

# Polos Olímpicos de Treinamento

## Curso de Combinatória - Nível 2

Prof. Bruno Holanda

Aula 1

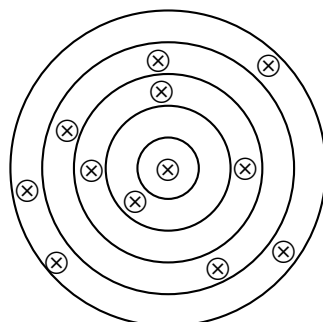
### Lógica

Nos últimos anos, a participação brasileira em competições internacionais de matemática vem melhorado significativamente. E uma das consequências do sucesso de nossos alunos é o crescimento da demanda de interessados em aprender mais sobre o que é a olimpíada e que tipo de problemas são abordados em suas competições.

O grande diferencial de problemas de olimpíada de matemática para os problemas usuais, são seu alto nível de exigência do uso raciocínio lógico. Portanto, em muitos casos, a matemática aparece como uma ferramenta para desenvolver a argumentação de ideias abstratas.

Este é o primeiro de dois artigos escritos com o objetivo de apresentar tais problemas, mesmo sem desenvolver uma teoria matemática propriamente dita. Vamos nos focar diretamente nas **ideias**.

**Problema 1.** Quatro garotos jogam tiro ao alvo. Cada um deles atirou três vezes. No alvo abaixo, pode-se ver os lugares atingidos. A pontuação é 6 para o centro e diminui um ponto para cada nível mais distante.



Se os quatro garotos empataram, determine:

- (a) a pontuação total de cada jogador.

(b) a pontuação dos três tiros de cada jogador.

**Solução.** A soma de todos os pontos obtidos foi  $6+5+4 \times 3+3 \times 3+2 \times 4 = 40$ . Como todos empataram, cada um deve ter feito exatamente 10 pontos (isso responde o item *a*). Além disso é importante perceber que ninguém errou nenhum dos tiros, já que há exatamente 12 dardos no alvo.

Note que um dos jogadores (digamos *A*) acertou um dos dardos no centro do alvo, fazendo 6 pontos. Para completar os 10 pontos ele deve ter feito mais 4 pontos. Como é impossível fazer apenas 1 ponto, ou dele ter errado, só nos resta a possibilidade dele ter feito 2 pontos nos dois outros tiros. (Continue a solução)

O objetivo de outro tipo de problema é achar um exemplo que cumpra alguma propriedade.

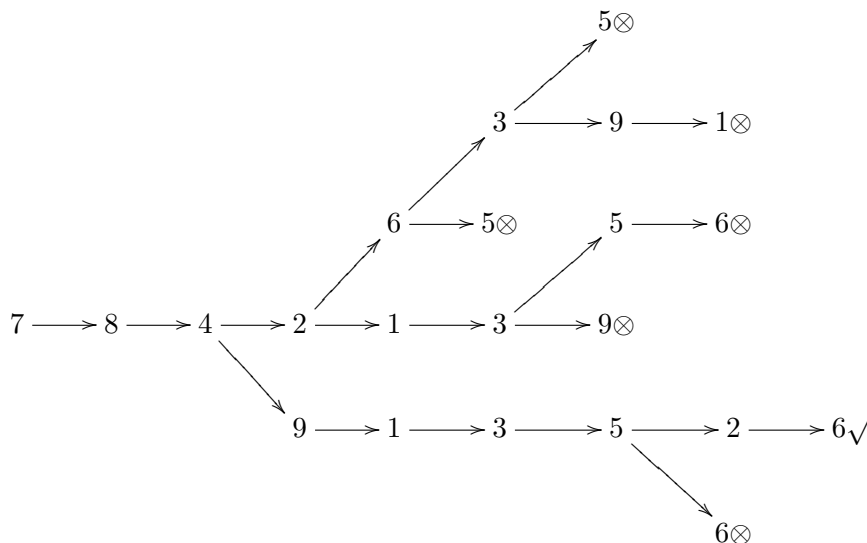
**Problema 2.** (OBM 1998) Encotre uma maneira de se escrever os algarismos de 1 a 9 em seqüência, de forma que os números determinados por quaisquer dois algarismos consecutivos sejam divisíveis por 7 ou por 13.

**Solução.** Primeiramente vamos listar todos os números de dois algarismos que são múltiplos de 7 ou 13. São eles:

Múltiplos de 7: 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98

Múltiplos de 13: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91

Como não podemos repetir nenhum algarismo, devemos descartar o 77. Por outro lado, nenhum dos números acima (excluindo o 77) termina em 7. Daí, pode-se ter certeza que o primeiro número da lista deve ser 7. Para saber as possíveis listas, usamos um diagrama de árvore:



Representamos com um  $\otimes$  quando não foi possível continuar a lista sem repetir nenhum dígito. Assim, o modo correto de se escrever os algarismo é: 784913526.

Em alguns casos é necessário o uso de variáveis para resolver um problema. Isto acontece pois existem informações não especificadas no enunciado, e o uso de letras se mostra uma forma inteligente e fácil de trabalhar com valores desconhecidos. A seguir vamos resolver um problema que apareceu em uma olimpíada russa de 1995.

**Problema 3.** (Rússia 1995) Um trem deixa Moscou às  $x$  horas e  $y$  minutos, chegando em Saratov às  $y$  horas e  $z$  minutos. O tempo da viagem foi de  $z$  horas e  $x$  minutos. Ache todos os possíveis valores para  $x$ .

**Solução.** Das condições do problema, temos que:

$$\begin{aligned}(60y + z) - (60x + y) &= 60z + x \\ \Rightarrow 60(y - x - z) &= x + y - z.\end{aligned}$$

Com isso, podemos garantir que  $x + y - z$  é um múltiplo de 60. Por outro lado, como  $0 \leq x, y, z \leq 23$ , o único valor possível para  $x + y - z$  é 0. Ou seja,  $x + y = z$ . Além disso, na equação inicial temos que  $60(y - x - z) = 0$ . Daí,  $y = x + z$ . Logo, o único valor de  $x$  que garante essas igualdades é  $x = 0$ .

É importante perceber que no exemplo anterior que apenas o uso de letras não seria o suficiente para resolver o problema. O fundamental para resolver as equações acima era o significado das letras: números inteiros entre 0 e 60. Sem esta restrição o problema apresentaria infinitas soluções. Então fica a dica: nunca se **esqueça do significado das variáveis que estiver usando**, se são dígitos, números inteiros, racionais ou seja qual for a propriedade. Lembre-se que esta propriedade terá papel importante na solução do problema.

Organizar as informações também é útil na maioria dos problemas, como veremos no exemplo a seguir.

**Problema 4.** Paulo possui 13 caixas vermelhas e cada uma delas está vazia ou contém 7 caixas azuis. Cada caixa azul está vazia ou contém 7 caixas verdes. Se ele possui 145 caixas vazias, quantas caixas ele possui no total?

**Solução.** Vamos montar uma tabela que ajudará na solução do problema

	Vermelhas	Azuis	Verdes
Cheias	$x$	$y$	0
Vazias	$13 - x$	$7x - y$	$7y$
Total	13	$7x$	$7y$

Suponha que o número de caixas vermelhas cheias seja  $x$  e que o número de caixas azuis cheias seja  $y$ . Portanto, temos  $7x$  caixas azuis e  $7y$  caixas verdes. Note também que todas as caixas verdes estão vazias. Dessa forma, o total de caixas vazias é  $(13 - x) + (7x - y) + 7y = 145$ . Assim, podemos concluir que  $x + y = 22$ . Como o número total de caixas é  $13 + 7(x + y)$ , a resposta correta será  $13 + 7 \times 22 = 167$ .

## Problemas Propostos

**Problema 5.** Samuel possui três irmãos a mais do que irmãs. Samila, a irmã de Samuel, possui o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Quantos filhos (homens e mulheres) possui o pai de Samuel e Samila?

**Problema 6.** Em um hotel para cães e gatos, 10% dos cães acham que são gatos e 10% dos gatos acham que são cães. Verificou-se também que 20% dos animais acham que são gatos. Se no hotel existem 10 gatos, quantos são os cães?

**Problema 7.** É possível cortar um tabuleiro  $39 \times 55$  em vários retângulos  $5 \times 11$ ?

**Problema 8.** No fim de 1994, Neto tinha metade da idade de seu avô. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completou em 2006?

**Problema 9.** Um professor propõe 80 problemas a um aluno, informando que ele ganha 5 pontos ao acertar cada problema corretamente e perde 3 pontos caso não resolva o problema. No final, o aluno tinha 8 pontos. Quantos problemas ele resolveu corretamente?

**Problema 10.** (Leningrado 1987) Na ilha de Anchúria existem quatro tipos de notas: 1\$, 10\$, 100\$ e 1000\$. Podemos obter 1\$ milhão com exatamente 500.000 notas?

**Problema 11.** Você tem uma lista de números reais, cuja soma é 40. Se você trocar todo número  $x$  da lista por  $1 - x$ , a soma dos novos números será 20. Agora, se você trocar todo número  $x$  por  $1 + x$ , qual será o valor da soma?

**Problema 12.** (Eslovênia 1992) Complete a tabela abaixo de modo que:

- i. A soma de quaisquer três vizinhos seja a mesma.
- ii. A soma total dos números seja 171.

			15				13				
--	--	--	----	--	--	--	----	--	--	--	--

**Problema 13.** Trabalhando juntos Alvo e Ivo, pintam uma casa em três dias; Ivo e Eva pintam a mesma casa em quatro dias; Alvo e Eva em seis dias. Se os três trabalharem juntos, quantos em quantos dias pintarão a casa?

**Problema 14.** (Rioplataense 1997) Em cada casa de um tabuleiro  $4 \times 4$  é colocado um número secreto. Sabe-se que a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é 1. Com essa informação é possível determinar a soma dos números escritos nos quatro cantos? E a soma dos quatro números escritos no centro? Se for, quais são essas somas?

## Dicas e Soluções

6. Construa uma tabela, tente usar apenas uma variável!
7. Não. Demonstre que não é possível cobrir um dos lados do tabuleiro.
10. Sejam  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $w$  as quantidades de notas. Monte um sistema com duas equações e use o fato de 500.000 não ser múltiplo de 9.
13. Use o fato de Alvo e Ivo pintarem um terço da casa em um dia.
14. Separe o tabuleiro em três regiões. Não se preocupe com os números, mas com a soma dos números nestas regiões espertas.

# Polos Olímpicos de Treinamento

## Curso de Combinatória - Nível 2

Prof. Bruno Holanda

# Aula 2

## Lógica II

Quando lemos um problema de matemática imediatamente podemos ver que ele está dividido em duas partes: *as informações* e *as perguntas*. Você vai aprender, durante sua jornada como olímpico, que para resolver um problema de matemática você deve conhecer várias técnicas. Uma das mais básicas é saber organizar as informações que são oferecidas pelos problemas.

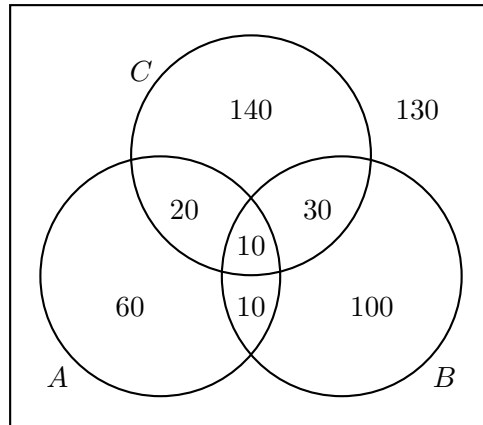
**Problema 1.** (OCM 1990) A pesquisa realizada com as crianças de um conjunto habitacional, que apurou as preferências em relação aos três programas de televisão: *Alegre Amanhã* (designado por  $A$ ), *Brincolândia* (designado por  $B$ ) e *Criança Feliz* (designado por  $C$ ) indicou os seguintes resultados:

Prog	$A$	$B$	$C$	$A$ e $B$	$A$ e $C$	$B$ e $C$	$A, B$ e $C$	Nenhum
Pref	100	150	200	20	30	40	10	130

Pergunta-se:

- Quantas crianças foram consultadas?
- Quantas crianças apreciam apenas um programa?
- Quantas crianças apreciam mais de um programa?

**Solução.** Você deve ter percebido que existe um grande número de informações dadas. De certa forma, essas informações já estão organizadas em uma tabela. Mas para resolver o problema vamos mudar nossa representação, nosso *ponto de vista*. Vamos construir um diagrama de Venn, o popular diagrama de *conjuntos*:



Podemos agora responder às perguntas facilmente:

- a) Foram consultadas  $10 + 10 + 20 + 30 + 60 + 100 + 140 + 130 = 500$  crianças.
- b)  $60 + 100 + 140 = 300$  crianças gostam de apenas um programa.
- c)  $10 + 10 + 20 + 30 = 70$  crianças apreciam mais de um programa. □

O próximo exemplo usa apenas o raciocínio lógico.

**Problema 2.** (Torneio das Cidades) Carlixtos possui seis moedas, sendo uma delas falsa. Nós não sabemos o peso de uma moeda falsa e nem o peso de uma moeda verdadeira, sabemos apenas que as moedas verdadeiras possuem todas o mesmo peso e que o peso da moeda falsa é diferente. Dispomos de uma balança de dois pratos. Mostre como é possível descobrir a moeda falsa usando apenas três pesagens.

**Solução.** Sejam  $A, B, C, D, E$  e  $F$  as moedas. Primeiramente fazemos a pesagem  $(AB) \llcorner \llcorner (CD)$  (que significa  $A$  e  $B$  em um prato e  $C$  e  $D$  em outro). Se  $(AB) = (CD)$  (ou seja, se equilibrar), então ou  $E$  ou  $F$  é falsa. Neste caso fazemos a pesagem  $(A) \llcorner \llcorner (E)$ . Se equilibrar,  $F$  é falsa. Caso contrário,  $E$  é falsa.

Agora, se não houve equilíbrio em  $(AB) \llcorner \llcorner (CD)$ , então  $E$  e  $F$  são verdadeiras. Fazemos então a pesagem  $(AB) \llcorner \llcorner (EF)$ . Se equilibrar, ou  $C$  ou  $D$  é falsa. Neste caso, fazemos a pesagem  $(A) \llcorner \llcorner (C)$ . Se equilibrar,  $D$  é falsa. Caso contrário,  $C$  é falsa.

Para finalizar, se  $(AB) \neq (EF)$ , então ou  $A$  ou  $B$  é falsa. Neste caso, fazemos a pesagem  $(A) \llcorner \llcorner (C)$ . Se equilibrar  $B$  é falsa. Caso contrário,  $A$  é falsa.

Continuando o processo de desenvolvimento do raciocínio, vamos resolver a seguir duas questões relacionadas com a seguinte pergunta: *Será possível?* Ao longo do ano você verá

como essa pergunta é frequente na olimpíada. Na verdade, ela é recorrente em toda a matemática. Aqui também vamos desenvolver uma das técnicas mais poderosas usadas para resolver problemas de matemática. Que é a idéia de **prova por absurdo**.

**Problema 3.** (Ivan Borsenco) É possível cortar um retângulo  $5 \times 6$  em oito retângulos distintos com dimensões inteiras e lados paralelos aos lados do retângulo maior?

**Solução.** Vamos assumir que todos os retângulos são distintos. Os retângulos de menor área possível são:

Área 1: $1 \times 1$	Área 4: $2 \times 2$ e $1 \times 4$
Área 2: $1 \times 2$	Área 5: $1 \times 5$
Área 3: $1 \times 3$	Área 6: $2 \times 3$ e $1 \times 6$

Note que a menor área coberta por oito retângulos distintos deve ser pelo menos  $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31 > 30$ . Logo é impossível obter 8 retângulos distintos.

É importante tomar cuidado com esse tipo de enunciado pois, em alguns casos, é possível.

**Problema 4.** (Torneio das Cidades 2001) Podemos trocar um inteiro positivo  $n$  pelo produto  $a \times b$  onde  $a$  e  $b$  são inteiros positivos tais que  $a + b = n$ . Podemos obter 2001 a partir de 22, por uma seqüência de trocas?

**Solução.** Note que  $2001 = 3 \times 667$  pode ser obtido de  $3 + 667 = 670$ , que pode ser obtido de  $67 + 10 = 77$  que pode ser obtido de  $7 + 11 = 18$ . Por outro, todo número  $n - 1 = (n - 1) \times 1$  pode ser obtido de  $(n - 1) + 1 = n$ . Assim, basta seguir a seqüência abaixo:

$$22 \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow 19 \rightarrow 18 \rightarrow 77 \rightarrow 670 \rightarrow 2001.$$

## Problemas Propostos

**Problema 5.** São dadas 4 moedas aparentemente iguais. Sabe-se que uma delas é falsa (tem peso diferente das demais e não se sabe se ela é mais leve ou mais pesada). Mostre como descobrir a moeda falsa com 2 pesagens em uma balança de dois pratos.

**Problema 6.** Mostre que é possível dispor os números de 1 a 16 em seqüência de modo que a soma de dois números vizinho seja sempre um número quadrado perfeito.



**Problema 7.** Victor e Maria começam a trabalhar no mesmo dia. Victor trabalha 3 dias seguidos e depois tem um dia de descanso. Maria trabalha 7 dias seguidos e descansa os outros 3. Quantos dias de descanso em comum tiveram os dois durante os 1000 primeiros dias.

**Problema 8.** Como recortar um retângulo  $3 \times 13$  em treze retângulos menores de lados inteiros distintos?

**Problema 9.** (Olimpiada de Maio) Num ano que tem 53 sábados, que dia da semana é 12 de maio? Diga todas as possibilidades.

**Problema 10.** Um número é dito *lindo* se é divisível por cada um dos seus dígitos não nulos. Qual é a maior quantidade de números lindos consecutivos que pode existir?

**Problema 11.** (Búlgaria 2005) Ivo escreve todos os inteiros de 1 a 100 (inclusive) em cartas e dá algumas delas para Iana. Sabe-se que quaisquer duas destas, uma de Ivo e outra de Iana a soma dos números não está com Ivo e o produto não está com Iana. Determine o número de cartas de Iana sabendo que a carta 13 está com Ivo.

**Problema 12.** (Rússia 1999) Mostre que os números de 1 a 15 não podem ser divididos em um grupo  $A$  de dois elementos e um grupo  $B$  de 13 elementos tais que a soma dos elementos de  $B$  seja igual ao produto dos elementos de  $A$ .

**Problema 13.** (Seletiva Rioplatense 2004) Em cada casa de um tabuleiro  $8 \times 8$  escrevemos um número inteiro. Sabe-se que para cada casa, a soma dos seus vizinhos é 1. Encontre a soma de todos os números do tabuleiro.

Obs: Consideramos vizinhas casas com um lado em comum.

**Problema 14.** Etevaldo pensou em cinco números distintos e escreveu no quadro todos dez números que são somas de dois destes cinco números. Será que Ovozildo pode descobrir os números que Etevaldo pensou observando apenas os números escritos no quadro?

## Dicas e Soluções

6. Liste todas as possíveis somas cujo resultado é um quadrado perfeito. Observe que a sequência deve ser iniciada por 8 ou 16.
7. Use período 20.
11. (Início da solução) Iana possui pelo menos uma carta, digamos a carta com o número  $k$ . Se 1 está com Ivo, o produto  $1.k = k$  não está com Iana, que é uma contradição. Logo, 1 está com Iana.  
 Se 12 está com Ivo, a soma  $1 + 12 = 13$  não está com Ivo, que também é uma contradição. Logo, 12 está com Iana.  
 Agora, se as cartas 3 e 4 estiverem com pessoas diferentes o produto  $3.4 = 12$  não estará com Iana. Porém, acabamos de ver que 12 está com Iana. Daí, 3 e 4 estão com a mesma pessoa. Se ambas estiverem com Ivo, a soma  $1 + 3 = 4$  não está com Ivo, contradição. Logo, 3 e 4 estão com Iana. Conseqüentemente, 10 e 9 também estão com Iana, pois a soma  $10 + 3 = 9 + 4 = 13$  estão com Ivo.

12. Sejam  $a$  e  $b$  os dois elementos de  $A$ . Pela condições do problema podemos montar a seguinte equação:

$$(1 + 2 + \dots + 15) - a - b = ab$$

$$\Rightarrow 120 = ab + a + b \Rightarrow 121 = (a + 1)(b + 1).$$

Como  $a$  e  $b$  são inteiros menores que 16, a única solução possível para a equação é  $a = b = 10$ . Que é um absurdo, já que  $a$  e  $b$  são elementos distintos.

13. Observe as casas marcadas no tabuleiro abaixo:

	★	★			★	★	
★			★	★			★
★							★
		★			★		
		★			★		
★							★
★			★	★			★

Se olharmos para os vizinhos das casas marcadas acima, vemos que eles cobrem todo o tabuleiro e de maneira disjunta! Como a soma dos vizinhos de cada casa é 1, a soma total dos números do tabuleiro será igual ao número de casas marcadas, que é 20.

14. Sim, é possível. Sejam  $a < b < c < d < e$  os números escolhidos por Etevaldo. A soma dos números escritos no quadro é igual ao quádruplo da soma  $S = a + b + c + d + e$ . Podemos escolher o maior e o menor valor escrito no quadro. Somando estes valores

e multiplicando-o por quatro obtemos  $4S - 4c$ . Assim, é possível achar o valor de  $c$ . Note que os três maiores valores escritos por Etevaldo são  $e + d > e + c > d + c$ . Daí, fazendo  $(e + d) + (e + c) - (d + c) = 2e$  é possível achar o valor de  $e$ . Mais ainda, como conhecemos  $e + d$ , conseqüentemente, também achamos  $d$ . De modo análogo, observando os três menores valores ( $a + b < a + c < b + c$ ) é possível determinar  $a$  e  $b$ .

## Combinatória 02 - Lógica 2

**Problema 5.** São dadas 4 moedas aparentemente iguais. Sabe-se que uma delas é falsa (tem peso diferente das demais e não se sabe se ela é mais leve ou mais pesada). Mostre como descobrir a moeda falsa com 2 pesagens em uma balança de dois pratos.

**Solução.** Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  as moedas. Primeiramente pesamos  $A$  e  $B$ . Se a balança equilibrar, então ou  $C$  ou  $D$  são falsas. Neste caso pesamos  $A$  e  $C$ : se equilibrar  $D$  é falsa, caso contrário  $C$  é falsa. Agora, se a pesagem de  $A$  e  $B$  não equilibrar a balança então ou  $A$  ou  $B$  são falsas. Fazemos então a pesagem de  $A$  e  $C$ . Se equilibrar então  $B$  é falsa, caso contrário  $A$  é falsa.

**Problema 6.** Mostre que é possível dispor os números de 1 a 16 em sequência de modo que a soma de dois números vizinho seja sempre um número quadrado perfeito.

**Solução.** Basta tomar a sequência:

$$8 - 1 - 15 - 10 - 6 - 13 - 12 - 4 - 5 - 11 - 14 - 2 - 7 - 9 - 16$$

**Problema 7.** Victor e Maria começam a trabalhar no mesmo dia. Victor trabalha 3 dias seguidos e depois tem um dia de descanso. Maria trabalha 7 dias seguidos e descansa os outros 3. Quantos dias de descanso em comum tiveram os dois durante os 1000 primeiros dias.

**Solução.** O primeiro dia de trabalho de Victor é da forma  $(3 + 1)k + 1 = 4k + 1$  e o primeiro dia de trabalho de Maria é da forma  $(7 + 3)k' + 1 = 10k' + 1$ .

Fazendo  $10k' + 1 = 4k + 1$  temos  $5k' = 2k$  e então  $k' = 2t$ ,  $k = 5t$  para algum  $t$  natural. Sendo assim  $10k' + 1 = 4k + 1 = 20t + 1$ .

Isto é, os dias em que os dois começam a trabalhar juntos são da forma  $20t + 1$ .

Temos então um ciclo de 20 dias.

Nos primeiros 20 dias Victor descansa nos dias 4, 8, 12, 16, 20 e Maria descansa nos dias 8, 9, 10, 18, 19 e 20.

Então há 2 dias de descanso em comum a cada ciclo de 20 dias.

Portanto, nos primeiros 1000 dias há  $2 \times \frac{1000}{20} = 100$  dias de descanso em comum.

---

**Problema 8.** Como recortar um retângulo  $3 \times 13$  em treze retângulos menores distintos?

**Solução.** A área total é  $3 \times 13 = 39$ . Vamos pensar nos retângulos distintos de menor área.

Área 1:  $1 \times 1$

Área 2:  $1 \times 2$

Área 3:  $1 \times 3$

Área 4:  $2 \times 2$  e  $1 \times 4$

Área 5:  $1 \times 5$

Área 6:  $2 \times 3$  e  $1 \times 6$

Área 7:  $1 \times 7$

Área 8:  $2 \times 4$  e  $1 \times 8$

Somando as áreas dos 11 retângulos de menor área temos uma área de  $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 + 8 + 8 = 54 > 39$ . Dessa forma, 13 retângulos distintos sempre terão área total maior que 39 e não é possível fazer a divisão desejada.

**Problema 9.** (Olimpiada de Maio) Num ano que tem 53 sábados, que dia da semana é 12 de maio? Diga todas as possibilidades.

**Solução.** Veja que  $365 = 52 \times 7 + 1$ . Logo, o ano tem 52 semanas e 1 dia. Para que ocorram 53 sábados, o dia que sobra - o último dia do ano - deve ser um sábado. Como o último dia do ano é da forma  $7k+1$  ( $k = 52$ ), concluímos que todo dia da forma  $7k+1$  também será sábado.

Agora note que Janeiro tem 31 dias, Fevereiro tem 28, Março tem 31 e Abril 30. Dessa forma, como  $31 + 28 + 31 + 30 + 12 = 132$ , 12 de maio é o  $132^{\text{o}}$  dia do ano. Como  $134 = 7 \times 19 + 1$  o dia 14 de maio é um sábado e portanto 12 de maio é uma quinta-feira.

**Problema 10.** Um número é dito *lindo* se é divisível por cada um dos seus dígitos não nulos. Qual é a maior quantidade de números *lindos* que pode existir?

**Solução.** Existem infinitos números lindos. Basta considerar os números da forma  $222 \dots 22$  em que o número de dígitos varia entre os naturais. Esse número será sempre divisível por seu dígito 2.

**Problema 11.** (Búlgaria 2005) Ivo escreve todos os inteiros de 1 a 100 (inclusive) em cartas e dá algumas delas para Lana. Sabe-se que para quaisquer duas destas, uma de Ivo e outra de Lana, a soma dos números não está com Ivo e o produto não está com Lana. Determine o número de cartas de Lana sabendo que a carta 13 está com Ivo.

**Solução.** Lana possui pelo menos uma carta, digamos a carta com o número  $k$ . Se 1 está com Ivo, o produto  $1 \cdot k = k$  não está com Lana, que é uma contradição.

Logo, 1 está com Lana.

Se 12 está com Ivo, a soma  $1 + 12 = 13$  não está com Ivo, que também é uma contradição. Logo, 12 está com Lana.

---

Agora, se as cartas 3 e 4 estiverem com pessoas diferentes o produto  $3 \cdot 4 = 12$  não estará com lã. Porém, acabamos de ver que 12 está com lã. Daí, 3 e 4 estão com a mesma pessoa. Se ambas estiverem com lvo, a soma  $1 + 3 = 4$  não está com lvo, contradição. Logo, 3 e 4 estão com lã. Conseqüentemente, 10 e 9 também estão com lã, pois a soma  $10 + 3 = 9 + 4 = 13$  estão com lvo.

Agora, veja que se  $r$  está com lã então  $13 + r$  não está com lvo e portanto está com lã. Do mesmo modo,  $(13 + r) + 13 = 13 \cdot 2 + r$  está com lã e o mesmo vale para  $13 \cdot 3 + r$ . De modo geral, se  $r$  está com lã então todos os números da forma  $13 \cdot k + r$  estão com lã. Sendo assim, já vimos que  $13k + 1, 13k + 3, 13k + 4, 13k + 12$  estão com lã.

Se 2 estiver com lvo então  $2 + 3 = 5$  está com lã. Daí  $5 \cdot 2 = 10$  está com lvo, do mesmo modo  $10 \cdot 3 = 30$  e conseqüentemente  $30 \cdot 3 = 90$  está com lvo. Mas  $90 = 13 \cdot 6 + 12$  e como vimos esse número está com lã, contradição. Logo, 2 está com lã e conseqüentemente  $13k + 2$  está com lã.

Veja que  $5 \cdot 6 = 30 = 13 \cdot 2 + 4$  está com lã. Logo, 5 e 6 devem estar com a mesma pessoa. Mas se 5 está com lvo então  $1 + 5 = 6$  não pode estar com lvo, contradição. Logo, 5 e 6 estão com lã e portanto  $13k + 5$  e  $13k + 6$  estão com lã.

Analogamente  $7 \cdot 8 = 56 = 13 \cdot 4 + 4$  está com lã e portanto  $13k + 7$  e  $13k + 8$  estão com lã.

O mesmo vale para 9 e 10 já que  $9 \cdot 10 = 90 = 13 \cdot 6 + 12$ .

E, por último, como  $6 \cdot 11 = 66 = 13 \cdot 5 + 1$  está com lã, 11 e 6 devem estar com a mesma pessoa e portanto estão com lã.

Concluimos que lã está com todos os números que não múltiplos de 13.

Como  $13 \cdot 2, \dots, 13 \cdot 7$  não estão com lã, lvo tem todos os múltiplos de 13.

Dessa forma, lã tem  $100 - 7 = 93$  cartas.

**Problema 12.** (Rússia 1999) Mostre que os números de 1 a 15 não podem ser divididos em um grupo  $A$  de dois elementos e um grupo  $B$  de 13 elementos tais que a soma dos elementos de  $B$  seja igual ao produto dos elementos de  $A$ .

**Solução.** Suponha que o grupo  $A$  tenha os dois números distintos  $x$  e  $y$ . Então a soma dos elementos de  $B$  é  $1 + 2 + \dots + 15 - x - y = 120 - x - y$ .

Queremos que  $120 - x - y = xy \iff 11^2 = 121 = x + y + xy + 1 = (x + 1)(y + 1)$ .

As únicas soluções nos naturais são  $(x, y) = (10, 10), (120, 0)$ .

Nenhum dos dois pares são possíveis pois  $x \neq y$  e  $x, y \leq 15$ .

Logo, não é possível fazer a divisão desejada.

**Problema 13.** (Seletiva Rioplatense 2004) Em cada casa de um tabuleiro  $8 \times 8$  escrevemos um número inteiro. Sabe-se que para cada casa, a soma dos seus vizinhos é 1. Encontre a soma de todos os números do tabuleiro.

Obs: Consideramos vizinhas casas com um lado em comum.

**Solução.** Observe as casas marcadas no tabuleiro abaixo:

	*	*			*	*	
*			*	*			*
*							*
		*			*		
		*			*		
*							*
*			*	*			*

Se olharmos para os vizinhos das casas marcadas acima, vemos que eles cobrem todo o tabuleiro e de maneira disjunta! Como a soma dos vizinhos de cada casa é 1, a soma total dos números do tabuleiro será igual ao número de casas marcadas, que é 20.

**Problema 14.** Etevaldo pensou em cinco números distintos e escreveu no quadro todos dez números que são somas de dois destes cinco números. Será que Ovozildo pode descobrir os números que Etevaldo pensou observando apenas os números escritos no quadro?

**Solução.** Sim. Suponha que os números sejam  $a, b, c, d, e$  com  $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ .

As somas serão:

$$\begin{array}{ll} x_1 = a + b & x_6 = b + d \\ x_2 = a + c & x_7 = b + e \\ x_3 = a + d & x_8 = c + d \\ x_4 = a + e & x_9 = c + e \\ x_5 = b + c & x_{10} = d + e \end{array}$$

Veja que as menores somas são  $x_1 \leq x_2$  e as maiores são  $x_{10} \geq x_9$ .

Portanto, ordenando as 10 somas em ordem crescente já descobrimos quem são  $x_1, x_2, x_9, x_{10}$ , basta tomar as duas primeiras e as duas últimas somas.

Além disso, temos que

$$x_1 + \dots + x_{10} = 4(a + b + c + d + e) = 4(x_1 + x_{10} + c).$$

Assim encontramos  $c$ .

Usando  $c$  e  $x_9$  encontramos  $e = x_9 - c$  e com  $x_{10}$  também podemos encontrar  $d = x_{10} - e$ .

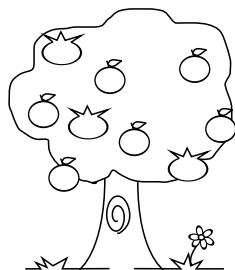
Usando  $x_2$  e  $c$  temos  $a = x_2 - c$  e analogamente encontramos  $b = x_1 - a$ .

Isso nos fornece todos os cinco números.

## Paridade

Todo número é par ou ímpar. Óbvio, não? Pois é com essa simples afirmação que vamos resolver os problemas deste capítulo.

**Problema 1.** No reino da Frutilândia existe uma árvore mágica que possui 2005 maçãs e 2006 tomates. Todo dia um garoto sobe na árvore e come duas frutas. Quando ele come duas frutas iguais, nasce um tomate na árvore; quando ele come duas frutas diferentes, nasce uma maçã. Após alguns dias restará apenas uma fruta na árvore. Que fruta será?



**Solução.** Sempre que o garoto pega duas frutas da árvore, o número de maçãs diminuirá de 2 ou permanecerá constante. Dessa forma a paridade do número de maçãs será sempre o mesmo. Como inicialmente tínhamos um número ímpar de maçãs, a quantidade delas continuará ímpar até o final. Logo, a última fruta deve ser uma maçã.  $\square$

**Problema 2.** Um jogo consiste de 9 botões luminosos (de cor verde ou amarelo) dispostos da seguinte forma:

1○ 2○ 3○  
4○ 5○ 6○  
7○ 8○ 9○

Apertando um botão do bordo do retângulo, trocam de cor ele e os seus vizinhos (do lado ou em diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus oito vizinhos



porém ele não. Inicialmente todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos amarelos?

**Solução.** Note que ao apertar um dos botões 1, 3, 7 ou 9 trocamos de cor 4 botões. Apertando um dos botões 2, 4, 6 ou 8 trocamos a cor de 6 botões. Apertando o botão do centro trocamos a cor de 8 botões. Como 4, 6 e 8 são números pares a quantidade total de botões verdes é sempre um número par e para ter os 9 botões amarelos, deveríamos ter zero botões verdes. Absurdo, já que 0 é um número par.  $\square$

Para mostrar a relevância do tema que estamos estudando em competições de matemática, vamos resolver dois problemas que apareceram na olimpíada do Leningrado (com o final na União Soviética, passou a ser conhecida como São Petersburgo).

**Problema 3.** (Leningrado 1990) Paula comprou um caderno com 96 folhas, com páginas enumeradas de 1 a 192. Nicolas arrancou 25 folhas aleatórias e somou todos os 50 números escritos nestas folhas. É possível que esta soma seja 1990?

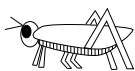
**Solução.** Observe que a soma dos números escritos em uma mesma folha sempre é ímpar. Dessa forma, se Nicolas arrancou 25 folhas, a soma de todos os números será ímpar. Pois é a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares. Logo, esta soma não pode ser 1990.  $\square$

**Problema 4.** (Leningrado 1989) Um grupo de  $K$  físicos e  $K$  químicos está sentado ao redor de uma mesa. Alguns deles sempre falam a verdade e outros sempre mentem. Sabe-se que o número de mentirosos entre os físicos e químicos é o mesmo. Quando foi perguntado: “Qual é a profissão de seu vizinho da direita?”, todos responderam “Químico.” Mostre que  $K$  é par.

**Solução.** Pela resposta das pessoas do grupo, podemos concluir que do lado esquerdo de um físico sempre está sentado um mentiroso e que do lado direito de um mentiroso sempre existe um físico. Então, o número de físicos é igual ao número de mentirosos, que é claramente par. Então  $K$  é par.  $\square$

**Problema 5.** Um gafanhoto vive na reta coordenada. Inicialmente, ele se encontra no ponto 1. Ele pode pular 1 ou 5 unidades, tanto para direita quanto para esquerda. Porém, a reta coordenada possui buracos em todos os pontos que são múltiplos de 4 (i.e. existem buracos nos pontos  $-4, 0, 4, 8$  etc), então ele não pode pular para estes pontos. Pode o gafanhoto chegar ao ponto 3 após 2003 saltos?

**Solução.** Note que a cada salto, muda a paridade do ponto em que o gafanhoto se encontra. Logo, após 2003 saltos, ele estará em uma coordenada par. Portanto, não pode ser 3.  $\square$



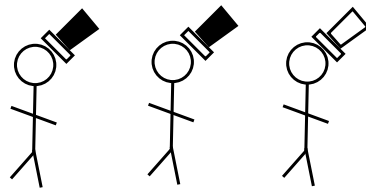
Para finalizar vamos resolver um problema interessante onde o uso da paridade não é tão fácil de perceber. Convidamos o leitor a tentar achar uma solução, antes de ler a resposta em sequência.

### O PROBLEMA DOS CHAPÉUS

Imagine que 10 prisioneiros estejam trancados em uma cela quando chega um carcereiro com o seguinte comunicado:

— *Amanhã todos vocês passarão por um teste. Todos vocês ficarão em fila indiana e serão colocados chapéus nas cabeças de um de vocês. Cada um poderá ver os chapéus dos que estarão a sua frente. Porém, não poderão ver os chapéus dos que estão atrás, nem o seu próprio chapéu. Os chapéus serão pretos ou brancos. Feito isso, será perguntado a cada um de vocês, do último para o primeiro, em ordem, qual a cor do seu chapéu. Se a pessoa errar a cor do seu chapéu, será morta.*

Será que os prisioneiros podem montar uma estratégia para salvar pelo menos 9 deles?



#### Pensando no problema:

Bem, vamos começar a discutir o problema da seguinte maneira: será que se eles combinarem de cada um deles falar a cor do chapéu que está imediatamente a sua frente, eles podem salvar a maior parte do bando?

Esta é a ideia que todos têm inicialmente, mas logo verifica-se que essa estratégia não funciona, pois basta que as cores dos chapéus estejam alternadas para a estratégia não funcionar. (Lembre-se: estamos procurando uma estratégia que seja independente da escolha dos chapéus).

Então devemos pensar de maneira mais profunda. Veja que durante o teste, cada um dos prisioneiros pode falar apenas uma entre duas palavras que são; preto ou branco. Isto corresponde a um sistema de linguagem binário. Outras formas de linguagem binária são: sim e não, zero ou um, par ou ímpar. E é exatamente esta analogia que vamos utilizar para montar nossa estratégia. Que será a seguinte:

O último da fila deve olhar para a frente e contar o número de chapéus pretos. Se este número for ímpar, ele deve gritar preto. Caso contrário, ele deve gritar branco. Com isso,

todos ficam sabendo a paridade da quantidade de chapéus pretos que existem entre os nove da fila.

Agora, o penúltimo vai olhar para frente e ver a quantidade de chapéus pretos. Se a paridade continuar a mesma informada pelo último, então seu chapéu é branco. Se mudar, ele pode concluir que seu chapéu é preto. E isto pode ser feito para todos os membros da fila, pois todos saberão a cor dos chapéus dos anteriores (tirando a cor do chapéu do último) e a paridade dos chapéus pretos que existem entre os nove primeiros.

Portanto, é possível salvar os nove primeiros, enquanto o último pode ser salvo, se ele tiver sorte!

Vale ressaltar que as ideias presentes nesta aula serão de certa forma generalizadas em aulas futuras como nas aulas de tabuleiros e invariantes.

## Problemas Propostos

**Problema 6.** Existe alguma solução inteira para a equação  $a \cdot b \cdot (a - b) = 45045$ .

**Problema 7.** Os números  $1, 2, \dots, n$  estão escritos em sequência. É permitido permutar quaisquer dois elementos. É possível retornar à posição inicial após 2001 permutações?

**Problema 8.** Um círculo está dividido em seis setores que estão marcados com os números  $1, 0, 1, 0, 0, 0$  no sentido horário. É permitido somar 1 a dois setores vizinhos. É possível, repetindo esta operação várias vezes, fazer com que todos os números se tornem iguais?

**Problema 9.** É possível que as seis diferenças entre dois elementos de um conjunto de quatro números inteiros serem iguais a 2, 2, 3, 4, 4 e 6?

**Problema 10.** Raul falou que tinha dois anos a mais que Kátia. Kátia falou que tinha o dobro da idade de Pedro. Pedro falou que Raul tinha 17 anos. Mostre que um deles mentiu.

**Problema 11.** (Torneio das Cidades 1987) Uma máquina dá cinco fichas vermelhas quando alguém insere uma ficha azul e dá cinco fichas azuis quando alguém insere uma ficha vermelha. Pedro possui apenas uma ficha azul e deseja obter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas usando essa máquina. É possível fazer isto?

**Problema 12.** (China 1986) Considere uma permutação dos números  $1, 1, 2, 2, \dots, 1998, 1998$  tal que entre dois números  $k$  existem  $k$  números. É ou não possível fazer isto?

**Problema 13.** (Rússia 2004) É possível colocarmos números inteiros positivos nas casas de um tabuleiro  $9 \times 2004$  de modo que a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna sejam primos? Justifique sua resposta.

**Problema 14.** O número  $A$  possui 17 dígitos. O número  $B$  possui os mesmos dígitos de  $A$ , porém em ordem inversa. É possível que todos os dígitos de  $A + B$  sejam ímpares?

**Problema 15.** \*Considere um tabuleiro  $1998 \times 2002$  pintado alternadamente de preto e branco da maneira usual. Em cada casa do tabuleiro, escrevemos 0 ou 1, de modo que a quantidade de 1's em cada linha e em cada coluna do tabuleiro é ímpar. Prove que a quantidade de 1's escritos nas casas brancas é par.

**Problema 16.** \*(Ucrânia 1997) Considere um tabuleiro pintado de preto e branco da maneira usual e, em cada casa do tabuleiro, escreva um número inteiro, de modo que a soma dos números em cada coluna e em cada linha é par. Mostre que a soma dos números nas casas pretas é par.

## Dicas e Soluções

6. Analise as quatro possibilidades de paridade do par  $(a, b)$ .
9. Se  $x$  e  $y$  são números inteiros,  $x + y$  e  $x - y$  possuem a mesma paridade.
13. Suponha que seja possível fazer tal construção. Sejam  $L_1, L_2, \dots, L_9$  as somas dos números de cada uma das 9 linhas, e  $C_1, C_2, \dots, C_{2004}$  as somas dos números de cada uma das 2004 colunas. Como cada  $L_i$  e  $C_j$  são primos, estes devem ser números ímpares (já que são soma de pelo menos nove inteiros positivos). Seja  $S$  a soma de todos os números do tabuleiro. Por um lado teríamos:

$$S = L_1 + L_2 + \dots + L_9$$

donde concluímos que  $S$  é ímpar, pois é soma de 9 ímpares. Por outro lado:

$$S = C_1 + C_2 + \dots + C_{2004}$$

e daqui concluiríamos que  $S$  é par, o que é um absurdo. Logo tal construção não é possível.

15. Seja  $a_{i,j}$  o número escrito na casa da  $i$ -ésima linha e da  $j$ -ésima coluna,  $1 \leq i \leq 1998$  e  $1 \leq j \leq 2002$ . A casa  $(i, j)$  é branca se e somente se  $i$  e  $j$  possuem a mesma paridade.

$$L = \sum_{i=1}^{999} \sum_{j=1}^{2002} a_{2i-1,j}$$

é a soma dos números nas 999 linhas de ordem ímpar. Como a soma dos números de cada linha é ímpar,  $L$  é ímpar. De maneira análoga, a soma dos números nas 1001 colunas de ordem par

$$C = \sum_{j=1}^{1001} \sum_{i=1}^{1998} a_{2j,i}$$

também é ímpar. Seja  $P$  o conjunto de todas as casas pretas que estão em colunas de ordem par, e  $S(P)$  a soma de todos os números escritos nas casas de  $P$ .

Cada número escrito em uma casa de  $P$  aparece exatamente uma vez na soma  $L$  e exatamente uma vez na soma  $C$ . Ademais, cada número escrito em uma casa branca aparece exatamente uma vez na soma  $L + C$ . Assim, a soma dos números escritos nas casas brancas é igual a  $L + C - 2S(P)$ , que é par.

## Combinatória 03 - Paridade

**Problema 6.** Existe alguma solução inteira para a equação  $a \cdot b \cdot (a - b) = 45045$ ?

**Solução.** Não. Se  $a$  e  $b$  tiverem paridades diferentes então um dos dois é par, de forma que  $a \cdot b$  é par. Mas isso é uma contradição já que  $45045$  é ímpar.

Agora, se  $a$  e  $b$  tiverem a mesma paridade então  $a - b$  deve ser par e do mesmo modo chegamos a uma contradição.

Logo, não há solução inteira.

**Problema 7.** Os números  $1, 2, \dots, n$  estão escritos em sequência. É permitido permutar quaisquer dois elementos. É possível retornar à posição inicial após 2001 permutações?

**Solução.**

Dizemos que uma sequência tem uma inversão quando um número maior vem antes de um número menor.

O número de inversões de uma sequência é o número de pares  $(a, b)$  com  $a > b$  que podemos encontrar na sequência tais que  $a$  aparece antes de  $b$ .

Por exemplo, o número de inversões da sequência  $(1, 3, 2, 5, 4)$  é 2.

Verifique que ao permutarmos 2 números, a paridade do número de inversões muda.

No problema, a sequência inicial tem 0 inversões. Como são feitas 2001 permutações, temos 2001 mudanças de paridade do número de inversões. Dessa forma, o número de inversões final deve ser ímpar.

Então não podemos ter, ao fim, a sequência inicial.

**Problema 8.** Um círculo está dividido em seis setores que estão marcados com os números  $1, 0, 1, 0, 0, 0$  no sentido horário. É permitido somar 1 a dois setores vizinhos. É possível, repetindo esta operação várias vezes, fazer com que todos os números se tornem iguais?

**Solução.** Suponha que os números nos setores sejam  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  e  $a_6$  no sentido horário. Vamos chamar de  $S$  o módulo do número  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ .

Note que ao somar 1 a dois setores vizinhos o valor de  $S$  não se altera.

Então  $S = 1 - 0 + 1 - 0 + 0 - 0 = 2$ .

Desse modo, é impossível que todos os números sejam iguais pois teríamos  $S = 0$ .

---

**Problema 9.** É possível que as seis diferenças entre dois elementos de um conjunto de quatro números inteiros serem iguais a 2, 2, 3, 4, 4 e 6?

**Solução.** Não. Imagine que o conjunto seja  $\{a, b, c, d\}$ . Então podemos supor  $3 = a - b$ . Mas  $a - b = (a - c) + (c - b)$  e  $a - c$  e  $c - b$  são diferenças de dois elementos do conjunto. Porém, todas as diferenças, com exceção de 3, são pares. Logo,  $(a - c) + (c - b)$  é par. Isso é uma contradição já que esse valor é igual a 3 que é ímpar. Concluimos que não é possível que as diferenças sejam essas.

**Problema 10.** Raul falou que tinha dois anos a mais que Kátia. Kátia falou que tinha o dobro da idade de Pedro. Pedro falou que Raul tinha 17 anos. Mostre que um deles mentiu.

**Solução.** Suponha que ninguém mentiu. Então Raul tem 17 anos e portanto Kátia tem 15 anos. Mas Kátia tem o dobro da idade de Pedro e, portanto, sua idade deve ser par, contradição. Logo, alguém deve ter mentido.

**Problema 11.** (Torneio das Cidades 1987) Uma máquina dá cinco fichas vermelhas quando alguém insere uma ficha azul e dá cinco fichas azuis quando alguém insere uma ficha vermelha. Pedro possui apenas uma ficha azul e deseja obter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas usando essa máquina. É possível fazer isto?

**Solução.** Não. Observe que quando Pedro insere uma ficha e recebe cinco seu número de fichas aumenta 4 unidades. Logo, a paridade do número de fichas não muda. Para ter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas Pedro deve ter um número par de fichas, mas isso não é possível já que ele inicialmente só possui 1 ficha e 1 é ímpar.

**Problema 12.** (China 1986) Considere uma permutação dos números  $1, 1, 2, 2, \dots, 1998, 1998$  tal que entre dois números  $k$  existem  $k$  números. É ou não possível fazer isto?

**Solução.** Contados da esquerda para a direita, denotemos por  $a_k$  e  $b_k$  as posições do primeiro e segundo número  $k$ , respectivamente. Note que  $1 \leq a_k < b_k \leq 2 \times 1998$ . Como existem  $k$  números entre dois números  $k$ 's, devemos ter  $b_k - a_k = k + 1$ . Se é possível escrever os números  $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$  em linha como no enunciado, obtemos:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = 1 + 2 + \dots + 2n = n(2n + 1)$$

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n) = 2 + 3 + \dots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} - 1$$

Somando as duas linhas,

$$2(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \frac{5n(n + 1)}{2}$$

Logo, a fração  $\frac{5n(n+1)}{2}$  deve ser um inteiro par.

Para  $n = 1998$ ,

$$\frac{5n(n+1)}{2} = 9985005$$

é ímpar e conseqüentemente não é possível dispormos esses números em linha.

**Problema 13.** (Rússia 2004) É possível colocarmos números inteiros positivos nas casas de um tabuleiro  $9 \times 2004$  de modo que a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna sejam primos? Justifique sua resposta.

**Solução.** Suponha que seja possível fazer tal construção. Sejam  $L_1, L_2, \dots, L_9$  as somas dos números de cada uma das 9 linhas, e  $C_1, C_2, \dots, C_{2004}$  as somas dos números de cada uma das 2004 colunas. Como cada  $L_i$  e  $C_j$  são primos, estes devem ser números ímpares (já que são soma de pelo menos nove inteiros positivos e portanto são maiores que 2). Seja  $S$  a soma de todos os números do tabuleiro. Por um lado teríamos:

$$S = L_1 + L_2 + \dots + L_9$$

donde concluímos que  $S$  é ímpar, pois é soma de 9 ímpares. Por outro lado:

$$S = C_1 + C_2 + \dots + C_{2004}$$

e daqui concluímos que  $S$  é par, pois é uma soma de uma quantidade par de ímpares, o que é um absurdo. Logo, tal construção não é possível.

**Problema 14.** O número  $A$  possui 17 dígitos. O número  $B$  possui os mesmos dígitos de  $A$ , porém em ordem inversa. É possível que todos os dígitos de  $A + B$  sejam ímpares?

**Solução.** Não. Vamos mostrar que algum dos dígitos deve ser par. Considere a seguinte soma:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} & a_{16} & a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ + & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \hline r_{17} & r_{16} & r_{15} & r_{14} & r_{13} & r_{12} & r_{11} & r_{10} & r_9 & r_8 & r_7 & r_6 & r_5 & r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & r_0 \end{array}$$

Se  $r_8$  for par (teríamos  $r_8 = 2a_8 - 10k$ ) então o problema acaba. Suponha então que isso não ocorre. A única possibilidade é a de que a soma anterior ficou maior do que ou igual a 10 e 1 foi adicionado a soma dos  $a_8$ .

Temos dois casos:

- $a_7 + a_9 = 9$  e a soma deles (acima de  $r_7$ ) recebeu um 1 da soma anterior, isso implicaria que  $r_7 = 0$  e o problema acabaria aqui;
- o segundo caso é  $a_7 + a_9 \geq 10$ .



---

Vamos então supor que  $a_7 + a_9 \geq 10$ .

Repare que se  $a_7 + a_9 \geq 10$  então  $r_{10} = a_{10} + a_6 + 1 - 10k$ .

Se  $r_{10}$  e  $r_6$  tiverem paridades diferentes, um dos dois será par e então o problema acaba.

Vamos supor que isso não ocorre. Para que isso não ocorra, a soma acima de  $r_6$  também deve receber um 1 da soma anterior.

Dessa forma, analogamente como fizemos com  $a_7 + a_9$ , podemos supor que  $a_5 + a_{11} \geq 10$ .

Usando o mesmo argumento de paridades diferentes entre  $r_{12}$  e  $r_4$  chegamos a suposição de que  $a_3 + a_{13} \geq 10$ .

Repetindo mais uma vez esse processo nós chegamos em  $a_1 + a_{15} \geq 10$ .

Com isso, nós concluímos que a soma acima de  $r_{16}$  receberá um 1 da soma anterior que é a de  $a_{15} + a_1$ . Isso quer dizer que  $r_{16} = a_{16} + a_0 + 1 - 10k$ . Porém, como não há soma antes de  $r_0$ , devemos ter  $r_0 = a_0 + a_{16} - 10k'$ . Note que  $r_0$  e  $r_{16}$  têm paridades diferentes e então algum dos dois é par. Isso conclui a demonstração.

Repare que esses argumentos valem para qualquer natural com um número ímpar de dígitos, basta que exista o dígito do meio - nesse caso é o  $a_8$ .

**Problema 15.** Considere um tabuleiro  $1998 \times 2002$  pintado alternadamente de preto e branco da maneira usual. Em cada casa do tabuleiro, escrevemos 0 ou 1, de modo que a quantidade de 1s em cada linha e em cada coluna do tabuleiro é ímpar. Prove que a quantidade de 1s escritos nas casas brancas é par.

**Solução.** Seja  $a_{i,j}$  o número escrito na casa da  $i$ -ésima linha e da  $j$ -ésima coluna,  $1 \leq i \leq 1998$  e  $1 \leq j \leq 2002$ . A casa  $(i, j)$  é branca se e somente se  $i$  e  $j$  possuem a mesma paridade.

$$L = \sum_{i=1}^{999} \sum_{j=1}^{2002} a_{2i-1,j}$$

é a soma dos números nas 999 linhas de ordem ímpar. Como a soma dos números de cada linha é ímpar,  $L$  é ímpar. De maneira análoga, a soma dos números nas 1001 colunas de ordem par

$$C = \sum_{j=1}^{1001} \sum_{i=1}^{1998} a_{i,2j}$$

também é ímpar. Seja  $P$  o conjunto de todas as casas pretas que estão em colunas de ordem par, e  $S(P)$  a soma de todos os números escritos nas casas de  $P$ .

Cada número escrito em uma casa de  $P$  aparece exatamente uma vez na soma  $L$  e exatamente uma vez na soma  $C$ . Ademais, cada número escrito em uma casa branca aparece exatamente uma vez na soma  $L + C$ . Assim, a soma dos números escritos nas casas brancas é igual a  $L + C - 2S(P)$ , que é par.

**Problema 16.** (Ucrânia 1997) Considere um tabuleiro pintado de preto e branco da maneira usual e, em cada casa do tabuleiro, escreva um número inteiro, de modo que a soma dos números em cada coluna e em cada linha é par. Mostre que a soma dos números nas casas pretas é par.

**Solução.** A solução é análoga à do problema anterior.

A casa  $(i, j)$  é a casa da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna. A casa  $(i, j)$  é preta se e somente se  $i$  e  $j$  têm paridades diferentes.

Seja  $L_k$  e  $C_k$  a soma dos números nas  $k$ -ésima linha e coluna respectivamente. Então,

$$L = L_1 + L_3 + L_5 + L_7 + \dots$$

é a soma dos linhas de ordem ímpar e

$$C = C_1 + C_3 + C_5 + C_7 + \dots$$

é a soma das colunas também de ordem ímpar. Como a soma dos números em cada coluna e em cada linha é par,  $L$  e  $C$  devem ser pares.

Seja  $B$  o conjunto de todas as casas brancas em colunas de ordem ímpar, e  $S(B)$  a somas dos números escritos nas casa de  $B$ .

Cada casa de  $B$  é contada uma vez em  $C$  e uma vez em  $L$ . Além disso, cada casa preta é contada exatamente uma vez na soma  $L + C$ . Logo, a soma dos números nas casas pretas é  $L + C - 2S(B)$  que é par.