Progressões

Lucas Miguel

Lais Xavier

Daniel Franzolin

PUBLICADO POR LIBUNICAMP

WWW.GERACAOVESTIBULAR.BLOGSPOT.COM

Primeira Impressão, Maio 2014

Sumário

1. Relembrando

Este capítulo sobre sequência irá introduzir o seu conceito inicial e explorar dois outros tipos de progressões: a progressão aritméticas (P.A) e a progressão geométrica (P.G). Para haver um melhor entendimento do aluno, alguns temas devem ser relembrados. Segue tais assuntos.

1.1 Função afim

> **Definição 1.1.1 — Função Afim.** *Chama-se função polinomial de primeiro grau, ou função afim, qualquer função f de R em R dada por uma lei da forma* $f(x) = ax + b$*, em que a e b são números reais dados e* $a \neq 0$*. Se o valor de* $a > 0$*, então f é crescente, se o valor de* $a < 0$*, logo f é decrescente.*

1.1.1 Exemplos

1. Seja $f(x) = 2x + 2$, logo $a = 2$ e $b = 2$.
2. Seja $f(x) = -x + 3$, logo $a = -1$ e $b = 3$.

1.2 Função Exponencial

> **Definição 1.2.1 — Função Exponencial.** *Chama-se a função exponencial a função* f:$\mathbb{R}\to \mathbb{R}^*_+$*,talquef(x)=*$a^x$*, onde* $a \in \mathbf{R}$ *e* $0 < a \neq 1$*. O a é chamado de base e o valor de x é chamado de expoente. Quando* $a > 1$*, a função é crescente, e quando* $0 < a < 1$*, a função é decrescente.*

1.2.1 Exemplos

1. Seja $f(x) = 2^x$, logo $a = 2$ e temos uma função crescente.
2. Seja $f(x) = \frac{1}{2}^x$, logo $a = \frac{1}{2}$ e temos uma função decrescente.

1.3 Função Injetora

Definição 1.3.1 — Função Injetora. *A função f é dita injetora se e somente se $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$ para todo x no domínio de f. A função é dita injetiva se ela é injetora.*

1.3.1 Exemplos

Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ não é injetora pois $f(1) = f(-1) = 1$, mas $1 \neq -1$.

1.4 Estruturação do capítulo

Em sua primeira parte será introduzido o conceito inicial de sequências e seus tipos, seguido de exemplos de aplicação. Na segunda parte é apresentado o conceito de progressão aritmética, seguida de sua fórmula geral, soma e propriedades. Na terceira parte é apresentado o conceito de progressão geométrica, e do mesmo modo como feito em progressões aritméticas, se define sua fórmula geral, soma e propriedades. Ao final do capítulo se tem uma breve discussão entre média aritmética e geométrica. Os exercícios ao longo deste capítulo estão divididos por níveis de dificuldade segundo a tabela abaixo:

Símbolo	Nível de dificuldade
●	Fácil
	Médio
	Difícil

2. Sequências

Vamos pensar nos anos de Copa do Mundo a partir do ano 2010. Eles formam uma sequência:

2010, 2014, 2018 ....

Uma sequência numérica é um conjunto ordenado de números. No exemplo, o ano 2010 é o primeiro termo da sequência, 2014 é o segundo termo, e assim sucessivamente.

Costuma-se indicar o primeiro termo da sequência por a_1, o segundo termo por a_2, e assim por diante. Dessa forma a seqência de n elementos é indicada por:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$$

Esta notação apresentada representa uma sequência finita, existem casos em que a sequência é infinita, representada por:

$$(a_1, a_2, a_3 ...)$$

Definição 2.0.1 — Sequência finita (ou n-upla). Uma sequência finita é toda aplicação f do conjunto $\mathbf{N}^*$ em $\mathbf{R}$. Dada pela notação:

$$\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, ..., n\}$$

$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n)\}$$

Definição 2.0.2 — Sequência infinita. Uma sequência inifinita é toda aplicação f do conjunto $\mathbf{N}^*$ em $\mathbf{R}$. Dada pela notação:

$$\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n), ...\}$$

Convenciona-se indicar um sequência apenas com os valores das imagens:

- Finita: $f = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$

- Infinita: $f = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$

Existem duas fórmulas de apresentar uma sequência:

- **Termo da sequência em função de sua ordem (a_n em função de n)**

Exemplos:
1. $a_n = 2^n, n \in \mathbf{N}^*$
   $f = (2, 4, 8, 16, ...)$
2. $a_n = n + 2, n \in \mathbf{N}^*$
   $f = (3, 4, 5, ...)$
3. $a_n = n^2 + 2, n \in \mathbf{N}^*$
   $f = (3, 6, 11, ...)$

- **Fórmula de recorrência** Os termos da sequência são determinados conhecendo:
  1. o $1^{\underline{o}}$ termo a_1
  2. A relação entre dois termos consecutivos (a_n e a_{n+1}) ou (a_{n-1} e a_n).

Exemplos:
(a) $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + 4, \forall n \in \mathbf{N}^*$
    $f = (3, 7, 11, ...)$
(b) $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 5, \forall \in \mathbf{N}^*$
    $f = (2, 7, 12, 17, ...)$
(c) $a_1 = 4$ e $a_{n+1} = 3.a_n, \forall n \in \mathbf{N}^*$
    $f = (4, 12, 36, 108, ...)$

2.1 Sequência de Fibonacci

Uma das sequências mais famosas é a sequência **Fibonacci**. Ela foi desenvolvida pelo matemático Leonardo Fibonacci [*1170-1250*] em 1202. A sequência é muito estudada e ocorre em enumeras situações, como no comportamento da luz, comportamento dos átomos, crescimento de plantas, probabilidade e estatística, curvas de formas espirais (como por exempo o Nautilus, marfins de elefantes, furações, ondas de oceanos ...) entre outros. A sequência Fibonacci é dada por:

$$F(n) = \begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \forall \text{n} \geq 2 \end{cases}$$

ou seja, cada termo F_n da sequência de Fibonacci é dado pela soma dos dois termos anteriores F_{n-1} e F_{n-2}.

Algo interessante a se observar na sequência de Fibonacci é que quando dividimos F_n por F_{n-1}, ou seja, dois termos consecutivos, essa razão tende a ser igual a **razão áurea**[1] a medida que o valor de n aumenta. O valor da razão área (Φ) vale $\frac{1+\sqrt{(5)}}{2} \approx 1,61803398874989$.

Por exemplo, dada sequência de Fibonacci (1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...), vamos analisar o valor de Φ.

- $\frac{F(2)}{F(1)} = \frac{2}{1} = 2.$
- $\frac{F(15)}{F(14)} = \frac{610}{377} \approx 1.618037135.$

Podemos notar que a razão área se destaca também na sequência de Fibonacci.

[1] Para saber mais sobre ela, veja o Apêndice 1

2.2 Exercícios

1. ● Encontre os cinco primeiros termos da sequência cujo termo geral é $a_n = 3n + 16$, $n \in \mathbf{N}^*$.
2. ● Seja uma sequência definida por $a_n = -3 + 5n$, $n \in \mathbf{N}^*$.
   (a) a_3
   (b) a_6
3. ● Escreva os quatro primeiros termos da sequência definida por $a_n = 3 + 2n + n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$.
4. ● Escreva os cinco primeiros termos da sequência definida por $a_n = 3n - 10$, para n natural, $n \geq 1$.
5. ● Seja a sequência definida pela lei de formação $a_n = 2.3n$, $n \in \mathbf{N}^*$. Qual é o valor de $a_2 + a_4$?
6. ● Uma sequência é definida por $a_n = -37 + 6n$ em que$n \in \mathbf{N}^*$. Verifique se os números seguintes pertencem à sequência, destacando, em caso afirmativo, sua posição:
   (a) -7
   (b) 46
   (c) 123
   (d) 251
7. ● Seja uma sequência definida por $a_n = -4n^2 + 3$, $n \in \mathbf{N}^*$. Calcule o 5° termo e o 9° termo da mesma.
8. ● Encontre os sete primeiros termos da sequência definida por $a_n = 3 + 2n + n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$

3. Progressão Aritmética

A floresta amazônica ocupa uma área de 5.500.000 km^2, como sabemos ela é a maior floresta tropical do mundo. Um dos grandes problemas que afetam a Amazônia atualmente é o desmatamento.

Figura 3.1: Desmatamento na Amazônia vem crescendo ao longo dos anos, muito pelo fato da exploração de madeira. Fonte: http://meioambiente.culturamix.com

Suponha que atualmente a área preservada seja de 4.120.000 km^2 e que a taxa de desmatamento anual seja de aproximadamente 5.000 km^2. Em quanto tempo a floresta terá metade do seu tamanho original? Vamos mostrar através de uma tabela a solução do problema.

Ano	Área da floresta (km^2)	Taxa de desmatamento (km^2)
2012	4.120.000	5.000
2013	4.115.000	5.000
2014	4.110.000	5.000
.	.	.
.	.	.
.	.	.
2423	2.065.000	5.000
2424	2.060.000	

Logo, sabemos que no ano de 2424 a Floresta Amazônica terá metade da sua área preservada. A idéia do cálculo é sempre ir retirando da sua área atual uma *taxa constante*, que nesse caso é de $5000km^2$, afim de chegar a sua área final. Todo problema matemático onde há uma taxa constante de crescimento ou decrescimento entre os valores observados, iremos ter uma *Progressão Aritmética de razão constante* r, no nosso exemplo $r = 5000$.

Definição 3.0.1 — Progressão Aritmética. é uma sequencia de numeros reais em que diferença entre um termo qualquer (a partir do 2°) e o termo antecedente é sempre a mesma (constante).

Vejamos alguns exemplos:

1. Na P.A. (2,4,6,8,...), temos $r = 3$.
2. Na P.A. $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$, -1,...), temos $r = -\frac{1}{3}$.
3. Na P.A. (6,6,6,6,...), temos $r = 0$.
4. Na P.A. (32,30,28,26,...), temos $r = -2$.
   De acordo com o sinal da razão, podemos classificar as Progressões Aritméticas da seguinte forma:
   (a) Se $r > 0$, dizemos que a P.A. é *crescente*, como no exemplo 1.
   (b) Se $r = 0$, diemos que a P.A. é *constante*, como no exemplo 3.
   (c) Se $r < 0$, dizemos que a P.A. é *decrescente*, como no exemplo 2 e 4.

3.1 Fórmula Geral

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita encontrar um termo qualquer da P.A., conhecendo seu 1° termo e sua razão.

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{r}$$
.
.
.
$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \mathbf{r}$$

Se somarmos todas as equações acima teremos

$$\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + ... + \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{r} + \mathbf{a}_2 + \mathbf{r} + \mathbf{a}_3 + \mathbf{r} + ... + \mathbf{a}_n + \mathbf{r}$$

Simplicicando temos:

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{r} + \mathbf{r} + \mathbf{r} + \mathbf{r} + \mathbf{r} + ... + \mathbf{r}$$

$$\boxed{\mathrm{a}_{n+1} = \mathbf{a}_1 + (n-1).\mathbf{r}} \tag{3.1}$$

A equação 3.1, conhecida como *fórmula geral do termo de uma P.A.*, nos permite encontrar qualquer termo da P.A. em função de a_1 e r.

■ **Exemplo 3.1** Vamos calcular o 40° termo da P.A. (-4,-1,2,5,...).
Sabemos que $a_1 = -4$ e $r = -1 - (-4) = 3$.
Utilizando a fórmula do termo geral, podemos escrever:
$a_{50} = a_1 + 49.r = -4 + 49.(3) \Rightarrow a_{50} = 143$

■ **Exemplo 3.2** Vamos determinar a P.A. que possui as características: o 10° termo vale 48 e a soma do 5° termo com o 20° termo é igual a 121. De acordo com o enunciado temos:

$$\begin{cases} a_{10} = 48 \\ a_5 + _{20} = 121 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 9.r = 48 \\ a_1 + 4.r + a_1 + 19.r = 121 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 9.r = 48 \\ 2.a_1 + 23.r = 121 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, segue $a_1 = 5$ e $r = 3$.
Assim a P.A pedida é (3,8,13,18,...).

3.2 Notação especial

Muitas vezes desejamos determinar uma P.A. a partir de informações sobre seus elementos. Como já vimos, pela definição de P.A. podmeos encontrar uma representação conveniente que nos facilite a resolução de alguns problemas.

- Para três termos em P.A., podemos escrever:
  $(x-r, x, x+r)$
- Para cinco termos em P.A., podemos escrever:
  $(x-2r, x-r, x, x+r, x-2r)$

■ **Exemplo 3.3** Vamos construir uma P.A. de três termos onde a sua soma é igual a 18 e seu produto é igual a 162.
Os termos procurados são $(x-r, x, x+r)$

$$\begin{cases} x-r+x+x+r=18 \\ (x-r).x.(x+r)=162 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ (6-r).6.(6+r)=162 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ r=3 \end{cases}$$

Assim a P.A. pedida é (3,6,9).

3.3 Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

Em meados de 1790, um professor mandou seus alunos calculassem a soma dos 100 primeiros números naturais. Carl Friedrich Gauss [1777-1855], que seria um renomado matemático, resolveu o problema rapidamente. Ele observou que se somasse o primeiro termo com o último resultaria em 101, se somasse o segundo com o anti-penúltimo, também daria 101, assim, ele deduziu a resposta ao professor: 5050.

Vamos analisar o raciocínio de Gauss.

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100}$

$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 \qquad (I)$

Escrevendo (I) em outra ordem vem:

$S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 1 \qquad (II)$

Fazendo (I) e (II) de acordo com o esquema abaixo, temos:

$$\begin{array}{lllllll} (I) & S= & 1+ & 2+ & 3+ & \ldots+ & 99+ & 100 \\ + & & & & & & & \\ (II) & S= & 100+ & 98+ & 99+ & \ldots+ & 2+ & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 2.S= & 101+ & 101+ & 101+ & \ldots+ & 101+ & 101 \end{array} \tag{3.2}$$

Assim como temos 100 somas de valor 101, $2S = 100.101$.

$S = \frac{100.101}{2} = 5050$

De modo geral, se a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ é uma P.A. de razão r, podemos escrevê-la da forma:

$(a_1, a_1+r, a_1+2r, \ldots, a_n-2r, a_n-r, a_n)$

Vamos calcular a soma dos n primeiros termos de uma P.A., que indicamos por S_n. Repetindo o raciocínio anterior, temos:

Fazendo (I) e (II) de acordo com o esquema abaixo, temos:

$$\begin{array}{lllllll} (I) & S_n = & a_1+ & (a_1+r)+ & (a_1+2r)+ & \ldots+ & (a_n-r)+ & a_n \\ (II) & S_n = & a_n+ & (a_n-r)+ & (a_n-2r)+ & \ldots+ & (a_1+r)+ & a_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll} & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ (I)+(II) & 2.S_n = & (a_1+a_n)+ & (a_1+a_n)+ & (a_1+a_n)+ & \ldots+ & (a_1+a_n)+ & (a_1+a_n) \end{array}$$

Assim, como temos n somas de valor (a_1+a_n):
$2.S_n = (a_1 +_n).n \Rightarrow$ $\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}}$

3.4 Propriedades

Seja uma P.A. qualquer com três termos (a_1, a_2, a_3), temos que $r = a_2 - a_1$ e $r = a_3 - a_2$, igualando as equações temos:

$$\begin{aligned} & a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \\ & 2a_2 = a_1 + a_3 \\ & a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Notamos que o elemento central é a média aritmética entre os outros dois termos.

■ **Exemplo 3.4** Para qual valor de x a sequência (x-3,x-1,2x-7) é uma P.A.
Pela propriedade 2.5 temos que:

$$\begin{aligned} & x-1 = \frac{x-3+2x-7}{2} \\ & 2x-2 = 3x-10 \\ & x = 8 \end{aligned}$$

Logo para $x = 8$ temos a P.A. (5,7,9).

3.4.1 Exercícios

1. ● Dada a P.A.$(28,36,44,52,...)$, determine seu:
   (a) Oitavo termo.
   (b) Décimo nono termo.
2. ● Os aprovados em um concurso público foram convocados, ao longo de um ano, para ocupar os respectivos cargos, segundo os termos de uma P.A.: Em Janeiro, foram chamadas 18 pessoas; em fevereiro 30; em março 42; e assim por diante.
   (a) Quantas pessoas foram convocadas no mês de agosto?
   (b) b) Quantas pessoas foram chamadas no último trimestre do ano?
3. ● Em um treinamento aeróbico mensal, um estudante de Educação Física corre sempre 3 minutos a mais do que correu no dia anterior. Se no5° dia o estudante correu 17 minutos, quanto tempo correrá no 12° dia?
4. ● Escreva a P.A. em que o 4° termo vale 24 e o 9° termo vale 79.
5. ● Obtenha o valor de y de modo que a sequência $(-3, y+1, -11)$ seja uma P.A.
6. ● Determine x a fim de que a sequência $(-6-x, x+2, 4x)$ seja uma P.A. Qual é a razão da P.A. obtida?
7. Interpole seis meios aritméticos entre 62 e 97.
8. Interpolando-se 17 meios aritméticos entre 117 e 333, determine:
   (a) A razão da P.A. obtida
   (b) O 10° termo da P.A. obtida.
9. As medidas dos lados de um triângulo retângulo são numericamente iguais aos termos de uma P.A. de razão 4. Qual é a medida da hipotenusa?
10. Encontre cinco números inteiros em P.A. cuja soma seja 65 e o produto dos dois primeiros termos seja 24.
11. A Copa do Mundo de Futebol é um evento que ocorre de quatro em quatro anos. A 1° Copa foi realizada em 1930, no Uruguai. De lá pra cá, apenas nos anos de 1942 e 1946 a Copa não foi realizada, devido á 2° Guerra Mundial.
    (a) A Copa de 2014 será realizada no Brasil. Qual será a ordem desse evento?
    (b) Haverá Copa em 2100? E em 2150?
12. ● Calcule a somas dos quinze primeiros termos da P.A. $(-45, -41, -37, -33, ...)$.
13. ● Calcule a soma dos vinte primeiros termos da P.A. $(0,15; 0,40; 0,65; 0,9; ...)$.
14. ● Para a compra de uma TV pode-se optar por um dos planos seguintes:
    - Plano Alfa: Entrada de R\$400,00 e mais 13 prestações mensais crescentes , sendo a primeira de R\$35,00, a segunda de R\$50,00, a terceira de R\$65,00 e assim por diante.
    - Plano Beta: 15 prestações mensais iguais de R\$130,00 cada.

    (a) Em qual dos planos o desembolso total é maior?
    (b) Qual deveria ser o valor da entrada do plano alfa para que, mantidas as demais condições, os desembolsos totais fossem iguais?
15. ● Em uma cidade, 1200 famílias carentes inscreveram-se em um programa social desenvolvido pela prefeitura. Por não haver a verba total imediata necessária para implementar o programa, decidiu-se atender 180 famílias no primeiro mês e, em cada mês subsequente, 15 famílias a menos que o número de famílias assistidas no mês anterior.
    (a) Quantas famílias foram atendidas nos três primeiros meses do programa?
    (b) Qual a porcentagem de famílias inscritas não assistidas ao final de um ano?
16. ● Um estudante calculou, parcela a parcela, a soma dos trinta primeiros termos da P.A.$(23,40,57,...)$, mas, por distração, esqueceu de contar o 15° e o 25° termos. Qual foi o valor encontrado pelo estudante?

25. ● A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por $S_n = 18n - 3n^2$, sendo $n \in \mathbf{N}^*$. Determine:
    (a) O 1° termo da P.A;
    (b) A razão da P.A
    (c) O 10° termo da P.A.
26. ● Utilizando-se um fio de comprimento L é possível construir uma sequência de 16 quadrados em que o lado de cada quadrado, a partir do segundo, é 2 cm maior que o lado do quadrado anterior. Sabendo que para a construção do sétimo quadrado são necessários 68 cm, determine o valor de L.
27. (FUVEST) Em uma progressão aritmética a_1,a_2,..., a_n a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = bn^2 + n$, sendo b um número real. Sabendo-se que $a_3 = 7$, determine:
    (a) o valor de b e a razão da progressão aritmética.
    (b) o 20° termo da progressão.
    (c) a soma dos 20 primeiros termos da progressão.
28. (UFRGS) Os números que exprimem o lado, a altura e a área de um triângulo equilátero estão em PA, nessa ordem. A altura desse triângulo mede.
    (a) $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$
    (b) $\sqrt{3} - 1$
    (c) $2(\sqrt{3} - 1)$
    (d) $4 - \sqrt{3}$
    (e) $4 + \sqrt{3}$
29. (UFRGS) Para p e q inteiros positivos, a soma dos cem primeiros múltiplos de p é A e a soma dos cem primeiros múltiplos de q é B. O valor de A+B é :
    (a) $200.pq$
    (b) $200.(p+q)$
    (c) $500.(p+q)$
    (d) $5050.(p+q)$
    (e) $5050.pq$
30. ● (UFPA) Para realizar tal empreendimento, os sócios fizeram um empréstimo no valor de R$ 54.000,00, que, de acordo com o plano da financeira, pode ser abatido em 36 prestações mensais e sucessivas, cada uma das quais constituídas de duas parcelas:
    - a 1° parcela, dita amortização, é de R$ 1.500,00 por prestação e;
    - a 2° parcela, correspondente aos juros, é decrescente segundo uma P.A, da qual o 1° termo é R$ 800,00 e o último R$ 200,00.Calcule o valor a ser pago pelos sócios da empresa na décima quinta prestação.
31. ● (UFPB) Em janeiro de 2003, uma fábrica de material esportivo produziu 1000 pares de chuteiras. Sabendo-se que a produção de chuteiras dessa fábrica, em cada mês de 2003, foi superior à do mês anterior em 200 pares, quantos pares de chuteiras essa fábrica produziu em 2003?
32. (UEPB) Interpolar, intercalar ou inserir m meios aritméticos entre os números a e b significa:
    (a) Formar uma P.A. de $(m+2)$ termos entre a e b.
    (b) Formar uma P.A. de m termos, onde o 1° termo é a e o último é b.
    (c) Formar uma P.A. de $(m+2)$ termos, onde o 1° termo é a e último é b.
    (d) Formar uma P.A. onde todos os termos são equidistantes de a e b.
    (e) Formar uma P.A. onde $\frac{(ab)}{2}$ é a soma dos n primeiros termos.
33. ● (UFPB) Um piloto testou um automóvel de um determinado modelo, para medir o consumo médio de combustível desse veículo. Com relação ao teste, considere as seguintes informações:
    - O automóvel foi testado durante vinte dias.
    - O automóvel percorreu exatamente 30 km, no primeiro dia.
    - O automóvel percorreu, a partir do segundo dia, 10 km a mais do que no dia anterior. Considerando essas informações, é correto afirmar que o automóvel percorreu:

    (a) Uma distância inferior a 100 km, nos três primeiros dias.
    (b) Uma distância superior a 300 km, nos cinco primeiros dias.
    (c) Menos de 150 km, no décimo dia.
    (d) Mais de 230 km, no décimo quinto dia.
    (e) Menos de 200 km, no vigésimo dia.
34. ● (UEPB) Considerando quadrados de mesma área, com 4 palitos de fósforos formamos um quadrado, com 7 palitos de fósforos dois quadrados, com 10 palitos de fósforos 3 quadrados,... Então, com 40 palitos formamos?
35. (ITA-SP) Quantos números inteiros existem, de 1000 a 10000, que não são divisíveis nem por 5 nem por 7 ?
36. ● (FUVEST) Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, ..., a_n)$ a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = bn^2 + n$, sendo b um número real. Sabendo-se que $a_3 = 7$, determine:
    (a) o valor de b e a razão da progressão aritmética.
    (b) o 20° termo da progressão.
    (c) a soma dos 20 primeiros termos da progressão.

4. Progressão Geométrica

Atualmente a rede social mais utilizada é o Facebook. O Facebook foi criado por Mark Zuckerberg em fevereiro de 2004, e desde então vem atraindo seguidores e mais seguidores a cada ano que passa.

Figura 4.1: Facebook, a rede social com maiores usuários no mundo.

Você sabia que o número de usuários do site cresceu como uma progressão geométrica? Veja a tabela abaixo que demonsta o número de usuários do Facebook a cada ano.

Ano	Número de usuários (milhoes)
2004	100.000
2005	150.000
2006	225.000
.	.
.	.
.	.
2013	2.563.000

Podemos notar que em 2013 o Facebook alcançou mais de 2 bilhões de usuários ! Notamos que a cada ano que passa, o número de usuários do Facebook cresce devido a uma *taxa constante*. Se voce reparar, a cada ano que passa, o número de usuários está sendo mutiplicado por 1.5 (basta divididir 150.000 por 100.000), ou seja, a razão q pelo qualo número de usuários cresce é 1.5. Quando observamos que os nossos dados estão a uma razão constante de multiplicação, chamamos essa progressão de *Progressão Geométrica de razão q*.

Definição 4.0.1 — Progressão Geométrica. É uma sequencia de números reais em que divisão entre um termo qualquer (a partir do 2°) pelo seu antecedente é sempre a mesma (constante)

Vejamos alguns exemplos:

1. Na P.G. (2,4,8,16,...), temos $q = 3$.
2. Na P.G. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$,...), temos $q = -\frac{1}{2}$.
3. Na P.G. (27,9,3,1,...), temos $q = \frac{1}{3}$.
4. Na P.G. (4,-8,16,-32,...), temos $q = -2$.

   De acordo com o sinal da razão, podemos classificar as Progressões Geométricas da seguinte forma:
   (a) Se $q < 0$, dizemos que a P.G. é *alternada ou oscilante*, como no exemplo 2 e 4.
   (b) Se $(a_1 > 0eq > 1)$ ou $(a_1 < 0e0 < q < 1)$, dizemos que a P.G. é *crescente*, como no exemplo 1.
   (c) Se $(a_1 > 0e0 < q < 1)$ ou $(a_1 < 0eq > 1)$, dizemos que a P.G. é *decrescente*, como no exemplo 3.

4.1 Fórmula Geral

Vamos agora obter uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da P.G. conhecendo apenas o 1° termo e a razão q. Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma P.G. de razão q. Temos:

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}$$
$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{q} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^2$$
$$\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{q} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^3$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$\mathrm{a}_n = \mathbf{a}_{n-1} \times \mathbf{q} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^{n-1} \tag{4.1}$$

A equação 4.1 é chamada fórmula geral de uma progressão geométrica. Vejamos alguns exemplos de como utilizá-la, bastando apenas saber o valor do primeiro termo (a_1) e sua razão q.

■ **Exemplo 4.1** Vamos calcular o 7° termo da P.G. (1,3,9,27,...).
Sabemos que $a_1 = 1$ e $q = \frac{3}{1} = 3$.
Utilizando a fórmula do termo geral, podemos escrever:
$a_7 = a_1 \times 3^6 \Rightarrow a_7 = 729$

■ **Exemplo 4.2** Vamos determinar a P.G. que possui as características: a soma do 5° com o 3° termo vale $\frac{10}{9}$ e a soma do 2° termo com o 4° termo é igual a $\frac{10}{3}$. De acordo com o enunciado temos:

$$\begin{cases} a_5 + a_3 = \frac{10}{9} \\ a_2 + a_4 = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1.q^4 + a_1.q^2 = \frac{10}{9} \\ a_1.q + a_1.q^3 = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1.q^2(1+q^2) = \frac{10}{9} & (I) \\ a_1.q(1+q^2) = \frac{10}{3} & (II) \end{cases}$$

Dividindo membro a membro (I) por (II) temos:

$$\frac{a_1.q^2(1+q^2)}{a_1.q(1+q^2)} = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{10}{3}} \qquad \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

Para $q = \frac{1}{3}$, temos
$a_1.\frac{1}{3}^2.(1+\frac{1}{3}^2) = \frac{10}{9} \qquad a_1 = 9$
Assim a P.G. pedida é $(9,3,1,\frac{1}{3},\ldots)$.

4.2 Soma de P.G.

Exitem dois casos na soma de uma PG:

1. Caso 1: $q = 1$

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q} + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^2 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^3 + ... + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^{n-1}$$
$$\mathbf{S}_n = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 + ... + \mathbf{a}_1$$
$$\mathbf{S}_n = n \times \mathbf{a}_1$$

2. Caso 2: $q \neq 1$

$$(I) \qquad q \times S_n = \mathbf{a}_1 \times q + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^2 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^3 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^4 + ... + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^n$$
$$(II) \qquad \mathbf{S}_n = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q} + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^2 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^3 + ... + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{q}^{n-1}$$

$$(I) - (II) \qquad q \times \mathbf{S}_n - \mathbf{S}_n = \mathbf{a}_1 . \mathbf{q}^n - \mathbf{a}_1 \tag{4.2}$$

Por 4.2 temos que: $\mathrm{S}_n(\mathbf{q} - 1) = \mathbf{a}_1(\mathbf{q}^n - 1)$

$\mathrm{S}_n = \frac{\mathbf{a}_1(\mathbf{q}^n - 1)}{\mathbf{q} - 1}$

Vejamos como utilizar a soma de P.G.

■ **Exemplo 4.3** Vamos calcular a soma dos 8 primeiros termos da P.G.(2,6,18...).
Sabemos que $a_1 = 2$ e $q = \frac{6}{2} = 3$.
Utilizando a fórmula da soma de uma P.G., podemos escrever:
$\mathbf{S}_n = \frac{\mathbf{a}_1(\mathbf{q}^n - 1)}{\mathbf{q} - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{2.(3^8 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_8 = 6560$

4.2.1 Soma de P.G. infinita

Imaginemos a função $f(x) = \frac{1}{x}$ o que acontece com o valor da função quando aumentamos muito o valor de x? veja na tabela abaixo:

x	f(x)
1	1
10	0.1
100	0.01
10000	0.00001

Pode notar-se que quanto mais aumentamos o numero x, mais f (x) se aproxima para zero. Chamamos essa forma de se aproximar de um número de *tender* a um número, logo teríamos que f (x) tende a zero ($f(x) \to 0$) quando x tende ao infinito ($n \to \infty$). Logo na expressão da fórmula de P.G. finita quando o termo n tende ao infinito ($n \to \infty$), temos que q^n tende a 0 ($q^n \to 0$).

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

■ **Exemplo 4.4** Considere a P.G. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$ logo temos que $q = \frac{1}{2}$, se fizermos a soma dos termos desta PG teremos:
$\mathbf{S}_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$
Usando a formula da soma infinita teremos:
$\mathbf{S}_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2$
Se você quiser conferir, busque uma calculadora e some os termos dessa P.G. e note que ela mais se aproxima de 2 quando novos termos são somados.

4.3 Propriedade de P.G.

Em qualquer P.G. $(a_1, a_2, a_3), q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_2^2 = a_1 \times a_3$, isto é, o termo central é a média geométrica entre os outros dois termos.

■ **Exemplo 4.5** Vamos determinar x para que a sequência $(\frac{9x-4}{2}, x, x-3)$ seja uma P.G.

Usando a propriedade descrita temos:
$x^2 = \frac{9x-4}{2}.(x-3) \qquad \Rightarrow 2x^2 = 9x^2 - 31x + 12 \qquad \Rightarrow 7x^2 - 31x + 12 = 0$
As raízes dessa equação são: $x_1 = 4$ e $x_2 = \frac{3}{7}$
Verificando, para $q = 4$ a P.G. é (16,4,1) e para $q = \frac{3}{7}$ a P.G. é $(-\frac{1}{14}, \frac{3}{7}, -\frac{18}{7})$

4.4 Notação especial

Muitas vezes desejamos determinar uma P.G. a partir de informações sobre seus elementos. Como já vimos, pela definição de P.G. podmeos encontrar uma representação conveniente que nos facilite a resolução de alguns problemas.

- Para três termos em P.G., podemos escrever:
  $(\frac{x}{q}, x, x.q)$

■ **Exemplo 4.6** Vamos determinar a P.G. cuja multiplicação dos termos é 64 e a soma do 2° com o 3° termo é 12.

$$\begin{cases} \frac{x}{q}.x.x.q = 64 \\ x + x.q = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 64 \\ x + x.q = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & (I) \\ q = 2 & (II) \end{cases}$$

A P.G. buscada é (2,4,8).

4.5 Exercicios

1. ● Calcule a razão de cada umas das seguintes progressões geométricas:
   (a) $(1,2,4,8,16,...)$
   (b) $(10^{40},10^{42},10^{44},10^{46},...)$
   (c) $(-2,6,-18,54,...)$
   (d) $(5,-5,5,-5,...)$
   (e) $(80,40,20,10,5,...)$
   (f) $(10^{-1},10^{-2},10^{-3},10^{-4},...)$
2. ● Qual é o 8° termo da P.G.$(-1,4,-16,...)$?
3. ● Em uma P.G. crescente, o terceiro termo vale -80, e o sétimo termo , -5. Qual é seu primeiro termo?
4. ● Em uma P.G, o primeiro termo é $\sqrt{2}$ e o terceiro termo é $5\sqrt{2}$. Determine:
   (a) 2° termo
   (b) A razão da P.G.
   (c) 7° termo
5. ● Considere a sequência cujo termo geral é $a_n = 0{,}25.3^2$, para $n \in \mathbf{N}^*$.
   (a) Verifique que (a_n) é uma P.G., calculando sua razão.
   (b) Qual é o valor de $a_3 + a_4$?
   (c) Determine o menos valor de n de modo que $a_n > 1000$.
6. ● Uma divida deverá ser paga em sete parcelas de modo que elas constituam termos de uma P.G. Sabe-se que os valores da 3° e a 6° parcelas são, respectivamente, R$144,00 e R$486,00. Determine:
   (a) O valor da primeira parcela;
   (b) O valor da última parcela.
7. ● O número de consultas a um site de comércio eletrônico aumenta semanalmente (desde a data em que o portal ficou acessível), segundo uma P.G. de razão 3. Sabendo-se que na 6° semana foram registradas 1458 visitas, determine o número de visitas ao site registrado na 3° semana.
8. ● Determine o número real x a fim de que a sequência $(x^2-4,2x+4,6)$ seja uma P.G.
9. ● Que número deve ser adicionado a cada um dos termos da seguinte sequência (3,5,8) a fim de que ela seja uma P.G? Qual é a razão da P.G.?
10. Interpole quatro meios geométricos entre -4 e 972.
11. Interpolando-se seis meios geométricos entre 20000 e $frac1500$, determine:
    (a) A razão da P.G. obtida;
    (b) O 4° termo da P.G.
12. ● Em uma P.G. de 3 termos positivos, o produto dos termos extremos vale 625, e a soma dos dois últimos termos é igual a 30. Qual é o 1° termo?
13. Os números que expressam as medidas do lado, do perímetro e da área de um quadrado podem estar, nessa ordem, em P.G? Em caso afirmativo, qual deve ser a medida do lado do quadrado?
14. ● A sequência $(x,3,7)$ é uma P.A., e a sequência $(x-1,6,y)$ é uma P.G. Quais são os valores de x e y?
15. ● Calcule a soma dos oito primeiros termos da P.G. $(320,160,80,...)$.
16. ● Calcule a soma dos dez primeiros termos da P.G. $(m,m^2,m^3,...)$:
    (a) Para m=1.
    (b) Para m=2.
    (c) Para m=$\frac{1}{3}$
    (d) Para m=0.
17. ● Aline solicitou a um banco um crédito educativo para custear seus estudos na faculdade. Essa dívida deverá ser paga em seis anos , sendo que, em cada ano, Aline pagará doze prestações mensais iguais, cujos valores são dados a seguir: 1° ano: R$ 100,00; 2° ano: R$ 110,00; 3° ano: R$121,00; e assim sucessivamente.
    (a) Qual será o desembolso total de Aline no 6° ano?
    (b) Qual será o valor total pago por Aline nesses seis anos?
18. Seja um triângulo equilátero de lado 12 cm. Unindo-se os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se outro triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados desse último triângulo, construímos outro triângulo, e assim indefinidamente.
    (a) Qual é a soma dos perímetros de todos os triângulos assim construídos?
    (b) Qual é a soma das áreas de todos os triângulos assim construídos?
19. Considere um barbante de comprimento de 1,44 m e o seguinte procedimento: divide-se o barbante em duas partes cujas medidas estejam na razão de 2:1, a maior parte é deixada de lado e, com a menos parte, repete-se o procedimento. Se essa experiência puder ser repetida um número infinito de vezes, qual é o valor da soma dos comprimentos de todos os pedaços do barbante que foram deixados de lado?

20. ● (FUVEST/2001) Uma progressão aritmética e uma progressão geométrica têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se ainda que o segundo termo da progressão aritmética excede o segundo termo da progressão geométrica em 2. Então, o terceiro termo das progressões é?
21. ● (UE – PA) Um carro, cujo preço à vista é R$ 24 000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R$ 4 000,00 e a quarta parcela de R$ 1 000,00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?
22. (PUC-MG) Os números inteiros não nulos a, b e c formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão cinco. Os números a, bx e c, nessa ordem, formam uma progressão aritmética. O valor de x é?
23. ● (UEPA) Um empresário comprou na ilha de Marajó uma fazenda com 64 cabeças de búfalo. Após n anos administrando a fazenda, observou que seu rebanho teve um crescimento anual segundo uma progressão geométrica de razão 2, passando atualmente para 1.024 cabeças. O valor de n é?
24. ● (UFV) Uma bactéria de determinada espécie divide-se em duas a cada 2h. Depois de 24h, qual será o número de bactérias originadas de uma bactéria?
25. (UNESP) O limite da soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente ilimitada cujo primeiro termo é q e cuja razão é q, vale 7 vezes o limite da soma dos cubos dos termos dessa mesma progressão geométrica. Calcule os valores possíveis de q.
26. ● (Mackenzie) Numa progressão geométrica de termos positivos, cada termo é igual à soma dos dois termos seguintes. Então a razão da progressão vale?
27. (UFRJ) Uma progressão geométrica de 8 termos tem primeiro termo igual a 10. O logaritmo decimal do produto de seus termos vale 36. Ache a razão da progressão.

4.6 Média aritmética *versus* Média geométrica

Em estatística, sempre é útil obter medidas representativas para os seus dados, isto é, como se distribuem os valores de uma variável quantativa[1]. A média indica o valor médio dos seus dados.

[Média Aritmética] Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ os valores de n observações de determinada variável X. Definimos como média aritmética - indicada por $\bar{x}$ - como o quociente entre a soma de todos os valores observados e o número total de observações:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4.3}$$

[Média Geométrica] Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ os valores de n observações de determinada variável X. Definimos como média aritmética - indicada por $\bar{x}$ - como a raiz n-ésima da multiplicação de todos os valores observados, onde n é o total de observações:

$$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1.x_2 \ldots x_n} = \left(\prod_{j=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \tag{4.4}$$

Exercicio 4.1 Na tebala abaixo está descrita as notas das três provas de João ao longo de um semestre. A média de João seria maior se para calcular sua média final fosse usado uma média aritmética ou uma média geométrica?

[1] Cada um dos tipos diferentes de objetos estudados. Vamos defini-la como X.

Prova	Notas
1	5.0
2	7.0
3	6.0

A média aritmética das notas de João é: $\bar{x} = \frac{5.0+7.0+6.0}{3} = 6.0$
A média geométrica das notas de João é: $\bar{x} = \sqrt[3]{5.0x7.0x6.0} = 5.94$
Resposta: João obteria uma maior média usando a média aritmética. ■

Uma questão a ser discutida é: Qual o melhor jeito de se calcular a média? Isso pode variar de experimento para experimento. Por exemplo, como visto nos exemplos anteriores, a média aritmética foi maior que a geométrica. A média mais utilizada é a aritmética, mas a grande observação em questão é do fato de que a **média aritmética é sempre maior que a geométrica para obervações positivas**.

Demonstração:
Seja x e y observações do seu experimento tal que $x > 0$ e $y > 0$, então temos que $(x-y)^2 > 0$, ou seja

$$0 < x^2 + y^2 - 2xy \tag{4.5}$$

Somando $4xy$ a ambos os membros da equação 2.11, teremos:

$$4xy < x + y + 2xy \tag{4.6}$$
$$4xy < (x+y)^2 \tag{4.7}$$
$$xy < \frac{(x+y)^2}{4} \tag{4.8}$$

Como a função raiz quadrada $f(x) = \sqrt{x}$ é definida para x>0, com $x \in \mathbf{R}$, podemos extrair a raiz quadrada em ambos os membros da desigualdade 2.14, para obter:

$$\sqrt{xy} < \frac{(x+y)}{2} \tag{4.9}$$

Logo podemos observar que a média aritmética de dois números sempre é maior que a sua média geométrica.

5. Apêndice 1

5.1 Número áureo (2)

Proporção Áurea, Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, Número áureo. Provavelmente você já escutou alguns desses termos ao longo de sua vida, talvez por ser um tema tão rico, tão misterioso e que, por isso, atrai tanta atenção.

Tudo começou com Leonardo Fibonacci, que foi o primeiro a entender que numa sucessão de números, tais que, definindo os dois primeiros números da sequência como 0 e 1, os números seguintes serão obtidos por meio da soma dos seus dois antecessores, portanto, os números são: 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377... Dessa sequência, ao se dividir qualquer número pelo anterior, extrai-se a razão que é uma constante transcendental conhecido como número de ouro.

O número de ouro estrá presente em grande parte da natureza, arte, tecnologia ... Vejamos alguns exemplos.

1. Arte
   Pintores da Renascença usaram em grande parte de suas obras, dos quais destacam-se Leonardo Da Vinci:

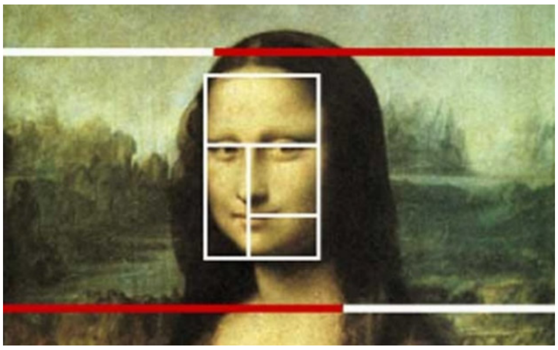

Figura 5.1: As proporções áureas no rosto de Monaliza.

2. Natureza
   Pitágoras tinha certeza que a natureza também era lógica, assim como a matemática, e conseguiu achar uma sequência lógica que abrange infinidades de elementos na natureza:

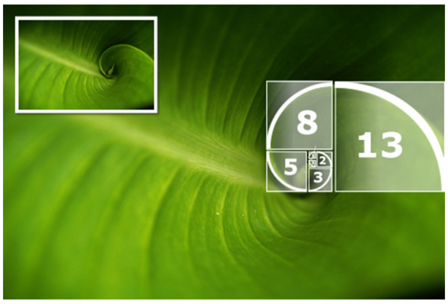

Figura 5.2: As proporções áureas na folha de uma árvore.

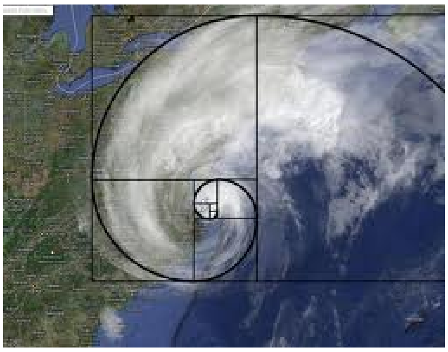

Figura 5.3: As proporções áureas na formação de um furação.

3. Corpo humano

Figura 5.4: As proporções áureas na mão humana.

Podemos notar que a razão áurea está inclusa em muitos objetos do cotidiano. Vale ressaltar que seu valor pode ser retirado na sequência de Fibonacci, citado logo no começo do capítulo. Agora que você sabe o que é uma sequência, seus tipos e propriedades, vale a pena se aventurar mundo a fora em busca de novos conhecimentos e aplicando os que acabou de adquirir !

6. Bibliografia

1. Matemática - Volume Único. Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo. 2ª edição. Pág:143-165. 2004.
2. Acessado em junho/2014.http://www.hypeness.com.br/2014/02/a-proporcao-aurea-esta-em-tudo-na-natureza-na-vida-e-em-voce/.