MA211 - Lista 08

Integrais triplas e
Integrais Triplas em
Coordenadas Cilíndricas

7 de maio de 2018

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

?⟨ST-15.6-15⟩?

1. ★ Calcule a integral tripla $\iiint\limits_T x^2\,dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

Solução: Para resolvermos a integral tripla, vamos desenhar dois diagramas: um da região sólida T (Figura 1) e o outro a sua projeção D no plano xy (Figura 2).

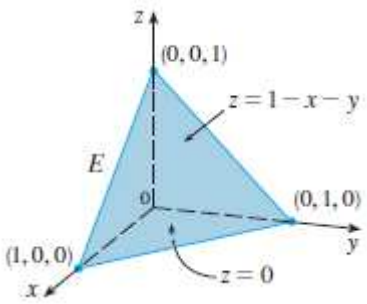


Figura 1

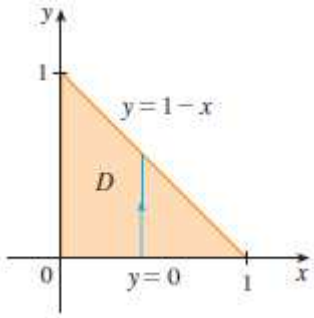


Figura 2

A fronteira inferior do tetraedro T é o plano $z = 0$ e a superior é o plano $x + y + z = 1$ (ou $z = 1 - x - y$). Notemos que os planos $x + y + z = 1$ e $z = 0$ se interceptam na reta $x + y = 1$ (ou $y = 1 - x$) no plano xy. Logo a projeção de T é a região triangular da Figura 2 e temos

$$T = \{(x, y, z) |\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le 1 - x - y\}.$$

Assim,

$$\iiint\limits_T x^2\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-z} x^2\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 z\Big|_0^{1-x-y} dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2(1 - x - y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 - x^3 - x^2 y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y - x^3 y - x^2 \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x^2(1-x) - x^3(1-x) - \frac{x^2}{2}(1-x)^2\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{60}.$$

?⟨HG-5.4-2j)⟩?

2. ★ Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado por $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - 3x^2 - 3y^2}$.

Solução: Primeiramente, vamos determinar a projeção no plano xy da interseção de

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{4 - 3x^2 - 3y^2} && (1)\ \{?\} \\ z &= x^2 + y^2 && (2)\ \{?\} \end{aligned}$$

Da equação (1) temos que

$$z = \sqrt{4 - 3x^2 - 3y^2} \Leftrightarrow z^2 = 4 - 3x^2 - 3y^2 \Leftrightarrow z^2 = 4 - 3(x^2 + y^2). \qquad (3)\ ?\underline{1}?$$

Substituindo a equação (2) na equação (3) obtemos que

$$z^2 = 4 - z \Leftrightarrow z^2 + 3z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z - 4) = 0.$$

Logo,$z = -4$ e $z = 1$. Notemos que $z = -4$ não satisfaz as equações (1) e (2), então a projeção D no plano xy é o círculo de raio 1, isto é, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} |\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Assim, o volume, V, do sólido é:

$$V = \iint_D \left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{4-3x^2-3y^2}} 1\, dz \right] dA = \iint_D zx^2 + y^{2\sqrt{4-3x^2-3y^2}}\, dA$$

$$= \iint_D (\sqrt{4 - 3x^2 - 3y^2} - (x^2 + y^2))\, dA.$$

Passando para coordenadas polares temos que

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dA &= r\, dr\, d\theta \\ 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Então,

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\sqrt{4 - 3r^2} - r^2) r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\sqrt{4 - 3r^2} - r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left[\left(\underbrace{\int_0^1 r\sqrt{4 - 3r^2}\, dr}_{\substack{u=4-3r^2 \\ du=-6r\, dr}} \right) - \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) \right]$$

$$= \theta\Big|_0^{2\pi} \cdot \left[\left(\int_4^1 r \cdot u^{1/2} \frac{du}{-6r}\right) - \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right)\right]$$

$$= 2\pi \cdot \left[\left(-\frac{1}{6}\int_4^1 u^{1/2}\,du\right) - \frac{1}{4}\right] = 2\pi \cdot \left[\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_4^1\right) - \frac{1}{4}\right]$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot 8 - \frac{1}{4}\right] = 2\pi \cdot \frac{19}{36} = \frac{19\pi}{18}.$$

?⟨P2,13,SN,2⟩?

3. ★ Encontre o volume da região sólida limitada abaixo pelo plano $z = 0$, lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Solução: Temos que a região sólida E está acima do plano $z = 0$, abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e limitado lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Notemos que podemos dividir a região sólida em quatro porções simétricas. Assim, levando em consideração a porção da região sólida E que está no primeiro octante, temos em coordenadas cilíndricas

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1 \text{ e } 0 \le z \le x^2 + y^2 = r^2.$$

Assim, o volume da região sólida E é:

$$V = \iiint_E 1\,dV = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{r^2} 1\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 zr\Big|_0^{r^2} dr\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_0^1 r^3\,dr = 4\cdot\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

?⟨P2,08,4⟩?

4. ♦ Determine o volume do sólido que está acima do plano xy, abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Temos que $0 \le z \le x^2 + y^2$. Como o sólido se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, devemos fazer a interseção desses dois cilindros, isto é,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Em coordenadas cilíndricas temos que

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z \\ dz\,dy\,dx &= r\,dz\,dr\,d\theta \end{aligned}$$

Da equação $x^2 + y^2 = 1$ temos que

$$r^2 = 1 = \pm 1,$$

como devemos ter $r \geq 0$, então nesse caso $r = 1$.

Da equação $x^2 + y^2 = 2x$ temos que

$$r^2 = 2r\,\cos\theta \Rightarrow r = 2\cos\theta.$$

Agora, sendo $x = \frac{1}{2}$ e $r = 1$ temos que

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Assim, em coordenadas cilíndricas temos que o sólido E é dado por

$$E = \{(\theta,\, r,\, z)|\, -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3},\, 1 \leq r \leq 2\cos\theta,\, 0 \leq z \leq r^2\}.$$

Então,

$$V = \iiint_E 1\,dV = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\theta} \int_0^{r^2} 1\,r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\theta} zr\Big|_0^r dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\theta} r^3\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^4}{4}\Big|_1^{2\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4\cos^4\theta - \frac{1}{4}\right) d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\cos^4\theta}_{\text{função par}}\, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{função par}}\, d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4\theta\,d\theta - 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4}\,d\theta$$

$$= 8\left[\frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta) + \frac{1}{32}\,\mathrm{sen}(4\theta)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{2}\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 8\left[\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{32}\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$= \pi + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\sqrt{3}}{8}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. ♦ Calcule a integral iterada.

?⟨ST-15.6-3⟩? **a)** $\displaystyle\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xz\, dydxdz$

?⟨ST-15.6-5⟩? **b)** $\displaystyle\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\, dxdzdy$

?⟨ST-15.6-7⟩? **c)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^y\int_0^x \cos(x+y+z)\, dzdxdy$

6. ♦ Calcule a integral tripla.

?⟨ST-15.6-9⟩?

a) $\displaystyle\iiint_E 2x\, dV$, onde $E = \{(x,y,z)|\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le \sqrt{4-y^2},$ $0 \le z \le y\}$.

?⟨ST-15.6-11⟩?

b) $\displaystyle\iiint_E 6xy\, dV$, onde E está abaixo do plano $z = 1+x+y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$.

?⟨ST-15.6-13⟩?

c) $\displaystyle\iiint_E y\, dV$, onde E é delimitado pelo cilindro parabólico $z = 1-y^2$ e pelos planos $z = 0$, $x = 1$ e $x = -1$.

?⟨ST-15.6-17⟩?

d) $\displaystyle\iiint_E x\, dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $x = 4y^2+4z^2$ e pelo plano $x = 4$.

?⟨ST-15.6-18⟩?

e) $\displaystyle\iiint_E z\, dV$, onde E é limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante.

?⟨HG-5.4-1a)⟩?

f) $\displaystyle\iiint_E xyz\ dxdydz$, onde E é o paralelepípedo $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, e $1 \le z \le 2$.

?⟨HG-5.4-1b)⟩?

g) $\displaystyle\iiint_E x\ dxdydz$, onde E é o conjunto $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ e $x + y \le z \le x + y + 1$.

?⟨HG-5.4-1c)⟩?

h) $\displaystyle\iiint_E \sqrt{1-z^2}\ dxdydz$, onde E é o conjunto $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 1$ e $0 \le y \le z$.

?⟨HG-5.4-1d)⟩?

i) $\displaystyle\iiint_E \sqrt{1-z^2}\ dxdydz$, onde E é o cubo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ e $0 \le z \le 1$.

?⟨HG-5.4-1e)⟩?

j) $\displaystyle\iiint_E\ dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2 + y^2 \le z \le 2x$.

?⟨HG-5.4-1f)⟩?

l) $\iiint\limits_E (x^2+z^2)\,dxdydz$, onde E é o cilindro $x^2+y^2 \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

?⟨HG-5.4-1g)⟩?

m) $\iiint\limits_E \,dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2+y^2 \leq z \leq 2x+2y-1$.

?⟨HG-5.4-1h)⟩?

n) $\iiint\limits_E y\,dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2+4y^2 \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

?⟨HG-5.4-1i)⟩?

o) $\iiint\limits_E x\,dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2+y^2 \leq 4$, $x \geq 0$ e $x+y \leq z \leq x+y+1$.

?⟨HG-5.4-1j)⟩?

p) $\iiint\limits_E 2z\,dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2+y^2 \leq 1$, $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$.

?⟨HG-5.4-1l)⟩?

q) $\iiint\limits_E x\,dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2-y^2 \leq z \leq 1-2y^2$.

?⟨HG-5.4-1m)⟩?

r) $\iiint\limits_E e^{x^2}\,dxdydz$, onde E é o conjunto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq z \leq 1$.

?⟨HG-5.4-1n)⟩?

s) $\iiint\limits_E x\,dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq x+y$.

?⟨HG-5.4-1o)⟩?

t) $\iiint\limits_E 2z\,dxdydz$, onde E é o conjunto $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$.

?⟨HG-5.4-1p)⟩?

u) $\iiint\limits_E 2z\,dxdydz$, onde E é o conjunto $4x^2+9y^2+z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$.

?⟨HG-5.4-1q)⟩?

v) $\iiint\limits_E \cos z\,\,dxdydz$, onde E é o conjunto $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ e $x-y \leq z \leq x+y$.

?⟨HG-5.4-1r)⟩?

w) $\iiint\limits_E (y-x)\,dxdydz$, onde E é o conjunto $4 \leq x+y \leq 8$, $\dfrac{1}{x} \leq y \leq \dfrac{2}{x}$, $y > x$ e $0 \leq z \leq \dfrac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x+y}}$.

7. ♦ Calcule as integrais mudando a ordem de integração de maneira apropriada.

?⟨GT-12.4-41⟩?

a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\,\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dxdydz$

?⟨GT-12.4-42⟩?

b) ★ $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\,dydxdz$

?⟨GT-12.4-43⟩?

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\ \operatorname{sen}(\pi y^2)}{y^2}\, dxdydz$

8. ♦ Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado.

?⟨HG-5.4-2a)⟩?

a) $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ e $0 \le z \le 5 - x^2 - 3y^2$.

?⟨HG-5.4-2b)⟩?

b) $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$ e $0 \le z \le x + y^2$.

?⟨HG-5.4-2c)⟩?

c) $x^2 + y^2 \le z \le 4$.

?⟨HG-5.4-2d)⟩?

d) $x^2 + 4y^2 \le z \le 1$.

?⟨HG-5.4-2e)⟩?

e) $x^2 + y^2 \le 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$.

?⟨HG-5.4-2f)⟩?

f) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \le 1$.

?⟨HG-5.4-2g)⟩?

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, $\quad (a > 0,\ b > 0\ e\ c > 0)$.

?⟨HG-5.4-2h)⟩?

h) $x^2 + y^2 \le z \le 4x + 2y$.

?⟨HG-5.4-2i)⟩?

i) $x^2 + y^2 \le 1$ e $x^2 + z^2 \le 1$.

?⟨HG-5.4-2l)⟩?

j) $(x - a)^2 + y^2 \le a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 4a^2$, $z \ge 0 \quad (a > 0)$.

?⟨HG-5.4-2m)⟩?

l) $x^2 + y^2 \le a^2$ e $x^2 + z^2 \le a^2 \ \ (a > 0)$.

?⟨HG-5.4-2n)⟩?

m) $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ e $z \ge \dfrac{a}{2} \quad (a > 0)$.

?⟨HG-5.4-2o)⟩?

n) $x^2 \le z \le 1 - y$ e $y \ge 0$.

?⟨HG-5.4-2p)⟩?

o) $x^2 + 2y^2 \le z \le 2a^2 - x^2 \ \ (a > 0)$.

?⟨HG-5.4-2q)⟩?

p) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \le 1$ e $z \ge x^2 + y^2$.

?⟨HG-5.4-2r)⟩?

q) $4x^2 + 9y^2 + z^2 \le 4$ e $4x^2 + 9y^2 \le 1$.

?⟨ST-15.6-19⟩?

r) O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$.

?⟨ST-15.6-22⟩?

s) O sólido limitado pelo paraboloide $x = y^2 + z^2$ e pelo plano $x = 16$.

?⟨ST-15.6-21⟩?

t) O sólido delimitado pelo cilindro $x = y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $x + z = 1$.

?⟨ST-15.6-33⟩?

9. ★ A figura mostra a região de integração da integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dzdydx.$$

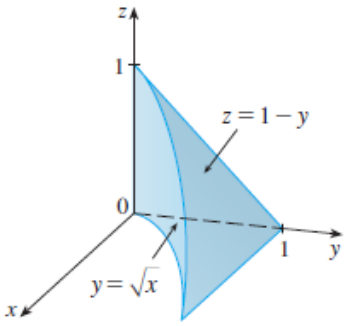
Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.

10. ♦ Ache o centro de massa de E, em que:

?⟨ES-17.6-17⟩?

a) A densidade de um ponto P de um sólido cúbico E de aresta a é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P a um vértice fixo do cubo.

?⟨ES-17.5-18⟩?



b) E é o tetraedro delimitado pelos planos coordenados e o plano $2x + 5y + z = 10$ e a densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional *à* distância do plano xz a P.

?⟨ST-15.6-53⟩?

11. ★ Determine a região E para a qual a integral

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\, dV$$

é máxima.

?⟨P2,10,QT,2⟩?

12. ♦ Considere a integral tripla iterada

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz dy dx.$$

a) Transforme a integral utilizando coordenadas cilíndricas.

b) Calcule a integral.

c) Descreva o sólido cujo volume é dado por essa integral.

13. ♦ Calcule as seguintes integrais triplas.

?⟨ST,15.7,17⟩?

a) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, em que E é a região que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.

?⟨ST,15.7,19⟩?

b) $\iiint_E y\, dV$, em que E é o sólido que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do plano $z = x + 2$.

?⟨ST,15.7,20⟩?

c) $\iiint_E x\, dV$, em que E está delimitidado pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 5$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

?⟨ST,15.7,21⟩?

d) $\iiint\limits_E x^2\,dV$, em que E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2+y^2=1$, acima do plano $z=0$ e abaixo do cone $z^2=4x^2+4y^2$.

?⟨ST,15.7,27⟩?

e) $\iiint\limits_E xyz\,dV$, em que E é o sólido limitado pelos paraboloides $z=x^2+y^2$, $z=8-x^2-y^2$.

?⟨P2,13,QT,2⟩?

f) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\,dzdxdy$

Referências

?ST? [1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6ª Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

?HG? [2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 2, 5ª Edição, 2002, Rio de Janeiro.

?GT? [3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10ª edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.

?ES? [4] E. W. Swokowski. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, 2ª Edição, Markron Books, 1995.