

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
MA 225 - ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

## Funções

Alunos:

Gabriel Mendes

Leandro Izzo

Orlando Vasconcellos

Campinas-SP  
Março 2014

# Introdução

---

O trabalho é focado em analisar o capítulo 3 do livro Matemática aula por aula. 1ª. Série. Ensino Médio. Claudio Xavier da Silva; Benigno Barreto Filho. 2ª. ed. renov. São Paulo. FTD, 2005 (Coleção aula por aula), de acordo com a perspectiva de análises de livros didáticos de Elon Lages Lima. Tentamos analisar de forma análoga à análise do Elon, porém em alguns momentos fizemos pequenas alterações conceituais, ainda acabamos por ficar bem próximos da análise dele.

Analizamos o capítulo de Funções, o qual acabou por ter problemas na definição do que é uma função, sem contar com outros problemas seguintes, podendo ser resultados da definição ou não. Outro problema que foi trabalhado pelo grupo foi que o livro tem muitos exercícios, porém, eles não apresentam boa evolução. Não há muitos exercícios que exijam um tratamento refinado do conteúdo (se bem que nem mesmo o autor dá esse tratamento ao conteúdo).

E por ultimo analisamos os exercícios complementares, colocando um exercício como pivô(exemplo), pra generalizar o grupo no qual ele se enquadra.

## Observações Gerais do Livro

---

O livro é bem escrito, segue uma sequência didática dentro dos capítulos, porém, há um problema com a organização do índice, ele começa com conjuntos, estatística e funções, o que na verdade deveria fazer uma conexão do capítulo de conjuntos com o capítulo de funções e colocar o capítulo de estatística no final do livro.

O autor inicia todo capítulo colocando um pouco da história da matemática relacionada ao assunto que abordará, sugere aos alunos uma pesquisa e um debate com os colegas sobre o que foi pesquisado (devemos tomar cuidado com esse tipo de abordagem, pois, nem todos os alunos tem interesse por matemática, poderia apenas sugerir como leitura complementar para os mais interessados não sendo uma pesquisa para a sala toda). Além disso, todo capítulo traz uma interdisciplinaridade chamada por ele como: “Desenvolva competências e amplie o conhecimento”, isso ocorre em todos os capítulos (é interessante, pois, auxilia o aluno a saber onde poderá aplicar o que está aprendendo e perceber que a matemática não se restringe apenas a contas, mas sim à diversas áreas que se tornam indispensáveis).

O autor introduz funções apresentando um gráfico e, através dele, tenta dar uma ideia do que é uma relação entre duas grandezas. Posteriormente ele dá alguns exemplos de funções e, finalmente, dá a definição formal de função. Ele divide função em injetiva, sobrejetiva e bijetiva. Para ilustrar a definição são usados diagramas de flechas representando exemplos de relações que são e não são funções e qual tipo representa. Em sequência, o autor define de uma forma

muito rápida domínio e imagem. Posteriormente apresenta um tópico falando da imagem de um elemento.

Ainda neste assunto, apresenta mais um tópico: “raiz ou zero de uma função”. Ele dá alguns exemplos e, no final, mostra um gráfico ilustrando. Apresenta exercícios resolvidos e exercícios propostos, como uma sugestão para o professor encerrar sua aula. Ele apresenta o domínio de uma função real como um subconjunto dos reais formado por todos os valores da variável independente que resultam em um número real. Além disso, ele apresenta três casos básicos: uma função que apresenta fração com a variável no denominador, uma função com a variável dentro de uma raiz quadrada e um caso com uma função com uma raiz quadrada no denominador. O livro define a função inversa de uma maneira bem resumida, sem muitos detalhes e para ilustrar a definição, exemplos que usam como base o diagrama de flechas. Como de costume, após a definição, exercícios. Já na função composta o autor se utiliza de um exemplo prático: relaciona o percurso de um automóvel, o consumo de combustível e o custo pelo consumo. Depois ele apresenta os símbolos que usamos para representar a função composta e, para finalizar, apresenta um diagrama de flechas.

Nos exercícios basicamente só há aplicação da teoria para resolver exercícios simples e exercícios que contextualizam o assunto estudado (já no final do capítulo).

## Metodologia

---

Levamos em conta, para nossa análise, três principais tópicos caracterizados por Elon Lages Lima como "três componentes básicas do ensino", que são: Conceituação, Manipulação e Aplicação. Além disso não podemos esquecer de olhar se a linguagem utilizada pelo livro condiz com a faixa etária do aluno e se é viável utilizar esse livro como única fonte bibliográfica para a matéria.

Na Conceituação, focamos especificamente nas definições, olhando se a definição é matematicamente correta, ou também se faltam mais detalhes ou informações pertinentes que poderiam ser adicionadas. Nessa parte, o principal objetivo é analisar se o livro tem erros (como ambiguidades, falta de informação em definições, falta de definições, se o modo de definir algo condiz com a idade do aluno, entre outros) e como poderiam ser corrigidos, ou escritos de forma a melhor entendimento do aluno. Na Manipulação, focamos exclusivamente nos exercícios, olhando se eles exigem alguma interpretação, se são extensos sem necessidade, se são condizentes ao capítulo e se são somente exercícios de repetição. De acordo com o texto do Elon, "Exercícios de manipulação devem ser comedidos, simples, elegantes e, sempre que possível, úteis para emprego posterior". Além disso, também prestamos atenção se existem exercícios no livro que serviriam de escada para o próximo exercício, ou seja, se o exercício 1 tivesse que ser resolvido, para auxiliar na resolução do 2.

Na aplicação, focamos em algo específico dos exercícios, se eles "fazem sentido" para os alunos,

ou seja, se os exercícios fazem parte da vida do aluno, se eles são interessantes para os alunos, se eles são atrativos.

Por ultimo analisaremos as qualidades didáticas do livro, que são características que podem atrair o seu público alvo, de forma a melhorar a aprendizagem dos mesmos. Isso se encontra na simplicidade dos argumentos, exercícios desafiadores e exemplos interessantes. Essa análise está um pouco misturada com as outras três, porém nessa parte existe muito mais a ideia do entender o problema, de modo a analisar suas respostas. Como por exemplo, saber que o lado de um triângulo não pode ser  $-1$ , pois os lados tem que ser exclusivamente positivos.

# Conceituação

---

## 4.1 Começo do capítulo

O autor não cita os quadrantes no início do capítulo, pág 84 e 85 quando fala sobre gráfico cartesiano. (poderia fazer uma pequena referência como: o eixo x e o eixo y dividem o plano em quatro regiões. A região do canto superior direito é o primeiro quadrante, a região à sua esquerda, do outro lado do eixo y é o segundo quadrante. Abaixo deste temos o terceiro quadrante e à sua direita, ou seja, abaixo do primeiro temos o quarto quadrante. Poderia até colocar uma figura simples para ilustrar, ou substituir a anterior.

## 4.2 O conceito de função (páginas 94 e 95)

O autor dá uma noção de função não muito boa logo na introdução ao assunto (página 94): “(...) Como uma função é uma forma de relacionar duas grandezas, observamos...”. Esse “como” pressupõe que o aluno já saiba o que é uma função.

Em nenhum momento o autor trata essa relação (função) como uma relação de dependência. Estar em função de algo é o mesmo que depender de algo. A definição desta noção de função poderia ser: “Uma função é uma relação de dependência, não necessariamente mútua, que relaciona duas grandezas”.

### **4.3 Domínio, contradomínio e imagem de uma função (página 96)**

Não foi definido domínio e contradomínio. Na definição de imagem, ocorreu apenas uma definição formal; nenhum exemplo foi dado. Um exemplo usando a mesada de um garoto em função do tempo iria render uma melhor compreensão por parte do aluno. O tópico “imagem de um elemento (página 97)” é desnecessário. Poderia ter sido feito junto com este tópico em questão.

### **4.4 Raiz ou zero de uma função (página 97)**

Não está mal escrito, também não apresenta problemas de conteúdo, porém, algo que ajudaria muito o aluno na compreensão deste tópico é a definição a seguir: “se  $f(a) = 0$ , então  $a$  é uma raiz da função  $f$ ”. Esta definição poderia ter sido colocada logo depois do primeiro parágrafo.

### **4.5 Qualidade de uma função (página 100)**

Foi muito boa a ideia de representar explicar função sobrejetora e injetora usando o diagrama de flechas; ao definir função bijetora, o autor deveria ter usado também o mesmo diagrama (página 101, parágrafo 2).

O autor deveria ter usado ou citado em algum momento do texto as nomenclaturas função sobrejetiva, injetiva e bijetiva.

### **4.6 Domínio de uma função real (página 106)**

O tópico está bem escrito, porém, por que definir o que é domínio depois de ter feito um tópico exclusivo sobre domínio, contradomínio e imagem de uma função? Como já foi dito, o autor não definiu domínio naquele tópico.

Este tópico deveria estar mais perto, ao lado ou ser um índice de “domínio, contradomínio e imagem”. Seria uma conexão muito melhor entre os conteúdos.



## 4.7 Função inversa (página 108)

Faltou aqui um exemplo de uma função que não possua inversa e explicar o porquê de a mesma não possuir inversa. Sem isso fica difícil para o aluno entender quando uma função não possui inversa.

Também neste capítulo poderia ser dito que, dado  $y = f(x)$ , se  $f$  não possuir inversa, isso implica que não existe uma função  $g(y) = x$ ; ou seja,  $y$  está em função de  $x$ , porém,  $x$  não é função de  $y$ .

## 4.8 Função composta e Função composta e sua linguagem formal

Foi uma boa abordagem.

## Manipulação

---

A página 96 apresenta um exercício resolvido que visa familiarizar o aluno com uma das ferramentas necessárias para representar e identificar uma função: o diagrama de flechas. Além disso, trabalha os conceitos e definições de função, domínio, contradomínio e imagem.

Na página 98, exercício 2, o autor dá um exercício resolvido praticamente igual ao da página 96 (só muda a função). Se este exemplo já foi dado, não há motivo nenhum para que ele apareça novamente. Nesse caso, poderíamos simplesmente retirá-lo ou colocar qualquer outro em seu lugar.

Os exercícios propostos para que o próprio aluno resolva (“Elabore as resoluções”, páginas 99 e 100) são bons como aplicação direta do conteúdo; há apenas um exercício (14) que exige uma melhor interpretação e aplicação do conteúdo e não é um exercício que um aluno teria facilidade em fazer. Faltam exercícios que usem os exemplos resolvidos já comentados como ferramentas para resolução de exercícios com enunciados mais “refinados”, que não sejam simples reprodução do que aparece nos exemplos.

Na página 102 são apresentados dois exercícios resolvidos quase idênticos aos problemas propostos da página 103 (exercícios 26 e 27). Poderiam os exemplos resolvidos servir de base para exercícios um pouco mais complexos, mesmo que fossem com enunciados parecidos.

O exercício resolvido e os problemas 31 e 32 da página 107 são exatamente iguais. Com relação aos problemas propostos aos alunos, temos 10 itens do mesmo tipo de problema (“en-

contre o domínio das seguintes funções”). São apenas aplicações do 1º, 2º e 3º caso da página 106. Uma repetição cansativa e desestimulante.

Na página 109 não há nenhum exercício (seja proposto ou resolvido) que peça para identificar se uma função possui ou não inversa.

O autor usa um exemplo prático para trabalhar o conceito de função composta, porém, nos exercícios (páginas 112 e 113), não há nenhum exercício que trabalhe com algum contexto prático. Nesse sentido, a boa ideia de trabalhar com um exemplo para ilustrar a ideia de função composta fica perdida.

## Aplicação

---

A definição formal de função (página 95) está boa, porém, não tem relação com os exemplos que ele deu na página 94. No fim das contas os exemplos ficaram perdidos.

Na página 98, exercício 1, é apresentado um problema de análise de um gráfico que mostra a média do número de filhos por mulher em função do tempo (em anos). É um contexto interessante para a abordagem de um exercício, porém, em nenhum momento o leitor precisará usar algum conceito de função para resolver este problema; mesmo que ele nunca tenha visto ou ouvido falar de funções em sua vida, ele conseguiria resolver este problema da mesma forma.

Nas páginas 104 e 105 são propostos exercícios muito bons envolvendo conceitos de função e coordenadas cartesianas (exercícios 5, 6 e 7). Estes exercícios trazem uma boa noção interdisciplinar entre matemática e geografia, ajudando o aluno a enxergar que as matérias lecionadas na escola têm ligação umas com as outras.

Os exercícios 8 e 9 da página 105 também são boas aplicações do conteúdo; o exercício 8 visa, assim como os exercícios 5, 6 e 7, fazer uma ligação entre matemática e outras disciplinas (no caso, física e geografia). O exercício 9 é uma aplicação do conteúdo a uma prática cotidiana na vida de boa parte dos alunos.

Na página 110 é dada a noção de função composta através de um exemplo prático e cotidiano: ele relaciona o percurso de um carro (km), o consumo de combustível (litros) e custo(R\$). A explicação de função composta através de um exemplo prático ajuda o aluno a contextualizar

o conteúdo estudado, não deixando o aluno com a impressão de que o que ele está vendo na escola não se aplica em nada fora da mesma.

Nas páginas 114 e 115 há uma preocupação com o tratamento do assunto HIV. Mesmo o assunto sendo muito importante (ainda mais na idade em que os alunos do primeiro ano do ensino médio estão), o problema não foi bem relacionado com os exercícios. Não são exercícios de função, são exercícios que trabalham a competência de se analisar e interpretar um gráfico (exercícios 1 a 4, página 116).

Os exercícios 4 e 5, página 118, são boas aplicações dos conceitos de função. São exemplos que o conceito é utilizado sem que seja necessário o uso direto da palavra função.

## Exercícios Complementares

---

Separamos esse subtítulo dos demais, por ser completamente voltado para exercícios, de forma a ficar mais simples de entender a análise.

Esse subtítulo do capítulo, é simplesmente um punhado de exercícios(29 exercícios para ser mais exato) para que o aluno tenha maior variedade de exercícios e consiga aprofundar mais a matéria. Dos 29 exercícios, 8 entram como exercícios mais interessantes(não são aplicação direta da teoria).

Começaremos a análise com o exercício 15 do capítulo 3:

15 - (UECE) Sejam  $f$  e  $g$  funções de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = x^2 - 1$  e  $g(x) = 2x + 1$ .

Então a função composta  $f \circ g$  assume o menor valor em um ponto do intervalo:

a)  $] -1, 0[$

b)  $]0, 1[$

c)  $] \frac{1}{2}, 2[$

d)  $] -1, \frac{-1}{2}[$

Sol:

$$f(g(x)) = (2x + 1)^2 - 1$$

$$f(g(x)) = 4x^2 + 4x + 1 - 1$$

$$f(g(x)) = 4(x^2 + x)$$

Note que: para minimizar a função tenho que tomar o intervalo entre as duas raízes da equação, que são -1 e 0.

Esse exercício é um pivô escolhido para representar os exercícios que o aluno precisa de um conceito que não está no livro. No caso, existem dois exercícios com esse problema, o 15 e o 20, que falam sobre maximizar ou minimizar uma função, porém em momento algum do capítulo ele faz alusão ao que quer dizer isso.

Agora outro pivô escolhido é o 19:

19 - (Fuvest - SP) O gráfico de  $f(x) = x^2 + bx + c$ , onde  $b$  e  $c$  são constantes, passa pelos pontos  $(0,0)$  e  $(1,2)$ . Então  $f(\frac{-2}{3})$  vale:

a)  $\frac{-2}{9}$

b)  $\frac{2}{9}$

c)  $\frac{-1}{4}$

d)  $\frac{1}{4}$

e) 4

Sol:

$$\text{Como passa por } (0,0): 0 = 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Como passa por } (1,2): 2 = 1^2 + b + c \Rightarrow b = 1$$

$$\text{Então, } f\left(\frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot 1 + 0$$

$$f\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-2}{9}$$

Esse exercício representa, junto com os exercícios 10,14 e 28(exercício abaixo), os exercícios de manipulação, pois apesar de ser um exercício que pede diretamente o que quer, de forma a não ter interpretação, acaba por ser um exercício simples, elegante e útil pois os próximos capítulos são sobre função de primeiro e segundo graus.

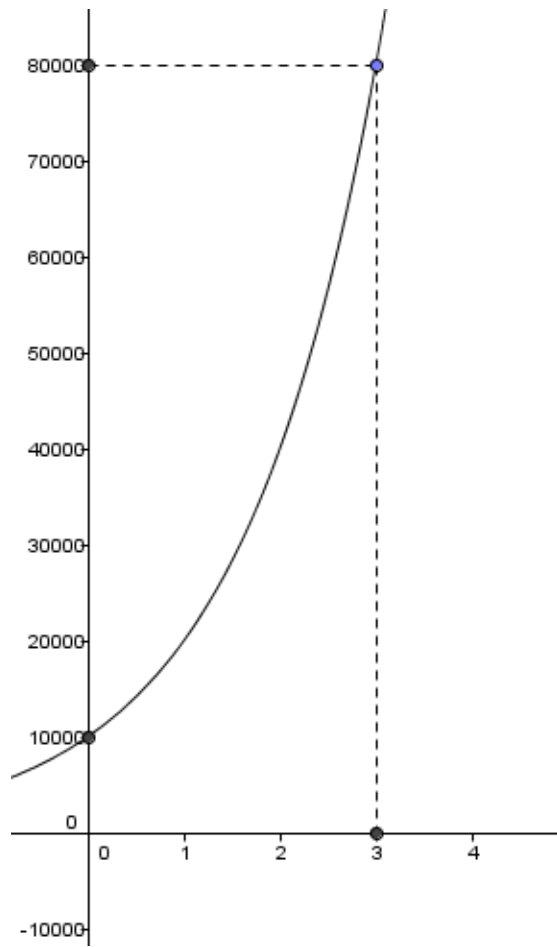


Figura 7.1: Gráfico da evolução do número de bactérias em função do tempo

Já o ultimo pivô é o próprio exercício 28:



28 – (Mack – SP) O gráfico(7.1) mostra, em função do tempo, a evolução do número de bactérias em certa cultura. Dentre as alternativas abaixo, decorridos 30 minutos do início das observações, o valor mais próximo desse número é:

a)18000

b)20000

c)32000

d)14000

e)40000

$$f(0) = a.b^0$$

$$10^4 = a.1 \Rightarrow a = 10^4$$

$$f(3) = 10^4.b^3$$

$$8.10^4 = 10^4.b^3 \Rightarrow b = 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 10^4.2^{\frac{1}{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,4.10^4 \text{ (aprox.)}$$

Aqui, esse pivô representa o exercício 27 também, os quais, fazem o aluno interpretar o exercício, entender o gráfico de um função, o que ocorre no ponto 0, e o que ocorre no ponto X, dessa forma, pode-se introduzir função exponencial(no caso do exercício 28) mostrando que exercícios anteriores de funções exponenciais já foram resolvidos de forma simples.

## Qualidades Didáticas

---

A qualidade didática do livro não é muito boa. O autor tenta deixar o conteúdo simples, porém, exatamente por isso, ele peca muito por deixar conteúdos explicados de uma forma muito vaga, ou de forma a desejar na questão de definições e exercícios.

Não há nenhum atrativo para o aluno querer saber do assunto. (Por exemplo, fazer o uso de recursos tecnológicos para aplicar o conceito aprendido, como uma fórmula do excel). O livro até tenta atrair o aluno, com história do "inventor" da teoria matemática, alguns exemplos práticos, mas podemos ver também que a história posta no livro não coloca o incentivo da descoberta da época, ou uma relação com a história da época e no caso dos exemplos práticos, eles são, em suma maioria, exercícios de interpretação de gráfico, no estilo ENEM.

A autor não inicia os conceitos através de uma situação-problema, como proposto por Elon Lages Lima, apenas despeja os conceitos, faz um exemplo e já encerra com os exercícios.

## Considerações Finais

---

As definições, em geral, não apresentam tantos problemas; o que falta é a conexão entre o que foi explicado e os exemplos resolvidos em alguns tópicos. Algumas definições, como a de função inversa (página 108), por exemplo, estão um tanto quanto difíceis de entender; isso pode levar o aluno a simplesmente ignorar a definição e resolver os exercícios tomando como base os resolvidos.

O autor busca contextualizar o assunto com o cotidiano; em muitos casos obteve sucesso em seu objetivo, porém, alguns exercícios não trabalham o conteúdo em questão, apenas trabalham análise de gráficos, nesse caso, temos os dois lados, ou contextualização sem conteúdo, ou conteúdo sem contextualização.

O maior problema deste capítulo é a manipulação dos exercícios. Os exercícios dificilmente se relacionam. Praticamente não há um exercício que use como base para sua resolução o conteúdo trabalhado em um exercício mais simples.

A orientação de estudos da página 119 (“avaliar seu conhecimento”) é uma iniciativa excelente, nessa parte, o livro propõe um modo de estudo, que visa melhorar o desempenho dos alunos.

# Referências Bibliográficas

---

- [1] Análise do Elon <http://www.ime.unicamp.br/hqsaearp/Disciplinas/AnaliseLivros/Elon/>