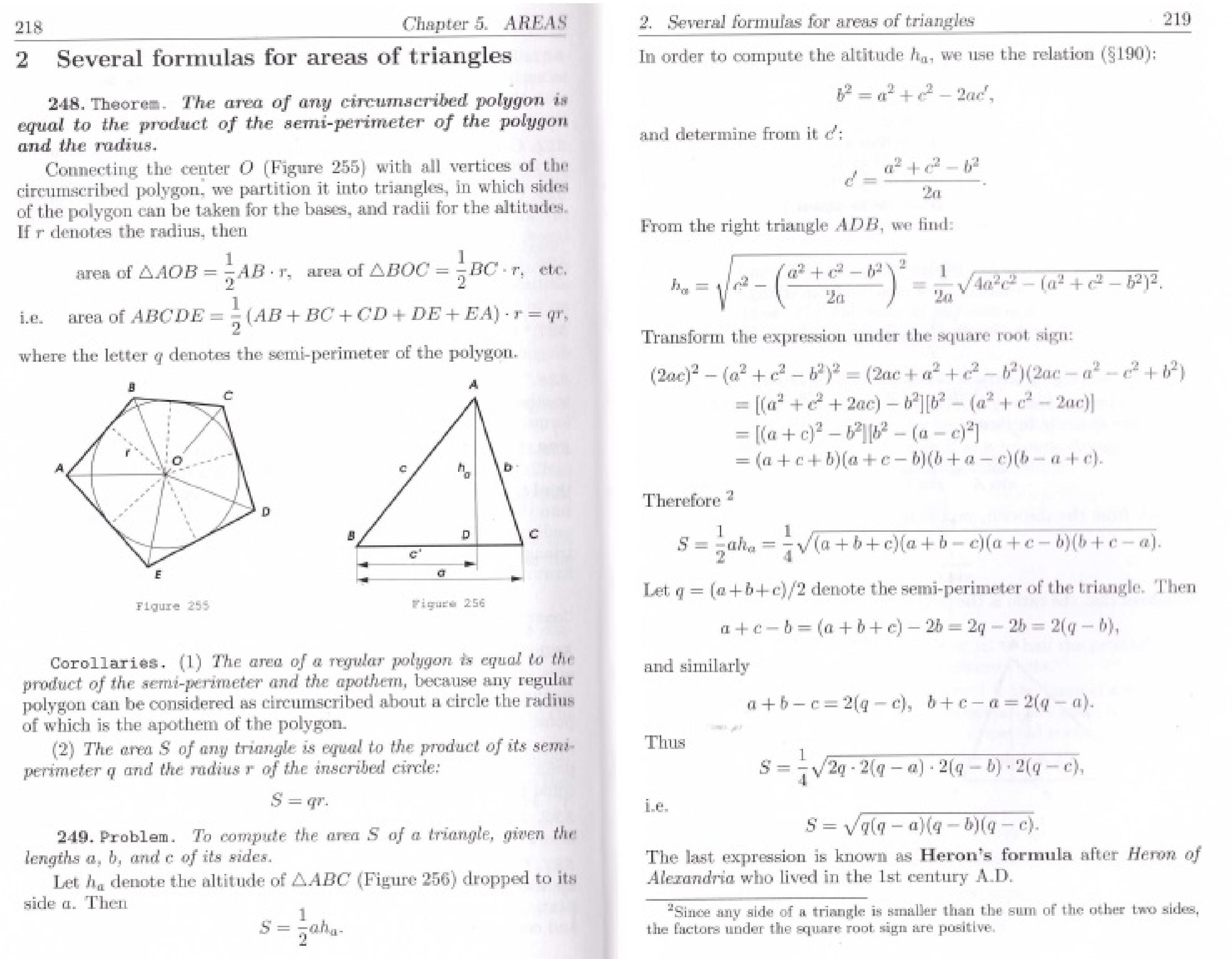
Para provar esta relação basta somar membro a membro (1) e (2), como segue:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a \cdot n \\ c^2 = a \cdot m \end{array}\right\} \xrightarrow{+} b^2 + c^2 = am + an \implies b^2 + c^2 = \underbrace{a(m+n)}_{a} \implies$$
$$\implies b^2 + c^2 = a^2$$

Figura 14: Teorema de Pitágoras - Matemática Elementar (p. 224)

Este conteúdo díspar que tem no livro do Kiselev é um tanto irrelevante, pois como discutido, é um tipo de conteúdo que o professor poderia deixar passar, pelo fato de ser um conhecimento complementar, não básico e consequentemente não estritamente necessário para ser ensinado no momento em que o aluno se encontra da sua vida escolar, 8º ano. Talvez, seja interessante voltar a isso no Ensino Médio, quando os alunos já terão maior maturidade para entender as demonstrações e poderão até mesmo fazer conexões com o que foi aprendido no Ensino Fundamental.

Outras disparidades que foram encontradas no Kiselev são várias fórmulas como a fórmula de Heron (figura 15) e a Lei dos Senos (figura 16), por exemplo. São conteúdos bem mais avançados nos quais são mais indicados para alunos com uma faixa etária um pouco maior, sendo mais próximo do conteúdo de Ensino Médio e não do Ensino Fundamental.



218 Chapter 5. AREAS

2 Several formulas for areas of triangles

248. Theorem. ***The area of any circumscribed polygon is equal to the product of the semi-perimeter of the polygon and the radius.***

Connecting the center O (Figure 255) with all vertices of the circumscribed polygon, we partition it into triangles, in which sides of the polygon can be taken for the bases, and radii for the altitudes. If r denotes the radius, then

$$\text{area of } \triangle AOB = \frac{1}{2}AB \cdot r, \quad \text{area of } \triangle BOC = \frac{1}{2}BC \cdot r, \quad \text{etc.}$$

$$\text{i.e.} \quad \text{area of } ABCDE = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DE + EA) \cdot r = qr,$$

where the letter q denotes the semi-perimeter of the polygon.

Figure 255 Figure 256

Corollaries. (1) *The area of a regular polygon is equal to the product of the semi-perimeter and the apothem,* because any regular polygon can be considered as circumscribed about a circle the radius of which is the apothem of the polygon.

(2) *The area S of any triangle is equal to the product of its semi-perimeter q and the radius r of the inscribed circle:*

$$S = qr.$$

249. Problem. *To compute the area S of a triangle, given the lengths a, b, and c of its sides.*

Let h_a denote the altitude of $\triangle ABC$ (Figure 256) dropped to its side a. Then

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

2. Several formulas for areas of triangles 219

In order to compute the altitude h_a, we use the relation (§190):

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac',$$

and determine from it c':

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

From the right triangle ADB, we find:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}.$$

Transform the expression under the square root sign:

$$\begin{aligned}(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 &= (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)\\ &= [(a^2 + c^2 + 2ac) - b^2][b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)]\\ &= [(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]\\ &= (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c).\end{aligned}$$

Therefore [2]

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}.$$

Let $q = (a + b + c)/2$ denote the semi-perimeter of the triangle. Then

$$a + c - b = (a + b + c) - 2b = 2q - 2b = 2(q - b),$$

and similarly

$$a + b - c = 2(q - c), \quad b + c - a = 2(q - a).$$

Thus

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2q \cdot 2(q - a) \cdot 2(q - b) \cdot 2(q - c)},$$

i.e.

$$S = \sqrt{q(q - a)(q - b)(q - c)}.$$

The last expression is known as **Heron's formula** after *Heron of Alexandria* who lived in the 1st century A.D.

[2] Since any side of a triangle is smaller than the sum of the other two sides, the factors under the square root sign are positive.

Figura 15: Área de Polígonos circunscritos e a Fórmula de Heron (p. 218-219)

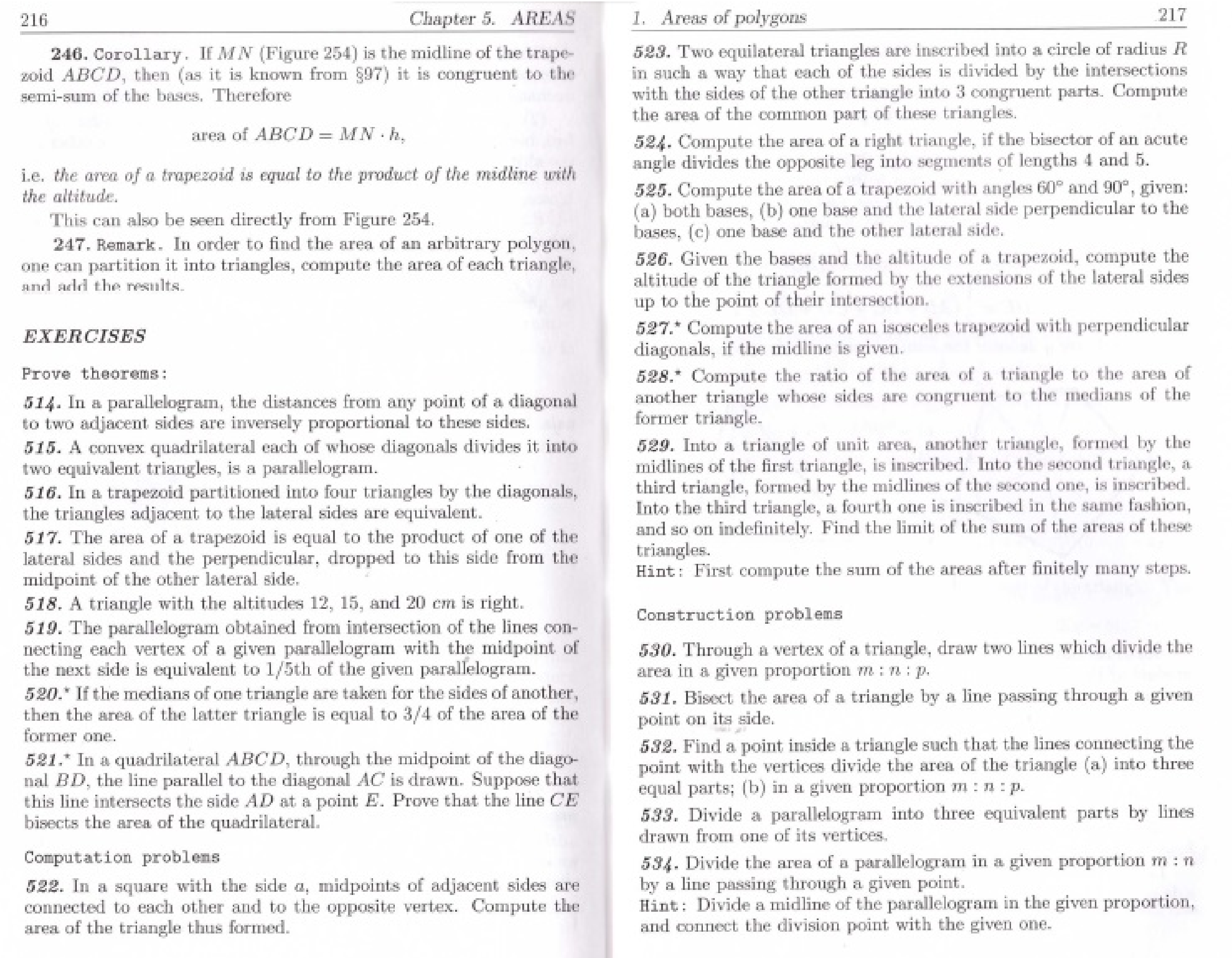
250. The law of sines.[3]

Theorem. ***The area of a triangle is equal to half the product of any two of its sides and the sine of the angle between them.***

Figura 16: Lei dos Senos (p. 220)

6 Exercícios

No livro do Kiselev, os exercícios são divididos normalmente em três partes: "Prove theorems", onde o aluno tem de demonstrar alguns teoremas; "Computation problems", onde o aluno terá de realizar alguns cálculos, não necessariamente numéricos e "Construction problems", onde o aluno faz as construções geométricas exigidas. (figura 17)



216 Chapter 5. *AREAS*

246. Corollary. If MN (Figure 254) is the midline of the trapezoid $ABCD$, then (as it is known from §97) it is congruent to the semi-sum of the bases. Therefore

$$\text{area of } ABCD = MN \cdot h,$$

i.e. *the area of a trapezoid is equal to the product of the midline with the altitude.*

This can also be seen directly from Figure 254.

247. Remark. In order to find the area of an arbitrary polygon, one can partition it into triangles, compute the area of each triangle, and add the results.

EXERCISES

Prove theorems:

514. In a parallelogram, the distances from any point of a diagonal to two adjacent sides are inversely proportional to these sides.

515. A convex quadrilateral each of whose diagonals divides it into two equivalent triangles, is a parallelogram.

516. In a trapezoid partitioned into four triangles by the diagonals, the triangles adjacent to the lateral sides are equivalent.

517. The area of a trapezoid is equal to the product of one of the lateral sides and the perpendicular, dropped to this side from the midpoint of the other lateral side.

518. A triangle with the altitudes 12, 15, and 20 *cm* is right.

519. The parallelogram obtained from intersection of the lines connecting each vertex of a given parallelogram with the midpoint of the next side is equivalent to 1/5th of the given parallelogram.

*520.** If the medians of one triangle are taken for the sides of another, then the area of the latter triangle is equal to 3/4 of the area of the former one.

*521.** In a quadrilateral $ABCD$, through the midpoint of the diagonal BD, the line parallel to the diagonal AC is drawn. Suppose that this line intersects the side AD at a point E. Prove that the line CE bisects the area of the quadrilateral.

Computation problems

522. In a square with the side a, midpoints of adjacent sides are connected to each other and to the opposite vertex. Compute the area of the triangle thus formed.

1. *Areas of polygons* 217

523. Two equilateral triangles are inscribed into a circle of radius R in such a way that each of the sides is divided by the intersections with the sides of the other triangle into 3 congruent parts. Compute the area of the common part of these triangles.

524. Compute the area of a right triangle, if the bisector of an acute angle divides the opposite leg into segments of lengths 4 and 5.

525. Compute the area of a trapezoid with angles 60° and 90°, given: (a) both bases, (b) one base and the lateral side perpendicular to the bases, (c) one base and the other lateral side.

526. Given the bases and the altitude of a trapezoid, compute the altitude of the triangle formed by the extensions of the lateral sides up to the point of their intersection.

*527.** Compute the area of an isosceles trapezoid with perpendicular diagonals, if the midline is given.

*528.** Compute the ratio of the area of a triangle to the area of another triangle whose sides are congruent to the medians of the former triangle.

529. Into a triangle of unit area, another triangle, formed by the midlines of the first triangle, is inscribed. Into the second triangle, a third triangle, formed by the midlines of the second one, is inscribed. Into the third triangle, a fourth one is inscribed in the same fashion, and so on indefinitely. Find the limit of the sum of the areas of these triangles.

Hint: First compute the sum of the areas after finitely many steps.

Construction problems

530. Through a vertex of a triangle, draw two lines which divide the area in a given proportion $m : n : p$.

531. Bisect the area of a triangle by a line passing through a given point on its side.

532. Find a point inside a triangle such that the lines connecting the point with the vertices divide the area of the triangle (a) into three equal parts; (b) in a given proportion $m : n : p$.

533. Divide a parallelogram into three equivalent parts by lines drawn from one of its vertices.

534. Divide the area of a parallelogram in a given proportion $m : n$ by a line passing through a given point.

Hint: Divide a midline of the parallelogram in the given proportion, and connect the division point with the given one.

Figura 17: Lista de Exercícios do Kiselev (p. 216-217)

Os exercícios são bem formais e o nível de dificuldade observado é elevado para os alunos brasileiros no Ensino Fundamental. Para efeito de comparação, selecionamos e resolvemos dois exercícios do Kiselev (figura 18) e observamos o tempo gasto para encontrar as soluções dos dois exercícios. Decidimos ver quantos exercícios do Matemática Elementar conseguimos resolver nesse mesmo intervalo de tempo.

Computation problems

529. Into a triangle of unit area, another triangle, formed by the midlines of the first triangle, is inscribed. Into the second triangle, a third triangle, formed by the midlines of the second one, is inscribed. Into the third triangle, a fourth one is inscribed in the same fashion, and so on indefinitely. Find the limit of the sum of the areas of these triangles.

Hint: First compute the sum of the areas after finitely many steps.

Prove theorems:

535. The area of any quadrilateral is equal to half the product of its diagonals and the sine of the angle between them.

Figura 18: Exercícios do Kiselev selecionados (p. 217 (cima) e p. 221 (baixo))

Concluímos que o mesmo tempo que foi gasto resolvendo 2 exercícios do Kiselev, conseguimos resolver quase 10 vezes mais exercícios do Matemática Elementar.

7 Conclusão

O livro do Kiselev é um ótimo livro, mas concluimos que não é muito adequado para os alunos do Ensino Fundamental brasileiro. De forma geral, ele tem uma linguagem rigorosa, coisas que aqui as pessoas só se familiarizam na graduação, alguns conteúdos e demonstrações são adequados para serem ensinados, mas não no momento apresentado. Como comentado no decorrer da análise, algumas coisas poderiam ser apresentadas no Ensino Médio, criando uma conexão com o Ensino Fundamental.

O que nos chamou mais a atenção nesse contato com o livro do Kiselev, foi o layout. Ele é muito semelhante com os livros que usamos no Ensino Superior, pela estrutura, formatação e também pela forma de apresentação dos conteúdos. Porém, pode-se observar que fora o aspecto formal como a teoria é apresentada, a estrutura é muito clara, existe uma conectividade e relação entre um conteúdos e outro, as demonstrações poderiam ser facilmente introduzidas numa turma correspondente ao ensino brasileiro. Nestes aspectos o livro se sai muito bem e não há motivos em relação a isto para que não fosse utilizado numa sala de 8^{o}/9^{o} ano. No entanto, cabe lembrar que em relação a cobrança e exigência dos execícios do livro russo em relação ao do ensino brasileiro supera em muito. Basta recordar o tempo gasto para resolver um exercício do Kiselev em comparação com o referencial brasileiro: 10 vezes mais. Logo, a adoção do livro como um todo para o Ensino Brasileiro não convém, mas o que não siginifica que o livro seja ruim, apenas que o ensino de matemática na Rússia corresponde a uma realidade muito diferente da brasileira.

Referências

[1] Dolce, O., and Pompeo, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar, 9: geomteria plana.* São Paulo, SP: Atual Editora, 2002.

[2] (ESTADO), S. P. Currículo do estado de são paulo: Matemática e suas tecnologias, 2012.

[3] Kiselev, A. P. *Kiselev's Geometry. Book I, Planimetry, adapted from Russian by Alexander Givental.* Sumizdat, 2006.