$Lista\ de\ Exercícios\ MA211\#\ 2012$

1 - Calcule os seguintes limites, caso existam. Caso não existam, justifique.

$(a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 2xy}{x^2 + y^2}$

$(b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x - y^4}$

2 -

(a) Verifique se o limite existe. Justifique a resposta!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^5 + y^5}$$

(b) Verifique se a função f, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{7x^2 + 7y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & se\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$. Justifique!

3 -
(a) Verifique se a função definida abaixo é contínua na origem.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy - y^3}{x^2 + y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

(b) Calcule o limite abaixo, se existir. Justifique a resposta.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

4 - Determine o ponto P sobre o gráfico da função $f(x,y) = 1 - x^2 - 2y^2$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $3x - y + 3z = 1$. Determine a equação do plano tangente.

5 - Determine os pontos do elipsóide $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $2x + 3y - 3z = 1$.

6 - Determine a equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = x^2 + xy$ e paralelo ao plano $2x + 3y - z = 0$.

7 - Determine a equação do plano tangente à superfície dada por $\log xy + \log yz + \log xz = 0$ no ponto $(0,0,0)$.

8 - Sejam f e g funções que possuem derivadas contínuas até segunda ordem. Mostre que a função z de (x, t) dada $por\ \ z = f(x + at) + g(x - at)$, a constante, satisfaz a equação:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

9 - Suponha f uma função diferenciável e admita que

$f(3x + 1,3x - 1) = 4$.

Mostre que: $\frac{\partial f(3x+1,3x-1)}{\partial x} = -\frac{\partial f(3x+1,3x-1)}{\partial y}$.

10 - Seja

$$g(x, y) = f(x^2 + y^2)$$

onde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

(a) Mostre que

$$y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

(b) Sabendo que $f'(2) = 1$,determine a equação da reta tangente à curva de nível de g que passa pelo ponto $(1,1)$.

11 - Seja $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

(a) Determine os pontos críticos de $f(x, y)$.

(b) Classifique os pontos críticos de $f(x, y)$: máximo local, mínimo local ou ponto de sela.

12 - Determine os pontos de máximo e de mínimo locais e os pontos de sela da função

$$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$$

13 - Determine os pontos de máximo e de mínimo locais e os pontos de sela (se existirem) da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$. Utilize o teste da segunda derivada para justificar.

14 - Seja

$$f(x, y) = k(x - y)^2 + \frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2}, \quad k \neq 0$$

(a) Encontre os pontos críticos da função f.

(b) Classifique os pontos críticos da função f no caso em que $k > 0$.

15 - Usando Multiplicadores de Lagrange, determine as dimensões da caixa retangular de maior volume no primeiro octante ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $2x + y + 3z = 6$.

16 - Determine os pontos da superfície $xyz = 1$ que estão mais próximos da origem.

17 - Use o método dos Multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos da parábola $y = x^2$ que se encontram mais próximo do ponto $(0,1) \in \mathbb{R}^2$.

18 - Inverta a ordem de integração, integrando primeiro em y e depois em x, e depois calcule a integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 sen(x^3) dx dy$$

19 - Utilize coordenadas polares para calcular a área da região do plano que está no interior do circulo $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ e fora do circulo $x^2 + y^2 = 1$.

20 - Determine o volume abaixo do plano $z - y = 0$ e acima da região, no primeiro quadrante, limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x = 2 - y^2$.

21 - Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 sen(y^3) dy dx$$

Sugestão: inverta a ordem de integração.

22 - Calcule a integral

$$\iint_B \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dx dy$$

Onde B é a região trapezoidal com vértices (1,0), (2,0), (0,2), e (0,1), usando uma mudança de variáveis conveniente.

23 - Utilize coordenadas esféricas para calcular a integral

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dzdxdy$$

24 - Usando integral tripla calcule o volume do sólido delimitado pelas superfícies

$$z = \frac{2}{1+x^2+y^2}, \qquad z = x^2+y^2$$

25 - Calcular

$$\iint_D (x-y)^2 sin^2(x+y) dA$$

onde D é o paralelogramo de vértices: $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$.

26 - Considere o campo de força $\vec{F}(x,y,z) = y^2\vec{\imath} + x\vec{\jmath} - z\vec{k}$, e seja γ a poligonal de vértices $A = (0,1,-1)$, $B = (1,1,0)$ e $C = (1,2,-1)$, orientada de A para C. Determine o trabalho realizado por $\vec{F}$ para descolar uma partícula de A até C, ao longo da poligonal.

27 - Calcule a integral de linha

$$\int_C e^{2y}dx + (1 + 2xe^{2y})dy$$

onde C é a curva dada por $\gamma(t) = \left(te^t, 1 + sen\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$, $0 \leq t \leq 1$.

Sugestão: Verifique se o campo é conservativo.

28 -

(a) Determine se o campo

$$\vec{F} = (e^{-y} - 2x)\vec{\imath} - (xe^{-y} + \sin(y))\vec{\jmath}$$

É gradiente. Caso afirmativo encontre o potencial $f(x,y)$.

(b) Seja $P(x,y) = y$ e $Q(x,y) = x$. Determine $\int_C Pdx + Qdy$ onde C é um laço da rosácea dada em coordenadas polares por $r = cos(2\theta)$

29 - Calcule

$$\iiint_E xe^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV$$

onde E é o solido que esta entre as esferas $x^2+y^2+z^2=1$ e $x^2+y^2+z^2=4$ no primeiro octante.

30 - Considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z)=(2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$ e a curva $\gamma(t)=(sen^6(t), 1-\cos(t), e^{t\left(t-\frac{\pi}{2}\right)})$, $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$. Calcule a integral de linha

$$\int_\gamma \vec{F}.d\gamma$$

Do campo vetorial F sobre a curva γ.

Sugestão: verifique se o campo é conservativo.

31 - Seja S a parte do cone $x^2=y^2+z^2$ que esta dentro do cilindro $x^2+y^2=a^2$ e no primeiro octante. Determine a área da superfície S.

32 - Use o Teorema de Stokes para calcular a integral de superfície

$$\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}.d\vec{S}=\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}.\hat{n}dS$$

onde $\vec{F}=(e^{xy}\cos(z), (x^2+1)z, -y)$ e S é o hemisfério $x^2+y^2+z^2=1,\ x\leq 0$. Orientado na direção positiva do eixo x.

33 - Seja S a superfície dada por $\vec{r}(u,v)=ucos(v)\vec{\imath}+u^2\vec{\jmath}+usen(v)\vec{k}$, com $0\leq u\leq 1$ e $0\leq v\leq 2\pi$.

(a) Identifique e esboce a superfície.

(b) Calcule a área de S.

34 - seja $\vec{F}=(ztan^{-1}(y^2), z^3\ln(x^2+1), z)$. Determine o fluxo de $\vec{F}$ atraves da parte do parabolóide $x^2+y^2+z=2$ que esta acima do plano $z=1$ e esta orientada para cima. (Observe que a superfície não é fechada.)

35 - Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x,y,z)=(x^3+e^z)\vec{\imath}+(x^2y)\vec{\jmath}+sen(xy)\vec{k}$, através da superfície formada pelo parabolóide $z=4-y^2$ e pelos planos $x=0, z=0$ e $x+z=5$.

36 - Determine o fluxo do campo vetorial

$\vec{F}(x,y,z) = \left(xsen(x) + ze^{y^2+z^2}\right)\vec{\imath} + (x^2z^2\ln(1+x^2+z^4))\vec{\jmath} + \left(-z\left(sen(x) + xcos(x)\right) + x^2 + y^2\right)\vec{k}$

através da superfície $x^2 + y^2 + z^{7/2} = 1$, $z > 0$, e na direção do vetor normal unitário que aponta para cima(isto é, a terceira coordenada do vetor normal é positiva).

Sugestão: usar o Teorema da Divergência.

37 - Aplique o teorema de Stokes para calcular

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}$$

sendo $\vec{F}(x,y,z) = 3z\vec{\imath} + 5x\vec{\jmath} - 2y\vec{k}$ e C, a curva de intersecção do plano $z = y + 3$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

38 - Através do teorema de Stokes calcule o fluxo do rotacional de $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + xyz\vec{k}$, sendo S a superfície dada por $z = 1 - x - y$,$x \geq 0$,$y \geq 0$ $e\, x + y \leq 1$.Considere S com orientação para baixo.

39 - Utilize o teorema da Divergência para calcular o fluxo do campo vetorial $\vec{F}$ através da superfície S. Sendo $\vec{F}(x,y,z) = x^2y\vec{\imath} + xy^2\vec{\jmath} + (5 - 4xyz)\vec{k}$ e S, a superfície representada pelo hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$. Considere S com orientação para cima (isto é, a normal à superfície, $\vec{n}$, possui componente z positiva).

40 - Sejam $E \subset \mathbb{R}^3$ uma região solida simples com fronteira $S = \partial E$ e um campo vetorial $\vec{F}: Dom(\vec{F}) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tal que $Dom(\vec{F})$ é uma região aberta contendo E. Mostre que

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}).d\vec{S} = 0$$

Isto é, o fluxo do rotacional de $\vec{F}$ através de S é zero.