Universidade Estadual de Campinas
IMECC

Iniciação Científica

Construção de processos de difusão com aplicações em séries financeiras

Aluna:
Nathália Menini Cardoso dos Santos

Orientadora:
Laura Letícia Ramos Rifo

2016

Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares e ao meu namorado Alexandre pelo total apoio e incentivo, aos meus amigos pelo encorajamento e também à professora Laura pela confiança e oportunidade. Por fim, agradeço à instituição CNPq pelo programa e fomento.

Conteúdo

1 Introdução **3**

2 Medida **4**

2.1 Elementos de teoria da medida 4

2.2 Espaços de medida 6

2.3 Medida produto e função de distribuição 7

2.3.1 Funções de conjuntos em $\mathbb{R}$ 7

2.3.2 Função de distribuição 10

3 Introdução aos processos estocásticos **11**

4 Cadeia de Markov **12**

5 Processos estacionários **14**

5.1 Estacionariedade 14

5.2 Diferenciação 17

6 Movimento Browniano **17**

6.1 Definição 17

6.2 Simulações 18

6.3 Características empíricas 22

6.3.1 Periodograma 22

6.3.2 FAC e FACP 24

7 Exemplo: Ações Itaú S.A. **27**

8 Referências bibliográficas **31**

1 Introdução

Esta monografia, além de ter como objetivo expor os estudos obtidos durante o desenvolvimento do projeto de Iniciação Científica da aluna, visa também apresentar alguns conceitos de suma importância e pertinentes ao tema do projeto, possibilitando ao leito os pré-requisitos para o entendimento do estudo como um todo. O trabalho da aluna consistiu, basicamente, de uma descrição e exposição de resultados e conteúdos já estudados na literatura, de modo que, os conceitos e exemplos apresentados nesta monografia foram estudados a partir das bibliografias listadas na última seção.

Na Seção 2 apresentamos uma revisão de conceitos da área de pesquisa conhecida como *medida*. Mais especificamente, na Seção 2.1 introduzimos alguns elementos de teoria da medida como, por exemplo, definimos uma σ-álgebra, uma σ-álgebra de borel e funções de conjuntos. Já na Seção 2.2 abordamos alguns conceitos de *espaços de medida*, em especial a medida de Lebesgue, que é uma definição importante para a compreensão do contrução de processos de difusão. Na Seção 2.3 revisamos a medida produto e funções de distribuições definidas nos números reais, que são conceitos fundamentais para o entendimento de medida de probabilidade e funções de distribuição, primordiais para assimilar a Extensão do Teorema de Kolmogorov. As duas últimas subseções, em especial, foram baseadas no texto de [9].

Na Seção 3 realizamos uma breve introdução sobre processos estocásticos, fundamental para a absorção dos conceitos de processos de difusão (que é o caso do movimento browniano). A Seção 4 descreve as cadeias de Markov, um caso particular de processos estocásticos considerando estados discretos.

Na Seção 5 apresentamos e exemplificamos de maneira resumida a classe dos processos estacionários. Além disso, explicamos uma técnica amplamente utilizada em modelagem estatística para dados de séries temporais, conhecida por *diferenciação*.

Finalmente, na Seção 6 definimos e justificamos a existência do movimento

browniano, tendo como base dois teoremas de Kolmogorov. Também realizamos simulações do movimento browniano em uma e duas dimensões, bem como discutimos de modo teórico e empírico os resultados dessas simulações.

Por fim, na Seção 7 utilizamos um conjunto de dados com o preço das ações do banco Itaú S. A., a fim de verificarmos algumas características descritas ao longo do projeto.

2 Medida

2.1 Elementos de teoria da medida

Definição 2.1. Considere Ω um conjunto arbitrário não vazio, e $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω. $\mathcal{F}$ é dita uma álgebra de subconjuntos de Ω se:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;
3. Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Exemplo 2.1. Seja $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4\}$. Então, temos que uma álgebra de subconjuntos de Ω_1 é dada por $\mathcal{F}_1 = \Big\{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \varnothing\Big\}$. Note que, para quaisquer subconjuntos $A, B \in \mathcal{F}_1$, temos que 1, 2 e 3 são satisfeitos.

Definição 2.2. A classe de subconjuntos de Ω, $\mathcal{F}$, é dita uma σ-álgebra de Ω se:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;
3. Se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, então $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Observação: Um conjunto $A \in \mathcal{F}$ é dito $\mathcal{F}$-mensurável.

Exemplo 2.2. Sejam $S \neq \varnothing$ e $A \subset S$. Então $\mathcal{A} = \{S, A, A^C, \varnothing\}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de S.

Exemplo 2.3. Considere $S \neq \varnothing$. Desse modo, a σ-álgebra trivial é dada por uma σ-álgebra de subconjuntos de S, que é a classe classe $\mathcal{A} = \{S, \varnothing\}$. As operações de união, intersecção ou complementação com S e/ou $\varnothing$ com um número finito ou enumerável, irão resultar em S ou $\varnothing$.

Definição 2.3. Para uma classe $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω, definimos $\sigma(\mathcal{A})$ como a menor (em termos de "estar contido") σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$, e é chamada de σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$. Em outra palavras, $\sigma(\mathcal{A})$ é a interseção de todas as σ-álgebras que contém $\mathcal{A}$.

Definição 2.4. Seja X um espaço topológico. A σ-álgebra de Borel associada à topologia de X é a menor σ-álgebra que contém os abertos dessa topologia. Considere $\mathcal{A}$ como a classe formada por abertos de X, então $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{A})$ é dita σ-álgebra de Borel.

Definição 2.5. Uma função de conjuntos é uma função real, ou seja, com valores em $\mathbb{R}$, definida em alguma classe de subconjuntos de Ω.

Exemplo 2.4. Considere $\mathcal{F}$ a classe de subconjuntos de Ω. Uma função $\mathbb{F} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ de conjuntos pode ser tal que

$$\mathbb{F}(A) = \begin{cases} 1, \text{ se } A \in \mathcal{F}_1; \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 2.6. Uma função de conjuntos $\mathbb{P}$ definida em uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ é uma medida de probabilidade se:

1. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, para $A \in \mathcal{F}$;
2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. Se $A_1, A_2, ...$ são conjuntos disjuntos $\mathcal{F}$-mensurável, então $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Definição 2.7. Se $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra em Ω, $\mathbb{P}$ uma medida de probabilidade em $\mathcal{F}$, então a trinca $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dita um espaço de probabilidade.

2.2 Espaços de medida

Definição 2.8. Uma medida em um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma função $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ tal que

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. $\mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, para qualquer coleção enumerável de conjuntos de $\mathcal{F}$, disjuntos dois a dois.

Seguinto a notação anterior, temos que a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é chamada espaço de medida. Se fazemos $\mu(\Omega) < \infty$, dizemos que μ é uma medida finita e, se fazemos $\mu(\Omega) = 1$, dizemos que μ é uma medida de probabilidade e temos um espaço de probabilidade.

Exemplo 2.5. Seja um conjunto $S \neq \varnothing$ e considere $A \subseteq S$. Defina $\mu(A)$ como o número de elementos de A. Desse modo, temos que $\mu(S) > 0$, $\mu(\varnothing) = 0$ e, se $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, então $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Note se S possui infinitos elementos, então $\mu(A) = \infty$ existe. Essa medida é dita "medida de contagem em S" e pode ser definida em $\mathbb{P}(S)$.

Exemplo 2.6. Na σ-álgebra do Exemplo 2.2, podemos definir a medida $\mu(A) = p = 1 - \mu(A^C)$, com $\mu(S) = 1$.

Definição 2.9. Seja $\mathrm{I} = [a, b) \subset \mathbb{R}$ um intervalo semiaberto. Definimos a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, ou seja, seu comprimento $\lambda(\mathrm{I})$ por

$$\lambda(\varnothing) := 0, \qquad \lambda\big([a, b)\big) := b - a, \text{ se } a < b.$$

Definição 2.10. Definimos $\theta^* : P(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ a medida exterior de Lebesgue por

$$\theta^*(A) := inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\mathrm{I}_i) \; ; \; \{\mathrm{I}\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ é uma seq. de intervalos abertos tq. } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_i \Big\}$$

Proposição 2.1. Seja θ^* dada pela definição anterior.

1. θ^* é uma medida exterior em $\mathbb{R}$ (associa cada subconjunto de um dado conjunto a um número real estendido não-negativo);

2. θ^* é uma extensão de λ, isto é, $\theta^* = (\mathrm{I}) = \lambda(\mathrm{I})$ para todo intervalo semiaberto $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Teorema 2.1. Se $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \nu)$ são espaços de medidas e se E é qualquer conjunto mensurável de $\Omega_1 \times \Omega_2$, então as funções f e g, definidas em Ω_1 e Ω_2 respectivamente por $f(x) = \nu(E_x)$ e $f(y) = \mu(E^y)$, são funções mensuráveis não negativas tais que $\int f d\mu = \int g d\nu$.

2.3 Medida produto e função de distribuição

2.3.1 Funções de conjuntos em $\mathbb{R}$

Seja X um espaço topológico. Considere uma função de conjuntos $\mathbb{P}(S)$ definida em $\mathbb{R}$ e na menor σ-álgebra que contém os abertos da topologia X, que satisfaça as seguintes condições:

1. $\mathbb{P}(S)$ é não negativa;

2. $\mathbb{P}(S)$ é aditiva;

3. $\mathbb{P}(S)$ é, para qualquer conjunto limitado S, finita.

Definição 2.11. Podemos substituir o conjunto S na função de conjuntos $\mathbb{P}(S)$ por uma relação específica, quando o S possui todos os pontos ϵ que satisfazem essa relação.

Exemplo 2.7. Se S é formado pelo ponto $X = a$, então podemos escrever $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(X = a)$.

Definição 2.12. Uma função pontual é caracterizada por uma função $\mathbb{P}(x_1, ..., x_n)$ com uma ou mais variáveis. Nesse caso, o argumento da função $\mathbb{P}$ pode ser considerado um ponto cuja as coordenadas se dão por $x_1, ..., x_n$.

Definição 2.13. Definimos uma função pontual correspondente $\mathbb{F}(x;c)$ para uma função de conjuntos $\mathbb{P}$ e uma constante c por

$$\mathbb{F}(x;c) = \begin{cases} \mathbb{P}(c < \epsilon \leq x) & \text{, para } x > c \\ 0 & \text{, para } x = c \\ -\mathbb{P}(x < \epsilon \leq c) & \text{, para } x < c. \end{cases}$$

Para qualquer valor que consideremos para c, para um intervalo finito qualquer $(\alpha, \beta]$ vamos obter $\mathbb{F}(\beta;c) - \mathbb{F}(\alpha;c) = \mathbb{P}(\alpha < \epsilon \leq \beta) \geq 0$, ou seja, $\mathbb{F}(x;c)$ é uma função não decrescente em x.

Definição 2.14. Se considerarmos dois valores distintos para o parâmetro c, as funções $\mathbb{F}(x;k)$ que correspondem a esses valores, irão se diferir uma da outra de forma independente em x.

Considere, sem perde de generalidade, que $c_1 < c_2$. Desse modo, temos que $\mathbb{F}(x;c_1) - \mathbb{F}(x;c_2) = \mathbb{P}(c_1 < \epsilon \leq c_2)$. Então, considerando uma constante c_0 qualquer para c, a função correspondente $\mathbb{F}(x;c_0)$ pode ser expressa de modo simplificado por $\mathbb{B}$ e, qualquer que seja $\mathbb{F}(x;c)$, ela poderá ser expressa por $\mathbb{F}(x) + m$, em que m é uma constante que indepente de x.

Teorema 2.2. Para qualquer função de conjuntos $\mathbb{P}(S)$ que satisfaça as condições (1), (2) e (3) descritas no início dessa subseção, existe uma função pontual $\mathbb{F}(x)$ não decrescente tal que, para qualquer intervalo (α, β), temos que $\mathbb{F}(\beta) - \mathbb{F}(\alpha) = \mathbb{P}(\alpha < \epsilon \leq \beta)$.

Definição 2.15. Considere um valor qualquer, porém fixo, para c. Considere também $\mathbb{F}(x)$, uma função correspondente. Os limites laterais, considerando que $\mathbb{F}(x)$ é não decrescente, são dados por $\mathbb{F}(\alpha + 0) = \lim_{x \to \alpha^+} \mathbb{F}(x)$ e $\mathbb{F}(\alpha - 0) = \lim_{x \to \alpha^-} \mathbb{F}(x)$, e existem para todo valor de α. Utilizando o Teorema 2.2, podemos dizer que para $x > a$, temos que $\mathbb{F}(x) - \mathbb{F}(\alpha) = \mathbb{P}(\alpha < \epsilon \leq x)$.

Definição 2.16. Seja uma sequência $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Definimos o limite desta sequência por $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_n, \forall n \geq n_0\}$, e, quando este conjunto A existir, denotamos $\lim_{n \to \infty} A_n = A$.

Definição 2.17. Para uma sequência decrescente de valores em x, tendendo ao valor fixo α, considere a última relação apresentada na Definição 2.15. Os intervalos semi-abertos $(\alpha, x]$ formam uma sequência de conjuntos no qual o cojunto $\varnothing$ é o limite. Desse modo, temos que $\mathbb{F}(\alpha + 0) = \mathbb{F}(\alpha)$. Entretanto, se $x < \alpha$, temos que $\mathbb{F}(\alpha) - \mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(x < \epsilon \leq \alpha)$. Analogamente, podemos mostrar que $\mathbb{F}(\alpha - 0) = \mathbb{F}(\alpha) - \mathbb{P}(\epsilon = \alpha) \leq \mathbb{F}(\alpha)$. Desse modo, a função $\mathbb{F}$ é sempre contínua a direita.

Definição 2.18. $\mathbb{F}(x)$ possui com um salto $\mathbb{P}(\xi = x)$, uma descontinuidade, para todo valor de x tal que $\mathbb{P}(\epsilon = x) > 0$. $\mathbb{F}(x)$ é contínua para todo valor de x tal que $\mathbb{P}(\xi = x) = 0$. Desse modo, um ponto de descontinuidade de $\mathbb{F}(x)$ é caracterizado por qualquer x tal que $\mathbb{P}(S) > 0$, para o qual o conjunto S é formado somente pelo ponto x (o mesmo vale para $\mathbb{P}$). Além disso, um ponto de continuidade de $\mathbb{F}(x)$ é, por consequência, um ponto de continuidade de $\mathbb{P}(S)$.

Teorema 2.3. Para qualquer função pontual $\mathbb{F}(x)$ não decrescente, finita para todo x e contínua à direita, é possível obter uma função de conjuntos $\mathbb{P}(S)$ (definida no ínicio dessa subseção), de modo que, para qualquer intervalo (α, β), a relação $\mathbb{F}(\beta) - \mathbb{F}(\alpha) = \mathbb{P}(\alpha < \epsilon \leq \beta)$ seja válida. Além disso, para duas funções $\mathbb{F}_1(x)$ e $\mathbb{F}_2(x)$, obtemos a mesma função de conjuntos $\mathbb{P}(S)$ se, e somente se, o resultado de $F_1(x) - F_2(x)$ for constante.

De modo geral, o teorema acima afirma que podemos encontrar uma função de conjuntos que seja não negativa e aditiva, definida para todo o conjunto de Borel S definido em $\mathbb{R}$ e igual a $\mathbb{P}(i)$ no caso em que S é um intervalo i.

Definição 2.19. Uma função de conjuntos $\mathbb{P}(S)$ definida para um conjunto de Borel S definido em $\mathbb{R}$ e que satisfaça as condições (1), (2) e (3) descritas no início dessa subseção define uma medida produto do conjunto S, constituindo uma generalização da medida de Lebesgue $\lambda(S)$.

Definição 2.20. Como $S \subset \mathbb{R}$, temos que $\mathbb{P}(S) \leq \mathbb{P}(\mathbb{R})$, para qualquer conjunto de Borel S em $\mathbb{R}$.

Definição 2.21. $\mathbb{P}(S)$ é dita limitada se $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ for finita.

Definição 2.22. Quando $\mathbb{P}(S)$ é limitada, fixamos a constante aditiva na função pontual não decrescente $\mathbb{F}(x)$ fazendo $c = -\infty$ em $\mathbb{F}(x; c)$, de modo que para todo valor de x temos que $F(x) = P(\xi \leq x)$. Quando fazemos x tender a $-\infty$ nesta relação, temos que $\epsilon \leq x$ tende ao conjunto $\varnothing$ e, assim, $\mathbb{F}(-\infty) = 0$. Entretanto,se fizermos x tender a $+\infty$, teremos que $\epsilon \leq x$ tende aos $\mathbb{R}$ e, desse modo, $\mathbb{F}(+\infty) = \mathbb{P}(\mathbb{R})$. Temos também que para todo x, $0 \leq \mathbb{F}(x) \leq \mathbb{P}(\mathbb{R})$, pois $\mathbb{F}(x)$ é não decrescente.

2.3.2 Função de distribuição

Definição 2.23. Uma função de conjuntos $\mathbb{P}(S)$, não negativa e aditiva, definida para todo conjunto de Borel S definida em $\mathbb{R}$, de modo que $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$, é limitada e a função pontual correspondente $\mathbb{F}(x)$, não decrescente, é definida de tal forma que $\mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(\epsilon \leq x)$, $0 \leq \mathbb{F}(x) \leq 1$ e $\mathbb{F}(-\infty) = 0$ e $\mathbb{F}(+\infty) = 1$.

Seja, $\mathbb{P}$ e $\mathbb{F}$, um par de funções que seguem as propriedades acima. As funções podem ser interpretadas como a distribuição de massa sobre o espação dos $\mathbb{R}$. Ou seja, para todo x, temos que $\mathbb{F}(x)$ representa a quantidade de massa acumulada sobre o intervalo $(-\infty, x]$. É facilmente visível que a quantidade de massa total acumulada sobre o espaço $\mathbb{R}$ é dada por $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$.

Definição 2.24. Genericamente, podemos definir uma função de distribuição através da função de conjuntos $\mathbb{P}(S)$ ou da função pontual $\mathbb{F}(x)$, e chamamos de medida de probabilidade da distribuição a função $\mathbb{P}(S)$, enquanto a função de distribuição é dada por $\mathbb{F}(x)$.

Definição 2.25. Uma função de distribuição é uma função pontual $\mathbb{F}(x)$, não decrescente, contínua à direita e construída de forma que $\mathbb{F}(-\infty) = 0$ e $\mathbb{F}(+\infty) = 1$. Qualquer $\mathbb{F}(x)$ que possui essas características determina uma distribuição de probabilidade única, e sua função de distribuição é dada por $\mathbb{F}(x)$.

3 Introdução aos processos estocásticos

Definição 3.1. Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias $\{X(t), t \in T\}$, onde t é um parâmetro que pertence a um conjunto de índices T.

Em geral, chamamos t de tempo e $T \subset \mathbb{R}$. Cada variável aleatória $X(t)$ assume valores em um conjunto $S \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $X(t)$ é o estado do processo no tempo t.

Exemplo 3.1. São alguns exemplos de processos estocásticos: (i) número de email na sua caixa de entrada no tempo t, (ii) $X(t)$: número de pessoas em uma fila em uma gência bancária no tempo t e (iii) $X(t)$: posição de uma partícula aleatória no tempo t.

Definição 3.2. Um processo estocástico é caracterizado por 3 propriedades principais: (1) o conjunto de índices T, (2) o espaço de estados S e (3) as relações de dependência entre as variáveis aleatórias.

Definição 3.3. Seja um processo estocástico. Desse modo, ele pode ser: (1) a tempo discreto: $T \subset \mathbb{R}$ é enumerável (por exemplo, $T = \mathbb{N}$) ou (2) a tempo contínuo: $T \subset \mathbb{R}$ é não-enumerável. Em geral, $T = [0, \infty)$.

Exemplo 3.2. Processo estocástico a tempo discreto: Passeio aleatório simples. Considere uma partícula que começa na origem de $\mathbb{Z}$ no tempo $n = 0$. A cada instante, a partícula muda a sua posição de $+1$ ou -1, com probabilidade $\frac{1}{2}$. Seja S_n a posição da partícula no tempo n. Então, temos que, $T = \mathbb{N}$, $S = \mathbb{Z}$ e $\{S_n, n \geq 0\}$. A Figura 1 ilustra esse exemplo.

Dado que $S_n = x$, temos que:

$$S_{n+1} = \begin{cases} \text{x + 1, com probabilidade 1/2} \\ \text{x – 1, com probabilidade 1/2} \end{cases}$$

Observação: $\{S_n, n \geq 0\}$ é chamado passeio aleatório simples simétrico em $\mathbb{Z}$.

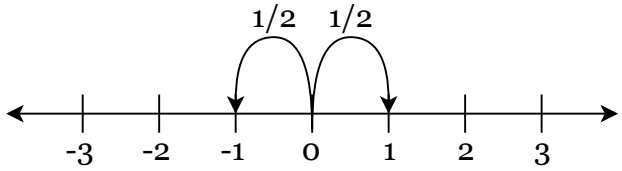


Figura 1: Ilustação do exemplo 2.2.

Exemplo 3.3. Processo estacionário a tempo contínuo: Processo de Poisson. Considere as chegadas de clientes a uma agência bancária. $X(t)$ é o número de clientes que chegam até o tempo t. Nesse caso, $S = \mathbb{N}$ e $T = [0, \infty)$. Supomos que os tempos entre as sucessivas chegadas são variáveis aleatórias independente e identicamente distribuídas com distribuição $\exp(\lambda)$. A Figura 2 ilustra esse exemplo.

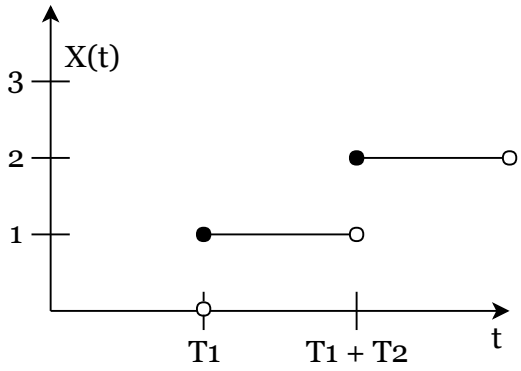


Figura 2: Ilustação do exemplo 2.3.

4 Cadeia de Markov

Definição 4.1. Considere um processo estocástico $\{X_n, n \geq 0\}$ assumindo valores em um conjunto $S \subset \mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$. Se $X_n = i$, então dizemos que o processo está no estado i no tempo n. Supomos que, sempre que o processo está no estado i, existe uma probabilidade fixada P_{ij} de que esteja a seguir no estado j. Mais precisamente,

supomos que

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P_{ij} = P(X_{n+1} = j|X_n = i)$$

para todos os estados $i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i, j$ e todo $n \geq 0$. Este processo estocástico é conhecido como *cadeia de Markov* (a tempo discreto).

Interpretação: Dado o estado presente X_n, qualquer outra informação sobre o passado é irrelevante para predizer o próximo estado X_{n+1}. O valor P_{ij} é a probabilidade de que o processo no estado i faça uma transição para o estado j.

Definição 4.2. As principais propriedades da cadeia de Markov são: (1) $P_{ij} \geq 0$ para quaisquer $i, j \geq 0$ e (2) $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1$ para qualquer $i = 0, 1, ...$

Definição 4.3. A matriz de transição é dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.1. Modelo do tempo em uma cidade. Suponha que a chance de chover amanhã depende das condições anteriores do tempo somente por meio do estado da chuva no dia de hoje. Se chove hoje, então choverá amanhã com probabilidade α; se não chove hoje, então choverá amanhã com probabilidade β. Dessa forma, temos que X_n é o tempo no dia n e $S = \{0, 1\}$, em que $0 =$ com chuva e $1 =$ sem chuva. Temos então a seguinte matriz de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

Podemos calcular, por exemplo, a probabilidade de não chover amanhã, dado que hoje está chovendo $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = \mathbb{P}_{01} = 1 - \alpha$. Analogamente, a probabilidade de amanhã estarmos no estado j, dado que hoje estamos no estado i é $P(X_{n+1} = j|X_n = i) = \mathbb{P}_{ij}$.

Exemplo 4.2. Em cada dia, o humor de beto pode estar em um dos estados; 0 = alegre, 1 = mais ou menos e 2 = triste. Seja X_n = humor de Beto no dia n. Então, $\{X_n, n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov com a matriz de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Dado que Beta está triste hoje, qual a probabilidade de que esteja alegre amanhã e depois?

$$P(X_2 = 0, X_1 = 0 | X_0 = 2) = \frac{P(X_2 = 0, X_1 = 0, X_0 = 2)}{P(X_1 = 0, X_0 = 2)} \cdot \frac{P(X_1 = 0, X_0 = 2)}{P(X_0 = 2)} =$$

$$P(X_2 = 0 | X_1 = 0, X_0 = 2) \cdot P(X_1 = 0 | X_0 = 2) = \mathbb{P}_{00} \cdot \mathbb{P}_{20} = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$$

5 Processos estacionários

5.1 Estacionariedade

Definição 5.1. Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias $\{Y_t : r \in \mathbb{C}\}$.
Se $\mathbb{C} = [0, \infty)$ o processo é de tempo contínuo,
Se $\mathbb{C} = \{1, 2, ...\}$ o processo é de tempo discreto.

Definição 5.2. Uma série temporal é uma realização de um processo estocástico, isto é, corresponde à uma ocorrência de um dos possíveis resultados.

Exemplo 5.1. Passeio ao Acaso. Sejam $\epsilon_1, \epsilon_2, ...$ variáveis aleatórias IID com esperança zero e variância σ^2. O processo passio ao acaso $\{Y_t\}$ é definido como

$$Y_t = \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i = Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Definição 5.3. Seja $\{Y_t, t \in \mathbb{T}\}$ um processo estocástico tal que $Var(Y_t) < \infty$. Então a covariância entre Y_r e Y_s está definida como

$$Cov(Y_r, Y_s) = E[(Y_r - E(Y_r))(Y_s - E(Y_s))], \qquad r, s \in \mathbb{T}$$

Definição 5.4. O processo $\{Y_t\}$ denomina-se estacionário se

a) $E(Y_t)$ é uma constante para todo t.

b) $Var(Y_t)$ é uma constante para todo t.

c) $Cov(Y_t, Y_{t+\tau}) = \gamma(\tau)$ é uma função somente de τ.

Exemplo 5.2. Processo Singular. Seja $\{Y_t\}$ o processo definido como

$$Y_t = \epsilon_1 \cos(\theta t) + \epsilon_2 \sin(\theta t)$$

onde $\theta \in [-\pi, \pi]$ é uma constante e $\epsilon_1.\epsilon_2$ são variáveis aleatórias não-correlacionadas com esperança zero e variância um.
Como $E(Y_t) = 0$, $Var(Y_t) = 1$ e $Cov(Y_r, Y_r) = \cos[\theta(r - s)]$ então $\{Y)t\}$ é um processo estacionário.

Quando não são satisfeitas as condições da Definição 5.4 dizemos que o processo é não-estacionário. Um exemplo de processo não estacionário é o Passio ao Acaso.

Definição 5.5. Seja $\{Y_t\}$ um processo estacionário. Então,

a) $\gamma(\tau)$ é denominada **função de autocovariância**.

b) $\rho(\tau) = \dfrac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$ é denominada **função de autocorrelação** (FAC).

onde τ é a defasagem ou retardo.

Definição 5.6. Ruído Branco. O processo $\{\epsilon_t\}$ é dito ruído branco com esperança zero e variância σ^2 se e somente se $E(\epsilon_t) = 0$, $\gamma(0) = \sigma^2$ e $\gamma(k) = 0$ para $k \neq 0$. Notação: $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$.

Exemplo 5.3. Processo MA(1). Seja o processo $Y_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$ onde $\{\epsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$. Então $E(Y_t) = 0, \gamma(0) = \sigma^2(1+\theta^2), \gamma(1) = \frac{\theta}{(1+\theta^2)}$ e $\gamma(k) = 0$ para $k \geq 2$.

Proposição 5.1. Seja $\{Y_t\}$ um processo estacionário, então

a) $\gamma(0) \geq 0$

b) $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$, para todo h. Então $|\rho(h)| \leq 1$.

c) $\gamma(h) = \gamma(-h)$, para todo h. Então $\rho(h) = \rho(-h)$

d) $\gamma(h)$ é uma função semidefinida positiva, isto é, para todo $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ e para todo $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \gamma(|i-j|) \geq 0$$

Demonstração: As partes a) e c) são triviais. A parte b) é uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Para a parte d) note que $0 \leq Var(\mathbf{a}^t\mathbf{y}) = \mathbf{a}^t Var(\mathbf{y})\mathbf{a}$, onde $Var(\mathbf{y})$ é uma matriz com elementos $\gamma(|i-j|)$.

Definição 5.7. Seja $\{Y_t\}$ uma série temporal. Então

a) $\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n}$ é a média amostral.

b) $c_k = \sum_{i=1}^{n-k}(Y_i - \bar{Y})(Y_{i+k} - \bar{Y})/n$ é a autocovariância amostral.

c) $r_k = \dfrac{c_k}{c_0}$ é a autocorrelação amostral.

O gráfico de r_k vs k denomina-se correolograma ou gráfico da função de autocorrelação amostral.

Outra ferramenta muito útil e importante na simulação de processos estacionários é a função de autocorrelação parial (FACP). Seja $\{Y_t\}$ um processo estacionário com valor esperado zero e covariâncias $\gamma(.)$. A Autocorrelação Parcial de ordem k, denotada por ϕ_{kk}, está definida como a correlação entre Y_{t+k} e Y_t que não é explicada por $A = \{Y_{t+1}, ..., Y_{t+k-1}\}$. Isto é, a correlação entre Y_{t+k} e Y_t após retirar a dependência linear em A. Em particular, para $k = 1$ temos que $\phi_{kk} = \rho(1)$. Portante, ϕ_{kk} como função de k é a **função de autocorrelação parcial** (FACP).

5.2 Diferenciação

Definição 5.8. A maoria dos procedimentos de análise estatística de séries temporais pressupõem a estacionariedade dos mesmos, de modo que se torna necessária uma transformação nos dados originais, caso não apresentem a característica de estacionariedade. A transformação comumente utilizada consiste em realizar diferenças sucessivas da série original, até se obter uma série estacionária. A primeira diferenção de Z_t é definida por $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$. Consequentemente, a segunda diferenciação pode ser expressa $\Delta^2 Z_t = \Delta[\Delta Z_t] = \Delta[Z_t - Z_{t-1}] = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}$. De modo Geral, a n-ésima diferença de Z_t é $\Delta^n Z_t = \Delta[\Delta^{n-1} Z_t]$.

6 Movimento Browniano

6.1 Definição

Definição 6.1. O Movimento Browniano (MB) — ou processo de Wiener — padrão é um processo estocástico $\{B_t\}_{t\in[0,T]}$ tal que:

i) $\mathbb{P}(\{w : B_0(w) = 0\}) = 1$;

ii) para quaisquer $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ segue uma distribuição normal com média zero e variância $t - s$;

iii) $B_{t_2} - B_{t_1}$ e $B_{t_4} - B_{t_3}$ são independentes desde que $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ (incrementos independentes);

iv) as trajetórias $(t \longrightarrow B_t)$ são contínuas.

A seguir apresentaremos dois importantes teoremas de Kolmogorov que garantem a existência do MB.

Teorema 6.1. (Extensão do Teorema de Kolmogorov). Seja $\{\mathbb{F}_{(t_1,t_2,...,t_n)},\ t_1 < t_2 < ... < t_n,\ t_j \in T,\ j = 1, 2, ...n\}$ uma família de funções de distribuição finito-dimensionais que satisfazem as condições de consistência de Kolmogorov descritas abaixo:

1. $\{\mathbb{F}_{(t_1,t_2,...,t_n,t_{n+1})}(x_1, ..., x_n, x_{n+1})\} \longrightarrow \{\mathbb{F}_{(t_1,t_2,...,t_n)}(x_1, ..., x_n)\}$, com $x_{n+1} \longrightarrow +\infty$.

2. Se π é uma permutação de $\pi y = (y\pi(1), ..., y\pi(n))$ para todo n-vetor, tem-se que $\mathbb{F}_{\pi t}(\pi x) = \mathbb{F}_{(tx)}$ para toro x, t, π e n.

Então existem um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e um processo estocástico $\{B_t\}$ tais que $\mathbb{F}_{(t_1,t_2,...,t_n)}(x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}(\{w : B_{t_1}(w) \leq x_1, ..., B_{t_n}(w) \leq x_n\})$.

Teorema 6.2. (Teorema da Continuidade de Kolmogorov). Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Considere o processo estocástico $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ que satisfaz a propriedade $E(|X_t - X_s|^\alpha) \leq D|t - s|^{1+\beta}$, para todo $t \in [0, T]$, em que α, β, D são constantes reais não negativas. Desse modo, existe um processo estocástico $\{B_t\}_{t\in[0,T]}$, tal que $\{B_t\}_{t\in[0,T]}$ é uma modificação contínua de $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$, ou seja, $\mathbb{P}(B_t = X_t) = 1$.

O teorema 6.1 nos garante a existência do MB, desde que suas condições do teorema sejam satisfeitas. Possibilitando definir possiveis funções de distribuição que satisfaçam além da condição de Kolmogorov, também satisfaçam os itens i) e iii) do Processo de Wiener. Pelo teorema 6.2, temos a garantia de continuidade do MB. Para demonstrar isso, podemos fazer $\alpha = 4$, $D = n(n + 2)$ e $\beta = 1$ e, com isso é, pbservamos que o MB satisfaz a condição $E(|B_t - B_s|^4) \leq n(n + 2)|t - s|^2$.

6.2 Simulações

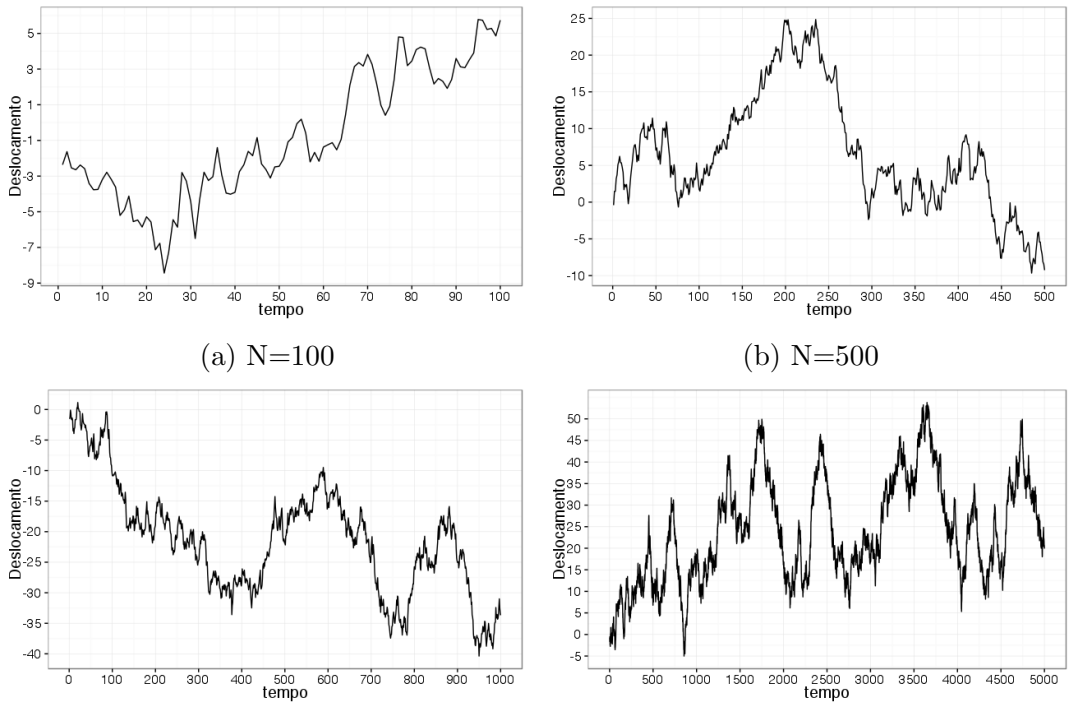
Nessa seção realizamos algumas simulações (com o *software* estatístico R) do MB para ver, na prática, como ele realmente se comporta.

Inicialmente, vamos considerar o caso simples em uma dimensão. Vemos de i), ii) e iii) da definição do MB que em uma dimensão ele é composto por um somatório acumulado de sequencies de deslocamentos aleatórios normalmente distribuídos, e que, desse modo, pode ser simulado pela soma de sucessivos termos de variáveis aleatórias normalmente distribuídas e enumeradas:

$$\begin{gathered}
\mathrm{X}(0) \sim \mathrm{N}(0,1) \\
\mathrm{X}(1) \sim \mathrm{X}(0) + \mathrm{N}(0,1) \\
\mathrm{X}(2) \sim \mathrm{X}(1) + \mathrm{N}(0,1) \\
\ldots
\end{gathered}$$

em que cada distribuição $\mathrm{N}(0,1)$ é independende uma da outra.

Definimos o tempo intervalar (N) com um número discreto, de forma que o tamanho de cada intervalo seja arbitrariamente pequeno, desse modo, o processo se torna naturalmente contínuo. Na Figura 3 apresentamos a simulação do MB em uma dimensão para alguns valores de N. Notamos que o movimento gerado pela nossa simulação não apresenta grandes diferenças quando consideramos $N > 1000$, enquanto que para $N < 500$, o gráfico resultado não se assemelha visualmente com um MB em situação real.

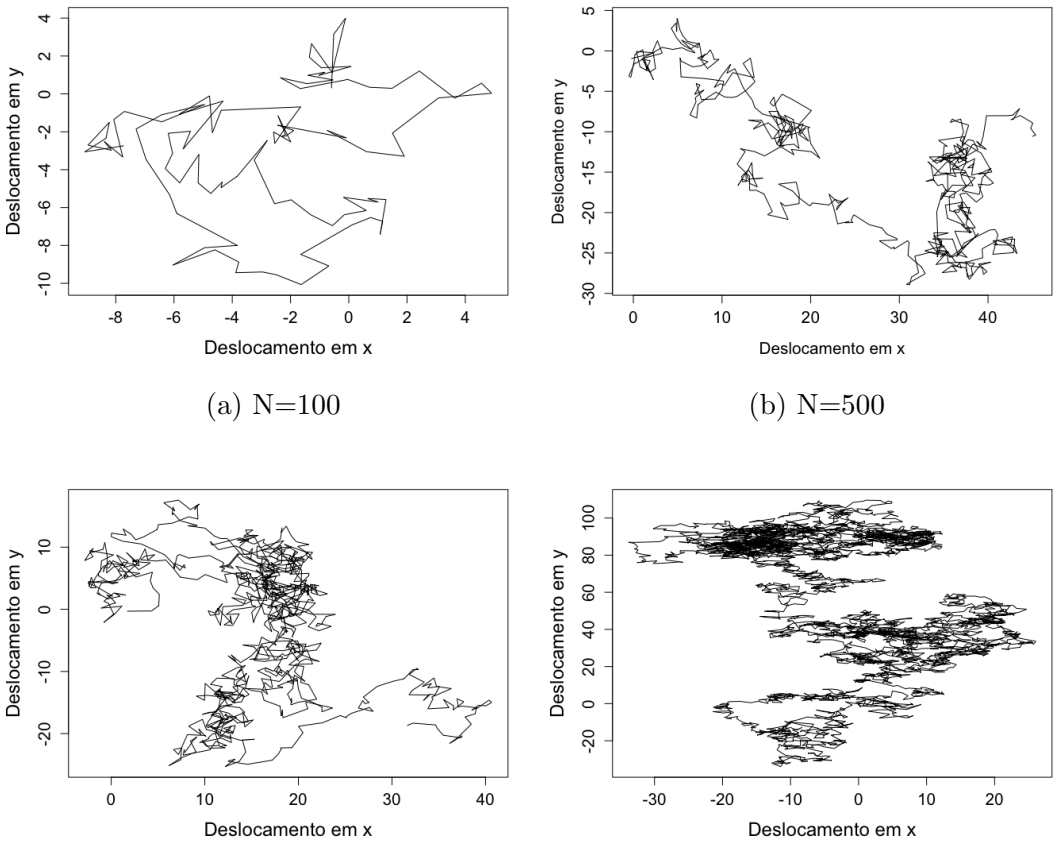


(a) N=100 (b) N=500

(c) N=1000 (d) N=5000

Figura 3: Movimento Browniano em uma dimensão.

Extendemos a analise anaterior considerando uma dimensão a mais, ou seja, o MB com duas dimensões. Para isso, utilizamos o mesmo mecanismo já descrito, porém, realizamos a simulação do deslocamento também na segunda dimensão, de forma independente da primeira, como pode ser visto na Figura 4. Observa-se os mesmos pontos evidenciados na Figura 3, ou seja, a medida em que o tamanho do intervalo N aumenta, o gráfico se assemelhava cada vez mais ao MB.

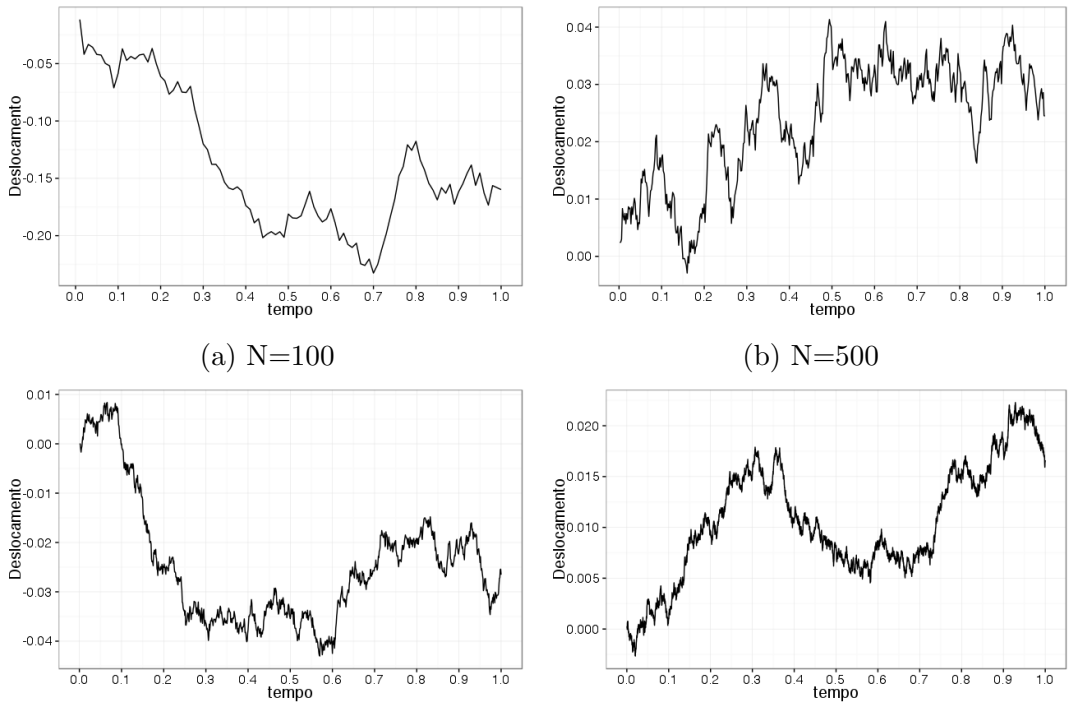


(a) N=100 (b) N=500

(c) N=1000 (d) N=5000

Figura 4: Movimento Browniano em uma dimensão.

Como queremos analisar a série de acordo com o tempo (contínuo), podemos realizar o mesmo procedimento no intervalo $(0, 1]$, variando o seu comprimento. Consideraremos os valores de N utilizados anteriormente. Na Figura 5 observamos os mesmos pontos mencionados na Figura 3, porém, em um intervalo reduzido. As análises e conclusões foram as mesmas ditas anteriormente.



(a) N=100 (b) N=500

(c) N=1000 (d) N=5000

Figura 5: Movimento Browniano em uma dimensão no intervalo $(0, 1]$.

6.3 Características empíricas

Nesta seção, abordaremos algumas característica empíricas do movimento browniano. Para isso, utilizaremos os dados simulados anteriormente com $N = 1000$, porém, no intervalo $(0, 1]$. Na Figura 6 apresentamos, novamente, o gráfico da série que será utilizado para as análises.

6.3.1 Periodograma

Para realizarmos uma análise exploratória a cerca dos possíveis períodos do processo, retiramos a tendência da série, de modo a analisarmos apenas a sazonalidade. O gráfico do periodograma pode ser visto na Figura 7. Através dele, nota-se que apenas um *peak* se destacou (linha pontilhada vermelha), o que nos dá indívios da possi-

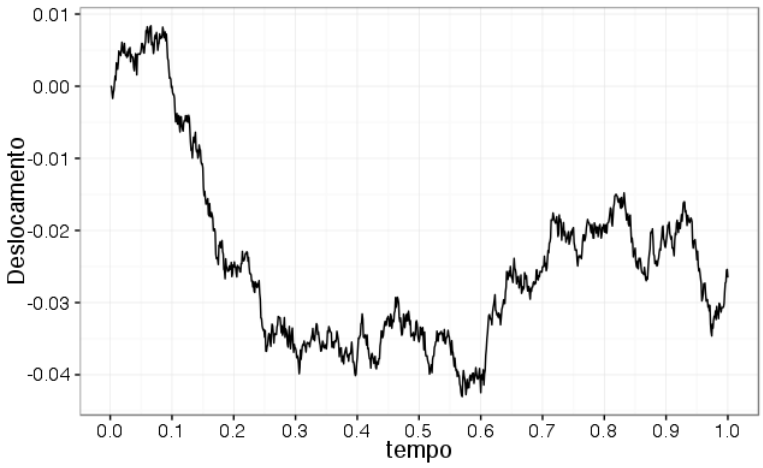


Figura 6: Movimento Browniano com 1000 observações.

bilidade de existir apenas uma sazonalidade. Entretanto, observa-se também que a frequência é próxima de zero, sugerindo a não existência de ciclos/sazonalidades.

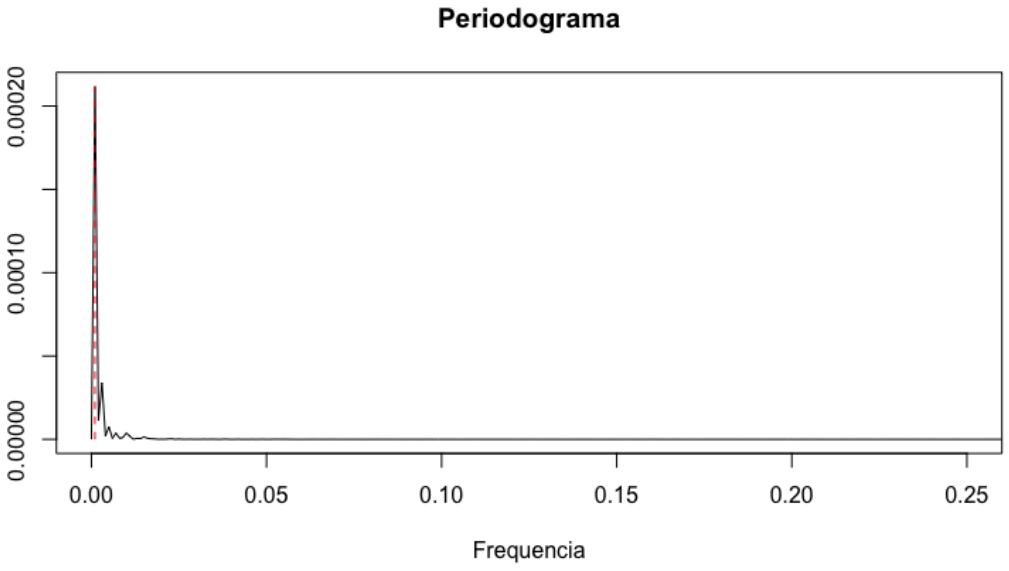


Figura 7: Periodograma após retirar a tendência.

6.3.2 FAC e FACP

Calculamos a FAC e a FACP amostrais para termos uma idéia do comportamento da nossa série. Os respectivos gráficos podem ser vistos na Figura 8. Já sabemos que o MB é um processo não estacionário, pois não satisfaz as condições de estacionariedade (variância constante, por exemplo). Analisando os gráficos, podemos depreender que nosso processo é não estacionário, uma vez que a FAC possui um decaimento demorado ao longo das defasagens.

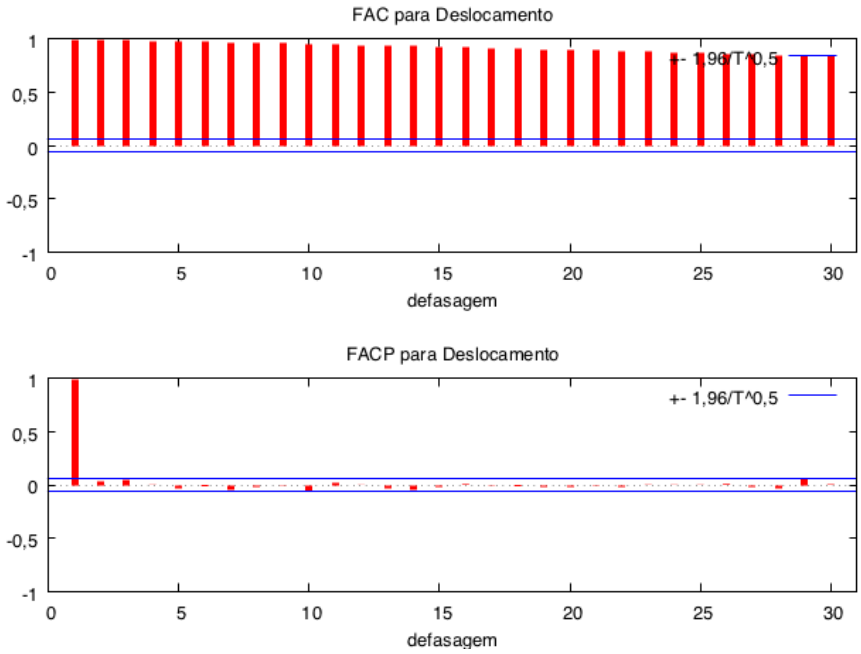
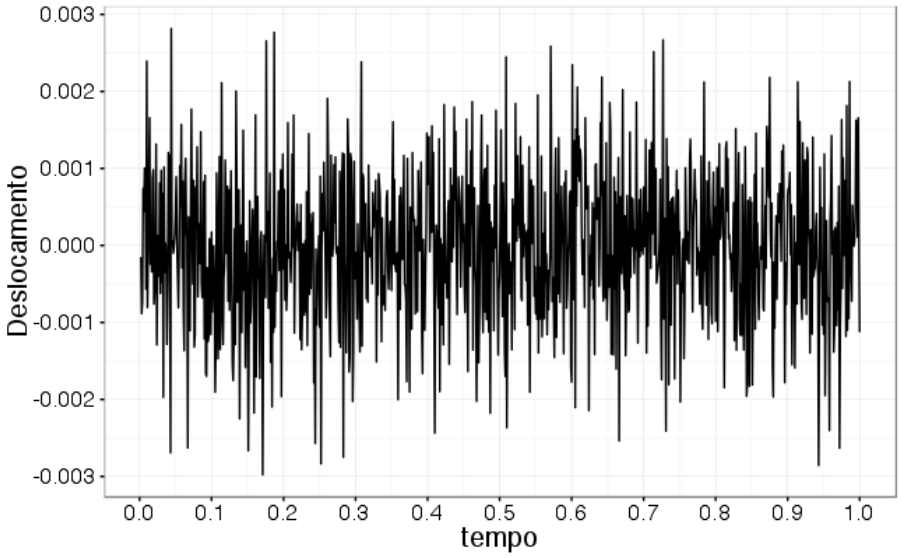
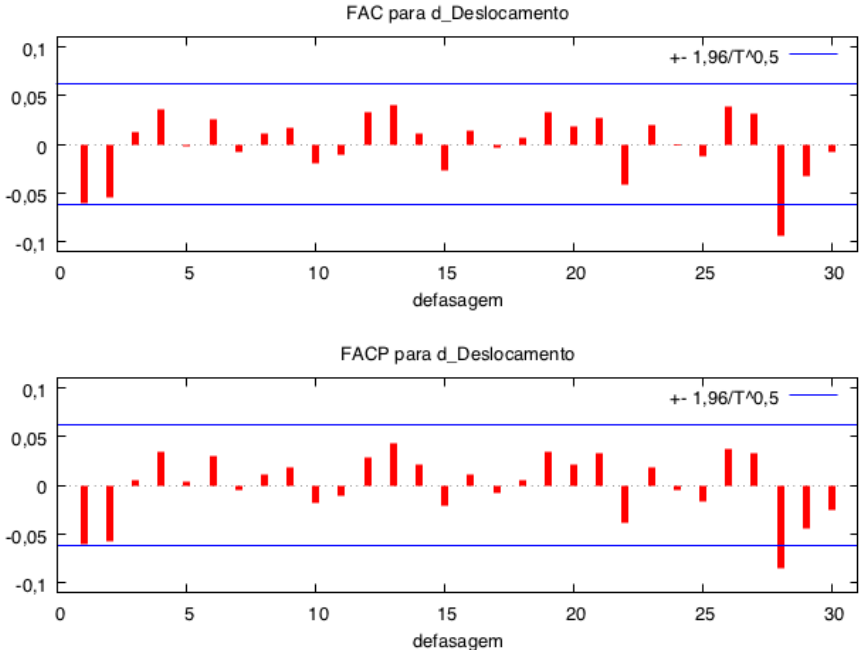


Figura 8: Gráfico da FAC e FACP amostrais.

Com isso, a fim de tornarmos o processo em uma série estacionária, realizamos a primeira diferenciação, que pode ser vista na Figura 9a. Note que, aparentemente o nosso processo se tornou, de fato, estacionario. Além disso, podemos calcular novamente a FAC e a FACP amostrais. Na Figura 9b observa-se o comportamento de uma série estacionária, desse modo, pode-se ajustá-la levando em consideração modelos mais simples (como os autorregressivos e médias móveis, por exemplo).



(a) Gráfico da primeira diferenciação da série temporal



(b) Gráfico da FAC e FACP amostrais da primeira diferenciação

Figura 9: Primeira diferenciação.

7 Exemplo: Ações Itaú S.A.

Para ilustrarmos o que discutimos em uma situação real, utilizaremos o preço das ações do Itaú, pois são dados que sabemos que variam muito em relação ao tempo, característica encontrada nos movimentos brownianos. Os dados são diários, do período de 4 de janeiro de 2016 até 30 de junho de 2016. Na Figura 10 apresentamos o gráfico da série temporal.

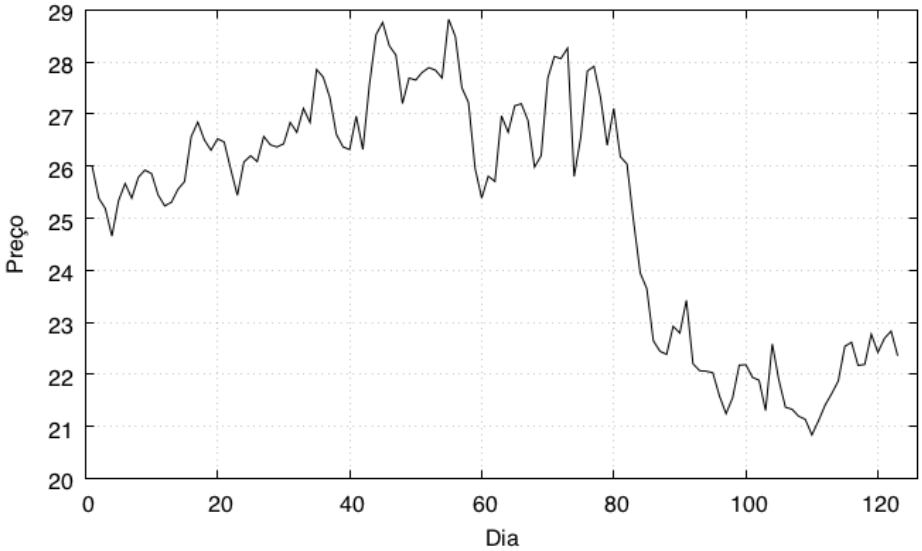


Figura 10: Gráfico de série do preço das ações do Itaú.

A partir daí, podemos utilizar o periodograma para verificarmos algumas características a cerca da sazonalidade do processo, após retirarmos a tendência. Na Figura 11 temos o periodograma amostral para a série. Através dele, nota-se que apenas um *peak* se destacou (linha pontilhada vermelha), o que nos dá indívios da possibilidade de existir apenas uma sazonalidade, com frequência de aproximadamente 0,008.

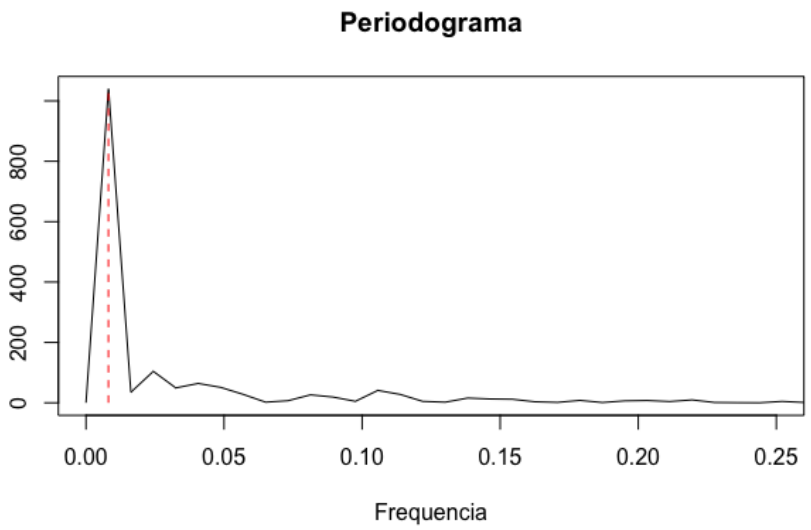


Figura 11: Periodograma após retirar a tendência.

Calculamos também a FAC e a FACP amostrais para termos uma idéia do comportamento da nossa série. Os respectivos gráficos podem ser vistos na Figura 12. Analisando os gráficos podemos depreender que nosso processo é não estacionário, uma vez que a FAC possui um decaimento demorado ao longo das defasagens.

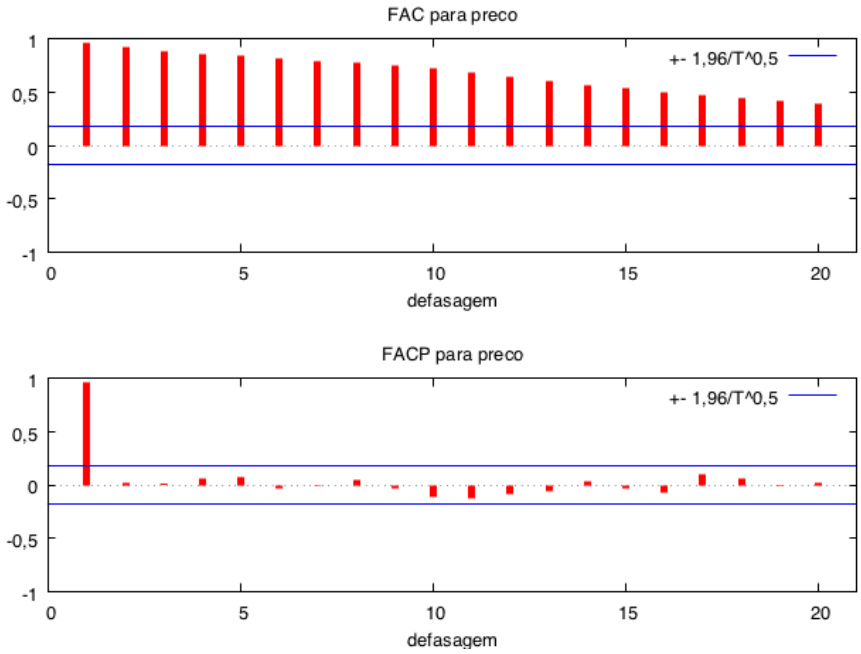
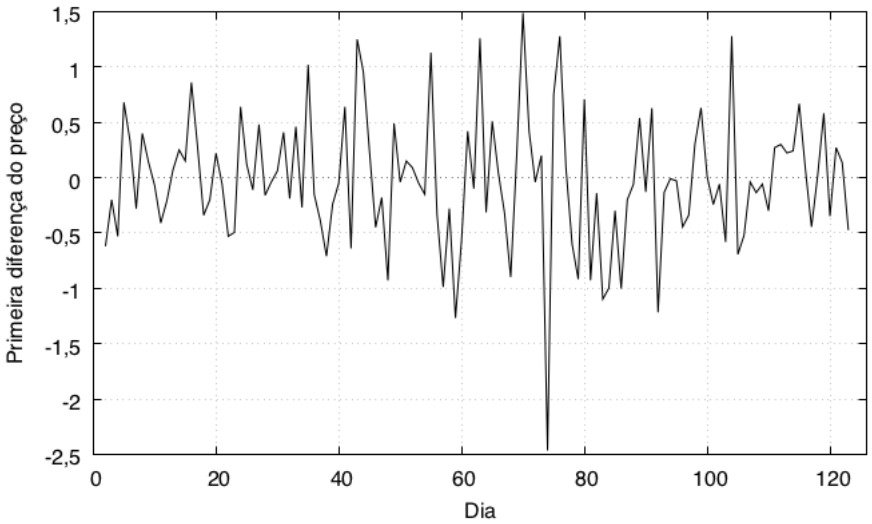
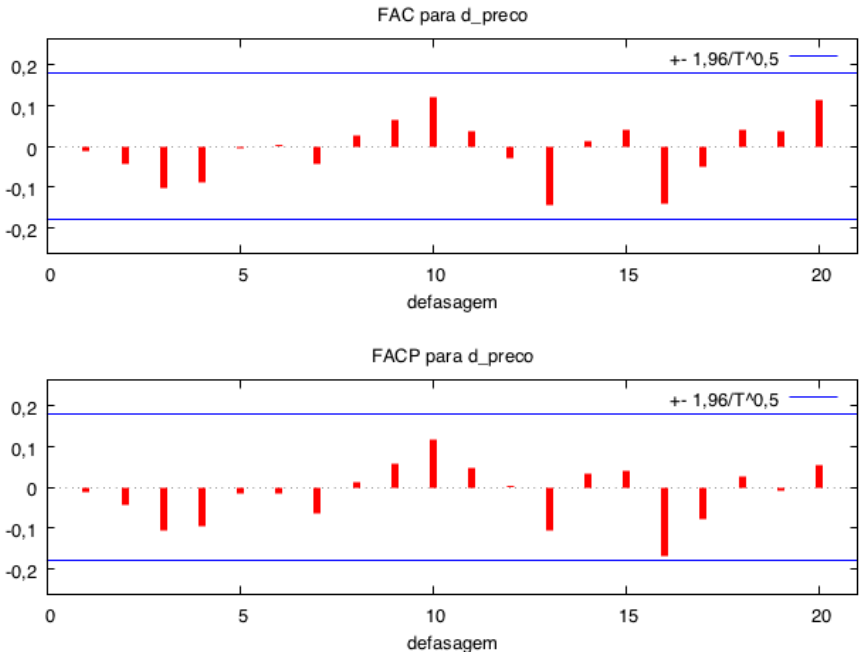


Figura 12: Gráfico da FAC e FACP amostrais.

Com isso, a fim de tornarmos o processo em uma série estacionária realizamos a primeira diferenciação, que pode ser vista na Figura 13a. Nota que, aparentemente o nosso processo se tornou de fato estacionario. Além disso, podemos calcular novamente a FAC e a FACP amostrais. Na Figura 13b observa-se o comportamento de uma série estacionária, desse modo, pode-se ajustá-la levando em consideração modelos mais simples (como os autorregressivos e médias móveis, por exemplo).



(a) Gráfico da primeira diferenciação da série temporal



(b) Gráfico da FAC e FACP amostrais da primeira diferenciação

Figura 13: Primeira diferenciação.

8 Referências bibliográficas

1. Karlin, S. and Taylor, H. (1975). "A First Course in Stochastic Processes", 2nd edition, Academic Press.

2. Resnick, S. (2013). "A Probability Path", 2014 edition, Birkhäuser.

3. Ross, S. (2009). "A First Course in Probability", 8th edition, Pearson Prentice Hall.

4. Ross, S. (2009). "Introduction to Probability Models", 10th edition, Academic Press.

5. DeGroot, M. and Schervish, M. (2012). "Probability and Statistics", 4th edition, Addison Wesley.

6. Mood, A. (1974). "Introduction to the Theory of Statistics", 3rd edition, McGraw Hill.

7. Billingsley, P. (1968). "Convergence of Probability Measures".

8. Billingsley, P. (1979). "Probability and Measure".

9. Bernardini, D. (2007). "Distribuições Subexponenciais - Introdução e Exemplo".

10. Zevallos, M. (2015). "Séries Temporais", Notas de aula, Universidade Estadual de Campinas.