UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA MA 225 - ANÁLISE DE LIVROS

DIDÁTICOS

Círculos

Alunos:

Gabriel Mendes Giacomelli Ra:102373

Lucas de Oliveira Ra:092017
Thais de Almeida Guizellini Ra:104157

Campinas-SP
maio 2014

1 Introdução

O presente trabalho, resultado da proposta feita junto à disciplina Análise de Materiais Didáticos (MA225), oferecida pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) no primeiro semestre de 2014, consiste na análise de material estrangeiro com o tema "Círculos" do livro didático escolhido pelo docente da disciplina, Prof. Henrique N. Sá Earp: Kiselev's Geometry, Book I [Kiselev, pp. 83-114].

Dessa forma, o objetivo deste trabalho é obter conhecimento sobre conteúdos que são ensinados em outros países e fazer uma breve comparação com o que é proposto no ensino brasileiro com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais [PCN].

2

Introdução ao Livro

Na Rússia, todos conhecem pelo apelido: Kiselev's Geometry. É de longe o livro mais famoso da Rússia. Tem-se publicado mais de quarenta vezes em dezenas de milhões de cópias e tem vivido em muitas épocas: sejam de guerras, sejam revoluções ou sejam de reformas.

Por quase duas décadas, a geometria deste livro tem sido o texto padrão para todas as escolas da União Soviética, sendo utilizado por estudantes (entre 12 e 15 anos) correspondentes ao Ensino Fundamental aqui no Brasil.

Agora, o livro é traduzido para o inglês e adaptado por um professor de matemática da Universidade de Berkeley (California) para conter orientações comuns a um curso de nível intermediário em geometria plana.

Alguns revisores, editores e usuários de edições anteriores elogiam a excepcional clareza da exposição do conteúdo e uma excelente coleção de problemas e com o nível de dificuldade que varia de razoavelmente fácil até razoavelmente difícil. Ao contrário de muitos outros livros do mesmo assunto, Kiselev's Geometry é bom não só para estudar geometria, mas também para aprender geometria.

A coleção de Kiselev é dividida em dois livros: a de Geometria Plana e a de Geometria Espacial. Neste trabalho, analisaremos Kiselev's Geometry Planimetry.

Sobre o Ensino Fundamental

Em todas as épocas e em todas as culturas, a Matemática e a língua materna constituem dois componentes básicos dos currículos escolares. Tal fato era traduzido, em tempos antigos, pela caracterização da função tríplice da escola, como o lugar em que se aprenderia a "ler, escrever e contar" – o que significava uma dupla alfabetização: no universo das letras e no dos números.

Os conteúdos disciplinares de Matemática, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, abrangem três grandes blocos: números, geometria e medidas. Cada um dos três blocos está presente, direta ou indiretamente, na lista dos conteúdos a serem ensinados em todas as séries tanto nas séries iniciais quanto nas séries finais.

Como estamos preocupados com geometria, o Ensino Fundamental deve-se ocupar inicialmente do reconhecimento e da representação e classificação das formas planas e espaciais, preferencialmente trabalhando em contextos concretos com as crianças de 5ª e 6ª série, e com ênfase na articulação do raciocínio lógico-dedutivo nas 7ª e 8ª séries.

A geometria deve ser tratada ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada, o que significa dizer que os grandes temas podem aparecer tanto nas séries iniciais do Ensino Fundamental quanto nas do Ensino Médio, sendo que a diferença será a escala de tratamento dada ao tema. Por exemplo, o número irracional , associado aos cálculos da circunferência e círculo, pode e deve ser apresentado nos cursos de geometria elementar, assim como deve ser trabalhado no Ensino Médio, desta vez em contextos associados à trigonometria, ao estudo dos corpos redondos e aos conjuntos numéricos.

O estudo sobre Círculos no Ensino Fundamental é decorrido a partir da 6ª série com conceitos iniciais sobre identificação, construção e razão constante (). Já na 7ª série, o conteúdo é visto apenas para questões de cálculo de áreas e, na 8ª série, é estudado com mais aprofundamento. Nesta série, é revisado conteúdos anteriores e ensinado sobre os elementos que compõem o círculo (cordas, raios e diâmetros).

3 Metodologia

Para esta analise utilizaremos uma metodologia visando:

(1) Conteúdos em comum com o ensino regular brasileiro segundo as experiências dos integrantes do grupo e consultas ao PNLD (Programa nacional do livro didático) e ao PCN (parâmetro curricular nacional). Destes conteúdos observaremos:

* Qual a motivação existente na abordagem do conteúdo

* Analise vertical do conteúdo apresentado

* Adequação do conteúdo a realidade brasileira

* Indicar para qual etapa do ensino brasileiro o livro seria indicado

(2) Conteúdos diferentes do ensino regular brasileiro segundo as experiências dos integrantes do grupo e consultas ao PNLD (Programa nacional do livro didático) e ao PCN (Parâmetro curricular nacional). Destes conteúdos observaremos:

* Relevância e a pertinência do conteúdo

* Caso seja relevante, como podemos aplicar o conteúdo no ensino brasileiro

(3) Exercícios: investigar qual a habilidade adquirida ao se resolver os exercícios propostos pelo livro

4

Análise

A análise que faremos seguirá a ordem das seções em que é disposto o conteúdo do livro-texto no capítulo The Circle.

Circles and chords

Como se trata da seção inicial do capítulo sobre círculos, o que o autor traz, inicialmente, é sobre a definição sobre círculos e sobre sua unicidade. Veja a introdução do capítulo:

103. Preliminary remarks. Obviously, through a point (A, Figure 110), it is possible to draw as many circles as one wishes: their centers can be chosen arbitrarily. Through two points (A and B, Figure 111), it is also possible to draw unlimited number of circles, but their centers cannot be arbitrary since the points equidistant from two points A and B must lie on the **perpendicular bisector** of the segment AB (i.e. on the perpendicular to the segment AB passing through its midpoint, §56).

Let us find out if it is possible to draw a circle through three points.

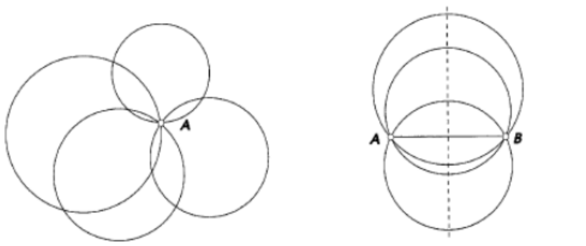


Figure 110 Figure 111

Figura 4.1: Observações preliminares

Em algumas escolas existem disciplinas de desenho geométrico e nessas disciplinas, um dos assuntos que é trabalhado é que: dado dois pontos distintos existe uma única reta que passa por eles. Porém, o que acontece no círculo? E o autor traz. De maneira densa, mas traz. E, após sua introdução, vem o primeiro teorema que merece ser destacado:

104. Theorem. ***Through any three points, not lying on the same line, it is possible to draw a circle, and such a circle is unique.***

Figura 4.2: Teorema 104

E sua demonstração:

Through three points A, B, C (Figure 112), not lying on the same line, (in other words, through the vertices of a triangle ABC), it is possible to draw a circle only if there exists a fourth point O, which is equidistant from the points A, B, and C. Let us prove that such a point exists and is unique. For this, we take into account that any point equidistant from the points A and B must lie on the perpendicular bisector MN of the side AB (§56). Similarly, any point equidistant from the points B and C must lie on the perpendicular bisector PQ of the side BC. Therefore, if a point equidistant from the three points A, B, and C exists, it must lie on both MN and PQ, which is possible only when it coincides with the intersection point of these two lines. The lines MN and PQ do intersect (since they are perpendicular to the intersecting lines AB and BC, §78). The intersection point O will be equidistant from A, B, and C. Thus, if we take this point for the center, and take the segment OA (or OB, or OC) for the radius, then the circle will pass through the points A, B, and C. Since the lines MN and PQ can intersect only at one point, the center of such a circle is unique. The length of the radius is also unambiguous, and therefore the circle in question is unique.

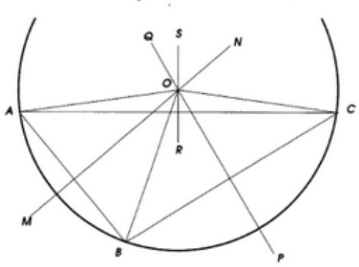


Figura 4.3: Demonstração que o centro é único

Diferentemente do que é ensinado nas escolas brasileiras, o autor faz a demonstração da obtenção do centro (é ensinado em escolas que possui disciplinas de desenho geométrico!) e também de sua unicidade.

Ainda analisando os teoremas e suas demonstrações, encontramos mais dois que se destacaram:

i. teorema que utiliza demonstração por construção: no teorema apresentado abaixo, o autor recorre as referências de figuras (que são distantes!) e também conteúdos já mencionados e/ou provados. Simples, rápidos e exigente.

107. Theorem. ***The arcs*** (AC and BD, Figure 114) ***contained between parallel chords*** (AB and CD) ***are congruent.***

Fold the diagram along the diameter $EF \perp AB$. Then we can conclude on the basis of the previous theorem that the point A merges with B, and the point C with D. Therefore the arc AC is identified with the arc BD, i.e. these arcs are congruent.

Figura 4.4: Teorema 107

ii. teorema que utiliza demonstração por absurdo: ao mencionar alguns fatos, Kiselev deixa a cargo do leitor sua demonstração com a dica de: reductio ad absurdum. Veja:

In a disk, or in congruent disks:

(1) ***congruent chords are equidistant from the center and subtend congruent arcs;***

(2) ***chords equidistant from the center are congruent and subtend congruent arcs;***

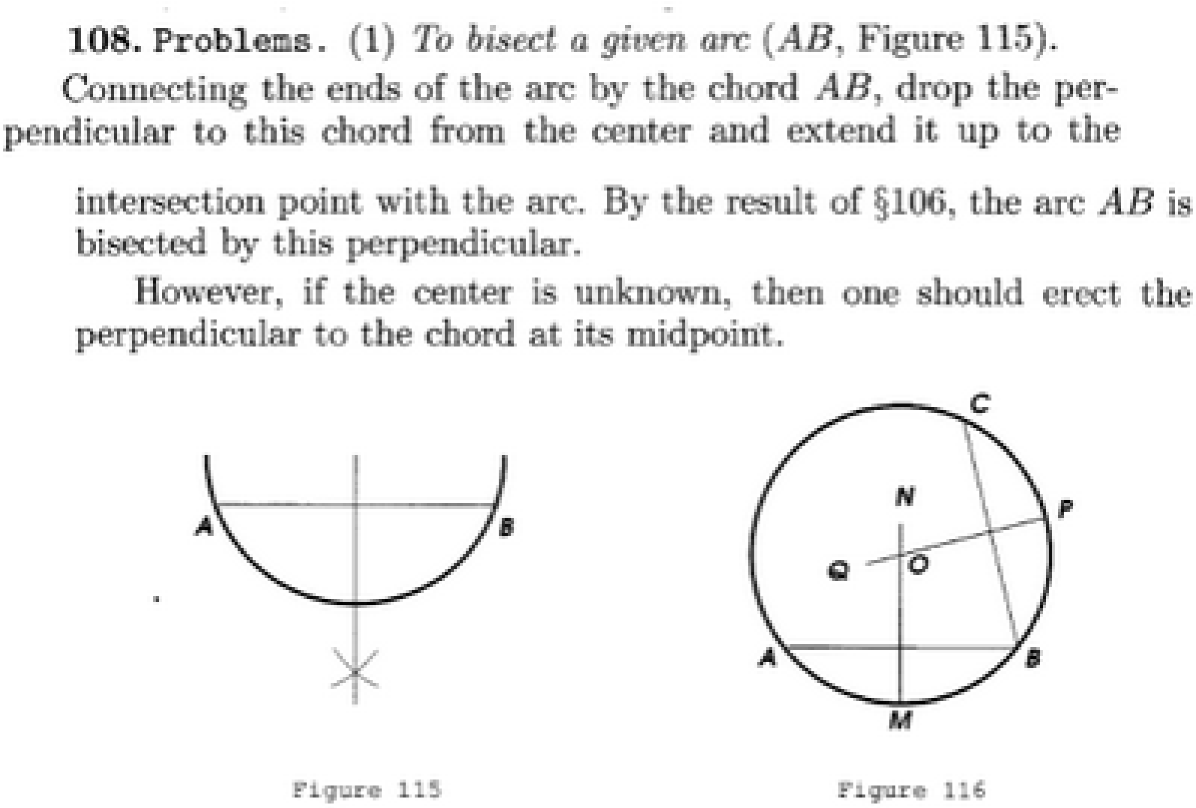
(3) ***the greater one of two non-congruent chords is closer to the center and subtends the greater arc;***

(4) ***among two chords non-equidistant to the center, the one which is closer to the center subtends the greater arc.***

These propositions are easy to prove by *reductio ad absurdum*. For instance, to prove the first of them we may argue this way. If the given chords subtended non-congruent arcs, then due to the first direct theorem the chords would have been non-congruent, which contradicts the hypothesis. Therefore congruent chords must subtend congruent arcs. But when the arcs are congruent, then by the direct theorem, the subtending chords are equidistant from the center.

Figura 4.5: Demonstração do Teorema 107

A característica do autor é sempre a demonstração de teoremas. É curioso ver que a seção traz muito conteúdo e uma hora ou outra o autor para para trazer alguma aplicação. Claramente, a aplicação não envolve situações do cotidiano e nem se preocupa com as habilidades que, aqui no Brasil, os PCN tanto se preocupam. Veja:



108. Problems. (1) *To bisect a given arc* (AB, Figure 115).
Connecting the ends of the arc by the chord AB, drop the perpendicular to this chord from the center and extend it up to the intersection point with the arc. By the result of §106, the arc AB is bisected by this perpendicular.

However, if the center is unknown, then one should erect the perpendicular to the chord at its midpoint.

Figura 4.6: Problema 108

Com um problema de construção, menciona o conteúdo apresentado e também aprendido em capítulos anteriores. Mas, veja que é bem interessante um problema desses para um aluno brasileiro: a construção dos elementos da geometria consegue desenvolver habilidades de criação, aplicação de conteúdo visto e uso de instrumentos.

É perceptível que os conteúdos trabalhados na seção é equivalente ao conteúdo trabalhado no ensino tanto Fundamental quanto Médio brasileiro. A maneira com o que o autor aborda que o torna difícil para o aluno. Diversas vezes, o que acaba sendo uma barreira é que todas as proposições que o autor menciona (e quase sempre demonstra) são dadas como "óbvio" aqui no Brasil. Exemplo claro disso é: o centro de um círculo é único.

Juntando este último fato e analisando os exercícios, temos certa reprovação pelos estudantes. Os exercícios trazem conteúdos de demonstrações (que podem ser

óbvias!), construções e alguns problemas que envolvem outros conteúdos já vistos. Veja:

i. demonstrações óbvias: exercício que pede para provar algo que já é óbvio.

228. Two intersecting congruent chords of the same circle are divided by their intersection point into respectively congruent segments.

Figura 4.7: Exercício 228

ii. construções: da mesma maneira que o problema resolvido durante a seção, Kiselev separa alguns exercícios para os alunos com construções com régua, compasso e artifícios que podem ser utilizados e que já foram demonstrados.

238. Construct a circle of a given radius, with the center lying on one side of a given angle, and such that on the other side of the angle it cuts out a chord of a given length.

Figura 4.8: Exercício 238

iii. construção (com dica!): e por final, sempre possui algum exercício que exige mais do aluno e, dessa maneira, o autor traz alguma dica para que o aluno não utilize somente informações do próprio capítulo, mas também de capítulos anteriores. Veja:

*231.** Prove that the closest and the farthest points of a given circle from a given point lie on the secant passing through this point and the center.
`Hint:` Apply the triangle inequality.

Figura 4.9: Exercício 231

Durante toda a seção, a desmotivação é gigantesca. Praticamente todo exercício existe certa desmotivação (pensando em que muitos alunos daqui não aceitam aprender a matemática pela matemática) e que no Brasil não seria tão bem utilizado. As habilidades que são propostas pelo PCN e que é possível extrair da lista de catorze exercícios (da seção) é: ler e interpretar textos matemáticos, converter o português para o desenho proposto, verificar provas e hipóteses e conhecer simbologias e nomenclaturas matemáticas.

Dessa maneira, os exercícios são aplicáveis com o conteúdo proposto, porém é desmotivador pela dificuldade e por se tratar do mesmo tipo de exercício sempre (demonstrações, provas e construções). Assim, o nível de maturidade para a compreensão do conteúdo tanto teórico quanto prático poderia ser aceito por alunos do 1º ou 2º ano do Ensino Médio, que é onde a proposta curricular do Estado de São Paulo prevê. Porém, a ajuda do professor seria indispensável e ainda precisaríamos garantir que o professor possui capacidade de entendimento do livro.

Relative positions of a line and a circle

O que esperamos na seção de posição relativa entre reta e círculo é: relações entre as distâncias entre o centro do círculo e a reta. E é exatamente que Kiselev traz em seu livro. A diferença, novamente, é a maneira como o faz.

Com textos bem densos, traz todo o conteúdo que é ensinado ao aluno brasileiro de maneira mais teórica e sem motivação alguma. Podemos citar o trecho em que menciona sobre a reta tangente ao círculo:

(3) *The distance from the center to the line equals the radius* (Figure 122), i.e. the point C is on the circle. Then any other point D of the line, being farther away from O than C, lies outside the disk. In this case the line and the circle have therefore only one common point, namely the one which is the foot of the perpendicular dropped from the center to the line.

Such a line, which has only one common point with the circle, is called a **tangent** to the circle, and the common point is called the **tangency point**.

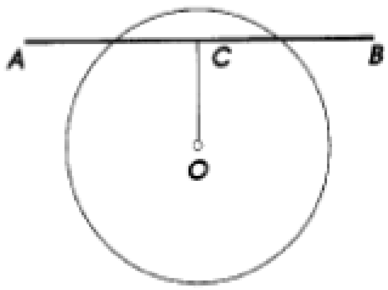


Figure 121

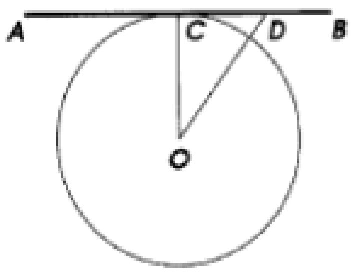


Figure 122

Figura 4.10: Reta Tangente

Não que não seja mencionado, mas a explicação com que faz torna a situação confusa para um aluno de ensino fundamental. Além disso, a motivação sobre posição relativa é quase nula. Só não é nula porque o autor faz matemática com a própria matemática.

Outro recurso que é apresentado no livro é a condição se e somente se. O destaque, então, é para o uso de informações que acontecem se ocorre determinado fato (e vice-versa) para alunos que ainda não possui tanta maturidade matemática. Exemplo:

113. We see therefore that out of three possible cases of disposition of a line and a circle, tangency takes place only in the third case, i.e. when the perpendicular to the line dropped from the center is a radius, and in this case the tangency point is the endpoint of the radius lying on the circle. This can be also expressed in the following way:

(1) ***if a line** (AB) **is perpendicular to the radius** (OC) **at its endpoint** (C) **lying on the circle, then the line is tangent to the circle***, and *vice versa*:

(2) ***if a line is tangent to a circle, then the radius drawn to the tangency point is perpendicular to the line.***

Figura 4.11: Exemplo

A característica do autor é sempre a demonstração de teoremas. Neste caso, não o fez e logo trouxe um dos problemas "motivacionais". É curioso ver que a seção traz muito conteúdo e uma hora ou outra o autor para para trazer alguma aplicação. Claramente, a aplicação não envolve situações do cotidiano e nem se preocupa com as habilidades que, aqui no Brasil, os PCN tanto se preocupam. Veja:

114. Problem. *To construct a tangent to a given circle such that it is parallel to a given line AB* (Figure 123).

Figura 4.12: Problema 114

Com um problema de construção, menciona o conteúdo apresentado e também aprendido em capítulos anteriores. Mas, veja que é bem interessante um problema desses para um aluno brasileiro: a construção dos elementos da geometria consegue desenvolver habilidades de criação, aplicação de conteúdo visto e uso de instrumentos.

No único teorema com demonstração presente na seção, o autor traz a demonstração de modo construtivo. Observe:

115. Theorem. ***If a tangent is parallel to a chord, then the tangency point bisects the arc subtended by the chord.***

Let a line AB be tangent to a circle at a point M (Figure 124) and be parallel to a chord CD; it is required to prove that $\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{MD}$.

The diameter ME passing through the tangency point M is perpendicular to AB and therefore perpendicular to CD. Thus the diameter bisects the arc CMD (§105), i.e. $\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{MD}$.

Figura 4.13: Teorema 115

É complicado ao ler e buscar as referências que faz aos desenhos já feitos pela seção. Mas, sua demonstração não foge tanto de padrões exóticos já que se trata de construção e utilização de argumentos já provados.

Observando os exercícios que a seção traz, podemos separar em três partes:

i. lugar geométrico: por mais que não mencione durante o capítulo, o autor sempre acaba pedindo para encontrar o lugar geométrico de determinada situação. Exemplo:

239. Find the geometric locus of points from which the tangents drawn to a given circle are congruent to a given segment.

Figura 4.14: Exercício 239

ii. construção: da mesma maneira que o problema resolvido durante a seção, Kiselev separa alguns exercícios para os alunos com construções com régua, compasso e artifícios que podem ser utilizados e que já foram demonstrados.

244. Construct a circle which has a given radius and is tangent to a given line at a given point.

Figura 4.15: Exercício 244

iii. construção com alguma dica: e por final, sempre possui algum exercício que exige mais do aluno e, dessa maneira, o autor traz alguma dica para que o aluno não utilize somente informações do próprio capítulo, mas também de capítulos anteriores. Veja:

242. Two lines passing through a point M are tangent to a circle at the points A and B. Through a point C taken on the smaller of the arcs AB, a third tangent is drawn up to its intersection points D and E with MA and MB respectively. Prove that (1) the perimeter of $\triangle DME$, and (2) the angle DOE (where O is the center of the circle) do not depend on the position of the point C.
`Hint`: The perimeter is congruent to $MA+MB$; $\angle DOE = \frac{1}{2}\angle AOB$.

Figura 4.16: Exercício 242

Praticamente todo exercício existe certa desmotivação (pensando em que muitos alunos daqui não aceitam aprender a matemática pela matemática) e que no Brasil não seria tão bem utilizado. As habilidades que são propostas pelo PCN e que é possível extrair da lista de onze exercícios (da seção) é: ler e interpretar textos matemáticos, converter o português para o desenho proposto, verificar provas e hipóteses e conhecer simbologias e nomenclaturas matemáticas.

Dessa maneira, os exercícios são aplicáveis com o conteúdo proposto, porém é desmotivador pela dificuldade e pelo mesmo tipo de exercício (demonstrações, provas e construções). Assim, o nível de maturidade para a compreensão do conteúdo teórico poderia ser até 9º ano, já que o que é proposto não é tão difícil entendimento e o professor poderia auxiliar. Já os exercícios exige mais maturidade, assim, o conjunto da obra poderia ser aceito por alunos do 1º ou 2º ano do Ensino Médio, que é onde a proposta curricular do Estado de São Paulo prevê.

Relative positions of two circles

Esta seção apresenta um conteúdo que é exposto no ensino médio brasileiro, porém de uma maneira bem diferente da presente nos livros didáticos brasileiros. De maneira surpreendente, Kiselev desenvolve a teoria sem a presença de qualquer número, todo o seu texto é um discurso argumentativo e construtivo de matemática pela própria matemática, isto é, não apresenta figuras animadas, coloridas ou contextualizações, e sim a matemática no seu nível mais puro.

O autor constrói a teoria definindo o que são círculos tangentes e, com esta definição, expõe como dois círculos distintos podem obter interseções.

3 Relative positions of two circles

116. Definitions. Two circles are called **tangent** to each other if they have only one common point. Two circles which have two common points are said to **intersect** each other.

Two circles cannot have three common points since if they did, there would exist two circles passing through the same three points, which is impossible

Figura 4.17: definição

A partir daí o autor caracteriza "a reta dos centros" e chegamos ao primeiro teorema da seção.

118. Theorem. ***If two circles have a common point*** (A, Figures 126, 127) ***situated on the line of centers, then they are tangent to each other.***

The circles cannot have another common point *outside* the line of centers, because then they would also have a third common point on the other side of the line of centers, in which case they would have to coincide. The circles cannot have another common point *on* the line of centers. Indeed, then they would have two common points on the line of centers. The common chord connecting these points would have been a common diameter of the circles, and two circles with a common diameter coincide.

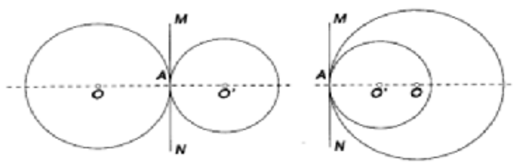


Figure 126 Figure 127

Figura 4.18: Teorema 118

Note que a prova do teorema é apresentada como um discurso argumentativo da veracidade da afirmação, ou seja, não há, de certa forma, um formalismo exacerbado, mas sim uma preocupação em estimular o raciocínio lógico matemático não pelos símbolos, mas sim com as palavras, diferentemente do que acontece no ensino regular brasileiro.

A seguir ele apresenta o resultado que nomeia a seção. Assim ele expõe todas as possibilidades de posição relativa entre dois círculos e as demonstra da mesma forma, com argumentos que convencem o leitor da veracidade das afirmações.

120. Various cases of relative positions of two circles. Denote radii of the two circles by the letters R and R' (assuming that $R \geq R'$), and the distance between the centers by the letter d. Examine relationships between these quantities in various cases of mutual position of the circles. There are five such cases, namely:

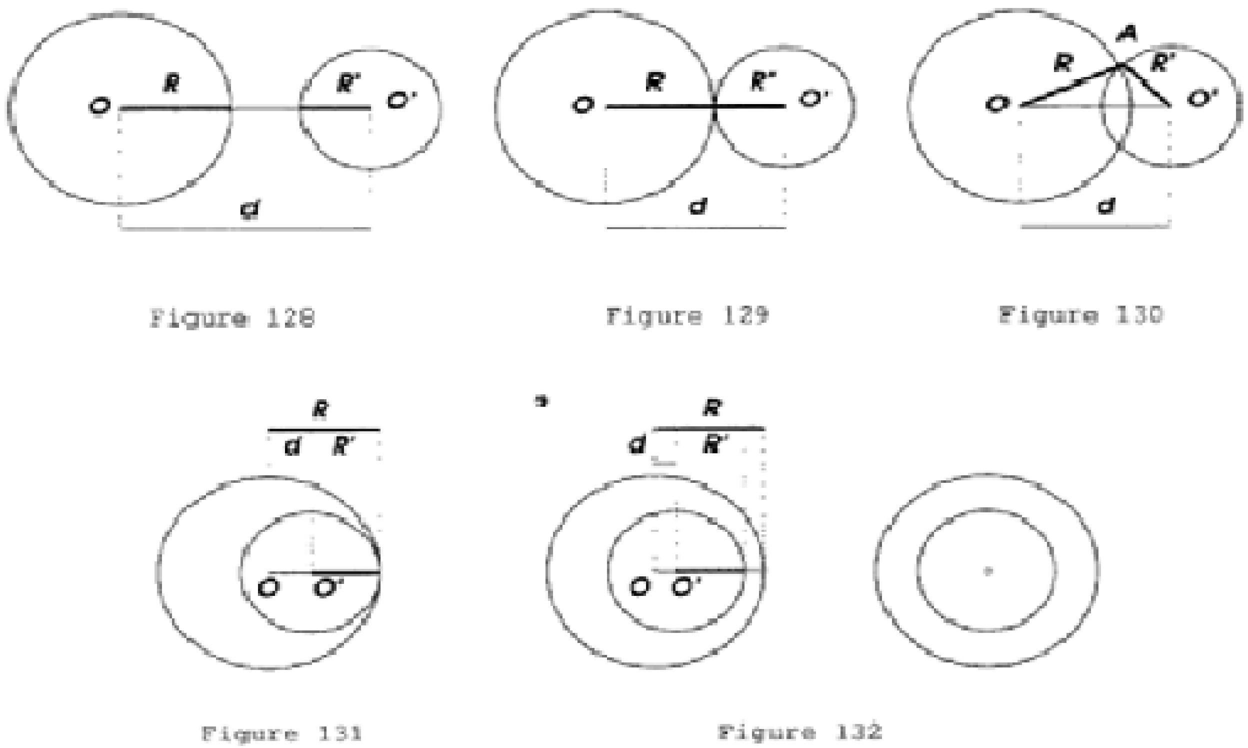


Figura 4.19: posições relativas de dois círculos

Os exercícios desta seção se dividem em três categorias: os de lugar geométrico, os de construção e os de demonstração. Todos os exercícios são relacionados com a teoria exposta e utilizam recursos vistos nas outras seções. Esta seção pode ser facilmente desenvolvida com alunos do 1º e 2º ano do ensino médio, porém os exercícios têm como pré requisito uma bagagem de escrita matemática que deve ser trabalhada desde muito cedo, logo os alunos devem trabalhar estes exercícios com a monitoria do professor.

251. Find the geometric locus of centers of circles described by a given radius and tangent to a given circle (consider two cases: of external and internal tangency).

256. Construct a circle tangent to two given parallel lines and to a given disk lying between them.

253.* Prove that the shortest segment joining two non-intersecting circles lies on the line of centers.
`Hint`: Apply the triangle inequality.

Figura 4.20: Amostra de exercícios

Inscribed and some other angles

Esta seção apresenta um conteúdo que é apresentado aos alunos do ensino médio brasileiro, porém não do modo como Kiselev aborda o conteúdo. Diferentemente do que acontece nas outras seções do capítulo, nesta o autor nos surpreende com alguns números em suas definições e exercícios.

A seção tem inicio com a definição de ângulos inscritos na circunferência, seguido de alguns exemplos, e logo já é apresentado o primeiro teorema da seção.

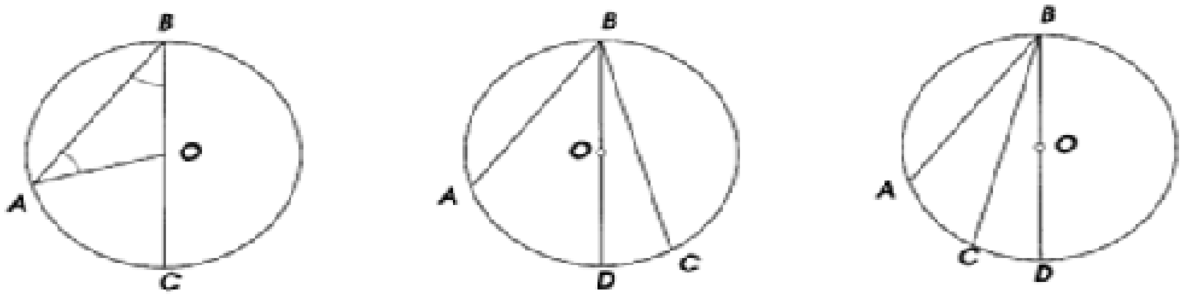


Figure 134 Figure 135 Figure 136

An angle is said to **intercept** an arc if it is contained in the interior of the angle and connects its sides. Thus the inscribed angle ABC in Figure 135 intercepts the arc ADC.

123. Theorem. ***An inscribed angle measures a half of the subtended arc.*** This theorem should be understood as follows: an inscribed angle contains as many angular degrees as a half of the arc it intercepts contains circular degrees.

In the proof of the theorem, consider the following three cases.

(1) The center O (Figure 134) lies on a side of the inscribed angle ABC. Drawing the radius AO, we obtain $\triangle AOB$ such that $OA = OB$ (as radii), and hence $\angle ABO = \angle BAO$. The angle AOC is exterior with respect to this triangle, and is congruent therefore to the sum of the angles ABO and BAO, which is twice the angle ABO. Thus the angle ABO is congruent to a half of the central angle AOC. But the angle AOC is measured by the arc AC, i.e. it contains as many angular degrees, as the arc AC contains circular degrees. Therefore the inscribed angle ABC is measured by a half of the arc AC.

Figura 4.21: Teorema 123

Novamente o autor utiliza o formato de discurso argumentativo para mostrar ao leitor e veracidade da informação. Nesta demonstração o autor utiliza algumas simbologias simples que não comprometem sua demonstração com caráter mais discursivo. A seguir apresenta um corolário do teorema, e neste corolário é apresentado o primeiro “número” do capítulo.

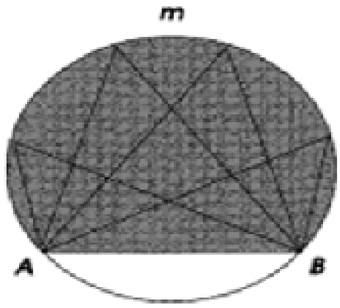


Figure 137

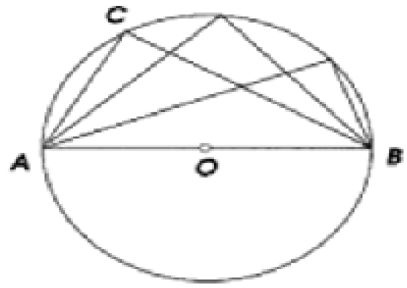


Figure 138

124. Corollaries. (1) *All inscribed angles intercepting the same arc are congruent to each other* (Figure 137), because each of them measures a half of the same arc. If the measure of one of such angles is denoted α, then one may say that the disk segment AmB **encloses the angle** α.

(2) *Any inscribed angle intercepting a diameter is right* (Figure 138), because such an angle measures a half of the semicircle, and therefore contains 90°.

Figura 4.22: Corolários

E a partir destes resultados, o autor, do mesmo modo como feito anteriormente mostra os resultados para ângulos internos e externos a circunferência, sempre utilizando do artifício da argumentação matemática com o uso de palavras e pouca simbologia.

126. Theorem. (1) ***An angle*** (ABC, Figure 141), ***whose vertex lies inside a disk, is measured by the semisum of two arcs*** (AC and DE), ***one of which is intercepted by this angle, and the other by the angle vertical to it.***

(2) ***An angle*** (ABC, Figure 142), ***whose vertex lies outside a disk, and whose sides intersect the circle, is measured by the semidifference of the two intercepted arcs*** (AC and ED).

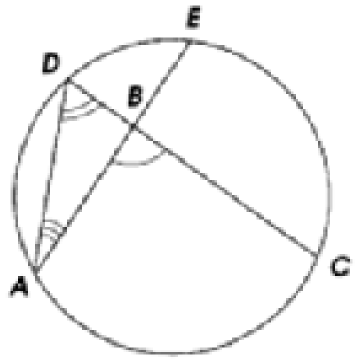


Figure 141

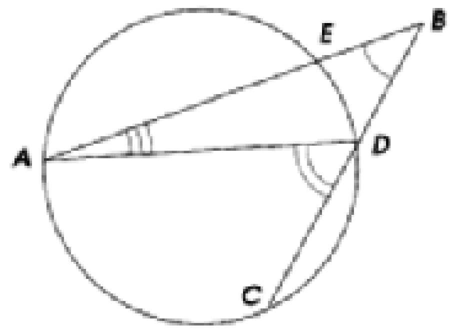


Figure 142

Drawing the chord AD (on each diagram), we obtain $\triangle ABD$ for which the angle ABC in question is exterior, when its vertex lies inside the disk, and interior, when it lies outside the disk. In the first case therefore $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$, and in the second case $\angle ABC = \angle ADC - \angle DAE$. But the angles ADC and DAE, as inscribed, are measured by halves of the arcs AC and DE. Thus in the first case the angle ABC is measured by the sum $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$ congruent to $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE})$, and in the second case by the difference $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$ congruent to $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DE})$.

Figura 4.23: Teorema 126

Já os exercícios desta seção têm como novidade a presença de exercícios envolvendo cálculo, e os tradicionais exercícios de lugar geométrico e demonstrações.

268. If two circles are tangent, then any secant passing through the tangency point cuts out on the circles opposed arcs of the same angular measure.

260. Two chords intersect at an angle $36°15'30''$. Express in degrees, minutes, and seconds the two arcs intercepted by this angle and the angle vertical to it, if one of these arcs measures 2/3 of the other.

Figura 4.24: Amostras de exercícios

Assim temos que a teoria desta seção pode ser desenvolvida com os alunos de 3º ano do ensino médio e seus exercícios trabalhados juntamente com o professor, pois são exercícios complexos que exigem uma maturidade matemática que deve ser trabalhada desde as séries iniciais de ensino.

Construction problems

Esse é o quinto tópico do capítulo, e acaba caindo como tópico distinto, pois não está no currículo nacional do Ensino Médio e Fundamental. Alguns colégios brasileiros se preocupam em ter esse tópico em seu currículo, mas o Estado não toma-o como obrigatório.

Esse tópico é um pouco diferente dos outros desse capítulo, pois ele é motivado excusivamente por problemas de construção, esquecendo um pouco de enunciações de teoremas, demonstrações e definições(mesmo tendo o método 132 no capítulo - Anexo 1).

O método 132(Anexo 1) é uma característica que define o livro, pois ao olhá-lo mais antentamente vemos que o autor tem uma preocupação de encontrar um método que resolva um grupo de exercícios, mais arbitrários possíveis, ou seja, ele busca não só ensinar um método que reolva um tipo de exercício, mas sim um método que englobe um grupo enorme de exercícios. Isso, sem falar na linguagem simples utilizada pelo autor.

Os problemas do tópico são:

127. Problem. *To construct a right triangle given its hypotenuse a and a leg b* (Figure 143).

128. Problem. *To erect a perpendicular to a ray AB* (Figure 144) *at the endpoint A without extending the ray beyond this point.*

129. Problem. *Through a given point, to draw a tangent to a given circle.*

130. Problem. *Given two circles, to construct a common tangent* (Figure 147).

131. Problem. *On a given segment AB, to construct a disk segment enclosing a given angle* (Figure 149).

133. Problem. *To construct a triangle, given its base a, the angle at the vertex A, and the sum s of the lateral sides.*

134. Problem. *To draw a secant of two given disks O and O′, so that the segments of the secant contained inside the disks are congruent respectively to two given segments a and a′.*

Figura 4.25: problemas do tópico 5

O tópico começa com o problema 127(Anexo 2), o qual pode ser aplicado ao oitavo ano(Ensino Fundamental 2), pois cobra conceitos dados até ali, ou informações que já poderiam ter sido apresentadas. E isso(serem utilizados no oitavo ano) serve para os problemas até o 129. Agora, a partir do 130, uma maturidade mais apurada é cobrada, pois a abstração é muito grande, tendo que dividir o problema em duas situações e analisá-las. Mas esses problemas podem entrar no segundo ou terceiro ano do Ensino Médio, pois aqui o aluno já começa a ter uma abstração maior.

Os exercícios(anexo 3) desse tópico focam em desenvolver nos alunos as seguintes aptidões(previstas pelo PCN e pelo PNLD): Ler e interpretar textos matemáticos; Converter o português para o "matematiquês"; Estabelecer relações matemáticas; Verificar e provar hipóteses; Conhecer a simbologia e nomenclaturas matemáticas; Fazer construções com régua e compasso*.

(* - não é prevista pelo PCN e PNLD, mas achamos conveniente colocar.)

Desse modo, podemos ver que esse tópico é relevante e poderia ser aplicado em sua totalidade no Ensino Médio, ou ter inicio no Ensino Fundamental e complementado no final do Ensino Médio.

Inscribed and circumscribed polygons

Esse é o sexto tópico do capítulo, e por sua vez, é contemplado pelo ensino brasileiro, porém no Brasil não existe o enfoque nos detalhes importantes dos teoremas e definições, como por exemplo no teorema 136(imagem abaixo) dizer que o círculo é ÚNICO. O enfoque dado pelo Kiselev é importante, pois o aluno pode se perguntar se pode haver outro círculo com as mesmas propriedades e se o aluno não o fizer é porque o professor não o incitou a questionar se pode, ou não, existir mais de uma resposta para o mesmo problema.

Esse tópico volta aos convencionais do capítulo, voltando aos teoremas, definições e demonstrações. Os teoremas e definições são:

135. `Definitions.` If all vertices of a polygon ($ABCDE$, Figure 151) lie on a circle, then the polygon is called **inscribed** into the circle, and the circle is called **circumscribed** about the polygon.

136. `Theorems.` (1) ***About any triangle, a circle can be circumscribed, and such a circle is unique.***

(2) ***Into any triangle, a circle can be inscribed, and such a circle is unique.***

`Corollary.` The point O (Figure 152), being equidistant from the sides CA and CB, must lie on the bisector of the angle C. Therefore *bisectors of the three angles of a triangle intersect at one point.*

137. Exscribed circles. The circles tangent to one side of a triangle and to the extensions of two other sides (such circles lie outside the triangle, Figure 153) are called **exscribed**. Each triangle has three such circles. To construct them, draw bisectors of the exterior angles of the triangle ABC, and take their intersection points for the centers. Thus, the center of the circle inscribed into the angle A, is the point O, i.e. the intersection point of the bisectors BO and CO of the exterior angles not supplementary to A. The radius of this circle is the perpendicular dropped from O to any of the sides of the triangle.

138. Inscribed quadrilaterals. (1) ***In a convex inscribed quadrilateral, the sum of opposite angles is congruent to two right angles.***

(2) Conversely, ***if a convex quadrilateral has the sum of opposite angles congruent to two right angles, then it can be circumscribed by a circle.***

139. Circumscribed quadrilaterals. ***In a circumscribed quadrilateral, the sums of opposite sides are congruent.***

Figura 4.26: Teoremas e definições do tópico 6

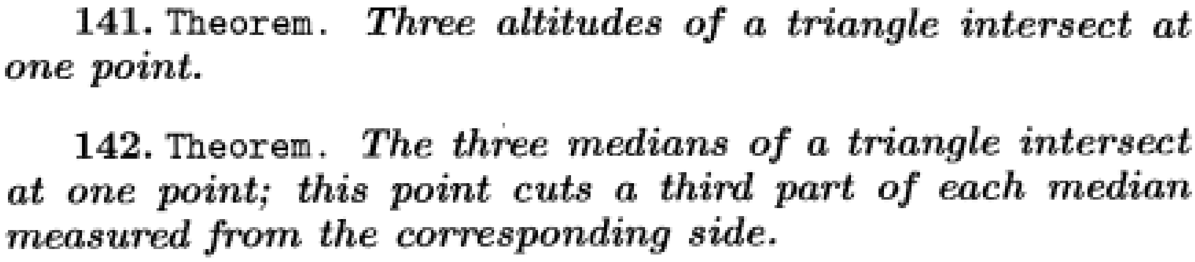
O tópico começa com a definição 135 que define um polígono inscrito e circunscrito a uma circunferência. E termina com a proposição 139(anexo 4).

Os exercícios(anexo 5) desse tópico focam em desenvolver nos alunos as seguintes aptidões(previstas pelo PCN e pelo PNLD): Ler e interpretar textos matemáticos; Converter o português para o "matematiquês"; Estabelecer relações matemáticas; Fazer construções com apenas régua e compasso*; Entender que podemos fazer a mesma construção com informações diferentes*; Conhecer a simbologia e nomenclaturas matemáticas.

Esse tópico pode ser contemplado em sua totalidade no Ensino Fundamental 2, aqui no Brasil, com essa rigidez matemática, pois todas as informações utilizadas já estão no currículo do Ensino Fundamental 2 e o que o livro propõe, em diferença do que é feito no Brasil, é essa rigidez que também pode ser passada para alunos na faixa etária entre 13 e 14 anos, de modo a introduzir a linguagem matemática propriamente dita e o aluno não ter mais problemas com isso quando chegar ao Ensino Médio ou Superior e se deparar com essa linguagem em definições mais elaboradas. Existem algumas ressalvas de exercícios, alguns deles não caberiam no Ensino Fundamental 2, mas poderiam ser retomados no Ensino Médio.

Four concurrency points in a triangle

Esse sétimo tópico do capítulo do livro é, também, contemplado pelo ensino brasileiro, porém com a mesma falta de formalismo matemático, tal qual o sexto é contemplado. Esse tópico é semelhante ao anterior, sendo assim, um tópico convencional do capítulo, focando em teoremas, definições e demonstrações. Os teoremas e definições desse tópico são:



141. Theorem. ***Three altitudes of a triangle intersect at one point.***

142. Theorem. ***The three medians of a triangle intersect at one point; this point cuts a third part of each median measured from the corresponding side.***

Figura 4.27: Teoremas e definições do tópico 7

O tópico começa com um lembrete(140 - Anexo 6), o qual será utilizado para trabalhar com o teorema seguinte(141 - Anexo 6). O tópico é composto por esse lembrete, e pelos dois teoremas(imagem acima) seguintes a ele.

Os exercícios(anexo 7) desse tópico focam em desenvolver nos alunos as seguintes aptidões(previstas pelo PCN e pelo PNLD): Ler e interpretar textos matemáticos; Converter o português para o "matematiquês"; Estabelecer relações matemáticas; Fazer construções com apenas régua e compasso*; Entender que podemos fazer a mesma construção com informações diferentes*; Conhecer a simbologia e nomenclaturas matemáticas; Verificar e provar hipóteses.

No final dos exercícios desse tópico, o livro busca um tipo de motivação pela matemática, fazendo o aluno provar a reta de Euler, o cículo de Euler e o teorema de Feuerbach.

Esse tópico entra, novamente, por completo no Ensino Fundamental 2, pois ele trabalha com a parte ensinada na sétima série(oitavo ano) aqui no Brasil. Toda teoria passada nesse tópico está presente(ou deveria estar) no Ensino Fundamental 2.

5 Conclusão

O livro é bem diferente da realidade enfrentada no Brasil, a principal diferença é o formalismo e a importância que tem para o Kiselev. Todos os conteúdos propostos são bem provados e demonstrados de modo que não deixe lacunas, mesmo que muitas vezes essas provas não tenham o rigor matemático do Ensino Superior. O que não é demonstrado e que é deixado para o aluno, o autor dá dicas de como fazer. Além disso, tudo o que o autor utiliza possui referências em conteúdos já vistos, provados e proposições mencionadas.

O capítulo analisado, na maioria, pode ser somente utilizado de forma integral no Ensino Médio e alguns tópicos dentre as seções pode ser utilizado no Ensino Fundamental II. O que pode ocasionar desafios são os exercícios propostos pelo autor, já que são sempre exigentes tanto em demonstrações quanto em construções. Para a utilização em escolas brasileiras, é necessário que o professor possua capacidade de compreensão do conteúdo teórico e prático e familiaridade com a geometria mais densa.

Acreditamos que a linguagem utilizada pelo autor é um problema que podemos adaptar tanto para o Ensino Médio quanto para o Ensino Fundamental. Fazendo essa adaptação, a linguagem deixaria de ser um problema. Além disso, deveria passar por processos de contextualizações e inspeção de habilidades que tanto os PCN prezam.

Porém, o que realmente é um bloqueio para o uso do livro é que os alunos não possuem base de abstração matemática (matemática por matemática!) no Ensino Fundamental para que possamos desenvolver esse trabalho. Veja que também dá para ampliar o empecilho para o Ensino Médio!

O que se percebe no decorrer das seções do capítulo é que normalmente o começo do tópico pode ser utilizado Ensino Fundamental (com as ressalvas acima), mas na medida em que a teoria se desenvolve, a maturidade matemática também é exigida.

Quando nos deparamos com os exercícios, percebemos que é a parte mais complicada da análise: muitos dos exercícios propostos são muito abstratos, de forma a cobrar muito do aluno do Ensino Fundamental, fazendo-nos acreditar que essa parte é o que torna definitivamente esse livro para o Ensino Médio brasileiro.

O que não podemos deixar de mencionar é que mesmo indicando o livro ao último ano do Ensino Médio, não garantimos que o acompanhamento será total. A realidade brasileira para a Matemática vem piorando a cada ano e a abstração matemática é algo torna problemas impossíveis. Tendo em vista esse ponto, o livro só será realmente aproveitado quando o aluno que o estudar for universitário e gostar de matemática pela matemática.

6

Discussão sobre: é um livro que pode ser utilizado no Ensino Médio brasileiro?

Ao longo do trabalho apresentamos o livro, seus aspectos matemáticos(como é exposta a informação - teoremas, definições e demonstrações) e sua "apresentação"(características visuais do livro, vistas em muitas imagens pelo trabalho), e analisamos o capítulo referente a círculos.

Depois de tudo isso concluímos que o livro não está dentro do que o Parâmetro Curricular Nacional(PCN) pede para que seja atendido.

Nessa parte desconsideraremos o que o PCN tem a dizer e avaliaremos com as nossas vivências de professores e estagiàrios em colégios da rede pública e privada. Também tomaremos um colégio que tenha um sistema e uma sociedade que teriam condições de abraçar esse livro, pois não faz sentido analisarmos se esse livro pode ser utilizado em uma cidade interiorana e muito pobre do nordeste, onde os alunos se preocupam mais em almoçar do que em aprender, ou seja desconsideraremos colégios sem problemas extremos de infraestrutura e onde os alunos tem problemas de necessidade primária(alimentação, transporte, entre outros).

O livro da uma preocupação muito grande para o formalismo matemático, o que acaba por complicar o trabalho do professor.

Para fortalecer esse argumento:

"Quase um terço dos professores da educação básica das redes pública e particular do Brasil não tem formação adequada. Do total de 1,977 milhão de docentes, 636,8 mil - 32,19% - ensinam sem diploma universitário. De acordo com dados de 2009 do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), o quadro piora nas regiões mais pobres do país."[4]

Nesse caso, nem mesmo os professores, em um terço dos casos, teriam capacidade para entender, interpretar e passar aos seus alunos, para que estes possam andar com as próprias pernas.

Além disso teríamos um outro problema a se enfrentar, o qual é um problema não menos agravado, que não entraremos em mais detalhes para não fugirmos demais do tema proposto, que é social, o qual, hoje, o aluno só aprende ou só se interessa por algo que lhe pode ser útil num futuro próximo.

Esse livro acaba por ser perfeito de um olhar matemático, porém o grande problema dele é que não atrairia de forma alguma alunos não motivados intrínsicamente(interesse que vem do próprio aluno, não vem de medidas externas - como o professor ou o livro), pois não é esse o seu enfoque.

Agora, se tomarmos um colégio de grande representatividade, com alunos selecionados pelo capital ou por um forte processo seletivo(vestibulinhos) como por exemplo o Bandeirantes(em São Paulo capital) e alguns colégios do sistema Etapa, o livro pode ser contemplado em sua maioria ou totalidade. Pois nesse colégios os alunos tem uma criação voltada para a importância do estudo e do que ele representa.

Então, fechamos essa discussão com as perguntas, o que realmente tomamos por ensino brasileiro? Poderíamos utilizar esse livro num colégio escolhido aleatóriamente? Assim poderíamos mesmo dizer que o livro é utilizável?

Se tomarmos ensino brasileiro como colégios escolhidos a dedo, a resporta é sim, em alguns colégios do país o livro pode ser trabalhado, mas se tomarmos ensino brasileiro como a maioria ou uma boa parcela dos colégios brasileiros, a resposta é não(mesmo excluindo os colégios que não teriam chances por problemas de caráter primário).

Referências Bibliográficas

[1] Kiselev's Geometry Book 1 Planimetry. Adapted from Russian by Alexander Givental.

[2] http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

[3] http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Portals/18/arquivos/Prop_MAT_COMP_red_md_20_03.pdf

[4] http://www.ufcg.edu.br/prt_ufcg/assessoria_imprensa/mostra_noticia.php?codigo=11516

Anexos

132. The method of geometric loci. Many construction problems can be successfully approached using the concept of geometric locus. This method, known already to *Plato* (4th century B.C.), can be described as follows. Suppose that a proposed problem consists in finding a point which has to satisfy certain conditions. Discard one of these conditions; then the problem becomes under-determined: it may admit infinitely many solutions, i.e. infinitely many points satisfying the remaining conditions. These points form a geometric locus. Construct this locus if possible. Then reinstall the previously discarded condition, but discard another one; the problem will again have infinitely many solutions which will form another geometric locus. Construct it if possible. A point satisfying all the conditions of the original problem belongs to both geometric loci, i.e. it must lie in their intersection. The construction will be possible or impossible depending on whether the loci intersect or not, and the problem will have as many solutions as there are intersection points. Let us illustrate this method by an example, which also shows that sometimes adding auxiliary lines to a diagram can be useful.

Figura 6.1: Anexo 1 - método

127. Problem. *To construct a right triangle given its hypotenuse a and a leg b* (Figure 143).

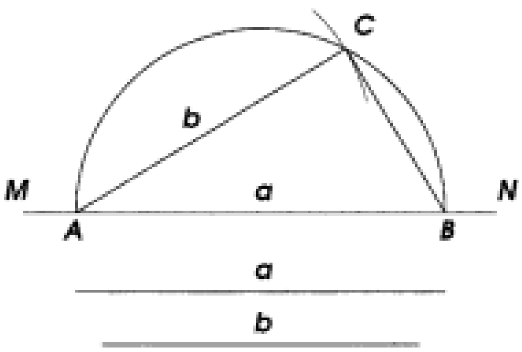


Figure 143

On a line MN, mark $AB = a$ and describe a semicircle with AB as a diameter. (For this, bisect AB, and take the midpoint for the center of the semicircle and $\frac{1}{2}AB$ for the radius.) Then draw an arc of radius congruent to b centered at the point A (or B). Connect the intersection point C of the arc and the semicircle, with the endpoints of the diameter AB. The required triangle is ABC, since the angle C is right (§124), a is the hypotenuse, and b is a leg.

Figura 6.2: Anexo 2 - problema 127(tópico 5)

Prove theorems

276. Given two circles with external tangency, prove that the common tangent passing through the tangency point, bisects the segments of external common tangents bounded by the tangency points.

277. To two circles tangent externally at a point A, a common external tangent BC is drawn (where B and C are the tangency points). Prove that the angle BAC is right.
Hint: Draw through A a common tangent and examine the triangles ABD and ADC.

Construction problems

278. Given two points, construct a line such that the perpendiculars dropped from these points to this line have given lengths.

279. Construct a line making a given angle with a given line and tangent to a given circle. (How many solutions are there?)

280. From a point outside a disk, construct a secant such that its segment inside the disk is congruent to a given segment.

Figura 6.3: Anexo 3 - exemplos de exercícios(tópico 5)

139. Circumscribed quadrilaterals. ***In a circumscribed quadrilateral, the sums of opposite sides are congruent.***

Let $ABCD$ (Figure 155) be a circumscribed quadrilateral, i.e. the sides of it are tangent to a circle. It is required to prove that $AB + CD = BC + AD$.

Denote the tangency points by the letters M, N, P, and Q. Since two tangents drawn from the same point to a circle are congruent, we have $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$, and $DP = DQ$. Therefore

$$\begin{aligned} AM + MB + CP + PD &= AQ + QD + BN + NC, \\ \text{i.e.} \quad AB + CD &= AD + BC. \end{aligned}$$

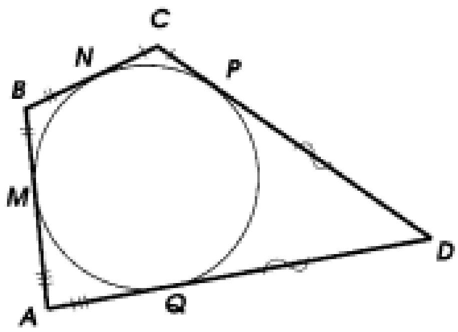


Figure 155

Figura 6.4: Anexo 4 - proposição 139(tópico 6)

EXERCISES

305. Into a given circle, inscribe a triangle whose angles are given.

306. About a given circle, circumscribe a triangle whose angles are given.

307. Construct a triangle, given the radius of its inscribed circle, the angle at the vertex, and the altitude.

308. Into a given circle, inscribe a triangle, given the sum of two of its sides and the angle opposite to one of them.

309. Into a given circle, inscribe a quadrilateral, given one of its sides, and both angles not adjacent to it.

Figura 6.5: Anexo 5 - exemplos de exercícios(tópico 6)

140. We have seen that:

(1) *the three perpendicular bisectors to the sides of a triangle intersect at one point* (which is the center of the circumscribed circle and is often called the **circumcenter** of the triangle);

141. `Theorem`. ***Three altitudes of a triangle intersect at one point.***

Through each vertex of $\triangle ABC$ (Figure 156), draw the line parallel to the opposite side of the triangle. Then we obtain an auxiliary triangle $A'B'C'$ whose sides are perpendicular to the altitudes of the given triangle. Since $C'B = AC = BA'$ (as opposite sides of parallelograms), then the point B is the midpoint of the side $A'C'$. Similarly,

C is the midpoint of $A'B'$ and A of $B'C'$. Thus the altitudes AD, BE, and CF of $\triangle ABC$ are perpendicular bisectors to the sides of $\triangle A'B'C'$, and such perpendiculars, as we know from §104, intersect at one point.

`Remark`. The point where the three altitudes of a triangle intersect is called its **orthocenter**. The reader may prove that the orthocenter of an acute triangle lies inside the triangle, of an obtuse triangle outside it, and for a right triangle coincides with the vertex of the right angle.

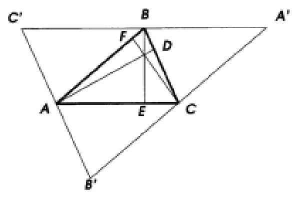


Figure 156

Figura 6.6: Anexo 6 - proposição 141(tópico 4)

EXERCISES

320. Construct a triangle, given its base and two medians drawn from the endpoints of the base.

321. Construct a triangle, given its three medians.

322. Into a given circle, inscribe a triangle such that the extensions of its angle bisectors intersect the circle at three given points.

323. Into a given circle, inscribe a triangle such that the extensions of its altitudes intersect the circle at three given points.

324.* Construct a triangle given its circumscribed circle and the three points on it at which the altitude, the angle bisector and the median, drawn from the same vertex, intersect the circle.

325.* Prove that connecting the feet of the altitudes of a given triangle, we obtain another triangle for which the altitudes of the given triangle are angle bisectors.

326.* Prove that the barycenter of a triangle lies on the line segment connecting the circumcenter and the orthocenter, and that it cuts a third part of this segment measured from the circumcenter.

`Remark:` This segment is called **Euler's line** of the triangle.

327.* Prove that for every triangle, the following nine points lie on the same circle (called **Euler's circle**, or the **nine-point circle** of the triangle): three midpoints of the sides, three feet of the altitudes, and three midpoints of the segments connecting the orthocenter with the vertices of the triangle.

328.* Prove that for every triangle, the center of Euler's circle lies on Euler's line and bisects it.

`Remark:` Moreover, according to **Feuerbach's theorem**, *for every triangle, the nine-point circle is tangent to the inscribed and all three exscribed circles.*

Figura 6.7: Anexo 7 - exemplos de exercícios(tópico 7)