Gabarito P1- Prova 1- Turmas 16h-18h

April 24, 2024

Gustavo Sobreira Barroso

1 Questão 1

1.1 Item 1

O sistema, escrito na forma matricial, é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1.2 Item 2

Aplicando operações elementares na matriz aumentada $[A|B]$, concluímos que a forma escalonada da matriz aumentada do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1 -> L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_1 -> L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 - 3L_1 -> L_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2 -> L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2/4 -> L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 - 10L_2 -> L_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1.3 Item 3

Tal matriz possui uma linha em que 0=1, o que é um absurdo e mostra que este sistema é impossível.Assim, o sistema não possui soluções.

2 Questão 2

2.1 Item 1

Aplicando o método de Laplace na última coluna da matriz A, o determinante será:

det A= det $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2 & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 \\ -1 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$=$(-1)^{4+4} \cdot k\cdot$ det $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2 \\ 0 & -2 & k \end{pmatrix}$

Aplicando novamente o método de Laplace na primeira coluna da nova matriz obtida, temos:

det A= $(-1)^8 \cdot k \cdot [(-1)^{1+1} \cdot 1\cdot$ det $\begin{pmatrix} -k & 2 \\ -2 & k \end{pmatrix}]$

det A=$k \cdot (-k^2+4) = -k \cdot (k^2-4) = -k \cdot (k-2) \cdot (k+2)$

2.2 Item 2

Para a matriz A ser invertível e, assim, o sistema possuir solução única, $det(A) \neq 0$. Daí, obtemos:

$det(A) = -k \cdot (k-2) \cdot (k+2) \neq 0 \implies k \neq 0, k \neq 2, k \neq -2$

Assim, o sistema admite solução única se $k \neq 0$, $k \neq 2$ e $k \neq -2$.

Agora, serão analisados os casos em que $k = 0$, $k = 2$ e $k = -2$.

Caso (I): k=0

Se k=0, obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & -k & 2 & 0 & -k \\ 0 & -2 & k & 0 & k^2 \\ -1 & 0 & 1 & k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizando operações elementares nesta matriz, obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4+L_1->L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2<->L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2/(-2)->L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3/(2)->L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4-L_3->L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tal matriz possui uma linha com zeros e, consequentemente, uma variável livre.

Assim, concluímos que, se k=0, o sistema admite infinitas soluções.

Caso (II): k=2

Se k=2, obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & -k & 2 & 0 & -k \\ 0 & -2 & k & 0 & k^2 \\ -1 & 0 & 1 & k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizando operações elementares nesta matriz, obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4+L_1->L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-L_2->L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2/(-2)->L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tal matriz possui uma linha em que 0=6, o que é um absurdo e mostra que este sistema é impossível.
Assim, se k=2 o sistema é impossível.
Caso (III): k=-2
Se k=-2, obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & -k & 2 & 0 & -k \\ 0 & -2 & k & 0 & k^2 \\ -1 & 0 & 1 & k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizando operações elementares nesta matriz, obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4+L_1->L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2+L_3->L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2/2->L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Tal matriz possui uma linha em que 0=6, o que é um absurdo e mostra que este sistema é impossível.
Assim, se k=-2 o sistema também é impossível.

3 Questão 3

3.1 Item 1

A afirmação é verdadeira e irei provar.
Seja A uma matriz quadrada tal que $A \in M_n(R)$, $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$. Como $(A + A^T)^T = A + A^T$, a matriz $A + A^T$ é simétrica e a afirmação é verdadeira.

3.2 Item 2

A afirmação é falsa e darei um contra-exemplo:
Sejam A e B as matrizes A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e B= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
O produto destas matrizes, AB, será:
A $\cdot$ B= AB= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Como $A \neq 0$ e $B \neq 0$, a afirmação proposta é falsa.

3.3 Item 3

A afirmação é verdadeira e vou provar.
Como a matriz A é uma matriz m $\times$ n tal que m $<$ n, existem neste sistema menos equações do que incógnitas e, assim, o número de linhas com pivôs r na matriz escalonada reduzida é tal que r $<$ n.
Assim, temos r pivôs e n - r variáveis livres, que podem assumir quaisquer valores reais. Portanto, o sistema admite solução não trivial e, logo, infinitas soluções.

3.4 Item 4

A afirmação é falsa e darei um contra-exemplo:
Seja A a matriz abaixo: A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Uma matriz n $\times$ n com n=2, então:
A $\cdot$ A= A^2= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Como $A \neq I_n$ e $A \neq -I_n$, a afirmação proposta é falsa.

4 Questão 4

4.1 Item 1

Para que a matriz A seja não invertível, $\det A = 0$. Aplicando o método de Laplace na primeira coluna:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3(2a - 1) + (-1)a = 5a - 3$$

Obtemos que

$$\det A = 0 \iff 5a - 3 = 0 \iff a = 3/5.$$

4.2 Item 2

O cálculo da inversa será a partir da aplicação do método de Gauss-Jordan na matriz abaixo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando operações elementares na matriz dada, chegamos no seguinte resultado:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1/3->L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-L_1->L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & -1 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3/5)\cdot L_2->L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/5 & -1/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3+L_2->L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/5 & -1/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 & -1/5 & 3/5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-L_3->L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3/5 & -1/5 & 3/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-5/3)\cdot L_3->L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1 & -5/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1-(1/3)\cdot L_2->L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Assim, a matriz inversa de A, será:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/3 & -1 & -5/3 \end{pmatrix}$$