‘Kyselev, uma releitura com olhar brasileiro‘

Juliana M. R. de Souza - RA 024184
Lucas Oliveira - RA 092017
Lucas Carvalho - RA 094071
Thais A. Guizellini - RA 104157

PUBLICADO POR ALUNOS MA225

Material elaborado pelos alunos da disciplina MA225 do 1° semestre de 2014 durante a tarefa 5.

Primeira impressão, Junho 2014

Sumário

O presente trabalho, resultado da proposta feita junto à disciplina **Análise de Materiais Didátidos (MA225)**, oferecida pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) no primeiro semestre de 2014. A proposta foi de escrever de um modo mais receptivo ao aluno do Ensino Médio do Brasil o tema de Geometria abordado pelo livro do Kiselev [1].

Além das traduções feitas do inglês, também foi utilizado muito o recurso de figuras pra melhor explicação do passo-a-passo presente no livro. Alguns *boxes* presentes ao longo do texto ajudam o aluno a melhor entender o que ocorre durante as explicações.

Os exercícios foram classificados como a tabela abaixo:

Símbolo	Nível de dificuldade
F	Fácil
M	Médio
D	Difícil

onde F o aluno consegue aplicar diretamente o conteúdo do texto, M ele precisaria de um pouco mais de raciocínio para resolver e D o aluno precisaria de muito raciocínio além de outro conteúdo para resolver o exercício.

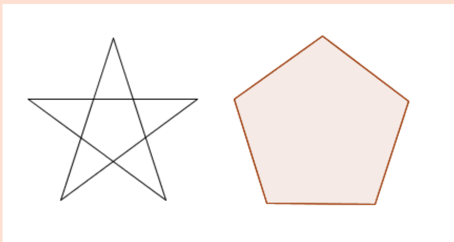
Versão 0 - 01/07/2014.

1. Polígonos regulares e Circunferências

1.1 Polígonos regulares

Precisamos saber!

Um polígono é chamado regular se todos os seus lados são congruentes e todos os seus ângulos internos são congruentes. A estrela de cinco pontas é um exemplo de uma poligonal regular fechada, pois tem os cinco lados congruentes e os cinco ângulos internos são congruentes, porém não consideramos esta figura um polígono, pois ele tem auto interseções. Um exemplo de um polígono regular é o pentágono mostrado abaixo.



§1

Os teoremas que seguem, mostram que a construção de polígonos regulares é intimamente ligada com a divisão da circunferência em partes congruentes.

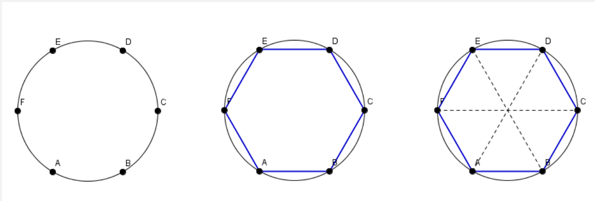
Teorema 1.1.1 Se um círculo é dividido em certo número (mais que 2) de partes congruentes, então:

1. Unindo-se dois pontos consecutivos da divisão da circunferência por cordas, obtemos um polígono regular inscrito no círculo.
2. Desenhando retas tangentes pelos pontos da divisão circular, formamos um polígono regular circunscrito ao círculo.

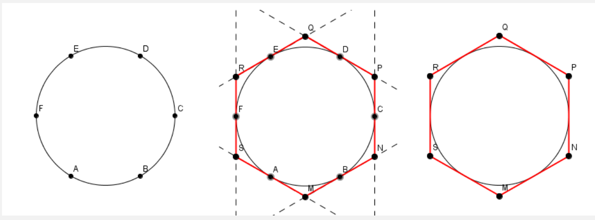
O que vamos provar? Com esse teorema vamos provar que, dado um círculo, conseguimos escrever um polígono regular ou inscrito ou circunscrito ao círculo.

Prova 1

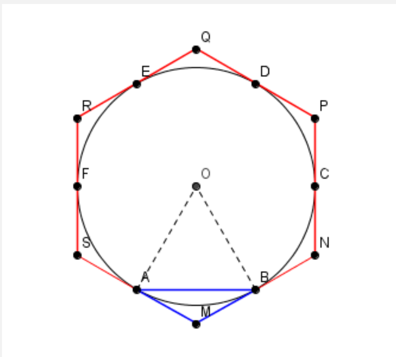
1. Seja o círculo abaixo, dividido em partes congruentes pelos pontos A, B, C, D, etc e as cordas AB, BC, CD,etc

   Observe que o polígono ABCDEF é regular, pois todos os seus lados são congruentes (as cordas determinam arcos congruentes) e os ângulos internos são congruentes (ângulos inscritos em arcos congruentes).
2. Seja o círculo abaixo, dividido em partes congruentes pelos pontos A, B, C, D,etc e as retas tangentes aos pontos A, B, C, D, etc

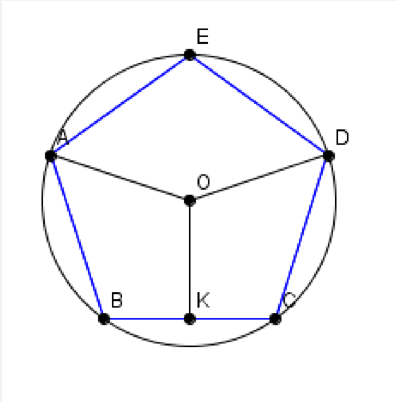
   O polígono MNPQRS é um polígono regular. Para mostrar este fato, considere os triângulos AMB, BNC, CPD, etc. Observe que as bases AB, BC, CD, etc são congruentes e os ângulos adjacentes a base também são congruenes, assim os triângulos AMB, BNC, CPD, etc são isósceles e todos congruentes. Logo $MN = NP = PQ = \dots$ e $\angle M = \angle N = \angle P = \dots$ (observe a figura abaixo):

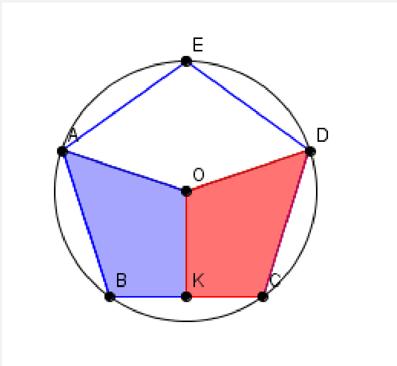
Teorema 1.1.2 Se um polígono é regular, então:
1. É possível circunscrevê-lo por um círculo
2. É possível inscrevê-lo em um círculo

O que vamos provar? Com este teorema desejamos mostrar que, para todo polígono regular existe um círculo inscrito e outro circunscrito a ele.

Prova 2 1. Sem perder generalidade, vamos desenhar um círculo que passe por três pontos consecutivos A, B, C do polígono regular ABCDE e vamos provar que ele passa pelo vértice D. Para isso vamos traçar o segmento OK perpendicular ao segmento BC e unir o centro O aos vértices A e D.

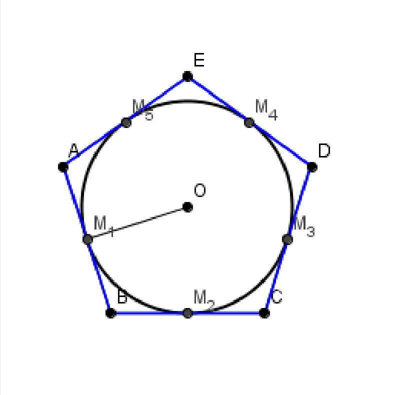


A seguir rotacione o quadrilátero ABKO sobre o lado OK e observe que ele coincide com o quadrilátero DCKO. De fato, temos que KB coincide com KC, pela igualdade de ângulos retos em K, B coincide com C, pois o segmento OK é a mediana da corda BC, AB coincide com CD devido a igualdade dos ângulos em B e C e, finalmente, A coincide com D, pois AB = CD.



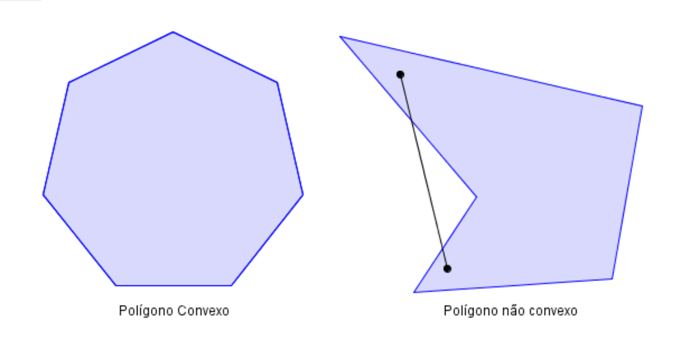
Isso implica que o segmento OA coincide com o segmento OD, e os pontos A e D são distantes do centro O. Assim a circunferência passa pelo ponto D. Analogamente, o círculo passa também pelo vértice E.

2. Como segue do teorema anterior temos que os lados do polígono regular podem ser considerados como cordas congruentes de um mesmo círculo. Para cada corda trace os segmentos OM, ON, etc perpendiculares as cordas. Assim o círculo de raio OM e centro em O é inscrito ao polígono ABCDE.



Você se lembra?
Corolários são conseqüências diretas obtidas das definições e teoremas expostos.

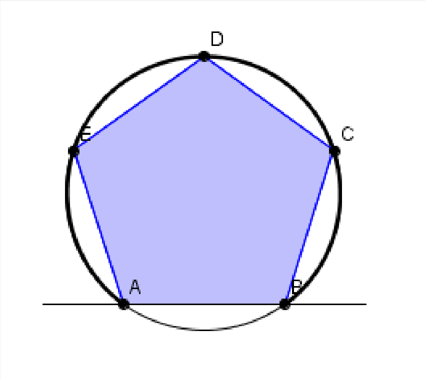
Precisamos saber!
Um polígono é convexo se unirmos dois pontos quaisquer do polígono, eles jamais passaram para fora do polígono



1.1.1 Corolários

Corolario 1.1.3 Todo polígono regular é convexo.

Prova 3 Seja o polígono regular ABCDE e observe que o lado BC determina dois arcos na circunferência. Assim todos os pontos A, B, C, D, E pertencem a um dos arcos determinados por BC.



Assim, para quaisquer pontos interiores ao polígono, temos que a união dos mesmos pertencerá a região determinada pelo arco BC, se isso não acontecesse o polígono interceptaria o lado BC, o que contradiz nossa definição de polígono regular.

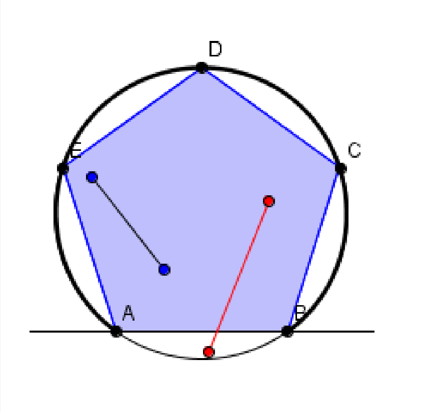
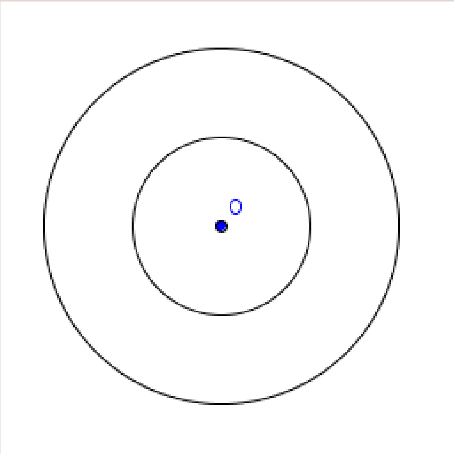


Figura 1.1

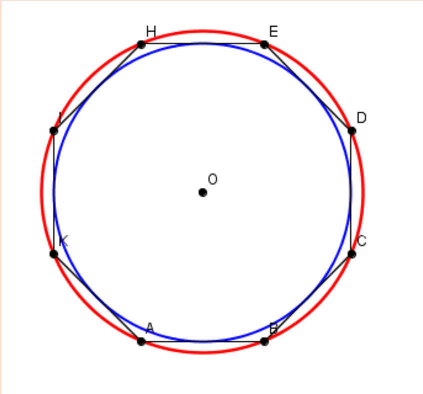
Corolario 1.1.4 Como é evidente pela prova dos teoremas acima, temos que os círculos inscritos e circunscritos são concêntricos.

Você se lembra? Círculos concêntricos são círculos que possuem o mesmo centro!

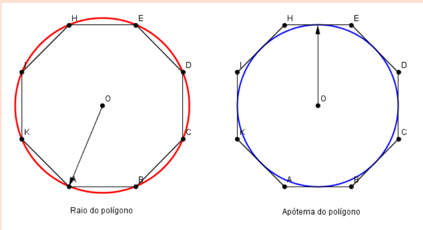


Precisamos saber!

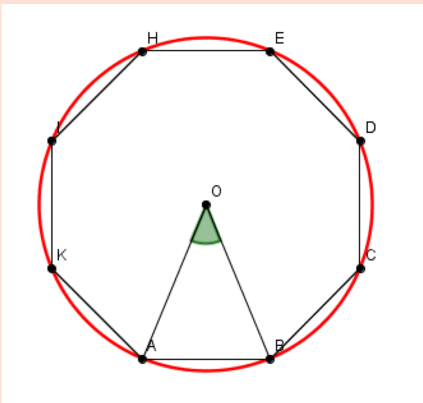
1. O centro determinado pelos círculos inscritos e circunscritos é chamado de centro do polígono.



2. O raio do círculo circunscrito sobre um polígono regular é chamado de raio do polígono e o raio do círculo inscrito é dito apótema do polígono.

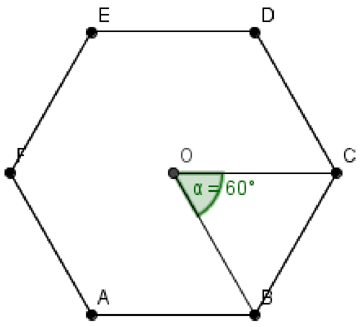


3. O ângulo entre os raios formado pelas extremidades dos lados do polígono regular é chamado de ângulo central do polígono.



§2

Assim, para cada lado temos um ângulo central, como todos os lados do polígono são congruentes temos que todos os ângulos centrais são congruentes. Se n é o número de lados de um polígono regular temos que cada ângulo central mede $\frac{360^\circ}{n}$. Então o ângulo central de um hexágono regular é $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

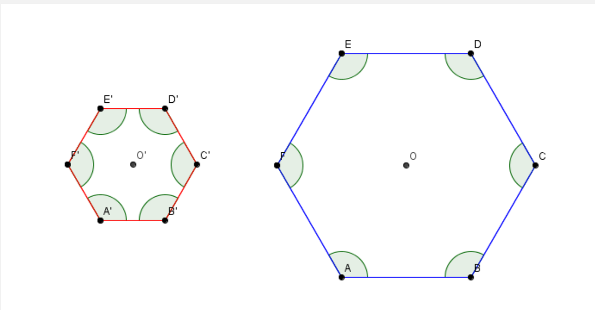


Teorema 1.1.5 Polígonos regulares com o mesmo número de lados são semelhantes. Além disso, os lados do polígono regular têm a mesma proporção que o raio e o apótema.

O que desejamos provar? Queremos mostrar a semelhança de dois polígonos regulares quaisquer com o mesmo número de lados e contatar que a razão de semelhança também vale para o raio e o apótema do polígono.

Como faremos a demonstração? Dividiremos a prova deste teorema em três partes:
1. Mostraremos que os ângulos internos são todos congruentes,
2. Mostraremos a proporção entre os lados dos polígonos e,
3. Mostraremos que o apótema e o raio também seguem a relação de semelhança.

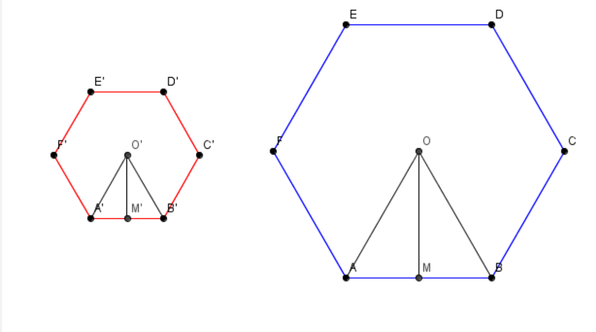
Prova 4
1. Conforme demonstrado anteriormente temos que cada ângulo interno é dado por $\frac{180°(n-2)}{n}$, assim temos todos os ângulos internos congruentes.



2. Se $AB = BC = CD = \dots$ e $A'B' = B'C' = C'D' = \dots$ é obvio que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Ou seja, assim temos que os dois polígonos regulares são semelhantes
3. Sejam O e O’ os centros dos dois polígonos regulares, AO e AO’ os raios dos polígonos regulares e OM e OM’ os apótemas.



Assim os triângulos OAB e O’A’B’ são semelhantes, pois possuem os três ângulos internos, assim:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OM}{O'M'}$$

1.1.2 Problemas Resolvidos

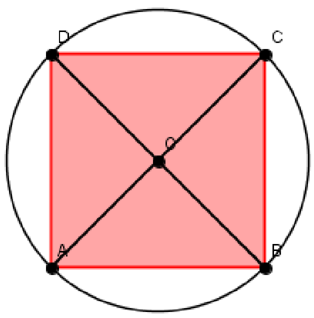
Problema 1.1 Inscrever em um círculo dado:

1. Um quadrado
2. Um hexágono regular
3. Um triângulo regular.

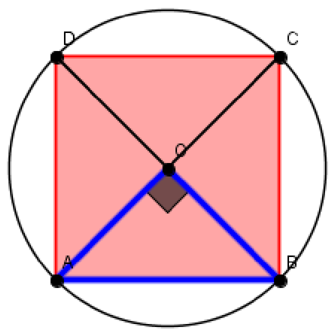
Além disso, expresse a medida do lado dos polígonos em função do raio do círculo.

Solução

1. Dados dois diâmetros perpendiculares AC e BD são desenhados e suas extremidades são conectadas por quatro cordas. O quadrilátero ABCD é um quadrado, pois cada ângulo interno mede 90° (pois corresponde ao ângulo externo ao diâmetro) e todos os segmentos são congruentes.



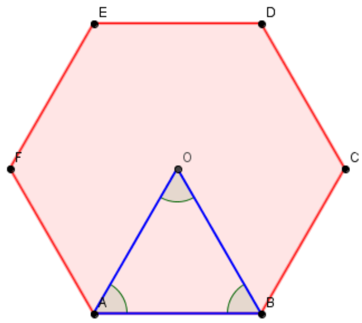
Seja o triângulo AOB:



Pelo teorema de Pitágoras temos:

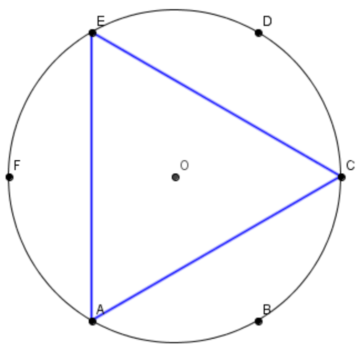
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{2}$$

2. A figura abaixo mostra uma corda determinada pelo ângulo central de 60° de um hexágono regular. Assim o triângulo AOB é isóscele e os ângulos A e B medem $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$. Logo temos um triângulo equilátero.

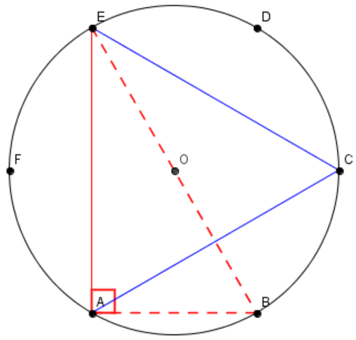


Assim, $AB = AO = R$

3. Para construir um triângulo equilátero, divida o circulo em seis partes congruentes e una os pontos como cordas alternadamente, conforme figura.



Assim pelo teorema de Pitágoras temos:



$$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}$$

1.1.3 Exercícios

1. F Encontre a medida do lado de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio R para n igual a:
   (a) 8 lados
   (b) 16 lados
   (c) 24 lados
2. F Encontre as medidas dos lados de um triângulo equilátero e um hexágono regular circunscritos em um círculo de raio R.
3. M Sejam AB, BC e CD três lados consecutivos de um polígono regular com centro O e E o ponto de intersecção dos prolongamentos dos lados AB e CD. Prove que o quadrilátero OAEC é circunscritível.
4. M Prove que:
   (a) Todo polígono circunscritível e com todos os ângulos congruentes é regular.
   (b) Todo polígono inscritível e com todos os lados congruentes é regular.
5. MProve que:
   (a) Todo pentágono circunscritível com todos os ângulos congruentes é regular.
   (b) Todo pentágono inscritível com todos os ângulos congruentes é regular.
6. MDê um exemplo de:
   (a) Um quadrilátero circunscritível e com todos os lados congruentes que não seja regular.
   (b) Um quadrilátero inscritível e com todos os ângulos congruentes que não seja regular.
7. D Para quais valores de n existe:
   (a) Um polígono de n lados circunscritível com todos os lados congruentes que não seja regular?
   (b) Um polígono de n lados inscritível com todos os ângulos congruentes que não seja regular?
8. F Prove que duas diagonais de um pentágono regular, que não partem do mesmo vértice, dividem em dois segmentos tal que um desses segmentos possui o mesmo comprimento do lado do pentágono.
9. D Prove que se ABCDEFG é um heptágono regular, então $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$
10. D Prove que a diferença entre a diagonal maior e diagonal menor de um eneágono regular é congruente ao lado deste polígono.

Construção:

11. F Obtenha um octógono regular a partir de um quadrado.
12. F Construa um decágono regular de lado L.
13. F Construa os ângulos:
    (a) 18°
    (b) 30°
    (c) 72°
    (d) 75°
    (e) 3°
    (f) 24°
14. M Em um quadrado, inscreva um triângulo equilátero de maneira que um de seus vértices:
    (a) Seja vértice do quadrado.
    (b) Seja o ponto médio de um dos lados do quadrado.
15. M Em um triângulo equilátero, inscreva outro triângulo equilátero de maneira que seus lados sejam perpendiculares aos lados do triângulo dado.
16. M Dado um polígono regular de n lados circunscritível sobre um círculo de raio R, construa um polígono regular de 2n lados circunscritível a este mesmo círculo.
17. D Dado um ângulo de medida $\frac{360^\circ}{7}$, divida-o em:
    (a) Três partes congruentes.
    (b) Cinco partes congruentes.

1.2 Limites

1.2.1 Comprimento de uma curva

§3

Um segmento de reta pode ser comparado com outro segmento porque estes podem ser sobrepostos. E é exatamente assim que definimos quais segmentos são considerados *congruentes*: aqueles que possuem o mesmo comprimento. Da mesma maneira, podemos comparar arcos de mesmo raio, já que círculos com mesmo raio podem ser sobrepostos. Porém, nenhuma parte do círculo (ou outra curva) pode ser sobreposta em um segmento de reta, o que torna impossível decidir de que forma o segmento curvilíneo deve ser atribuído ao comprimento de um determinado segmento de reta.

§4

Assim, nos deparamos com a necessidade de definir o que queremos dizer com **circunferência** como o *comprimento de um círculo*, quando comparamos com um segmento de reta.

Precisamos saber!
Circunferência é o lugar geométrico dos pontos, no plano, que têm a mesma distância positiva (ou seja, a distância aqui é diferente de zero para que o ”ponto“ não seja tomado como circunferência) a um ponto fixo dado. Já *círculo* representa a região limitada pela circunferência.

§5

Para prosseguirmos, precisamos introduzir um conceito importante na Matemática: o conceito de **limite**.

1.2.2 Limite de uma sequência

§6

Frequentemente, em questões de álgebra ou geometria, encontramos sequências numéricas que seguem certos padrões de formação. Por exemplo:

- A sequência dos números naturais: 1,2,3,4,5...
- Progressão Aritmética (P.A.): $a, a+r, a+2r, a+3r\dots$
- Progressão Geométrica (P.G.): $a, a.q, a.q^2, \dots$
- Sequência de Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13,21,...

§7

Estes são alguns exemplos de sequências infinitas de números ou **sequências numéricas infinitas**.

§8

Para cada uma dessas sequências, podemos destacar um padrão com que os termos são formados. Assim, por exemplo, na *progressão aritmética*, a diferença entre certo termo e seu sucessor é constante. Já na *progressão geométrica*, a razão entre dois termos consecutivos é constante.

Você se lembra?
O que é a sequência de Fibonacci?

§9

Muitas sequências são formadas com os mais complexos padrões. Assim, aproximar o valor de $2^{\frac{1}{2}}$ com precisão de décimos, centésimos, milésimos e assim por diante, obteremos uma sequência numérica infinita:

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \dots$$

§10

Embora não tenhamos um algoritmo simples que ajude a determinar os próximos termos, ainda é possível definir cada termo dessa sequência. Por exemplo, para obter o quarto termo, é necessário representar $2^{\frac{1}{2}}$ com precisão de 0.0001, para obter o quinto termo, a precisão chega a ser de 0.00001 e assim por diante.

Definição 1.2.1 Suponha que os termos de uma sequência numérica infinita:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

aproxima-se de um certo número A quando n cresce indefinidamente. Isso significa o seguinte: existe um certo número A tal que para qualquer número q positivo, não importando o quão pequeno seja, existe um termo da sequência a partir do qual todos os termos diferirão de A, em módulo, menos do que q. Expressamos essa propriedade afirmando que o valor absoluto da diferença an – A tende a zero (ou que os termos na tendem a A) na medida em que n aumenta. Neste caso, o número A é chamado de **limite** da sequência numérica.

§11

Consideremos a sequência:

$$0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ \dots$$

§12

Veja que cada termo é obtido adicionando um dígito 9 a direta de seu antecessor. Assim, podemos tomar o enésimo termo dessa sequência:

$$a_n = 0.\underbrace{9999999}_{nvezes}$$

§13

Perceba que quanto mais noves adicionarmos, isto é, quanto maior for o valor de n, mais a sequência se aproxima de 1. Dessa maneira, repare que:

$$\begin{aligned}
&1 - a_1 = 0.1 \\
&1 - a_2 = 0.01 \\
&1 - a_3 = 0.001 \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

§14

Continuando essa sequência indeterminadamente, podemos encontrar um certo termo que a partir do qual todos os seguintes irão diferir em algo tão pequeno quanto desejamos. Assim, podemos dizer que essa sequência infinita possui limite e é igual a 1.

§15

Um exemplo de sequência numérica que possui limite é a sequência de aproximações consecutivas para o comprimento de um segmento, calculado com precisões de $\frac{1}{10}$, depois de $\frac{1}{100}$, depois de $\frac{1}{1000}$ e assim por diante. O limite desta sequência é a fração decimal infinita que representa o comprimento do segmento.

§16

De fato, a fração decimal infinita está "encapsulada" entre duas aproximações decimais finitas: uma por cima e outra por baixo. Como foi observado no exemplo anterior, a diferença dessas aproximações *tende a zero* com o aumento da precisão.

§17

Portanto, as diferenças entre a fração decimal infinita e os valores aproximados também tendem a zero com o aumento da precisão. Então, essa fração é o limite de cada uma das duas sequências que representam suas aproximações decimais (uma por cima e outra por baixo).

Você precisa saber!
Quando dizemos que certo termo *tende ao infinito*, significa que este termo cresce indefinidamente.

Já pensou?
Nem toda sequência infinita possui limite! Por exemplo, a sequência $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ não tem limite, já que seus termos *tendem ao infinito* e não se aproximam de nenhum número.

Teorema 1.2.1 Qualquer sequência infinita tem no máximo um único limite.

Demonstração 1 Tomemos a seguinte sequência:
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$
Suponha que essa sequência possua dois limites: A e B. Agora, veja que se:

1. A é limite dessa sequência: então temos que $|a_n - A|$ deve tender a zero (ou seja, ficar tão pequeno quanto zero) quando n tende ao infinito.
2. B também é limite da sequência dada: então temos que $|a_n - B|$ deve tender a zero quando n tende ao infinito.

Portanto, temos que, para n suficientemente grande, o valor absoluto da diferença

$$(a_n - A) - (a_n - B)$$

deve tender a zero, isto é, irá se tornar tão pequena que qualquer número tomado na vizinhança será pequeno quanto desejado. Mas, veja que:

$$(a_n - A) - (a_n - B) = B - A$$

E, portanto, essa diferença é um número diferente de zero (lembre-se que assumimos A e B diferentes!). Este número não depende do índice n e, portanto, não tende a zero quando n fica suficientemente grande. Assim, nossa suposição de que existem dois limites numa sequência numérica leva a uma contradição.

Portanto, uma sequência numérica tem um único limite.

1.2.3 Limite de uma sequência crescente

Considere a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ crescente e que, ao mesmo tempo, todos os termos sejam menores que dado um número M. Neste caso, a sequência tem limite.

Prova 5 Seja

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots) \tag{1.2}$$

uma sequência numérica crescente $(a_{n+1} > a_n)$ e tal que, entre os termos da sequência, não existe nenhum que seja maior que certo valor M. Digamos, por exemplo, que não exista nenhum termo maior do que 10. Tomemos o número 9 e verifiquemos que na sequência 1.22 há termos maiores do que 9. Suponha que não. Tomemos, então, o número 8 e verifiquemos se na sequência 1.22 há termos superiores a 8. Suponhamos que haja. Então, escrevamos o número 8 e dividamos o intervalo de 8 a 9 em dez partes iguais e testemos consecutivamente os números 8.1, 8.2, ..., 8.9, isto é, verifiquemos que na sequência 1.22 existem termos maiores que 8.1 e, caso haja, decidamos a mesma questão para 8.2 e assim por diante.

Suponhamos que a sequência 1.22 contenha termos maiores que 8.6, mas não contenha termos maiores que 8.7. Escrevamos, então, o número 8.6, dividindo o intervalo de 8.6 a 8.7 em dez partes iguais e testemos consecutivamente os números 8.61, 8.62, ..., 8.69.

Continuando esse processo por muitas vezes, chegaremos a uma fração decimal infinita (8.6...), isto é, em um certo número real. Denotemos este número real por α e escrevemos, então, suas aproximações decimais finitas, por cima e por baixo, por α_n e α' respectivamente. Assim, podemos escrever:

$$\alpha_n < \alpha < \alpha' \text{ e } \alpha'_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n}$$

Da nossa construção do número real α , segue que a sequência 1.22 contém termos maiores do que α_n e menores que α'_n. Seja a_k um destes termos:

$$\alpha_n < \alpha < \alpha'$$

Como a sequência 1.22 é crescente e não possui termos maiores que α'_n, deduzimos que todos os termos seguintes da sequência $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$ também estão contidos entre α'_n e α_n , isto é, se $m > k$, então $\alpha_n < a_m < \alpha'_n$

Como o número real α também está contido entre α_n e α'_n, concluímos que para todo $m \leq k$, o valor absoluto da diferença $a_m - \alpha$ não excede a diferença $\alpha'_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n}$. Então, para qualquer valor de n, pode se encontrar um número k tal que para todo $m \leq k$, temos:

$$|a_m - \alpha| < \frac{1}{10^n}$$

Como a fração $\frac{1}{10^n}$ tende a zero quando n cresce muito, segue, então, que o número real α é o limite da sequência dada.

1.2.4 Exercícios

1. F Expresse, de maneira precisa, o que significa dizer que os termos an de uma sequência numérica infinita tendem a um número A quando n tende ao infinito.
2. M Dado dois números com infinitas casas decimais, formule uma regra que descreva qual dos dois é o maior deles.
3. F Quais números decimais abaixo representam o maior número?
4. 0,099999 ou 0,100000?
5. 0,09999... ou 0,10000...?
6. M Mostre que a progressão geométrica (P.G.) infinita dada por $(a, aq, aq^2, \dots$ tende a zero se o valor absoluto da razão q é menor que 1.
7. F Uma formiga percorreu 1 m certo trajeto, depois por mais 1/2 m, depois por mais 1/4 m e assim por diante. Qual foi a distância total que a formiga percorreu?

Figura 1.2: http://mundolouco.net/wp-content/uploads/2011/10/a-for%C3%A7a-da-formiga-300x225.jpg

8. M Calcule a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica $(a, aq, aq^2, \dots)$,sabendo que $|q| < 1$. DICA: Primeiro, prove a soma da PG finita:
$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$$
9. D Mostre que a sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ tende a zero.
10. D Mostre que a sequência $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \pm\frac{1}{n}, \dots)$ tende a zero.
11. D Mostre que a sequência dos números naturais $(1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ não possui limite.
12. D Mostre que a sequência infinita $(1, -1, 1, -1, \dots)$ não possui limite.
13. D Prove que se uma sequência numérica infinita tende a um certo limite, então a sequência é **limitada**, isto é, todos os termos dessa sequência estão em algum segmento de uma reta numérica.
14. D Prove que uma sequência numérica decrescente e limitada por baixo tende a um certo limite.

1.3 Comprimento do Arco e da Circunferência

Precisamos saber!

As expressões ”linha poligonal contentora“ e ”linha poligonal contida“ devem ser entendidas no segionte sentido: Tome duas linha poligonais que tenham os mesmos pontos inicial e final A e D, situados de tal modo que uma linha poligonal $(ABCD)$ está contida dentro do polígono limitado pela outra linha poligonal acrescida do segmento AD conectando os pontos A e D. Então a linha externa é chamada de *contentora*, e a interna é chamada de *contida*.

Você se lembra?

O que é uma linha poligonal convexa?

O conceito de limite nos dá a a oportunidade de definir precisamente o que queremos dizer quando falamos no *comprimento de um círculo*. Mas antes, vamos provar dois lemas, para nos ajudar nesta tarefa.

Lema 1.1 Uma linha poligonal convexa $(ABCD)$ é mais curta do que qualquer outra linha poligonal $(AEFGD)$ que contenha a primeira, veja Figura 1.3.

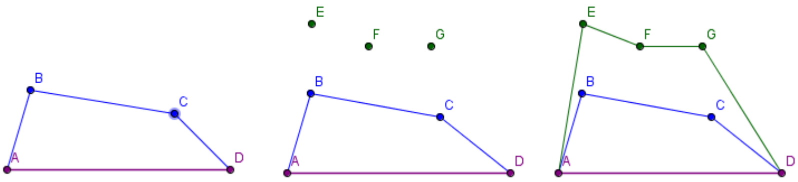


Figura 1.3

Você se lembra?

A menor distância entre dois pontos é uma reta!

O que desejamos provar?

Desejamos provar que qualquer linha poligonal contida $ABCD$, se é convexa, é mais curta do que qualquer linha poligonal contentora (não importa se a segunda é convexa ou não), ou seja, tendo em mente a Figura 1.3,

$$AB+BC+CD < AE+EF+FG+GD \tag{1.3}$$

Prova 6 — Prova Lema 1.1. Tomemos novamente a Figura 1.3. Agora, vamos estender os lados da linha poligonal convexa contida, AB e BC, como na Figura 1.4.

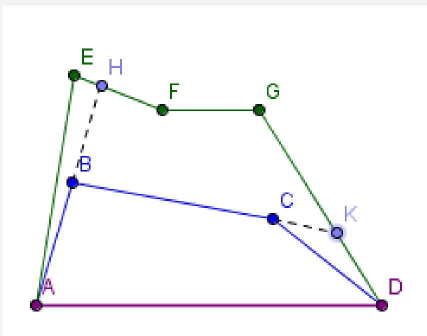


Figura 1.4

Tendo em mente que o resultado do Você se lembra? também pode ser formulado como *uma linha reta tem comprimento menor que qualquer outra linha poligonal conectando seus pontos finais*, podemo escrever:

$AB + BH < AE + EH$

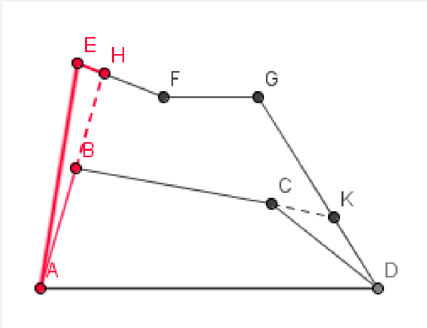


Figura 1.5

$BC + CK < BH + HF + FG + GK$

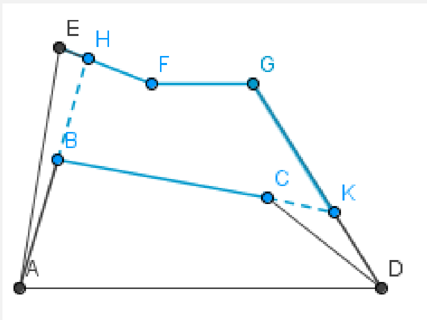


Figura 1.6

$CD < CK + KD$

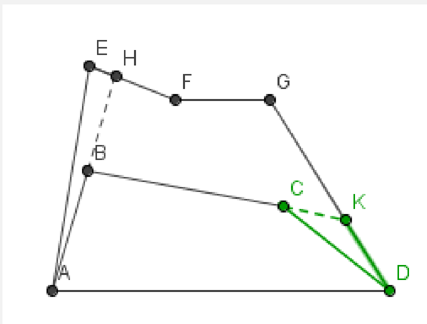


Figura 1.7

- Some todas as desigualdades:
  $AB + BH + BC + CK + CD < AE + EH + BH + HF + FG + GK + CK + KD$
- Subtraia BH e CK de ambos os lados da desigualdade
  $AB + CK + CD < AE + EH + HF + FG + GK + KD$
- Substitua $EH + HF$ pelo segmento resultante EF
  $AB + CK + CD < AE + EF + FG + GK + KD$
- Substitua $GK + KD$ pelo segmento resultante GD
  $AB + CK + CD < AE + EF + FG + GD$

§18

Como vimos, seguindo os passos anteriores, chegamos à expressão que queríamos obter, de uma olhada no *O que desejamos provar?*; ou seja, terminamos a demonstração.

Lembrete

Se a linha poligonal contida não fosse convexa Figura1.8, o argumento que acabamos de usar não seria válido. Pois, neste caso a linha poligonal contida **pode** acabar sendo maior que a linha poligonal que a contem!

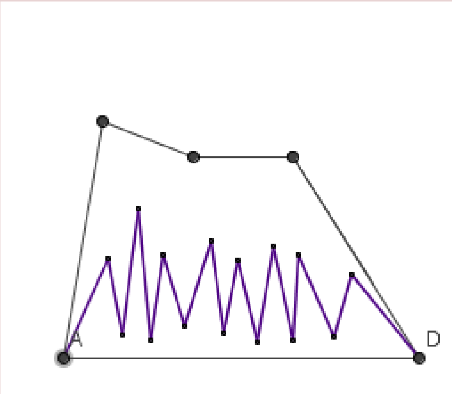


Figura 1.8

Você se lembra?
Se um segmento tem como extremos os ponto W e X, podemos nos referir a ele por WX ou XW. Tanto faz!

§19

Lema 1.2 O perímetro de um polígono convexo $(ABCD)$ é menor do que o perímetro de qualquer outro polígono $(MNPQRL)$ contendo o primeiro.

Para ilustrar o que o Lema 1.2 afirma, de uma olhada na Figura 1.9

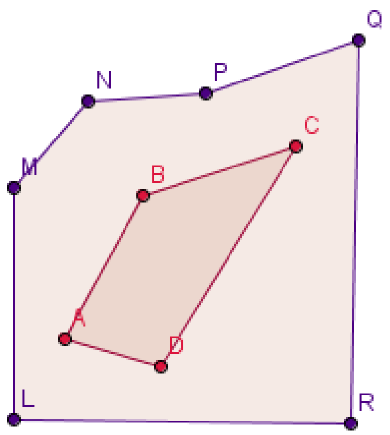


Figura 1.9

O que desejamos provar?

Falando matematicamente, provar o Lema 1.2 é o mesmo que demontrar que

$$AB+BC+CD+DA < LM+MN+NP+PQ+QR+RL \tag{1.4}$$

Prova 7 — Prova Lema 1.2. Estenda o lado AD do polígono convexo contido em ambas as direções, veja Figura 1.10.

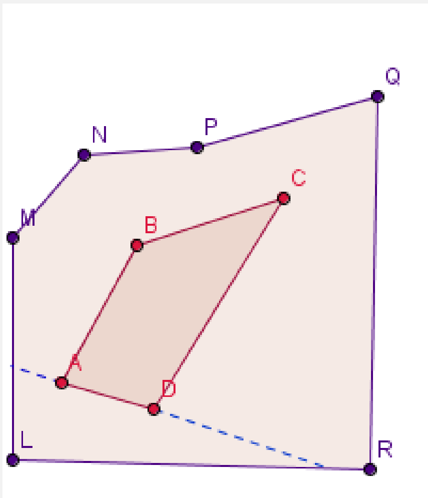


Figura 1.10

Os pontos onde o segmento estendido intersectam os lados ML e LR, dão origem aos pontos T e S, respectivamente, Figura 1.11.

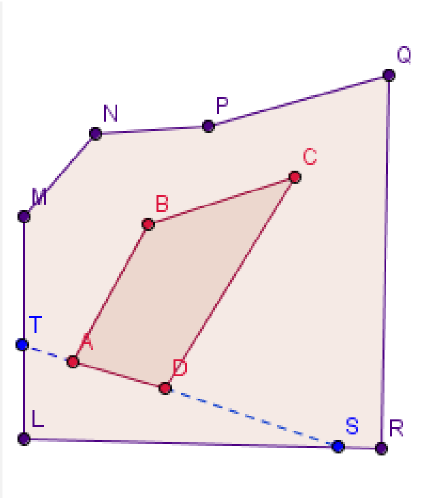


Figura 1.11

Agora podemos aplicar o Lema 1.1, que acabamos de demontrar às linhas poligonais $ABCD$ e $ATMNPQRSD$, Figura 1.12.

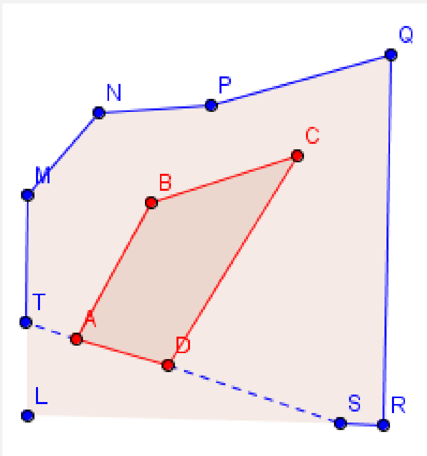


Figura 1.12

Assim,

$$AB + BC + CD < AT + TM + MN + NP + PQ + QR + RS + SD \tag{1.5}$$

Por outro lado, uma vez que o segmento ST é menor do que a linha poligonal SLT, podemos escrever:

$$TS = TA + AD + DS < TL + LS \tag{1.6}$$

- Somando as expressões 1.3 e 1.4, obtemos a desigualdade:

$$AB + BC + CD + TA + AD + DS < AT + TM + MN + NP + PQ + QR + RS + SD + TL + LS$$

- Desta, podemos subtrair de ambos os lados, os segmentos AT e DS:

$$AB + BC + CD + AD < TM + MN + NP + PQ + QR + RS + TL + LS$$

- Substitua $TL+TM$ pelo segmento resultante LM

$AB+BC+CD+AD<LM+MN+NP+PQ+QR+RS+LS$

- Substitua $LS+RS$ pelo segmento resultante LR

$AB+BC+CD+AD<LM+MN+NP+PQ+QR+LR$

Chegamos assim à expressão que desejávamos demonstrar!

1.3.1 Definição de circunferência

Voce se lembra?
O que é perímetro?
O que é congruente?

§20

Inscreva em um dado círculo um polígono regular, por exemplo um hexágono, veja a Figura 1.13, e marque sobre uma linha qualquer MN o segmento OP_1 congruente ao perímetro desse polígono, como na Figura 1.14.

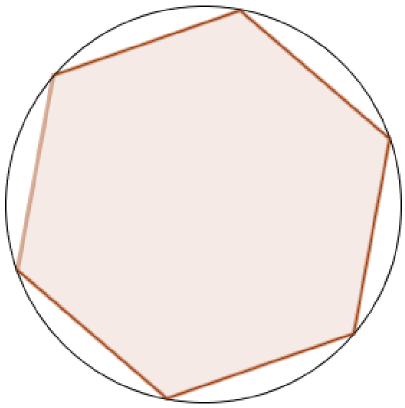


Figura 1.13

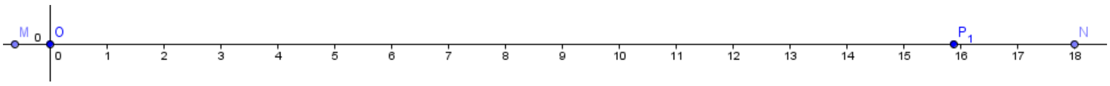


Figura 1.14

Dica:
Pense que MN é a reta real, tomando o zero como origem. E vá marcando sobre ela os perímetros recomendados, que você pode medir com a régua.
Agora dobre o número de lados do polígono inscrito na circunferência, isso é substitua o hexágono pelo dodecágono, o polígono de 12 lados, como na Figura 1.15. Agora encontre seu perímetro e marque sobre a mesma reta MN, a partir do mesmo ponto O anterior.

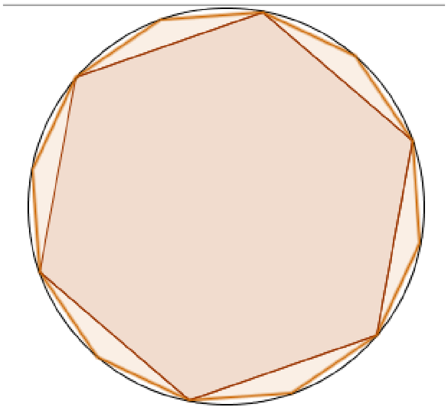


Figura 1.15

Obtemos um novo segmento OP_2, maior que OP_1, veja na Figura 1.16. Isso acontece pois cada segmento do hexágono foi substituido pos uma linha poligonal, que consiste de dois lados do dodecágono, como está ressaltado na Figura 1.17. E sabemos que a linha poligonal vai ter comprimento maior que a reta!

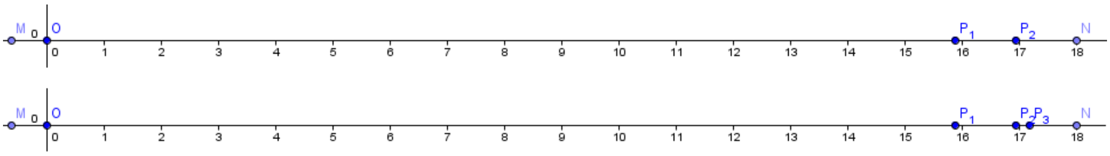


Figura 1.16

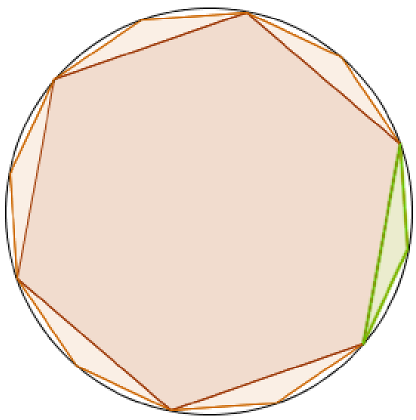


Figura 1.17

Agora dobre o número de lados do dodecágono, ou seja, trace, dentro da circunferência o polígono de 24 lados, como na Figura 1.18. Determine o perímetro do novo polígono. Novamente, marque o perímetro na reta MN, a partir do mesmo ponto O. Fazendo isso obtemos o segmento OP_3, que vai ser maior que o segmanto OP_2. Por que? Pelo mesmo motivo que OP_2 era maior do que OP_1... Cada linha reta que compunha o lado do dodecágono foi substituida por uma linha poligonal consistindo de dois lados e, portanto, maior que a primeira.

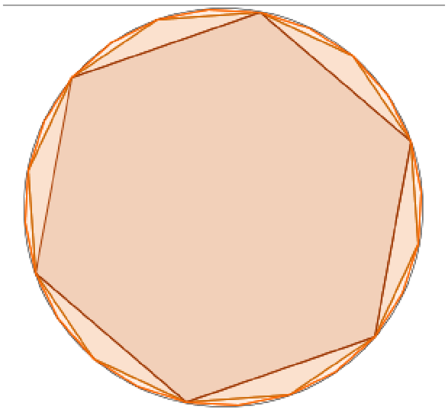


Figura 1.18

Imagine, agora, que esse processo de dobrar o número de lados do polígono regular inscrito e marcar os respectivos perímetros sobre a reta MN, sempre a partir de O, continua indefinidamente. Então nós obtemos uma sequência infinita de perímetros OP_1, OP_2, OP_3, ..., que aumenta. Por outro lado, essa sequência crescente é limitada, pois os perímetros de todos os polígonos convexos inscritos, são menores, de acordo com o Lema 1.2, que o perímetro de qualquer polígono circunscrito, pois contêm os polígonos inscritos (parágrafo 19). Esse limite, que pode ser mais facilmente observado na Figura 1.16 como o segmento OP, é a **circunferência**. Assim, estamos prontos para a definição.

§21

Definição 1.3.1 Definimos a circunferência de um círculo como o limite ao qual o perímetro de um polígono regular inscrito na circunferência tende conforme o número de seus vértices dobra indefinidamente.

Lembrete:

É possível demonstrar, mas nós não o faremos aqui, que esse limite independe do polígono regular inscrito com o qual o procedimento se inicia. Além disso, é possível provar que mesmo se os polígonos inscritos não forem regulares , ainda assim seus perímetros tendem ao mesmo limite que os perímetros dos polígonos regulares, bastando para isso que seus lados diminuam indefinidamente (e, portanto, seu número de lados aumente indefinidamente). Não importa como isso seja feito: através do procedimento de dobrar o número de lados, seja ele aplicado a polígonos reguares ou não, chega-se ao mesmo limite. Então, para cada círculo, existe um limite único para o qual o perímetro dos polígonos inscritos tendem quando todos os seus lados diminuem indefinidamente, e esse limite é chamado de circunferência.

§22

Similarmente, o **comprimento de arco** de qualquer arco AB, veja na Figura 1.19, é definido como o limite para o qual o perímetro de uma linha poligonal, incrita no arco e conectando os pontos extremos A e B, tende quando a medida dos lados da linha poligonal decrescem indefinidamente, por exemplo através do procedemento anterior, de dobrar o número de lados.

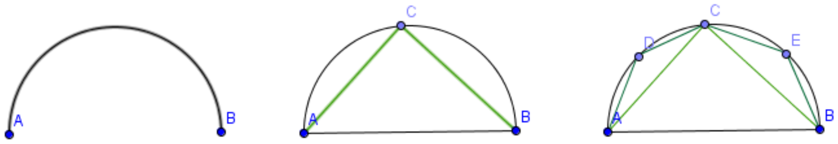


Figura 1.19

1.3.2 Propriedades do comprimento do arco

§23

A partir da definição de comprimento de arco nós concluimos:

1. *Arcos congruentes e círculos congruentes tem o mesmo comprimento de arco*, pois os polígonos regulares inscritos neles podem ser escolhidos congruentes entre si.
2. *O comprimento de arco da soma de arcos é igual a soma de seus comprimentos de arco* De fato, se s é a soma de dois arcos s' e s'', então, a linha poligonal inscritano arco s pode ser escolhida para consistir de duas linhas poligonais: uma inscrita em s' e a outra inscrita em s''. Então o limite para o qual a linha poligonal inscrita em s tende, conforme o tamanho de seus lados diminui indefinidamente, será igual à soma dos limites para os quais os perímetros das linhas poligonais insritas em s' e s'' tende.
3. *O comprimento de arco de qualquer arco, por exemplo o (ACB), na Figura* **??**, *é maior do que o comprimento da corda AB que conecta suas extremidades. Mais ainda, o comprimento de arco de qualquer arco é maior do que o perímetro de qualquer linha poligonal convexa inscrita no arco e conectand as extremidades dele.*
   Podemos ver que tal propriedade é válida pois, dobrando o número de lados da linha poligonal e marcando os perímetros numa reta numérica**, nós obtemos uma sequência infinita que tende ao comprimento do arco e é crescente. Portanto o comprimento de arco é maior do que qualquer outro termo da sequência. E, em particular, o comprimento de arco da corda é maior do que o primeiro termo da sequência, que é o comprimento da corda.
4. *O comprimento do arco é menor que o perímetro de qualquer linha poligonal circunscrita ao arco e conectando suas extremidades.*
   A propriedade acima procede pois o comprimento L do arco ACB, Figura **??**, é o limite dos perímetros de linhas poligonais regulares ACB, $ADCEB$, etc. inscritas no arco e obtidas pelo método de dobrar os lados. Cada uma dessas linhas é convexa e está contida por qualquer linha poligonal circunscrita $AC'D'B$ conectando os extremos do arco. Assim, pelo Lema 1, os perímetros das linhas poligonais inscritas são menores que o perímetro P das linhas poligonais circunscritas e, portanto, o limite do perímetro das linhas poligonais inscritas , L, não pode exceder o perímetro das cilhas circunscritas P.Ou seja $L \leq P$.
   Observe a Figura 1.20, nela é possível ver como construir, a partir de uma linha poligonal circunscrita a um arco, uma linha poligonal menor que englobe o mesmo arco. O truque é ”cortar“ as quinas próximas ao vértice, ou seja, substituir ACB entre dois pontos consecutivos de tangência ao arco, por uma linha poligonal mais curta $AMNB$.
   Então podemos reformular o resultado anterior pois, a desigualdade $L \leq P$ vai permanecer verdadeira se substituirmos $AC'D'B$ por qualquer linha poligonal menor que ainda englobe o segmento de disco ACB. Portanto, o omprimento de arco L é, na verdade, estritamente menor do que o perímetro P da linha poligonal circunscrita, isto é, $L < P$.

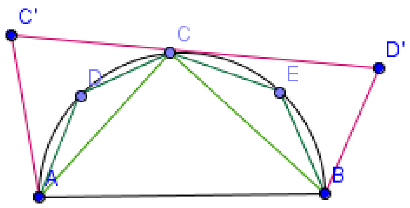


Figura 1.20

O número π. A razão entre a circunferência e seu diâmetro é a mesma para todos círculos.

Prova 8 — Prova propriedade 4. Considere dois círculos, um de raio R e outro de raio r, como, por exemplo, os da Figura 1.21.

Denotemos também a circunferência do primeiro por C e a do segundo por c.

Inscrevemos em cada em cada um dele um poligono regular de n lados e denotamos por P_n e p_n os respectivos perímetros.

Devido à similaridade de polígonos regulares com o mesmo número de lados (ver Prova 4), temos:

$$\frac{P_n}{2R} = \frac{p_n}{2r}. \tag{1.7}$$

Quando o número de lados, n é dobrado indefinidamente, o perímetro P_n tende à medida da circunferência C do primeiro círculo. E os perímetros p_n tendem à medida da circunferência c.

Então a igualdade 1.7 implica:

$$\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}. \tag{1.8}$$

Essa proporção entre a circunferência e o diâmetro, a mesma para todos os círculos é denotada pela letra grega π.

Daí podemos escrever a seguinte fórmula para a circunferência:

$$C = 2R\pi, \text{ ou } C = 2\pi R.$$

§24

É sabido que o número π[1] que significa *círculo* é irracional e, portanto, não pode ser expresso precisamente como uma fração, uma razão entre dois inteiros. Mas é possível encontrar aproximações racionais para π.

§25

A seguinte simples aproximação de π, encontrada por *Archimedes* no século 3 a.C., é suficiente para muitos propósitos práticos:

$$\pi \approx \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7} = 3.142857142857.. \tag{1.9}$$

[1] A notação π, que se tornou padrão logo depois de ser adotada por L. Euler em 1737, vem da primeira letra da palavra grega $\pi\varepsilon\rho\iota\phi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$

§26

A aproximação anterior é um pouco maior que π, mas não mais do que 0.002. O astrônomo grego *Ptolemy*, por volta de 150 a.C., e o autor de *"Aljabra", al-Khwarizmi de Bagdá*, por volta de 800 a.C., determinaram a aproximação $\pi \approx 3.1416$ com erro menor do que 0.0001.

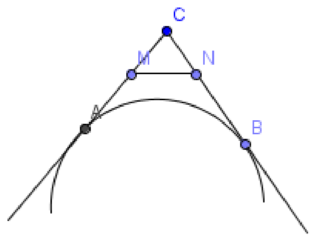


Figura 1.21

Um matemático chinês *Zu Chongzhi* (430-501) descobriu que a fração:

$$\pi \approx \frac{355}{133} \approx 3.1415929..$$

aproxima π superiormente, ou seja, é maior que π, mas o obtém com a memorável precisão de 0.0000005 [2].

1.3.3 Um método para computar π.

§27

Para computar aproximações para o número π, pode-se usar a fórmula "do dobro" que desenvolvemos no parágrafo 224. Por simplicidade, faça o raio R de um polígono regular de raio R igual a 1.

Deixe que a_n denote o lado do polígono regular de n lados, ou seja, se $n = 3$, a_3 é a medida do lado do triângulo, se $n = 4$, a_4 é a medida do lado do quadrado...

Seja também $q_n = na_n/2$ seu semi-perímetro, o perímetro dividido por 2.

Então, o semi-perímetro tende a π conforme o número de lados é multiplicado por dois indefinidamente. Afinal, temos que

$$\pi = \frac{C}{2R} = \frac{C}{2} \tag{1.10}$$

pois aqui $R = 1$. E sabemos que os perímetros dos polígonos inscritos tendem à medida da circunferência. Logo a metade dos perímetros tende para a metade da circunferência, e portanto, neste caso, para π.

De acordo com a fórmula "do dobro",

$$a_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}. \tag{1.11}$$

Podemos começar o cálculo com $a_6 = 1$, isto é, $q_6 = 3$. Então a fórmula "do dobro" leva a

$$a_{12}^2 = 2 - \sqrt{3} = 0.26794919.. \tag{1.12}$$

[2] Em 1883, um inglês W. Shanks publicu seu cálculo para π com 707 casas decimais. Ele manteve o recorde até 1945, quando as primeiras 2000 casas decimais foram determinadas usando computadores. Descobriram, então, que Shank havia cometido um erro que estragou seus resultados a partir da 528° casa decimal.

Usando a fórmula ”do dobro“ nós computamos sucessivamente:

$$a_{24}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{4}}, a_{48}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{24}^2}{4}} \text{ e assim por diante.} \tag{1.13}$$

Suponha que paremos de dobrar no polígono de 96 lados, e calculemos seu semi-perímetro $q_{96}/2 = 48a_{96}$, para aproximar o valor de π. Fazendo os cálculos obtemos:

$$\pi \approx q_{96} = 3.1410319... \tag{1.14}$$

Para avaliarmos a precisão dessa aproximação, vamos calcular também o semi-perímetro Q_{96} do polígono de 96 lados circunscrito à circunferência de raio unitáio.

Aplicando a fórmula para o lado do polígono regular circunscrito, encontrada na Prova 4, e tomando $R = 1$ temos:

$$b_{96} = \frac{a_{96}}{\sqrt{1 - a_{96}^2/4}}, \text{ isto é, } Q_{96} = 48b_{96} = \frac{q_{96}}{\sqrt{1 - a_{96}^2/4}} \tag{1.15}$$

Substituindo os valores numéricos para a_{96} e q_{96} nós encontramos:

$$Q_{96} = 3.1427146.. \tag{1.16}$$

Um semi-círculo é maior que o perímetro do polígono regular de 6 lados inscrito, mas menor que o semi-perímetro do polígono regular de 96 lados circunscrito: $q_{96} < \pi < Q_{96}$.

Assim, podemos concluir que $3.141 < \pi < 3.143$. Em particular, nos encontramos a aproximação decimal correta para π ”por baixo“e ”por cima“ para duas casas decimais

$$\pi \approx 3.14. \tag{1.17}$$

§28

Aproximações mais precisas de π podem ser determinadas usando o mesmo método de ”dobrar“ para computar q_{192} e Q_{192}, q_{384} e Q_{384}, e assim por diante.

Por exemplo, para obtemos a aproximação ”por baixo“.

$$\pi \approx 3.141592... \tag{1.18}$$

correta até a sexta casa decimal, isto é com precisão até 0.000001, é suficiente calcular os semi-perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos com 6144 lados, obtidos de hexágonos cujo número de lados foram dobrados 10 vezes.

Em alguns problemas, o número inverso de π, o radiano, aparece com o valor $\frac{1}{\pi} = 0.3183098\ldots$

1.3.4 Problemas

Problema 1.2 *Determine o número de graus em um arco cujo comprimento de arco é igual ao raio.*

A fórmula $2\pi R$ para a circunferência de um círculo de raio R significa que o compento do arco de um grau é igual a $2\pi R/360 = \pi R/180$. Portanto, um arco de n graus tem por comprimento de arco

$$s = \frac{\pi R n}{180}. \tag{1.19}$$

Quando o comprimento de arco é igual ao raio, $s = R$, obtemos a equação

$$1 = \frac{\pi n}{180}. \tag{1.20}$$

de onde encontramos

$$n^\circ = \frac{1}{\pi}180^\circ \approx 180^\circ 0.318098 \approx 57.295764^\circ \approx 57^\circ 17' 45''. \tag{1.21}$$

Um arco cujo comprimento de arco é igual ao raio é chamado **radiano**. Radianos são usados frequentemente, no lugar de graus circulares e angulares) como unidades para medir arcos e os ângulos centrais correspondentes. Por exemplo, o ângulo completo contem 360° ou 2π radianos.

1.3.5 Exercícios

1. F Expresse em radianos os seguintes ângulos:
   (a) 60°
   (b) 45°
   (c) 30°
   (d) 12°
2. F Transforme os ângulos em radiano para grau:
   (a) π
   (b) $\pi/2$
   (c) $\pi/6$
   (d) $3\pi/4$
   (e) $\pi/5$
   (f) $\pi/9$
3. F Calcule o comprimento dos arcos de um círculo com raio unitário que subentende as cordas de tamanho:
   (a) $2^{\frac{1}{2}}$
   (b) $3^{\frac{1}{2}}$
4. F Calcule, em radianos, a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados.
5. F Dê, em radianos, a medida do ângulo interno e do ângulo externo de um polígono regular de n lados.
6. F Calcule o valor de $sen\alpha, cos\alpha, tg\alpha$ e $cotg\alpha$ com α valendo:

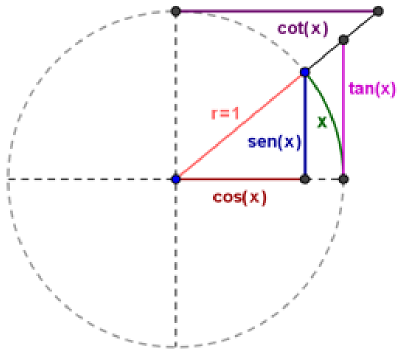


Figura 1.22: http://132.248.17.238/calculo2/Ftrigonometricas/images/circtrig40.png

(a) $\pi/6$
(b) $\pi/4$
(c) $\pi/3$
(d) $\pi/2$
(e) $2\pi/3$
(f) $3\pi/4$
(g) $5\pi/6$
(h) π

7. M Prove que $sen\alpha < \alpha < tg\alpha$ para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, onde α é o ângulo medido em radianos.
8. M Prove que em dois círculos, aos ângulos centrais correspondentes a dois arcos com o mesmo comprimento de arco é igual ao inverso da razão entre os raios.
9. D São traçadas duas retas tangentes nos pontos extremos de um arco de 120° e um círculo é inscrito na figura delimitada pelas duas tangentes e pelo arco. Prove que a circunferência deste círculo é igual ao comprimento desse arco.
10. D Em um círculo, o arco subentendido por uma corda de comprimento a é congruente ao dobro do arco subentendido por uma corda de comprimento b. Calcule o raio do círculo.
11. D Prove que a medida do lado de um polígono regular de n lados tende a zero quando o número de lados tende ao infinito.
12. D Em um diâmetro de um dado semicírculo, dentro do segmento de disco limitado pelo diâmetro e pelo semicírculo, dois outros semicírculos congruentes e tangentes entre si são construídos. Na parte do plano limitada pelos três semicírculos, um disco é inscrito. Prove que a razão entre o diâmetro deste disco e o diâmetro dos semicírculos construídos é 2:3.
13. D Qual seria o erro de estimativa se, ao invés do comprimento de uma semicircunferência, nós tomássemos o perímetro do:
    (a) Triângulo equilátero inscrito;
    (b) Quadrado inscrito.
14. F Estime o tamanho da linha do Equador, sabendo que o raio da Terra é 6400 km.

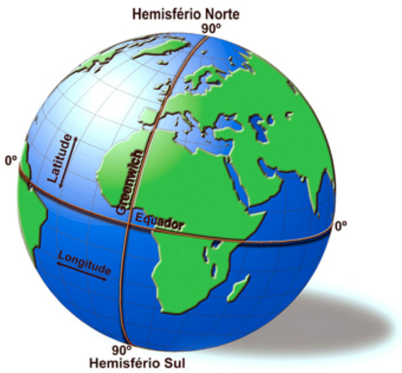


Figura 1.23: http://www.culturamix.com/wp-content/uploads/2013/05/Origem-Da-Linha-Do-Equador.jpg

15. F Com base nos dados do exercício anterior, estime o comprimento do setor circular de 30 da linha do Equador.

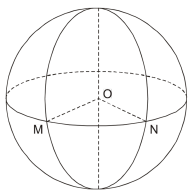


Figura 1.24: http://1.bp.blogspot.com/9CgcXVrwrfE/TQvqO9a0JII/AAAAAAAAALY/5uScrkBQkBk/s1600/Blog + Mania + de + Mayem%25C3%25A1tica + Model + %25281%2529.png

16. M Uma corda, que é 1 m mais longa que a linha do Equador, é esticada ao longo da linha

do Equador a uma altura constante acima da superfície terrestre. Um gato pode se esprema entre a corda e a superfície da Terra?

17. M Suponha agora que a mesma corda seja esticada ao longo da linha do Equador e puxada até o ponto mais alto em relação a superfície terrestre. Um elefante pode passar por baixo dessa corda?

Figura 1.25: http://novotempo.com/ecologia/files/2010/11/elefante.jpg

Bibliografia

1. Kiselev’s Geometry. Book I. PLANIMETRY, adapted from Russian by Alexander Givental, Sumizdat, 2006. Hardcover, 240 pp.