MA211 - Lista 04

Regra da Cadeia, Derivadas Direcionais e Vetor Gradiente

27 de março de 2018

?⟨ST-14.4-1/5⟩?

1. ♦ Use a Regra da Cadeia para determinar $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ ou $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$.

   a) $z = x^2y + xy^2, \quad x = 2 + t^2, \quad y = 1 - t^3.$

   b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = e^{2t}, \quad y = e^{-2t}.$

   c) ★ $z = \operatorname{sen} x \cos y, \quad x = \pi t, \quad y = \sqrt{t}.$

   d) $z = \operatorname{tg}^{-1}(x/y), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}.$

   e) $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t.$

?⟨ST-14.5-7/12⟩?

2. ♦ Utilize a Regra da Cadeia para determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

   a) $z = x^2y^3, \quad x = s\cos t, \quad y = s\operatorname{sen} t.$

   b) $z = \operatorname{arcsen}(x - y), \quad x = s^2 + t^2, \quad y = 1 - 2st.$

   c) ★ $z = \operatorname{sen}\theta\cos\phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2t.$

   d) $z = e^{x+2y}, \quad x = s/t, \quad y = t/s.$

   e) $z = e^r\cos\theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}.$

   f) $z = \operatorname{tg}(u/v), \quad u = 2s + 3t, \quad v = 3s - 2t.$

T-14.5-21,22,26⟩?

3. ♦ Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

   a) ★ $z = x^2 + xy^3, \quad x = uv^2 + w^3, \quad y = u + ue^w;$
   $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2, \quad v = 1, \quad w = 0.$

   b) $u = \sqrt{r^2 + s^2}, \quad r = y + x\,\cos t, \quad s = x + y\,\operatorname{sen} t;$
   $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $x = 1, \quad y = 2, \quad t = 0.$

   c) $Y = w\operatorname{tg}^{-1}(uv), \quad u = r + s, \quad v = s + t; \quad w = t + r$
   $\dfrac{\partial Y}{\partial r}, \quad \dfrac{\partial Y}{\partial s}, \quad \dfrac{\partial Y}{\partial t}$ quando $r = 1, \quad s = 0, \quad t = 1.$

?⟨ST-14.5-39⟩?

4. ★ O comprimento l, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em certo instante, as dimensões da caixa são $l = 1\ m$ e $w = h = 2\ m$. l e w aumentam a uma taxa de $2\ m/s$, ao passo que h diminui a uma taxa de $3\ m/s$. Nesse instante, determine as taxas nas quais as seguintes quantidades estão variando.

   a) O volume.

   b) A área da superfície.

   c) O comprimento da diagonal.

?⟨ST-14.5-49⟩?

5. ♦ Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

(Sugestão: Tome $u = x + at$, $v = x - at$.)

?⟨HG-12.1-2⟩?

6. ♦ Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$.

a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

b) Calcule $g'(0)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \dfrac{1}{3}$.

?⟨HG-12.1-6⟩?

7. ♦ Admita que, para todo (x, y),

$$4y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2.$$

Calcule $g'(t)$, sendo $g(t) = f(2\cos t, \operatorname{sen} t)$.

?⟨HG-12.1-7⟩?

8. ♦ Admita que, para todo (x, y),

$$4y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Prove que f é constante sobre a elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

?⟨HG-12.1-21⟩?

9. ♦ Seja $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$ e suponha $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 4$.

a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

b) Calcule $g'(0)$.

?⟨HG-12.2-2⟩?

10. ♦ Mostre que cada uma das equações a seguir define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$. Expresse $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ em termos de x e y.

a) $x^2 y + \operatorname{sen}(y) = x$

b) $y^4 + x^2 y^2 + x^4 = 3$

?⟨TG-11.4-29,30⟩?

11. ♦ Encontre os valores de $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ nos pontos indicados.

a) $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0, \quad (1, 1, 1)$.

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - 1 = 0, \quad (2, 3, 6)$.

?⟨TG-11.4-42⟩?

12. ♦ Suponha que substituamos coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ em uma função diferenciável $w = f(x, y)$.

a) Mostre que

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x \cos\theta + f_y \,\mathrm{sen}\,\theta$$

e

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x \,\mathrm{sen}\,\theta + f_y \cos\theta.$$

b) Resolva as equações no item (a) para expressar f_x e f_y em termos de $\partial w/\partial r$ e $\partial w/\partial\theta$.

c) Mostre que

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2.$$

?⟨P1-2008-4⟩?

13. ♦ Seja $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Mostre que

$$y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

?⟨T1-2013SN-3⟩?

14. ♦ Se $z = f(x, y)$ com $x = u + v$ e $y = u - v$, demonstre que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 2\frac{\partial f}{\partial x}.$$

15. ♦ Nos itens **(a) - (d)**: **(i)** determine o gradiente de f; **(ii)** calcule o gradiente no ponto P; e **(iii)** determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$.

?⟨St,14.6,7⟩?

a) ★ $f(x, y) = 5xy^2 - 4x^3y, \quad P = (1, 2), \quad \mathbf{u} = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$.

?⟨St,14.6,8⟩?

b) $f(x, y) = y \ln x, \quad P = (1, -3), \quad \mathbf{u} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

?⟨St,14.6,9⟩?

c) $f(x, y, z) = xe^{2yz}, \quad P = (1, -3), \quad \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

?⟨St,14.6,10⟩?

d) $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}, \quad P = (1, 3, 1), \quad \mathbf{u} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

?⟨HG,11.5,1⟩?

16. ♦ Calcule $\nabla f(x, y)$.

a) $f(x, y) = x^2 y$

b) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

c) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

d) $f(x, y) = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$

?⟨HG,11.5,2⟩?

17. ♦ Defina gradiente de uma função de três variáveis. Calcule $\nabla f(x, y, z)$.

a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + 1)^{z^2}$

d) $f(x, y, z) = z\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$

?⟨HG,13.4,1⟩?

18. ♦ Calcule $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$, sendo dados

a) $f(x,y) = x^2 - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1,2)$ e $\mathbf{u}$ o versor de $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

b) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$, $(x_0, y_0) = (1,1)$ e $\mathbf{u}$ o versor de $(3,4)$.

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, $(x_0, y_0) = (3,3)$ e $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

d) $f(x,y) = xy$, $(x_0, y_0) = (1,1)$ e $\mathbf{u}$ o versor de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

19. ♦ Determine a derivada direcional da função no ponto dado e na direção do vetor $\mathbf{v}$.

?⟨St,14.6,11⟩?

a) $f(x,y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $\quad (3,4)$, $\quad \mathbf{v} = (4,-3)$.

?⟨St,14.6,13⟩?

b) $g(p,q) = p^4 - p^2q^3$, $\quad (2,1)$, $\quad \mathbf{v} = (-1,2)$.

?⟨St,14.6,15⟩?

c) $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $\quad (0,0,0)$, $\quad \mathbf{v} = (5,1,-2)$.

?⟨St,14.6,16⟩?

d) $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}$, $\quad (3,2,6)$, $\quad \mathbf{v} = (-1,-2,2)$.

?⟨P1,SM,14,1c⟩?

20. ★ Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, & \text{se } xy = 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que f não possui derivada direcional em $(0,0)$ na direção de um vetor $\mathbf{v} = (a,b)$ com $a^2 + b^2 = 1$ e $ab \neq 0$.

?⟨P1,06,3⟩?

21. ♦ Determine as direções em que a derivada direcional da função $f(x,y) = x^2 + \operatorname{sen} xy$ no ponto $(1,0)$ tem valor 1.

22. ♦ Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

?⟨St,14.6,21⟩?

a) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$, $\quad (2,4)$.

?⟨St,14.6,23⟩?

b) $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$, $\quad (1,0)$.

?⟨St,14.6,24⟩?

c) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{z}$, $\quad (1,1,-1)$.

?⟨St,14.6,25⟩?

d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad (3,6,-2)$.

?⟨St,14.6,26⟩?

e) $f(x,y,z) = \operatorname{tg}(x + 2y + 3z)$, $\quad (-5,1,1)$.

?⟨P1,10,2b⟩?

23. ♦ A superfície de um lago é representada por uma região D no plano xy, tal que a profundidade (em pés) sob o ponto correspondente a (x,y) é dada por

$$f(x,y) = 300 - 2x^2 - 3y^2.$$

Se um nadador está no ponto $(4,9)$, em que direção deve nadar para que a profundidade sob ele decresça mais rapidamente?

?⟨ST,14.6,32⟩?

24. ♦ A temperatura em um ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2},$$

em que T é medido em °C e x, y e z em metros.

a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P = (2, -1, 2)$ em direção ao ponto $(3, -3, 3)$.

b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P?

c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P.

?⟨ST,14.6,33⟩?

25. ♦ Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

a) Determine a taxa de variação do potencial em $P = (3, 4, 5)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?

c) Qual a taxa máxima de variação em P?

?⟨HG,13.2,1⟩?

26. ♦ Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada, no ponto dado.

a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$, em $(1, -1, 1)$.

b) $2xyz = 3$, em $\left(\frac{1}{2}, 1, 3\right)$.

c) $ze^{x-y} + z^3 = 2$ em $(2, 2, 1)$.

?⟨ST,44.6,41⟩?

d) $x^2 - 2y^2 + z^2 + yz = 2$ em $(2, 1, -1)$.

?⟨HG,13.2,2⟩?

27. ★ A função diferenciável $z = f(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

?⟨ST,14.6,49⟩?

28. ♦ Mostre que a equação do plano tangente ao elipsoide $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 = 1$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

?⟨P1,SM,13,3⟩?

29. ♦ Determine os pontos da superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $3x - y + 3z = 1$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

?⟨ST-14.5-7/12⟩?

2. Utilize a Regra da Cadeia para determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

c) $z = \operatorname{sen}\theta\cos\phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2t.$

Solução: Utilizando a Regra de Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial s} \\ &= (\cos\theta\cos\phi)(t^2) + (\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\phi))(2st) \\ &= t^2\cos(st^2)\cos(s^2t) - 2st\operatorname{sen}(st^2)\operatorname{sen}(s^2t)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= (\cos\theta\cos\phi)(2st) + (\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\phi))(s^2) \\ &= 2st\cos(st^2)\cos(s^2t) - s^2\operatorname{sen}(st^2)\operatorname{sen}(s^2t).\end{aligned}$$

?⟨P1-2008-4⟩?

13. Seja $g(x,y) = f(x^2+y^2)$, onde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Mostre que

$$y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Solução: Observe que f é uma função de uma variável. Logo, utilizando a Regra da Cadeia para funções de uma variável, obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f'(x^2+y^2)(2x)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f'(x^2+y^2)(2y).$$

Portanto

$$y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

?⟨P1,SM,14,1c⟩?

20. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{se } xy = 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que f não possui derivada direcional em $(0,0)$ na direção de um vetor $\mathbf{v} = (a,b)$ com $a^2 + b^2 = 1$ e $ab \neq 0$.

Solução: Seja $\mathbf{v} = (a,b)$ um vetor unitário (isto é, $a^2 + b^2 = 1$), em que $ab \neq 0$. A derivada direcional em $(0,0)$ na direção do vetor unitário $\mathbf{v}$ existe se o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+ah, 0+bh) - f(0,0)}{h}$$

existir. Para $h \neq 0$, temos $(ah)(bh) \neq 0$. Logo $f(ah,bh) = 1$. Assim, o limite em questão se reduz a

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h},$$

e esse limite não existe. Como o vetor $\mathbf{v}$ satisfazendo as hipóteses foi tomado arbitrariamente, concluímos que f não possui derivada direcional em $(0,0)$ na direção de nenhum vetor $\mathbf{v} = (a,b)$ que satisfaça $a^2 + b^2 = 1$ e $ab \neq 0$.

?⟨ST,14.6,33⟩?

25. Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

a) Determine a taxa de variação do potencial em $P = (3,4,5)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?

c) Qual a taxa máxima de variação em P?

Solução:

a) Queremos determinar o valor de $D_{\mathbf{u}}f(P)$, em que $\mathbf{u}$ é o vetor unitário que tem mesma direção de $\mathbf{v}$, isto é, $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$. Como V é diferenciável, segue que $D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla V(P) \cdot \mathbf{u}$. Observe que $\nabla V(x,y,z) = (10x - 3y + yz, -3x + xz, xy)$. Logo $\nabla V(P) = (38,6,12)$. Portanto,

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla V(P) \cdot \mathbf{u} = (38,6,12) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = \frac{32\sqrt{3}}{3}.$$

b) A direção em que V varia mais rapidamente no ponto P é a direção do gradiente de V no ponto P, isto é, na direção de $\nabla V(P) = (38,6,12)$. Observe que aqui não é necessário normalizar o vetor, pois o exercício pede apenas a direção.

c) A taxa de variação máxima é $|\nabla V(P)| = 2\sqrt{406}$.

Referências

?ST? [1] J. Stewart. *Cálculo*, Volume 2, 6^a Edição, São Paulo, Pioneira/ Thomson Learning.

?HG? [2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, Volume 2, 5^a Edição, 2002, Rio de Janeiro.

?GT? [3] G. B. Thomas. *Cálculo*, Volume 2, 10^a edição, São Paulo, Addison-Wesley/Pearson,2002.

?EP? [4] C.H,Edwards Jr; D. E. Penney, *Cálculo com Geometria Analítica*, Volumes 2 e 3, Prentice Hall do Brasil, 1997.

?ES? [5] E. W. Swokowski, *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, 2^a Edição, Markron Books, 1995.