MA141 Geometria Analítica

Prova 1 - Turmas 8h-10h

16 de Abril 2024

Nome completo: RA: Turma:

Questão	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
Valor	2,5	2,5	3	2	10
Nota					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

- Desligue o celular.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Essa prova terá inicio às 8:00h e **finalizará às 10:00h**. Você terá duas horas para resolvê-la.
- A prova contém **4 (quatro)** questões, uma por folha. Resolva cada questão **em sua respectiva folha**.
- Não retire o grampo da prova.
- **Respostas sem justificativas não serão consideradas.**

As questões da prova estão nas próximas páginas; **aguarde a indicação da professora/do professor** para virar a folha.

Boa prova!

Questão 1 Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x + y - 2z - t &= -2 \\ y + z - 2t &= 3 \\ 4x - 2y - 11z + 2t &= -17. \end{cases}$$

1. [0,5 pt] Escreva o sistema linear na forma matricial $AX = B$.
2. [1 pt] Usando o método de escalonamento de Gauss, encontre a forma escalonada da matriz aumentada do sistema linear $AX = B$.
3. [1 pt] Escreva a solução geral desse sistema, isto é, o conjunto de soluções.

SOLUÇÕES

1.

- A: será a matriz dos coeficientes que acompanham as variáveis no sistema linear; se uma variável não aparece, vamos colocar um 0 na posição respectiva da matriz A;

- X: matriz coluna com as variáveis x,y,z,t, nessa ordem;

- B: matriz coluna com os termos independes, que estão do lado direito das expressões do sistema linar.

Dessa forma:

$$\text{AX = B} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -11 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -17 \end{pmatrix}$$

2.

Para realizar o escalonamento de Gauss, precisamos usar um pivô para zerar os coeficientes abaixo dele ao multiplicarmos a linha do pivô por um escalar específico e somar à linha com o termo que querermos zerar. Desta forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & -11 & 2 & -17 \end{array}\right) \overset{\text{L3}\rightarrow\text{ L3+(-4)L1}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & 6 & -9 \end{array}\right) =$$

$$\overset{\text{L3}\rightarrow\text{L3+(6)L2}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 9 \end{array}\right)$$

3.

Para encontrar a solução geral, precisamos achar os valores de x,y,z,t e estabelcer qual(is) são a(s) variáveis livres. O caminho escolhido para isso será lidar com sistema linear equivalente à matriz.

$$\begin{cases} x + y - 2z - t = -2 \\ y + z - 2t = 3 \\ 3z - 6t = 9 \end{cases}$$

Como t tem coeficientes não nulos em todas as linhas, vamos considerá-lo uma variável livre. Para simbolizar isso, vamos denotar $t = \alpha$, com $\alpha \in R$, apesar dessa mudança de nome não ser estritamente necessária. Assim, na linha 3 (L3):

$$3z - 6\alpha = 9 \implies z = 3 + 2\alpha \tag{1}$$

Agora vamos substituir z na L2 para achar y:

$$y + (3 + 2\alpha) - 2\alpha = 3 \implies y = 0 \tag{2}$$

Por fim, na L1:

$$x + (0) - 2(3 + 2\alpha) - \alpha = -2 \implies x = 4 + 5\alpha \tag{3}$$

Dessa forma, o conjunto solução S fica:

$$S = [(x, y, z, t) = (4 + 5\alpha, 0, 3 + 2\alpha, \alpha), \alpha \in R] \tag{4}$$

Questão 2

1. [1 pt] Utilizando o desenvolvimento por linhas ou colunas do determinante (método de Laplace), mostrar que $\det(A) = -2k(k^2-1)$ para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}, \qquad \text{onde } k \in \mathbb{R}.$$

2. [1,5 pt] Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz coluna

$$B = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ k^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determine os valores de k para os quais o sistema $AX = B$ tem solução única, infinitas soluções, nenhuma solução.

SOLUÇÕES a. Pelo método de Laplace, usando a linha 3:

$$\begin{aligned} \text{det}(A) &= (-1)^{3+3}(-2) \cdot \text{det}\left(\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}\right) = -2(-1)^{3+3}k \cdot \text{det}\left(\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}\right) \\ &= -2k^3 + 2k \\ &= -2k(k^2-1) \end{aligned}$$

Repare que usamos a nova linha 3 para fazer o Laplace pela segunda vez.

b. O sistema tem solução única se $det(A) \neq 0$ e infinitas soluções ou nenhuma solução se $det(A) = 0$. Sabemos qual o valor de det(A), assim:

$$-2k(k^2-1) = 0 \rightarrow k(k+1)(k-1) = 0$$

Dessa forma, sabemos que se as raízes são k=-1, k=0 e k=1. Logo, se k for diferente desses valores, o sistema tem solução única (SPD). Para os valores iguais a essas raízes, precisamos analisar individualmente para saber se temos um sistema de infinitas soluções (SPI) ou sem solução (SI).

Para k=-1, o sistema fica:

$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ x - y = 1 \\ 2z = 1 \\ z - t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ z = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como não temos informações suficientes para definir y, essa fica sendo uma variável livre, dessa forma temos aqui um SPI.

Para k=0:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ -2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Assim, t fica como variável livre, daí nessa situação também temos SPI.

Para k=1:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -1 \\ -2z = 1 \\ z + t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Por L1 e L2, já podemos ver que esse é um caso de SI, visto que, se subtrairmos as linhas, chegamos em "0=-2", um absurdo.

Questão 3 Determine se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa; demonstrando ou dando contra-exemplo conforme o caso. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

1. [0,75 pt] Se A e B são matrizes quadradas tais que $\det(AB) = 0$, então uma das duas, A ou B, não tem inversa.

2. [0,75 pt] Toda matriz quadrada que é equivalente por linhas à matriz identidade tem determinante 1.

3. [0,75 pt] A única matriz quadrada que é simétrica e anti-simétrica ao mesmo tempo é a matriz nula.

4. [0,75 pt] Se A é uma matriz 3×3 de forma que o vetor $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ é solução do sistema homogêneo $AX = 0$, então A é singular (não invertível).

SOLUÇÕES

1. (VERDADEIRA) Podemos usar uma propriedade que diz:

$$\text{det}AB = \text{det}A \cdot \text{det}B \to det(AB) = 0 \to detA \cdot detB = 0$$

Assim, ou o determinante de A deve ser zero ou o determinante de B deve ser zero. Sabemos que o determinate de uma matriz é zero se, e somente se, quando ela não tem inversa. Dessa maneira, ou A não tem inversa, ou B não tem inversa.

2.(FALSA) Vamos dar uma sugestão de contra-exemplo. Uma matriz é equivalente à matriz identidade se ela puder ser transformada na matriz identidade ao aplicarmos apenas operações elementares nessa matriz. Se fizeroms o determinate da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, vemos que ele vale -1, diferente do que foi afirmado no enunciado.

3.(VERDADEIRA) Uma matriz é simétrica se a_{ij}=a_{ji} e ela é antissimétrica se a_{ij}=-a_{ji}. Repare que a única forma disso ser verdade é se a_{ij} for igual a zero.

Alternativamente, sem índices, podemos simplificar dizendo que todo elemento a da matriz A obedece: a=b e a=-b ao mesmo tempo (com a e b reais). Assim, isso só é verdade se a ou b é igual a zero.

4. (VERDADEIRA)

Podemos escrever o sistema AX=0 como:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sistema linear equivalente fica:

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ d - f = 0 \\ g - i = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = c \\ d = f \\ g = i \end{cases}$$

Logo, descobrimos que A tem a forma; $A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{pmatrix}$.

Podemos calcular o determinante e verificar que ele é zero, ou podemos ver que ele tem duas colunas iguais, o que significa que o terminante é nulo. Como sabemos que um determinate nulo implica que a matriz não tem inversa, podemos concluir que A não tem inversa.

Questão 4 [2 pontos]

1. [0,5 pt] Determinar um valor de $a \in \mathbb{R}$ para que a seguinte matriz **não seja** invertível.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}.$$

2. [1,5 pt] Calcular a inversa da matriz A quando $a = 1$.

SOLUÇÕES

a. Uma matriz não é invertível se seu determinante for igual a zero. Assim, vamos procurar os valores de a tais que o determinante é igual a zero.

$$detA = 0 \implies \begin{vmatrix} -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = 2a = 0$$

Isso significa que precisa ser igual a zero para a matriz A não ter inversa.

b. Podemos calcular a inversa ao criarmos uma matriz aumentada, do lado esquerdo a matriz A e do lado direito a matriz identidade, depois escalonarmos a matriz A, lembrando de aplicar as mesmas operações na matriz indentidade. Quando a matriz A estiver na forma da matriz indentidade, a matriz que era originalmente a indentidade vai ser a matriz inversa de A.

Com a=1,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{L3}\to\text{ L3-L2}}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\overset{\text{L2}\to\text{ L3-L2}}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{L3}\to\text{ L3:(-2)}}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) =$$

$$\overset{\text{L2}\to\text{ L2-L3)}}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{\text{L2}\to\text{ -L1+L3}}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$