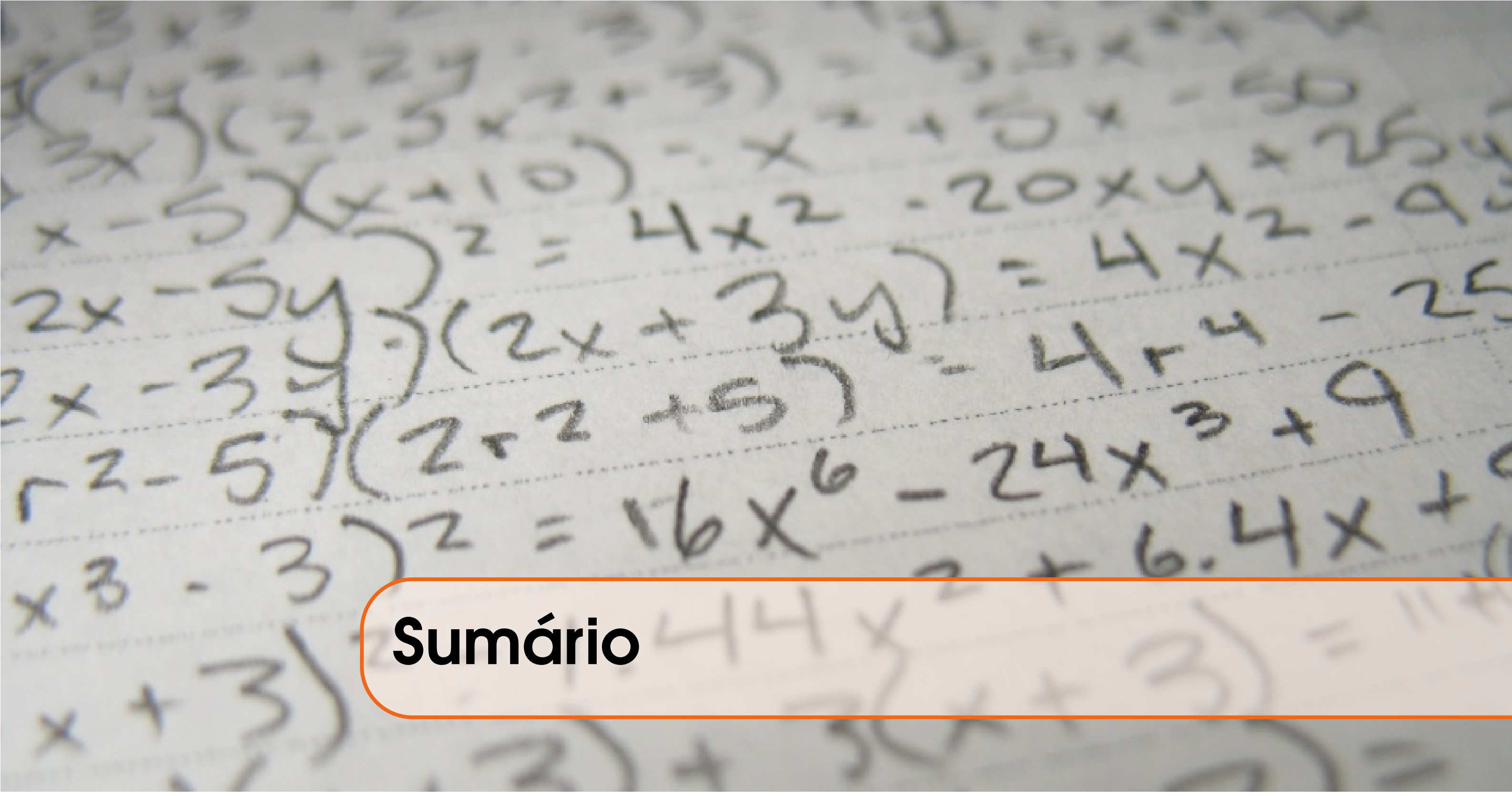
Polinômios

Gabriel Mendes
Thaís de Almeida
Lucas Oliveira



Sumário

0.1 O livro 5

1 POLINÔMIOS 7

1.1 introdução 7

2 Conceitos Iniciais 11

2.1 Função Polinomial 11

2.2 Valores Numéricos de um Polinômio 12

2.3 Raiz de Polinômio 13

2.4 Grau de Polinômio 14

2.5 Identidade de Polinômios 15

3 Operações com polinômios 21

3.1 Adição, Subtração e Multiplicação de Polinômios 21

3.2 Divisão de Polinômios 24

3.3 Dispositivo de Briot-Ruffini 28

3.4 Teorema do Resto 30

3.5 Teorema do Fator 32

3.6 Vestibular 34

3.7 Pense você 36

Bibliografia 39
Livros e Sites 39

0.1 O livro

Ao elaborar o livro-texto para o Ensino Médio, procuramos levar em consideração como sabemos Matemática, não o que sabemos. O objetivo é fazer com que o aluno compreenda as ideias básicas da Matemática desse nível de ensino e, quando necessário, saiba aplicá-las na resolução de problemas do mundo real.

Para garantir a dinâmica de sala de aula, as exposições teóricas foram dimensionadas, seguidas de:

1. exemplos de exercícios, que desenvolvem sobretudo conceitos e favorecem o raciocínio;

2. inúmeros exercícios, que permitem ao aluno construir a teoria a partir das próprias resoluções;

3. desafios, que possibilitam a complementação e o aprofundamento de diversos conceitos.

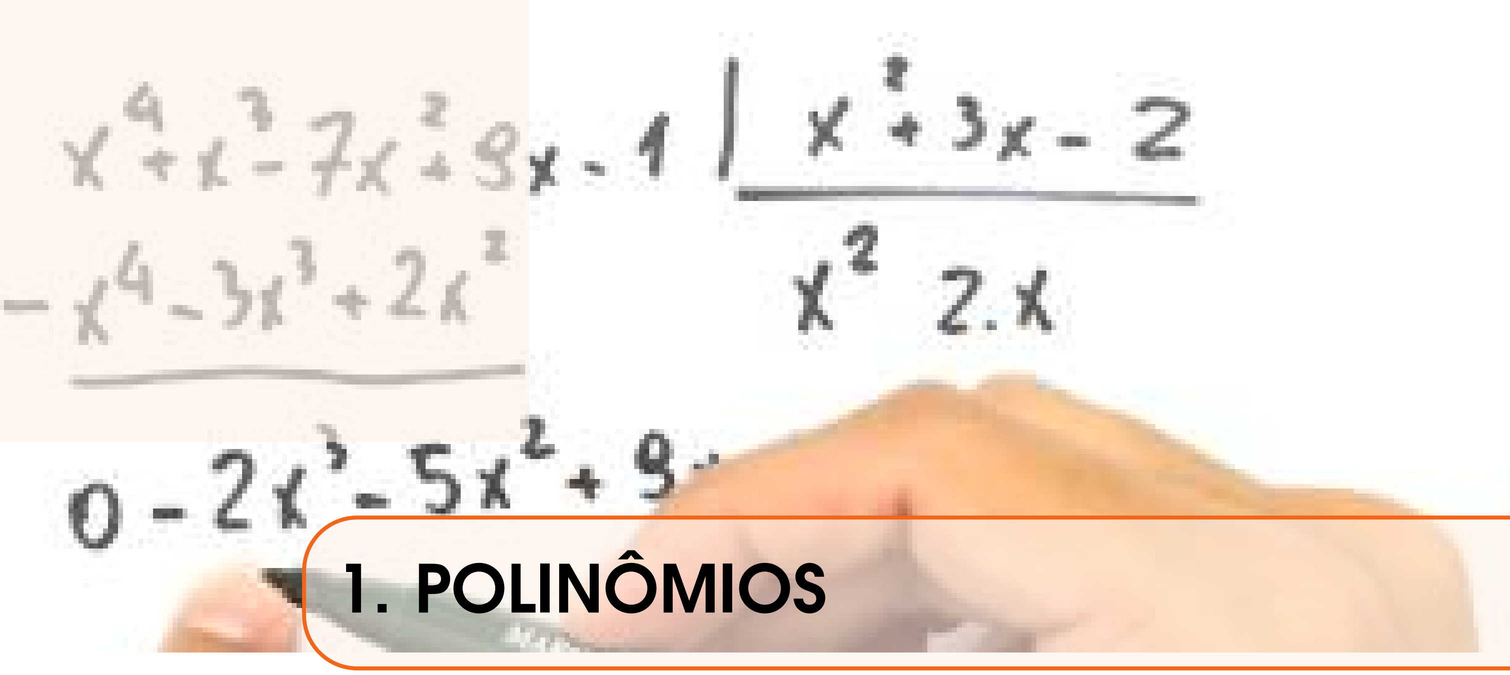
Repare que nos exercícios propostos, dividimos em três níveis de dificuldade: os assinalados com ♣ são considerados exercícios difíceis, que exigem um raciocínio mais elaborado, sem muita mecanização de conteúdo. Os exercícios demarcados com ♡ são considerados medianos e trabalham a mecanização do conteúdo sempre relacionando com os teoremas e preposições apresentados. Já o símbolo ♠ apresenta exercícios com um nível de dificuldade mais fácil, cujo objetivo é mecanização e aplicação do conteúdo apresentado.

As seções apresentam também desafios, que são exercícios que apresentam táticas de resolução e que exigem uma facilidade de compreensão mais ampliada do conteúdo.

Complementando o livro foram incluídas, no final de cada capítulo, questões de vestibulares para que os alunos possam treinar e se adaptar as avaliações das universidades.

Esperamos dessa forma contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e para o processo de aprendizagem dos alunos. As sugestões e críticas que visem aprimorar este livro serão sempre bem-vindas.

Os autores

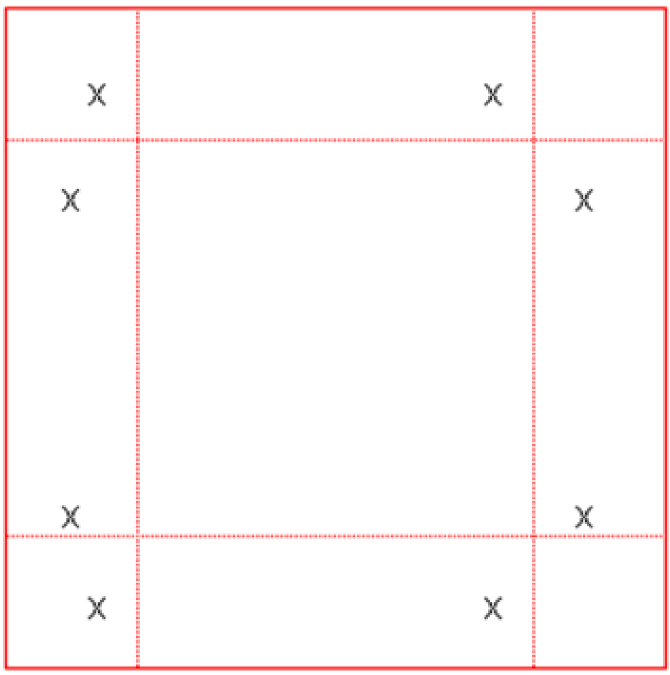


1. POLINÔMIOS

1.1 introdução

O problema da caixa

Considere uma folha quadrada de plástico maleável de lado igual a 5 cm. A partir dessa folha, queremos montar uma caixa sem tampa. Uma maneira de se fazer isso, é cortar pequenos quadrados nos cantos da folha e dobrar na linha pontilhada, como mostra a figura abaixo:

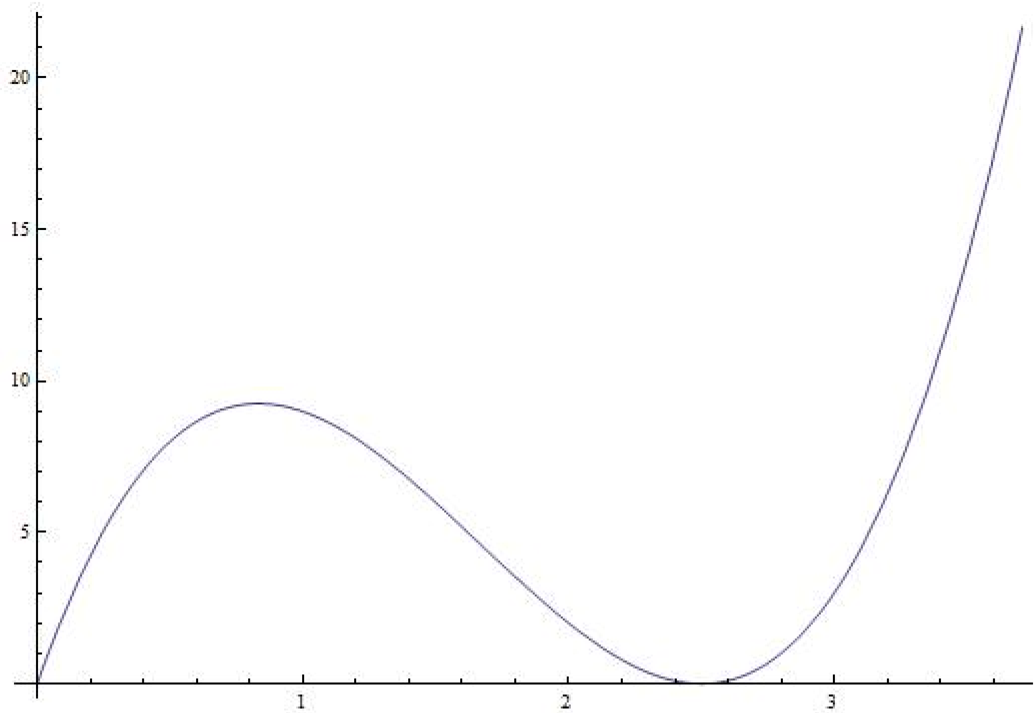


O problema consiste em determinar o volume de água que essa caixa pode conter, quando completamente cheia.

Observe que à medida que x varia, o volume também varia, isto é, o volume da caixa depende da variável x que, neste problema, representa o tamanho do corte que determinará a altura da caixa a ser montada.

Dizemos, então, que o volume da caixa é uma função de x. Neste caso, a expressão matemática que fornece o volume da caixa, para cada valor particular de x, é dada por: $V = x.(5-2x)^2$. Repare ainda que, neste exemplo, x só pode assumir valores entre zero e $\frac{5}{2}$. (Por quê?).Note que se $x > \frac{5}{2}$, $5-2x < 0$, ou seja, temos um lado com valor negativo, o que é um absurdo.

Abaixo definimos a função V e traçamos o seu gráfico:

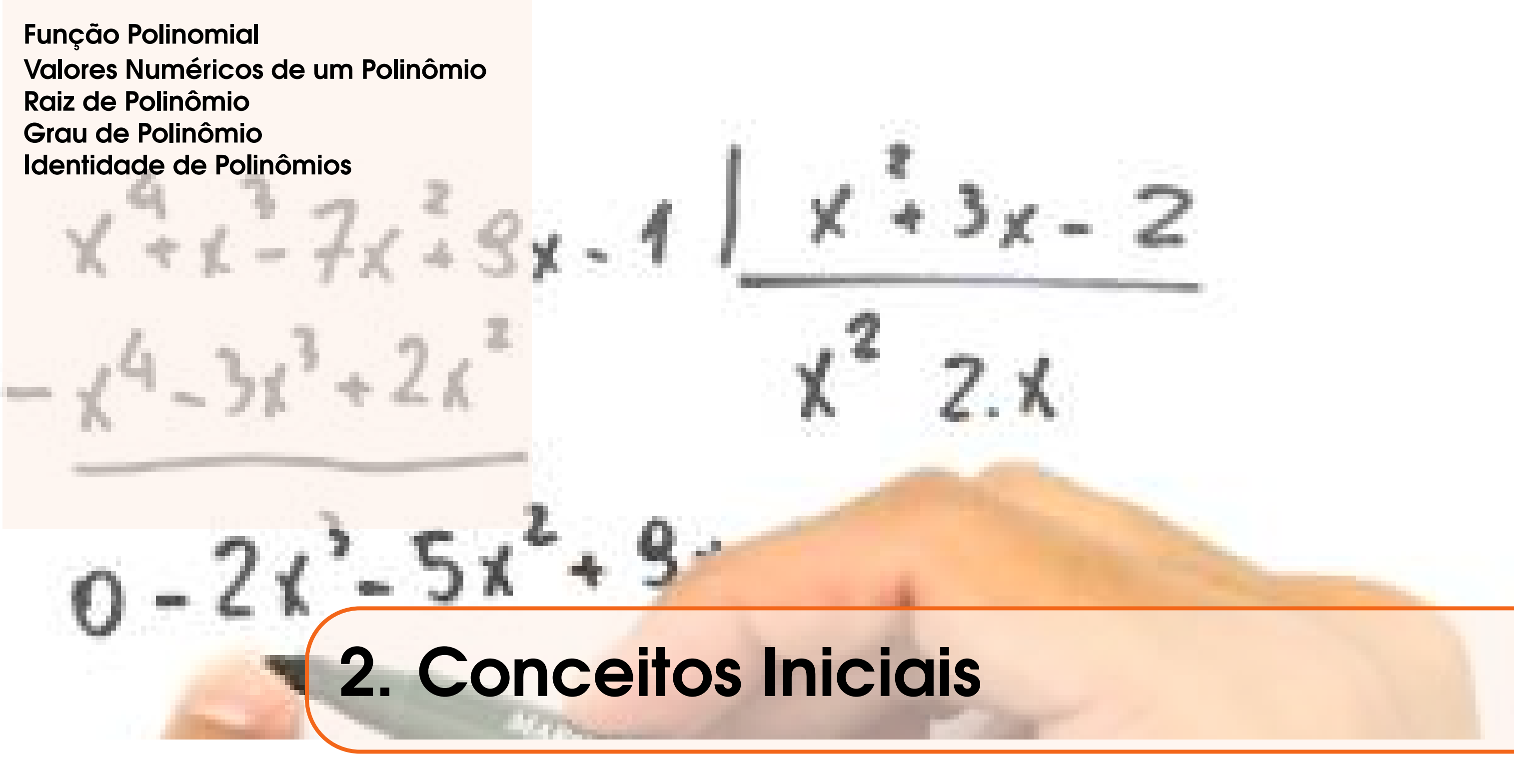


A função acima é um exemplo do que, em matemática, chamamos de um polinômio. Polinômios aparecem na resolução de muitos problemas, por isso é importante estudá-los com um pouco mais de cuidado. Por exemplo, é interessante, no problema acima, descobrir o valor de x, isto é, quanto se deve cortar nos cantos da folha de plástico, para se obter a caixa de volume máximo.

Problemas de encontrar máximos e mínimos de funções foram objeto de estudo dos matemáticos por vários séculos. O astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) foi dos primeiros matemáticos a estudar o problema de localizar os valores extremos de uma função. Ele estava preocupado com um problema de ordem prática de determinar a forma de uma barrica de vinho que contivesse um volume máximo. Para resolver este problema, Kepler montou uma enorme tabela correlacionando os valores da incógnita dependente com aqueles da incógnita independente e estimou o valor extremo observando entre que valores a função mudava de crescente para decrescente. Como Kepler não dispunha de computadores e nem mesmo o conceito de gráfico de uma função estava bem estabelecido na sua época, ele calculou todos os valores a mão. Somente em 1629, Pierre Fermat desenvolveu um método para localizar os extremos de uma função com precisão, usando as idéias de reta tangente a uma curva. O trabalho de Fermat foi criticado por Descartes e outros matemáticos da época que questionavam os fundamentos matemáticos de seu método. Sempre relutante em publicar seus trabalhos, Fermat esperou até 1637 para descrever seu método em um manuscrito que foi publicado por seu filho em 1679, 14 anos depois de sua morte. A teoria que, finalmente, justificaria o Método de Fermat foi desenvolvida cerca de 150 anos mais tarde, por Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

Um estudo mais cuidadoso de polinômios é feito na seção abaixo.

Função Polinomial
Valores Numéricos de um Polinômio
Raiz de Polinômio
Grau de Polinômio
Identidade de Polinômios



2. Conceitos Iniciais

2.1 Função Polinomial

Definição — Função Polinomial. Uma função polinomial $p(x)$ é uma função $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de somas finitas das potências inteiras e não negativas da variável x, ou seja:

$$p(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + a_{(n-2)} x^{(n-2)} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Com n um número inteiro não negativo, $(a_n, a_{(n-1)}, \ldots, a_2, a_1, a_0) \in C$ e $x \in C$.

Os números $a_n, a_{(n-1)}, a_{(n-2)}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são ditos coeficientes da função polinomial $p(x)$.

■ **Exemplo** Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(x) = -x^2 + 3x - 1$ é uma função polinomial com coeficientes $a_2 = -1$, $a_1 = 3$ e $a_0 = -1$.

■ **Exemplo** Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(x) = 2x^6 - 7ix^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1 + i$ é uma função polinomial com coeficientes $a_6 = 2$, $a_5 = 0$, $a_4 = -7i$, $a_3 = -4$, $a_2 = 1$, $a_1 = -2$ e $a_0 = 1 + i$.

■ **Exemplo** A função $p(x) = x^3 + 4x^2 + 2x^{-1} + 4$ com $p : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ não é uma função polinomial.

Observação Observe que os coeficientes do exemplo 1 são todos reais, assim dizemos que a função p, do exemplo 1, é uma função com coeficientes reais

Observação Observe que os coeficientes do exemplo 2 são todos complexos, assim dizemos que a função p, do exemplo 2, é uma função com coeficientes complexos

2.2 Valores Numéricos de um Polinômio

Definição — Valores Numéricos de uma Função Polinomial. Como a função $p(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + a_{(n-2)} x^{(n-2)} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ assume valores em quaisquer pontos do seu domínio, $\mathbb{C}$ no caso, podemos considerar que:

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{(n-1)} \alpha^{(n-1)} + a_{(n-2)} \alpha^{(n-2)} + \ldots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0$$

Para todo $\alpha \in C$.

■ **Exemplo** Para o polinômio $p(x) = -x^2 + 3x - 1$, observe que:

$$p(1) = -1^2 + 3.1 - 1 \rightarrow p(1) = 1$$
$$p(3) = -3^2 + 3.3 - 1 \rightarrow p(3) = -1$$
$$p(i) = -i^2 + 3.i - 1 \rightarrow p(i) = 3i$$

Observação Observe que o polinômio $p(x) = -x^2 + 3x - 1$ possui somente coeficientes reais, contudo ele pode assumir valores complexos.

■ **Exemplo** Para o polinômio $p(x) = ix + 1$, observe que:

$$p(1) = i.1 + 1 \rightarrow p(1) = 1 + i$$

$$p(-2) = i.(-2) + 1 \to p(-2) = 1 - 2i$$
$$p(i) = i.i + 1 \to p(i) = 0$$

2.3 Raiz de Polinômio

Definição — Raiz de Polinômio. Dado $\alpha \in C$ tal que $p(\alpha) = 0$, para um polinômio qualquer $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dizemos que α é a raiz do polinômio $p(x)$.

▪ **Exemplo** Seja o polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Note que $p(-2) = (-2)^3 + 2.(-2)^2 - (-2) - 2 = 0$. Assim $x = -2$ é raiz do polinômio $p(x)$.

▪ **Exemplo** Seja o polinômio $p(x) = x^3 - 4x$. Note que $p(0) = (0)^3 - 4.(0) = 0$. Assim $x = 0$ é raiz do polinômio $p(x)$.

Porém, $p(1) = 1^3 - 4.1 = -3$ e $p(-1) = (-1)^2 - 4.(-1) = 5$, ou seja, $x = 1$ e $x = -1$ não são raízes do polinômio $p(x)$.

Observação — DICA!. Desenhe a função $p(x) = x^3 - 4x$ num gráfico $-3 < x < 3$.

Note que, $p(-1) > 0$ e por isso está acima do eixo x enquanto $p(1) < 0$ está abaixo. Isso quer dizer que existe pelo menos um $-1 < x < 1$ tal que $p(x) = 0$ e veja que, nesse caso, esse x é igual a zero.

Agora, propomos para você tentar encontrar mais uma raiz de $p(x)$ sabendo que $p(1) < 0$ e $p(3) > 0$. (Perceba que, no grafico desenhado, $p(x)$ corta o eixo x em três pontos e que um deles está entre -1 e 1, outro entre 1 e 3 e o ultimo entre -3 e -1).

Em outras palavras no intervalo em que $p(x)$ muda de sinal(do positivo para o negativo ou vice-versa) ele corta o eixo x, isso quer dizer que, nesse intervalo, existe uma raiz a de $p(x)(p(a) = 0)$.

CUIDADO!!!!!

Essa dica não funciona para todo tipo de função, mas no caso dos polinômios ela é válida quando p(x) tem raízes reais.

Exemplo Observe que $x = i$ é raiz do polinômio $p(x) = x^2 + 1$, pois $p(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$.

Exercício ♠ Seja o polinômio $p(x) = -x^4 + mx^3 + ix^2 - 2x + 3$. Determine o valor de m para que 2 seja raiz de $p(x)$.

Exercício ♡ Um engenheiro ficou encarregado de construir um reservatório de água no formato de um cilíndrico circular reto com as seguintes características:

- O raio da base cilíndrica terá r metros de comprimento.
- Por problemas com a resistência dos materiais utilizados na construção, a altura h, em metros, do cilindro deverá obedecer a relação de $h = 2r + 2$.

Assim determine o polinômio $v(r)$ que caracteriza o volume deste cilindro e o volume, em litros, para um cilindro de 4 metros de altura.

Exercício ♡ Dado uma função polinomial $p(x) = p_1(x).p_2(x)$, com $p_1(x)$ e $p_2(x)$ também funções polinomiais, mostre que se α é raiz de $p(x)$, então α é raiz de $p_1(x)$ ou $p_2(x)$.

Exercício ♣ Um terreno em formato retangular possui perímetro igual a 10cm e um de seus lados mede x cm. Determine o polinômio $a(x)$ que modela a área deste retângulo e o valor da área para um de seus lados valendo 3cm.

2.4 Grau de Polinômio

Definição — Grau de Polinômio. Dado um polinômio $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definimos como o grau do polinômio $p(x)$ o valor do maior expoente da variável x acompanhada de coeficientes não nulos.

■ **Exemplo** O polinômio $p(x) = x^7 - 9x^5 + ix^4 - x^3 + 7$ é um polinômio de grau 7 e denotaremos $gr(p) = 7$.

■ **Exemplo** O polinômio $p(x) = -3$ é um polinômio de grau 0, pois temos $p(x) = -3 = -3x^0$ e denotaremos $gr(p) = 0$.

Definição — Polinômio Nulo. Um polinômio é dito nulo se possui todos os coeficientes iguais a zero, ou seja:

$$p(x) = 0x^n + 0x^{(n-1)} + 0x^{(n-2)} + \ldots + 0x^2 + 0x + 0$$

E denotaremos tal polinômio como $p(x) \equiv 0$.

Proposição — Grau do Polinômio Nulo. A partir das definições acima, podemos nos perguntar, qual o grau do polinômio nulo?

Discussão:

Temos que o polinômio nulo $p(x) \equiv 0$, pode ser escrito da seguinte forma:

$$p(x) = 0x^n + 0x^{(n-1)} + 0x^{(n-2)} + \ldots + 0x^2 + 0x + 0$$

Assim, podemos supor algumas hipóteses sobre o grau de $p(x) \equiv 0$:

•$p(x) \equiv 0$ tem grau zero?

•$p(x) \equiv 0$ tem como grau um número inteiro positivo n?

A partir da nossa definição, temos que o grau de um polinômio é determinado pelo maior expoente da variável x com coeficiente não nulo, assim o grau de $p(x) \equiv 0$ não pode ser zero, pois x^0 tem como coeficiente o valor 0.

Observe que é um absurdo o grau do polinômio nulo ser um número inteiro n, pois, pelo mesmo argumento acima, todos os coeficientes das potências de x são zero.

Assim temos que o polinômio nulo $p(x) \equiv 0$ não possui grau, ou seja, o grau do polinômio nulo é indefinido.

2.5 Identidade de Polinômios

Definição — Polinômios Idênticos. Dois polinômios $p_1, p_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são idênticos se $p_1(x) = p_2(x)$ para todo $x \in C$, assim denotaremos $p_1(x) \equiv p_2(x)$.

Demonstração:
Suponha a existência de dois polinômios $p_1, p_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tais que:

$$p_1(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
$$p_2(x) = b_n x^n + b_{(n-1)} x^{(n-1)} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

Assim, quais condições deveram ter os dois polinômios para que eles sejam idênticos, ou seja, em quais circunstâncias teremos $p_1(x) = p_2(x)$, para todo $x \in C$?

Desta igualdade tiramos que se:

$$p_1(x) \equiv p_2(x)$$

Temos:

$$a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \\ b_n x^n + b_{(n-1)} x^{(n-1)} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

Isolando todos os termos em um lado da igualdade temos:

$$a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 - b_n x^n - b_{(n-1)} x^{(n-1)} - \ldots - \\ b_2 x^2 - b_1 x - b_0 = 0$$

Reorganizando os termos:

$$a_n x^n - b_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} - b_{(n-1)} x^{(n-1)} + \ldots + a_2 x^2 - b_2 x^2 + a_1 x - \\ b_1 x + a_0 - b_0 = 0$$
$$(a_n - b_n) x^n + (a_{(n-1)} - b_{(n-1)}) x^{(n-1)} + \ldots + (a_2 - b_2) x^2 + (a_1 - b_1) x + \\ (a_0 - b_0) = 0$$

Assim, note que o polinômio obtido após as manipulações algébricas representa um polinômio nulo, logo para que $p_1(x)$ seja idêntico a $p_2(x)$ devemos ter:

$$\begin{aligned} a_n - b_n = 0 \rightarrow a_n = b_n \\ a_{(n-1)} - b_{(n-1)} = 0 \rightarrow a_{(n-1)} = b_{(n-1)} \\ \vdots \\ a_2 - b_2 = 0 \rightarrow a_2 = b_2 \\ a_1 - b_1 = 0 \rightarrow a_1 = b_1 \\ a_0 - b_0 = 0 \rightarrow a_0 = b_0 \end{aligned}$$

Ou seja, assim concluímos que, para que os dois polinômios $p_1(x)$ e $p_2(x)$ sejam idênticos, devemos ter a igualdade de cada coeficiente correspondente a uma determinado potência de x, para todo $x \in C$.

■ **Exemplo** Sejam os polinômios:

$$p(x) = ax^4 + 3x^3 - 2ix^2 + 4(b-2)x + 5$$
$$q(x) = -3x^4 + (c-1)x^3 + dx^2 - x + 5$$

Determine os valores de a, b, c, d para que $p(x) = q(x)$.

Solução: Se os polinômios são idênticos, temos que:

$$\begin{aligned} a = -3 \\ 3 = c - 1 \rightarrow 4 = c \\ -2i = d \\ b - 2 = -1 \rightarrow b = 1 \end{aligned}$$

Portanto temos $a = -3, b = 1, c = 4$ e $d = -2i$.

R

Não esqueça!

Polinômios idênticos têm os mesmos coeficientes correspondentes!

Descobrindo algo mais sobre polinômios

Você se lembra do número e? Aquele número irracional que estudamos em *função exponencial* e *função logarítmica*?

Em matemática temos que a *função exponencial* pode ser aproximada por um polinômio chamado de polinômio de Taylor, cuja representação é:

$$e^x = p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

Assim observe que temos um polinômio de grau 5 que aproxima uma função a um determinado valor. Por exemplo:

$$e^1 = p(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2,7166666\ldots$$

Logo concluímos que $e \approx 2,7$ utilizando o polinômio de Taylor.

Existem também os polinômios de Taylor de diversas funções matemáticas. Veja, como exemplo, o polinômio de Taylor de grau 8, que aproxima os valores da função cosseno:

$$\cos(x) = p(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

■ **Exemplo — Fazer em aula.** Agora, com o auxílio de uma calculadora comum e dos polinômios de Taylor citados acima, responda as questões que seguem:

a) Calcule o valor aproximado de e^3.

b) Calcule o valor aproximado para $\cos(1)$

c) Para $\cos(0)$ e e^0 encontramos um resultado aproximado ou seu valor exato?

d) Se você tivesse que escrever os polinômios de Taylor de grau 10 para ambas as funções apresentadas, qual seria o seu palpite?

Exercício ♠ Determine os valores de a, b, c, d para que os dois polinômios sejam idênticos:

$$p(x) = (a+b)x^3 + x^2 + d$$
$$q(x) = 5x^3 + (b-a)x^2 + (c+d)x - 4$$

Exercício ♡ Demonstre que se dois polinômios são idênticos, então eles possuem o mesmo grau, isto é, seja um polinômio $p(x)$ diferente do polinômio nulo e de grau n, mostre que, se existe um polinômio $q(x)$, tal que $p(x) = q(x)$ então $q(x)$ é necessariamente de grau n.

Exercício ♡ Para cada uma das afirmações abaixo, classifique-as em verdadeira ou falsa, sempre justificando suas afirmações:

- Se dois polinômios tem grau n, então eles são idênticos.
- Dados dois polinômios, um com grau n e outro com grau m, então eles não são idênticos.

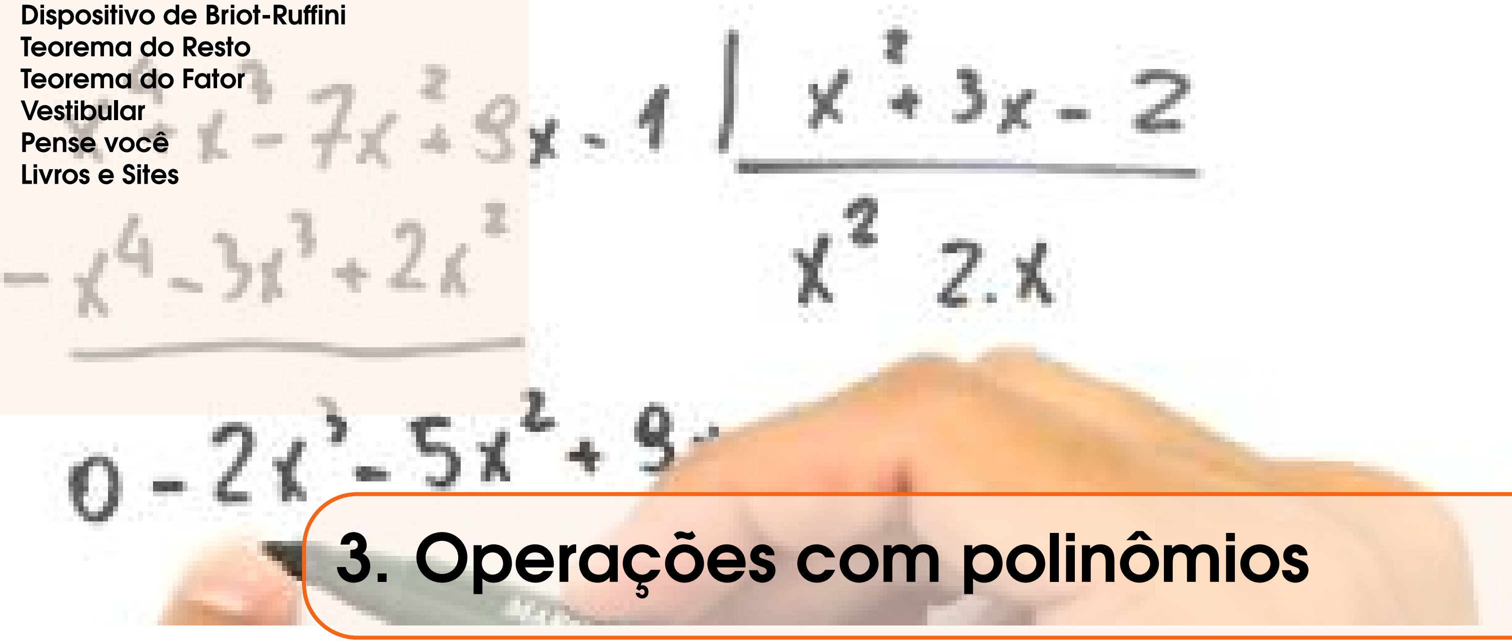
Exercício ♣ Calcule o valor de $m \in C$ para que o polinômio $p(x) = (m^2+1)x^3 + (m-i)x^2 + x - 5$ para que ele seja:

a)De 3º grau

b)De 2º grau

c)De 1º grau

Adição, Subtração e Multiplicação de Polinômios
Divisão de Polinômios
Dispositivo de Briot-Ruffini
Teorema do Resto
Teorema do Fator
Vestibular
Pense você
Livros e Sites



3. Operações com polinômios

3.1 Adição, Subtração e Multiplicação de Polinômios

Inicialmente, vamos retomar operações conhecidas no estudo de expressões algébricas, como adição, subtração e multiplicação de polinômios. Em seguida, estudaremos mais detalhadamente a divisão de polinômios. Vejamos:

As operações de adição, subtração e multiplicação de polinômios seguem os procedimentos de álgebra estudados em anos anteriores.

■ **Exemplo** (Iezzi, p.629)Sendo $p(x) = 4x^3 - x^2 + 5x - 6$ e $q(x) = -4x^2 + 3x + 2$, vamos determinar o polinômio correspondente a:

a)$p(x) + q(x)$

Para isso, basta reduzir termos semelhantes, isto é, operar separadamente com potências de mesmo grau:

$$p(x)+q(x) = (4x^3 - x^2 + 5x - 6) + (-4x^2 + 3x + 2) = 4x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

b)$p(x) - q(x)$

Realizando o mesmo procedimento da adição, temos:

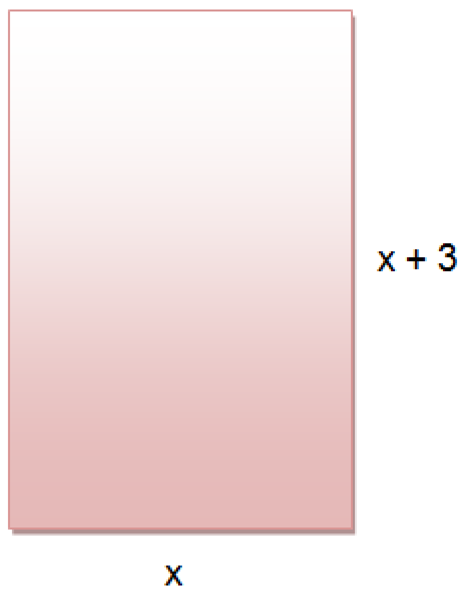
$$p(x)-q(x) = (4x^3 - x^2 + 5x - 6) - (-4x^2 + 3x + 2) = 4x^3 + 3x^2 + 2x - 8$$

c)$p(x).q(x)$

Basta aplicar a propriedade distributiva, lembrando as propriedades de potenciação:

$$p(x).q(x) = (4x^3 - x^2 + 5x - 6).(-4x^2 + 3x + 2) = -16x^5 + 12x^4 + 8x^3 + 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 20x^3 + 15x^2 + 10x + 24x^2 - 18x - 12 = 16x^5 + 16x^4 - 15x^3 + 37x^2 - 8x - 12$$

■ **Exemplo** Na resolução de problemas, é muito comum ocorrerem situações em que a leitura e a compreensão do enunciado nos levam a formular expressões que permitam depois a resolução de problema, por meio de uma equação oriunda das expressões obtidas. Imagine, agora, que, em determinados problemas, os enunciados nos levem à seguinte figura e suas dimensões:



A figura é uma região retangular de dimensões x e $x+3$, cujo perímetro é indicado pela expressão:

$$2x + 2(x+3) \text{ ou } 4x + 6$$

e cuja área é indicada por:

$$x(x+3) \text{ ou } x^2 + 3x$$

Observação a) Em geral, o grau do polinomio $f(x)+g(x)$ é, no máximo, igual ao maior grau entre os graus de $f(x)$ e de $g(x)$ e, no mínimo, grau zero. Ou seja:

$$0 \leq gr(f+g) \leq \max\{gr(f), gr(g)\}$$

b) O grau de $f(x)*g(x)$ é dado pela soma do grau de $f(x)$ com o grau de $g(x)$. Ou seja:

$$gr(f.g) = gr(f) + gr(g)$$

Exercício ♠ Sendo os polinômios $f(x) = 2x-1$, $g(x) = 4x^2+6x+3$ e $h(x) = 5x^2-3x$, determine:

a)$f(x)+g(x)$
b)$f(x)-g(x)$
c)$f(x)*g(x)+h(x)$

Exercício ♠ Sejam $f(x) = x^2+bx-2$ e $g(x) = (a-3)x^2-6x+c$. Determine condições sobre os valores de a, b e c a fim de que:

a)$f(x)+g(x)$ seja um polinômio nulo.
b)$g(x)-f(x) = -3x^2-9x+5$.
c)$f(x).g(x)$ tenha grau 3.

Exercício ♡ (UEPI) Sabendo que os polinômios $p_1(x) = x^3-5$ e $p_2(x) = (x^2+px+qx).(x-2)+3$ são idênticos. Determine o valor de$p+q$.

Exercício ♡ (UFPE) Determine p e q reais tais que $x.(x+1).(x+2).(x+3)+1 \equiv (x^2+px+q)^2$. Indique p^2+q^2.

Exercício ♣ (FEI-SP) Os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são tais que o grau da soma $P(x)+Q(x)$ é 3 e o grau da diferença $P(x)-Q(x)$ é 4. Qual é o grau do produto $P(x).Q(x)$?

Exercício — Desafio. (Bezerra, p.445)Considere o polinômio $P(x)$ que se obtém efetuando-se as seguintes operações:

$$P(x) = (x^3 + 2x^2 - 2)^{70} + (x^5 - 3x^4 + 2x)^{50}$$

Calcule:
a)a soma dos coeficientes de $P(x)$.
b)o termo independente de $P(x)$.

3.2 Divisão de Polinômios

Definição Dados dois polinômios $p(x)$ e $d(x)$, com $d(x)$ não-nulo, dividir $p(x)$ por $d(x)$ significa encontrar dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que:
•$p(x) = d(x) * q(x) + r(x)$
•$gr(r) < gr(d)$ ou $r(x) \equiv 0$

Veja que:

$$\begin{array}{c|c} p(x) & d(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

Nestas condições, $p(x)$ é o *dividendo*, $d(x)$ é o *divisor*, $q(x)$ é o *quociente* e $r(x)$ é o *resto* da divisão.

Observação Se em uma divisão de $p(x)$ por $d(x)$ obtivermos $r(x) = 0$, dizemos que $p(x)$ é *divisível* por $d(x)$ ou que $d(x)$ *divide* $p(x)$.

■ **Exemplo** (Bezerra, p.445) Vamos efetuar a divisão de $A(x) = x^4 + 3x^3 - x + 5$ por $B(x) = x^2 - 2x$ através de um processo conhecido como *método da chave*:

	$x^4+3x^3+0x^2-x+5$	x^2-2x
$-x^2\cdot B(x)$	$-x^4+2x^3$	$x^2+5x+10$
	$5x^3+0x^2-x+5$	
$-5x\cdot B(x)$	$-5x^3+10x^2$	
	$10x^2-x+5$	
$-10\cdot B(x)$	$-10x^2+20x$	
	$19x+5$	

Assim, temos que $Q(x)=x^2+5x-10$ e $R(x)=19x+5$.

A divisão de polinômios pode ser também efetuada por outro processo, chamado *método de Descartes*.

Para aplicar esse segundo método é preciso determinar o grau do quociente e o maior valor possível para o grau do resto. Para tanto, observe que, se

$$p(x)=d(x).q(x)+r(x)$$

então

$$gr(p)=gr(d.q+r)$$

e já que $gr(r)<gr(d)$, temos:

$$gr(p)=gr(d.q)$$
$$gr(p)=gr(d)+gr(q)$$

Logo,

$$gr(q)=gr(p)-gr(d),\text{ onde } gr(p)\geq gr(d)$$

Tomemos um exemplo: se o dividendo $p(x)$ é de grau 8 e o divisor é de grau 4, o quociente será um polinômio de grau 4, pois $8-4=4$.

Voltando com o exemplo anterior com $A(x)=x^4+3x^3-x+5$ divido por $B(x)=x^2-2x$, temos:

$$gr(Q)=gr(A)-gr(B)=4-2=2\rightarrow gr(Q)=2$$

Dessa maneira, o quociente possui grau 2 e podemos escrever da seguinte maneira:

$$Q(x) = ax^2 + bx + c$$

Por outro lado, veja que $gr(R) < gr(Q)$. Assim, o resto é um polinômio de, no máximo, grau 1. Então $R(x) = \alpha.x + \beta$.

Dessa maneira, temos a seguinte identidade:

$$A(x) \equiv B(x).Q(x) + R(x) \leftrightarrow x^4 + 3x^3 - x + 5 \equiv$$
$$(x^2 - 2x).(ax^2 + bx + c) + (\alpha.x + \beta)$$

Efetuando as operações no segundo membro:

$$x^4 + x^3 - x + 5 \equiv ax^4 + (b - 2a)x^3 + (c - 2b)x^2 + (\alpha - 2c)x + \beta$$

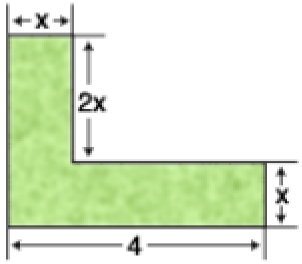
Logo, pela identidade de polinômios:

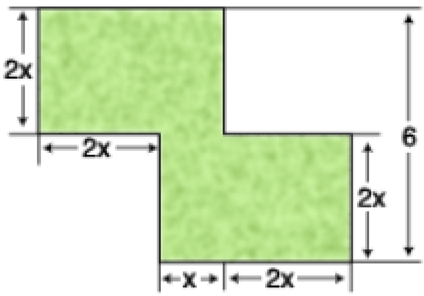
$$a = 1$$
$$b - 2a = 3 \rightarrow b = 5$$
$$c - 2b = 0 \rightarrow c = 10$$
$$\alpha - 2c = -1 \rightarrow \alpha = 19$$
$$\beta = 5$$

Assim, concluímos que:

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow Q(x) = x^2 + 5x + 10$$
$$R(x) = \alpha.x + \beta \rightarrow R(x) = 19x + 5$$

■ **Exemplo — Fazer em aula.** Calcule a área de cada figura em função de x. Apresente os resultados na forma fatorada e na forma da definição de polinômio.





Exercício ♠ (DANTE,p.447)Efetue a divisão de $p(x)$ por $d(x)$ quando:

a)$p(x) = x^2 + 4x + 3$ e $d(x) = x + 1$

b)$x^3 + x^2 - x + 1$ e $d(x) = x + 4$

c)$p(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 10x - 24$ e $d(x) = x^2 - 6x + 5$

Exercício ♠ (DANTE, p.447)Calcule os valores de m e n para que seja exata a divisão do polinômio $p(x) = 2x^3 + mx^2 + nx - 1$ por $d(x) = 2x^2 - x - 1$.

Exercício ♠ (DANTE, p.447)Dividindo-se $p(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ por certo polinômio $d(x)$, obtemos o quociente $q(x) = x - 1$ e o resto $r(x) = 2x - 1$. Determine o polinômio $d(x)$.

Exercício ♡ (DANTE, p.447)Sabendo que o polinômio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ é divisível por $g(x) = x - 2$, resolva a equação $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$.

3.3 Dispositivo de Briot-Ruffini

Nas divisões polinomiais com divisor da forma $x - a$, há um dispositivo que permite efetuar essas divisões de uma maneira mais simples e rápida: é o chamado *dispositivo prático* ou *algoritmo de Briot-Ruffini*.

termo constante do divisor, com sinal trocado	coeficientes de x do dividendo de p(x)	termo constante do dividendo p(x)
	coeficientes do quociente	resto

Vamos apresentar esse processo através de um exemplo.

■ **Exemplo** (DANTE, p. 447) Tomemos um exemplo para entendermos o método desse dispositivo prático efetuando a divisão de $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 3x - 2$ por $d(x) = x - 2$.

1º)

2	3	-5	-3	-2

2º)

2	3	-5	-3	-2
	3			

Repetimos (ou “abaixamos”) o primeiro coeficiente do dividendo.

3º)

2	3	-5	-3	-2
	3	3*2 +(-5) = 1		

Multiplicamos o termo repetido pelo divisor e somamos o produto com o próximo termo do dividendo.

4º)

2	3	-5	-3	-2
	3	3*2 +(-5) = 1	1*2+(-3) = -1	

Repetimos o processo para obter o novo termo do quociente

5º)

2	3	-5	-3	-2
	3	3*2 +(-5) = 1	1*2+(-3) =-1	(-1)*2+(-2) =-4

Pelo quadro, temos $q(x) = 3x^2 + x - 1$ e $r(x) = -4$.
Logo, $3x^3 - 5x^2 - 3x - 2 = (x-2)(3x^2 + x - 1) - 4$.

Observação Na divisão por $x - a$, o resto é sempre uma constante, pois $x - a$ é um polinômio de grau 1.

■ **Exemplo** (Dante, p.448)Vamos dividir o polinômio $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1$ por $x - 3$.

-3	2	7	0	-4	5
	2	-6+7 = 1	-3+0 = -3	9+(-4) = 5	-15+5 = -10

quociente: $q(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5$
resto:$r(x) = -10$
Logo, $2x^4 + 7x^3 - 4x + 5 = (x+3)(2x^3 + x^2 - 3x + 5) - 10$

■ **Exemplo** (Dante, p.448) Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 2x^2 - 5x + 2$ por $d(x) = 2x - 1$.

Observe que, neste caso, o coeficiente de x no binômio não é igual a 1. Para obter o quociente e o resto pedidos, podemos dividir todos os coeficientes de $p(x)$ e $d(x)$ por 2. Assim, obtemos o quociente procurado $q(x)$, enquanto o resto também ficará dividido por 2.$\frac{r(x)}{2}$. Então, temos:

$$\frac{p(x)}{2} = x^2 - (\tfrac{5}{2})x + 1 \text{ e } \frac{d(x)}{2} = x - \frac{1}{2}$$

Aplicando o dispositivo prático, vem:

$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	1
	1	$\frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) = -2$	-1+1=0

quociente:$q(x) = x - 2$
resto:$\frac{r(x)}{2} = 0 \to r(x) = 0$
Logo,

$$\frac{p(x)}{2} = q(x).\frac{d(x)}{2} + \frac{r(x)}{2} \leftrightarrow p(x) = q(x).d(x) + r(x) \leftrightarrow p(x) = 2x^2 - 5x + 2 = (x-2).(2x-1)$$

Observação Observe que podemos aplicar Briot-Ruffini com divisores da forma $d(x) = ax - b$. Para isso temos que $p(x) = (ax - b).q(x) + r(x)$ dividido por $a \neq 0$:

$$\frac{p(x)}{a} = \frac{(ax-b).q(x)}{a} + \frac{r(x)}{a} \to \frac{p(x)}{a} = (x - \frac{b}{a}).q(x) + \frac{r(x)}{a}$$

Exercício ♠ (BEZERRA, p. 450) Efetue a divisão dos polinômios $A(x)$ por $B(x)$ pelo dispositivo de Briot Rufini:

(a) $A(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + 5$ e $B(x) = x - 2$

(b) $A(x) = 3x^3 - x^2 + x + 2$ e $B(x) = 2x - 1$

(c) $A(x) = x^5 + a^5$ e $B(x) = x + a$

Exercício ♠ (BEZERRA, p. 450) Determine o valor de a de modo que $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - ax + 2$ seja divisível por $h(x) = x - 2$.

Exercício ♡ (BEZERRA, p. 450) Efetuamos a divisão de um polinômio $p(x)$ pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini e obtemos o seguinte algoritmo:

Assim, determine o valor de $p(x)$, o valor de a e o resto da divisão.

3.4 Teorema do Resto

Teorema O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é igual ao valor numérico de $p(a)$.

Demonstração:

Considerando que a divisão de $p(x)$ por $x - a$ resulta um quociente $q(x)$ e um resto r, temos:

$$p(x) = (x-a)q(x) + r$$

Fazendo $x = a$, temos:

$$p(a) = (a-a)q(a) + r = 0.q(a) + r = r \rightarrow r = p(a)$$

Observação Na substituição de x por a, o resto r não muda, pois é um valor constante.

Exemplo Vamos calcular o resto da divisão de $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 10$ por $d(x) = x - 3$.

De acordo com o Teorema do Resto:

$$p(3) = 3^3 - 2.3^2 + 3 - 10 = 2$$

Logo, o resto desta divisão é 2.

Exemplo Vamos determinar o valor de k de modo que o polinômio $p(x) = x^4 + kx^2 - x + 2$ seja divisível por $d(x) = x + 2$.

Se $p(x)$ é divisível por $d(x)$, o resto da divisão é 0. Então, pelo Teorema do Resto, temos:

$$p(-2) = 0 \rightarrow (-2)^4 + k.(-2)^2 - (-2) + 2 = 0 \rightarrow k = -5$$

Logo, $k = -5$.

Observação Como consequência do Teorema do Resto, temos o Teorema de D'Alembert que diz que se $p(a) = 0$, então $r = 0$ e portanto, $p(x)$ é divisível por $x - a$.

Exercício ♠ (DANTE, p.449)Calcule o resto da divisão de:
a)$p(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$ por $d(x) = x - 1$
b)$p(x) = x^4 + 2x^2 - x - 5$ por $d(x) = x + 3$

Exercício ♠ (DANTE, p.449) Verifique se o polinômio $p(x) = x^2 - 3x + 2$ é divisível por $x + 3$

Exercício ♡ (DANTE, p.449)Determine b e c de modo que o polinômio $p(x) = x^4 + x^2 + bx + c$ seja divisível por $d_1(x) = x - 2$, mas quando dividido por $d_2(x) = x + 2$, deixe resto igual a 4.

Exercício ♣ (DANTE, p. 449)Determine o polinômio $p(x)$ de grau 3 que se anula para $x = 1$ e que, dividido por $x + 1$, $x - 2$ e $x + 2$, apresenta resto igual a 6.

3.5 Teorema do Fator

Definição Se c é uma raiz de um polinômio $p(x)$, de grau $n > 0$, então $x - c$ é um fator de $p(x)$.

Demonstração:

Pelo Teorema do Resto, a divisão de $p(x)$ por $x - c$ resulta num quociente $q(x)$ e um resto $p(c)$ tal que:

$$p(x) = (x - c).q(x) + p(c)$$

Se c é uma raiz de $p(x)$, então $p(c) = 0$ e temos:

$$p(x) = (x - c).q(x)$$

Portanto, $x - c$ é um fator de $p(x)$.

Como consequencia, podemos dizer que $p(x)$ é divisivel por $(x - a)$ e por $(x - b)$, com $a \neq b$, se, e somente se, $p(x)$ for divisível por $(x - a).(x - b)$.

▪ **Exemplo** (Dante, p.449)Dado $p(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$, determine $p(x)$ para $x = 3$, $x = 2$ e $x = 0$. A seguir, escreva $p(x)$ como produto de dois fatores.

Solução:

•$p(3) = 3^3 + 3^2 - 10.3 + 8 = 14$
•$p(2) = 2^3 + 2^2 - 10.2 + 8 = 0$
•$p(0) = 0^3 + 0^2 - 10 * .0 + 8 = 8$

2	1	1	-10	8
	1	3	-4	0

Como $p(2) = 0$, então $x - 2$ é um fator de $p(x)$. Então, vamos aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

Logo, $q(x) = x^2 + 3x - 4$. Então:

$$p(x) = (x-2)(x^2+3x-4)$$

■ **Exemplo** (Dante, p.449)Vamos determinar os valores de a e b para que o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 20$ seja divisível por $(x+1)(x-4)$.

Para que $p(x)$ seja divisível por $(x+1)(x-4)$, ele deve ser divisível por $(x+1)$ e por $(x-4)$.

Se $p(x)$ é divisível por $x+1$, temos:

$$p(-1) = 0 \to (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 20 = 0 \to a - b = -19$$

Se $p(x)$ é divisível por $x-4$, vem:

$$p(4) = 0 \to 4^3 + a.4^2 + b.4 + 20 = 0 \to 4a + b = -21$$

Então, temos:

$$\begin{cases} a - b = -19 \\ 4a + b = -21 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -8$ e $b = 11$.

Exercício ♠ (DANTE, p. 449)Determine o resto da divisão do polinômio $p(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 1$ por $q(x) = 3x - 6$.

Exercício ♡ (DANTE, p. 449)Mostre que $x + 4$ é o fator do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 18x + 8$ e calcule o quociente de $p(x)$ por $x + 4$.

Exercício ♡ (FUMEC-MG)Determine m e n de modo que $p(x) = 2x^4 - x^3 + mx^2 - nx + 2$ seja divisível por $(x-2)(x+1)$

Exercício ♡ (BEZERRA, p. 451) Seja $p(x) = x^6 + 2x^5 - 4x^4 + 2x^2 - 2x + 1$

(a) Verifique que $p(x)$ é divisível por $(x+1)(x-1)$.

(b) Aplicando sucessivamente o dispositivo de Briot Ruffini, obtenha o quociente da divisão de $p(x)$ por $x+1$ e depois verifique que o quociente é divisível por $x-1$.

Exercício ♡ (BEZERRA, p.451) Verifique que o polinômio:

$$A(x) = 2x^5 - 15x^3 + 12x^2 + 7x - 6$$

É divisível por $(x-1)(x-2)(x+3)$ e obtenha o quociente dessa divisão.

3.6 Vestibular

Exercício (UESP) Se o polinômio $P(x) = x^3 + mx^2 - 1$ é divisível por $x^2 + x - 1$, então m é igual a:

(a) -2
(b) -1
(c) 1
(d) 2
(e) -3

Exercício (UESB) Se $P(x) = x^n - x^{(n-1)} + x^{(n-2)} - \ldots + x^2 - x + 1$ e $P(-1) = 19$, então n é igual a:

(a) 12
(b) 14
(c) 16
(d) 10
(e) 18

Exercício (UEL) Dividindo-se o polinômio $x^4+2x^3-2x^2-4x-21$ por $x+3$, obtêm-se:

(a) x^3-2x^2+x-12 com resto nulo.
(b) x^3-2x^2+3 com resto 16.
(c) $x^3-x^2-13x+35$ e resto 84.
(d) x^3-x^2-3x+1 com resto 2.
(e) x^3-x^2+x-7 e resto nulo.

Exercício (UEL) Se o resto da divisão do polinômio $p=x^4-4x^3-kx-75$ por $(x-5)$ é 10, o valor de k é:

(a) -5
(b) -4
(c) 5
(d) 10
(e) 6

Exercício (UFRJ) Dados os polinômios: $p(x)=5-2x+3x^2$, $q(x)=7+x+x^2-x^3$ e $r(x)=1-3x+x^4$. O valor de $p(x)+r(x)-q(x)$ para $x=2$ é:

(a) 5
(b) 19
(c) 11
(d) 24
(e) 14

Exercício (Fuvest-2009) O polinômio $p(x)=x^3+ax^2+bx$, em que a e b são números reais, tem restos 2 e 4 quando dividido por $x-2$ e $x-1$ respectivamente. Assim, o valor de a é:

(a) -6
(b) -7
(c) -8
(d) -9
(e) -10

Exercício (UNICAMP) O resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ pelo polinômio $Q(x) = x^2 - 4$ é:

(a) $R(x) = 2x - 2$
(b) $R(x) = -2x + 4$
(c) $R(x) = x + 2$
(d) $R(x) = 4x - 4$
(e) $R(x) = -x + 4$

Exercício (ITA) Um Polinômio $P(x)$, dividido por $x - 1$ dá resto 3. O quociente desta divisão é então dividido por $x - 2$, obtendo-se resto 2. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x-1)(x-2)$ será?

(a) $3x + 2$
(b) $3x - 1$
(c) $2x + 1$
(d) $4 - x$
(e) nda

Exercício (IME) Prove que o polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \ldots + x^{111} + 1$ é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x + 1$.

3.7 Pense você

Proposta 1:

A piscina da casa de Luiz tem 8 metros de largura e 10 metros de comprimento. Ao seu redor, ele pretende construir uma calçada de largura de y metros e revestí-la com pedras.

O valor de y ainda não está decidido, pois depende dos custos envolvidos. Você, foi contratado por ele para que o custo seja o mínimo possível.

Dados extras:

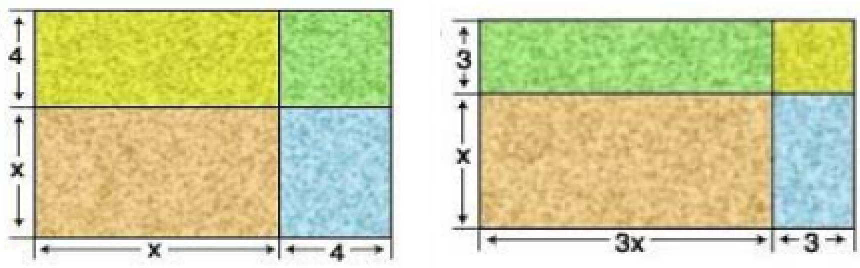
• Ao ir na loja, você viu que o preço do metro quadrado de pedras é de 20 reais e que você cobra 40% do valor total do material como mão-de-obra.

• Luis pediu para que a largura da calçada não fosse menor que 1 metro e maior do que 2,5 metros.

Dica!!!

Faça uma tabela do custo em função da largura y.

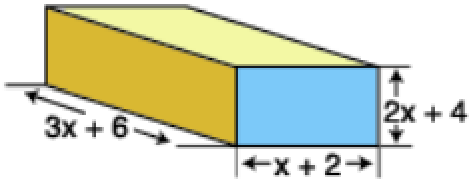
Proposta 2:



Calcule as áreas acima. Coloque-as na forma fatorada.
Essas formas te lembra algo?
Discuta com os colegas o que essas áreas representam.
Discuta com o professor o que foi percebido por vocês.

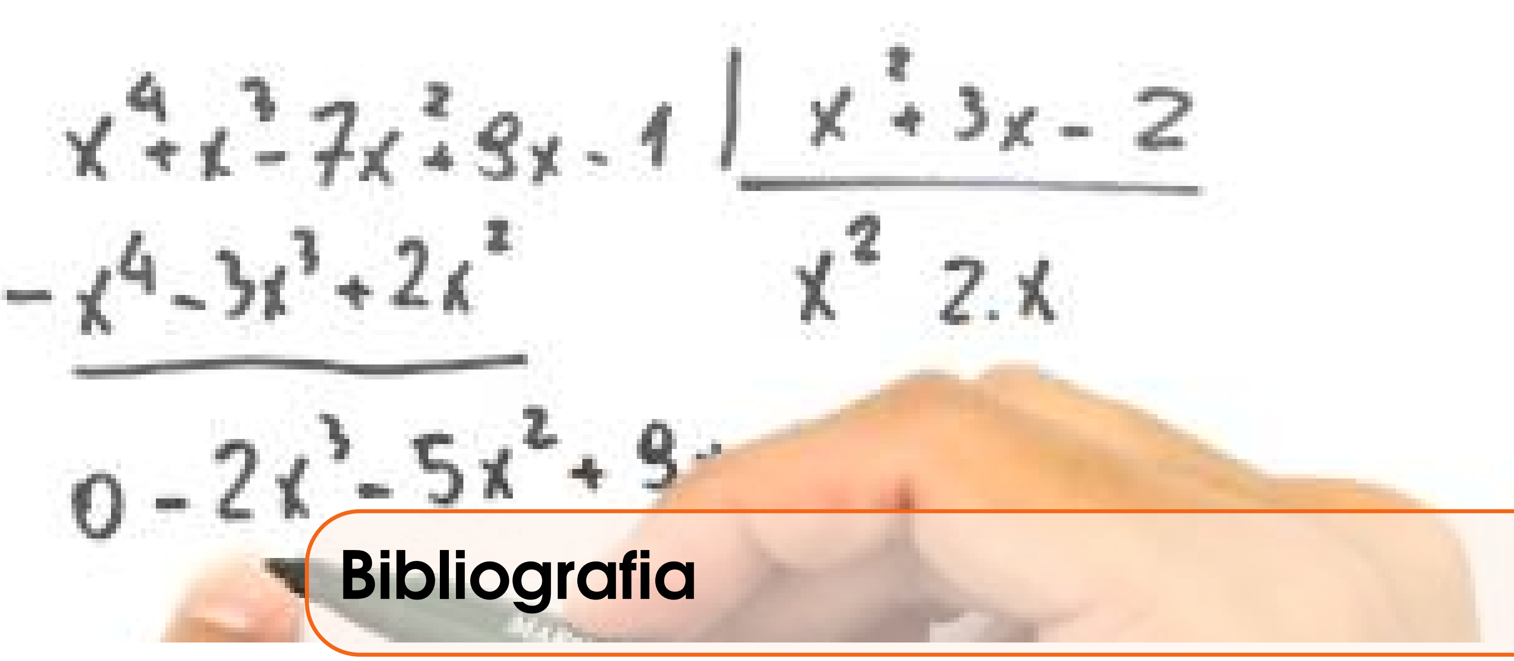
Proposta 3:

Calcule o volume da figura abaixo(em função de x) e coloque-o na forma fatorada.



a) Pra quais valores de x essa caixa não existe?
b) Calcule a área total da caixa(tampada) em função de x.
c) Calcule a área da caixa destampada.

d) Faça a construção da caixa, se possível, com $x = \pi$.(*Dica*: Use barbantes e pense no comprimento da circunferência).



Bibliografia

Livros e Sites

http://professornestormatematica.blogspot.com.br/

http://vestibular.uol.com.br/album/2013/02/27/qual-profissao-voce-pretende-seguir.htm#fotoNav=33

http://www.bdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado//tde$_b$usca/arquivo.php?codArquiv 1908

http://www.scipione.com.br/ap/didaticos/matematica_paratodos2/7c11.html

Matemática Volume Único. Gelson Iezzi. (et. al.), 5.ed. Atual, 2011.

Bezerra Matemática. Volume Único. Editora Scipione, 4.ed, 1997.

Matemática Dante, Volume único. Editora ática, 1ª edição, 2008.