UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Francisco Leitão de Oliveira Neto

Jankenpon: uma alternativa para reforçar o estudo de probabilidade

12 de dezembro de 2012

Francisco Leitão de Oliveira Neto

Jankenpon: uma alternativa para reforçar o estudo de probabilidade

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica, UNICAMP,
como requisito parcial para a conclusão do curso
de Especialização em Matemática, do
Programa Redefor, sob orientação da
Prof. Dra. Laura Leticia R. Rifo

Campinas
2012

FICHA CATALOGRÁFICA

Oliveira Neto, Francisco Leitão de

O jogo Jankenpon: uma alternativa para reforçar o estudo de probabilidade 00 Campinas, SP, 2012.

Orientadora: Laura L. Ramos Rifo

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática), Programa REDEFOR – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Probabilidade. 2. Estatística. 3. Jogos.

Autoria: Francisco Leitão de Oliveira Neto

Título: Jankenpon: uma alternativa para reforçar o estudo de probabilidade

Os componentes da banca de avaliação, abaixo listados, consideram este trabalho aprovado.			
	Nome	**Instituição**	**Assinatura**
1			
2			
3			

Data da aprovação: ____ de _____ de _____

RESUMO

Em probabilidade lidamos com incertezas, onde elas, talvez mais que a certeza, orientam nossas escolhas. Ao jogarmos Jankenpon, dentre três escolhas, opta-se por uma delas na tentativa de ficar em vantagem sobre a escolha de oponente. Quando uma escolha conservadora é mais vantajosa que outra mais arriscada, ou quando o arrojo vale mais que a ponderação? Pretende-se com este trabalho, mostrar as relações e comparar com os resultados de partidas disputadas entre grupos de uma turma de Ensino Médio e outra turma de Ensino Fundamental, explica-se (ou tenta) os resultados obtidos.

Palavras-chave: probabilidade, jogos, estatística, analise de resultados.

ABSTRACT

In a decision making procedure, we usually deal with uncertainty. In this work, we present that kind of problem in the context of the game Jankenpon. That game was applied to the students, and their choices and learning are discussed.

Key-words: probability, games, statistical analysis

SUMÁRIO

Introdução vi
ESCOLHEREMOS QUAL? vii
Pedra, papel ou tesoura... vii
Problema e solução x
O dado A x
O dado B x
O dado C xi
APLICAÇÃO xii
Partida entre os grupos 1 e 2 xii
A partida entre os grupos 3 e 4 xiii
Partida entre os grupos 5 e 6 14
Partida entre os grupos 7 e 8 15
O jogo no Ensino Fundamental 17
ANALISANDO AS PARTIDAS 18
Dado A vs Dado A 18
Dado A vs Dado B 19
Dado B vs Dado B 20
Dado A vs Dado C 21
Dado B vs Dado C 21
JOGADA FINAL DE Jankenpon 24
REFERÊNCIAS 25

INTRODUÇÃO

Aquela noite fria, com sua garoa fina, era muito convidativa para ficarmos em casa, ouvindo uma boa música, lendo bons livros ou então assistindo de forma descompromissada qualquer programa que passasse naquela sexta-feira. Alguns, de forma intuitiva, consultaram mentalmente sua quantidade de ausências anuais na escola e optaram por fazer algum desses programas falados. Já outros, com ou sem escolha, rumaram para aquela que seria a primeira sexta-feira do ultimo bimestre letivo. Eles escolheram! Poderia algum professor faltar, haver uma queda de energia, ou algum outro inesperado golpe de sorte ou do destino, mas mesmo assim, estávamos lá. No quadro branco da sala de vídeo, a qual sua mesa maior e a possibilidade de projeção de uma planilha de dados ainda em branco, constavam os grupos que ainda não sabiam do que se tratava e nem o porquê estavam lá, e não na sala 13, como costumeiramente.

Houve também aquela tarde de temperatura amena, onde os alunos do 7º ano em sua totalidade se perguntaram o porquê da sala 13 estar disposta em carteiras agrupadas de quatro em quatro. Seria um trabalho em grupo, uma aula diferente da convencional? Para eles, o jogo não é novidade, pois já jogaram para aprender durante o ano. Se pudessem, escolheriam sempre jogar durante as aulas. Mas naquela aula houve ainda a escolha de participar ou não da atividade. Desde o aluno que tem as maiores notas até o aluno especial, o comportamento não poderia ser melhor. O empenho e dedicação foram imensuravelmente superiores às outras tantas aulas que foram no giz e na lousa.

Da situação de pergunta sobre se existiria um dado melhor, surgiu discussões sobre pontos que tangem nossa vida, o nosso entorno, enfim, como uma árvore de possibilidades, a escolha pelo Jankenpon foi certeira; possibilitou a concepção e aprimoramento de conceitos fundamentais em probabilidade, uniu o aprendizado com o que eles vivem ou viverão. Como toda matéria, em suma, deveria ser...

ESCOLHEREMOS QUAL?

Você é livre para fazer suas escolhas, mas é prisioneiro das consequências.

Autor desconhecido

PEDRA, PAPEL OU TESOURA...

Daquela brincadeira com dedos, onde mão fechada representava pedra, aberta era papel e dois dedos em "v" era tesoura, inspirou-se o jogo Jankenpon, que foi jogado por um 2º ano do Ensino Médio e por um 7º ano do Ensino Fundamental. As escolhas das séries que foram utilizadas para o experimento estão de acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, onde é tratado como o conteúdo "problemas envolvendo probabilidade" para desenvolver a habilidade "saber resolver problemas simples envolvendo a ideia de probabilidade (porcentagem que representa possibilidades de ocorrência)" (pág., 60, Currículo Oficial do Estado de São Paulo). No 2º ano do ensino Médio, é previsto no 3º bimestre os conteúdos: "Probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos e Probabilidade condicional" onde espera-se desenvolver a habilidade "Saber calcular probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas" (pag. 68, Currículo de Matemática).

O Jankenpon[1] foi propositalmente trabalhado com alunos em diferentes níveis de entendimento nos temas abordados, pois como se trata de um currículo que aborda os mesmos temas e conteúdos, sempre acrescendo novas habilidades. Sendo assim, é possível visualizar diferentes linhas de raciocínios para chegarmos às conclusões das escolhas.

Afinal, a diferença etária existente faz com que para cada decisão tomada no jogo, suas escolhas poderiam ser bastante distintas, como podemos observar na hora do intervalo, por exemplo, enquanto há brincadeiras, gritos, correria entre os menores, os maiores optam por conversas, paqueras e aquele estudo de ultima hora para aquela prova que ocorrerá no mesmo dia. Os menores estão, em sua grande maioria, na faixa dos 10 e 11 anos, na fase operatória concreta, segundo Piaget ; os maiores com seus 16 anos, em média, se enquadram na fase operatória abstrata. De acordo com LA TAILLE (1992:17) durante o período operatório concreto, a criança constrói a reversibilidade,

[1] experimento disponível no site http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1016

enquanto que no 2º ano, quando já estão no período de operações formais há algum tempo, a reversibilidade já foi construída.

A classificação de jogos feita por Roger CAILLOIS, citado por BANDET & SARAZANAS (1972), baseia-se no fato de haver tendência de o indivíduo ir-se sujeitando de forma crescente a um conjunto de convenções arbitrárias.

O jogo em si é passível de analogias interessantes. Pode-se exemplificar o vôlei, quando se enfrenta uma seleção de destaque no bloqueio. Nesse cenário, opta-se por atacar com mais velocidade a fim de tentar não deixar o principal artificio adversário se pouco eficaz. Mas por outro lado, se o adversário tem seu ponto forte na defesa, pode-se atacar com mais força do que velocidade. Não há fórmula pronta para falar em melhor tipo de ataque: rápido ou forte. Depende muito de quem receberá esse ataque.

O mercado financeiro também é um prato cheio e rico para exemplos. Segundo o site InfoMoney, a valorização do dólar frente ao real durante o mês de Outubro de 2012 foi de 0,11%, enquanto a poupança, no mesmo mês, ficou com rendimento em 0,5%, segundo o site FinanceOne. Embora essa taxa seja muito relativa, quem decidiu apostar em ações, teve em média, uma queda de 3,5%. E os porquês dessas três comparações, com esses três índices: um que oscila razoavelmente pouco, outro que é estável e um terceiro investimentos com variações maiores? Pois é exatamente assim a escolha de dados no Jankenpon: uma escolha mais ousada, uma mais conservadora e outra mais constante.

Para as analises deste trabalho, utilizaremos conceitos bastante utilizados em probabilidade, guiando-se por Paul L. Meyer, em seu livro Probabilidade: Aplicações à Estatística.

De antemão, é de extrema importância enquadrar o jogo em um modelo matemático para analise. Começa-se questionando em qual modelo encaixa-se a observação do jogo. O modelo determinístico é, segundo Meyer (1969), “um modelo que estipula que as condições sob as quais um experimento seja executado determine o resultado do experimento” (pág. 2), enquanto o mesmo autor define como modelo não-determinístico ou probabilístico frente a um modelo determinístico “em um modelo determinístico empregamos “considerações físicas” para prever o resultado, enquanto em um modelo probabilístico empregamos a mesma espécie de considerações para especificar uma distribuição de probabilidade.” (pág. 4).

Para analise dos resultados, teremos um espaço amostral. De acordo com o autor, "para cada experimento ε do tipo que estamos considerando, definiremos o espaço amostral como o conjunto de todos os resultados possíveis de ε." (pág. 11)

Ainda segundo Mayer (1969), outra noção fundamental é o conceito de evento, que é simplesmente um conjunto de resultados possíveis dentro um espaço amostral particular. Em outras palavras, o evento é um subconjunto de um espaço amostral.

No começo deste trabalho, falamos de certezas e incertezas. Observaremos que quanto mais dados temos, a tendência é aparecer mais valores ou resultados que tenham uma maior probabilidade de aparecer, mas, obviamente, teremos tantos outros resultados que são com menor chance de ocorrência. Ou seja, se pegarmos resultados de uma rodada, ou pouco mais de uma, podemos até ter uma falsa impressão de tendência; quanto mais resultados, mais verificaremos as tendências matemáticas existentes.

Outro ponto a ser levantado é sobre a necessidade ou não de uma explanação para o começo das atividades. Destacar as palavras do Prof. J. Neyman:

"A resolução do problema matemático pode estar correta e, não obstante, estar em grande discordância com os dados observados, simplesmente porque as hipóteses básicas feitas não são confirmadas. Geralmente é bastante difícil afirmar com certeza se um modelo matemático especificado é ou não adequado, antes que alguns dados de observação sejam obtidos. A fim de verificar a validade de um modelo, deveremos deduzir certo número de consequências de nosso modelo e, a seguir, comparar esses resultados previstos com observações."

Faz-se importante comentar o fato de aprender ou fixar o aprendizado através dos jogos. Quando o aluno joga matemática, o lado lúdico distrai o pavor da matéria que muitos têm. A brincadeira é natural do ser humano, da mesma forma que aprender matemática se tornou quase um evento impossível, visto os índices preocupantes nas avaliações externas. As médias alcançadas no ensino de matemática classificam o país em um dos lugares mais preocupantes possíveis.

PROBLEMA E SOLUÇÃO

No jogo Jankenpon, o objetivo é marcar mais pontos do que o adversário em cada rodada. O primeiro que alcançar 10 pontos, vence. Cada ponto é conquistado após dois dados serem confrontados. Mas não são dados comuns, de 6 faces numerados de 1 a 6; há três dados distintos para escolha de cada grupo:

O DADO A

Composto por quatro faces com valor 1 e outras duas faces com valor 10, foi, em geral escolhido, por grupos com alunos que viram o 10 como o maior número (como de fato ele é) dentre os possíveis. Dos três é o que tem o maior valor absoluto, e maior chance de tirar a menor de suas faces também. Fazendo uma analogia, seria, mais ou menos, como investir em papéis na bolsa de valores: consideremos como sucesso ganhar e fracasso perder dinheiro. Quando se tira 10, não há hipótese para que o adversário marque ponto, embora possa empatar caso o outro dado também tenha tirado 10. Porém, há um risco muito grande para o fracasso de tirar 1, igualmente há chance grande de perder dinheiro nessa forma de investimento.

Essas chances são analisadas como o evento de arremessar o dado A:

P(A tirar a face 1) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

P(A tirar a face 10) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Posteriormente será feita a analise de marcar ou não ponto quando temos o dado A contra qualquer outro dado.

O DADO B

Composto por três faces com valor 6 – o segundo maior no jogo, ficando abaixo apenas do valor 10, do dado A – e outras três faces com valor 0 – a menor do jogo – foi o dado escolhido pelos grupos que ficaram mais tempo discutindo. De analise completamente superficial, a escolha pelo dado B seria como investir na compra de moeda estrangeira. As chances iguais de obter o número máximo e mínimo nesse dado faz com que Chamando de B o evento de arremessar o dado B, teremos as seguintes possibilidades:

P(B tirar a face 0) = P (B tirar a face 6) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ para cada valor distinto.

Também será feita analise de cada espaço amostral contendo o dado B.

O DADO C

O de mais fácil compreensão (que não significa de maior aceitação), pois todas as faces têm o mesmo valor, assemelha-se muito a poupança e sua taxa constante, pois ele também tem em suas faces o mesmo valor: 4. Logo, a probabilidade do evento "tirar a face 4" nesse dado é total, ou seja, 100%.

No jogo Jankenpon, todos têm chances de vencer a todos os outros, exceção feita num duelo entre dois dados C. Mas não se restringe apenas o exemplo da brincadeira do Jankenpon entre duas pessoas usando suas mãos e a brincadeira com os dados. Diversas outras situações, além das aqui já citadas, teremos escolhas que, dentre a opção escolhida, haverá outras não escolhidas que terão suas vantagens e desvantagens. Na dúvida em que ficamos na hora de decidir se moraremos em uma casa, onde a privacidade é muito maior, ou um apartamento, onde há uma maior segurança, qualquer que seja a escolha, a opção tem seus atrativos e seus contras, que cada pessoa responderá o que lhe cabe mais, ou o que busca.

Fica-se então a possibilidade de fazer ligações entre as situações do jogo com tantas outras situações do cotidiano do aluno, e ainda como ponte para alguns conteúdos e habilidades, facilitando o aprendizado de princípios de multiplicação, probabilidade simples, analise combinatória, analisando desde cada lançamento de dado por si mesmo, até probabilidade condicional, quando analisamos as chances de vitória condicionada à escolha adversária.

Mas será que tudo isso já é possível para respondermos uma questão extremamente pertinente ao jogo: existe um dado melhor que o outro?

APLICAÇÃO

Após explicação das regras presentes no material do professor, os alunos se reuniram nos grupos, onde tiveram 10 minutos para discussão sobre qual dado escolheriam. Foi pedido para que a escolha fosse anotada num papel à parte e entregue ao professor para que não houvesse mudança de dado escolhido. Após as partidas que analisaremos abaixo, jogou-se com alteração nessa escolha: cada grupo escolhia o dado anteriormente a cada arremesso, o que somou outro grau de dificuldade: prever a escolha do oponente mais de uma vez por partida. Tal alteração só foi feita no Ensino Médio, pois no ensino fundamental as discussões que aconteceram durante a aula de aplicação foram suficientes. Houve ainda um terceiro jogo, onde todos os grupos disputaram entre si o que faria mais pontos após 10 arremessos, contando por ponto cada valor que se tirou no dado.

Os 31 alunos do ensino médio foram divididos em 8 grupos, sendo 7 com 4 membros e um com 3 alunos. O 1º grupo disputou as partidas com o 2º grupo, o 3º grupo fez o embate com o 4º grupo, e as outras duas disputas foram entre 5º e 6º grupo, 7º e 8º grupo, respectivamente.

Primeiramente, as partidas foram disputadas com as regras originais do jogo, com cada grupo escolhendo um único dado para arremessa-lo durante todo embate. O dado A foi escolhido pelos grupos 5, 6 e 8; já os grupos 1, 4 e 7 escolheram o dado B, ficando com o dado C os grupos 2 e 3. Como visto, a distribuição da escolha de dados foi bastante equilibrada, onde tivemos 3 escolhas do dado A, 3 escolhas de dado B e outras duas escolhas do dado C. É digno de comentário que, nos grupos 2 e 3, mesmo que separados por uma distância considerável, o comentário foi idêntico: “é melhor garantir 4 sempre do que tirar 1 ou 0”.

Dos integrantes, um deles, designado pelo próprio grupo, foi responsável por preencher a tabela disponível no material do jogo denominado “Folha do aluno”. Cada grupo anotou em uma folha à parte a fim de evitar anotações inverossímeis.

PARTIDA ENTRE OS GRUPOS 1 E 2

O grupo 1 ponderou mais tempo pela escolha. Estavam o tempo todo decididos pelo dado A, porém, após uma ultima argumentação de um dos integrantes, optaram pelo dado B; o grupo 2 ficou com a opção do dado C desde o começo, sem maiores

especulações sobre alterações de escolha. Com os dados escolhidos no confronto, tivemos o seguinte cenário:

Rodada	Grupo 1 Dado B	Grupo 2 Dado C	Marcou Ponto
1ª	0	4	Grupo 2
2ª	6	4	Grupo 1
3ª	6	4	Grupo 1
4ª	0	4	Grupo 2
5ª	0	4	Grupo 2
6ª	6	4	Grupo 1
7ª	0	4	Grupo 2
8ª	6	4	Grupo 1
9ª	0	4	Grupo 2
10ª	0	4	Grupo 2
11ª	0	4	Grupo 2
12ª	6	4	Grupo 1
13ª	6	4	Grupo 1
14ª	0	4	Grupo 2
15ª	6	4	Grupo 1
16ª	0	4	Grupo 2
17ª	0	4	Grupo 2
	7	10	Total

Observamos que o grupo que escolheu o dado C teve melhor "sorte" nessa jogada. Então fica a pergunta: num cenário entre os dados B e C, a escolha do C seria, matematicamente falando, a escolha mais feliz? Seria mesmo a palavra sorte que se enquadra nesse caso? Posteriormente faremos uma análise se essa é a palavra que se enquadra nessa situação.

A PARTIDA ENTRE OS GRUPOS 3 E 4

No embate entre os grupos 3 e 4, tivemos o mesmo duelo que o anterior, porém, digamos que se foi sorte que o grupo 2 teve com o dado C, o grupo 4 não a obteve nesse duelo. Se fosse uma lógica simples, com certeza teríamos o mesmo resultado do que na partida anterior, porém, certeza é uma palavra traiçoeira quando falamos de probabilidade, para não dizer que essa palavra é de uso impróprio, salvo em raras exceções.

A partida transcorreu de forma muito semelhante do que entre os grupos 1 e 2, porém, conforme vemos, o resultado não seguiu o anterior; o dado B foi exitoso perante

o dado C, por um placar muito semelhante: 10 a 7 na primeira partida em favor do dado C, 10 a 8 na segunda partida em favor do dado B. Não se adiantando a analise que está por vir, mas tivemos aqui um caso esperado, com uma vitória para cada, ou se deixarmos o resultado global, tem-se como resultado 18 a 17 para um dos dados – no caso o dado B. Mas esse resultado, seguramente, poderia ter sido favorável para o dado C.

A tabela a seguir transpõe as partida nas suas 18 rodadas.

Rodada	Grupo 3 Dado C	Grupo 4 Dado B	Marcou ponto
1ª	4	6	Grupo 4
2ª	4	6	Grupo 4
3ª	4	0	Grupo 3
4ª	4	6	Grupo 4
5ª	4	0	Grupo 3
6ª	4	0	Grupo 3
7ª	4	6	Grupo 4
8ª	4	0	Grupo 3
9ª	4	6	Grupo 4
10ª	4	0	Grupo 3
11ª	4	6	Grupo 4
12ª	4	0	Grupo 3
13ª	4	6	Grupo 4
14ª	4	0	Grupo 3
15ª	4	6	Grupo 4
16ª	4	6	Grupo 4
17ª	4	0	Grupo 3
18ª	4	6	Grupo 4
	8	10	total

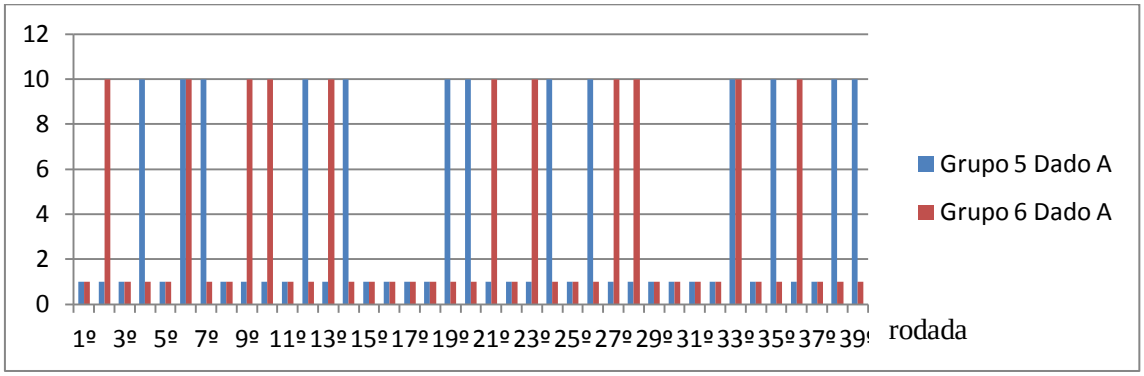
Num cenário entre os dados B e C terá ao máximo dezenove rodadas, pois, sempre em cada rodada haverá um vencedor, e caso, chegue a um empate máximo – 9 a 9 – deve-se jogar a 20ª rodada. Se analisarmos por estatística, espera-se sempre um número de partidas próximo a 20, e casos remotos de partidas com pouco mais de 10 rodadas.

PARTIDA ENTRE OS GRUPOS 5 E 6

Mas analisando o que aconteceu nessa partida, quando os dois grupos escolheram o mesmo dado, e nesse caso particular que a chance de empate é maior que

a chance de alguém ganhar, tivemos a partida que levou mais tempo para termos um ganhador. Por alguns instantes, era completamente possível esquecer que estávamos numa turma de Ensino Médio e viajarmos para qualquer série inicial em dia de euforia, ou então, diante de um clássico esportivo, em uma plateia de 31 torcedores.

Foram necessárias 39 rodadas, e o placar foi de 10 a 9 para o grupo 5, conforme demonstra o gráfico abaixo:



Houve uma pequena discussão dos motivos de tantos empates, e o momento foi propicio a uma pequena discussão sobre o porquê, pois não era o momento mais oportuno, embora não há razão de ser feito o jogo e não haver uma discussão posterior, para enriquecer e fazer com que os alunos se apropriem dos temas relacionados. Foi criado um banco de questões, oriundos da discussão, vindo dos alunos.

PARTIDA ENTRE OS GRUPOS 7 E 8

Foi o duelo mais curto, com 16 jogadas, conforme é visto na tabela abaixo:

Grupo 7 Dado B	Grupo 8 Dado A	Marcou ponto
0	10	Grupo 8
0	1	Grupo 8
6	1	Grupo 7
0	1	Grupo 8
6	10	Grupo 8
6	1	Grupo 7
6	1	Grupo 7
0	1	Grupo 8
6	1	Grupo 7
0	10	Grupo 8
0	10	Grupo 8
6	1	Grupo 7
6	1	Grupo 7

0	10	Grupo 8
0	1	Grupo 8
6	10	Grupo 8

O único duelo entre os dados A e B, foi também o que a diferença entre os pontos marcados foi a maior (4 pontos de diferença, frente a 2, 3 e 1, nos três primeiros jogos). A observação da sala toda foi importante para a forma que eles jogaram depois, com a possível alteração do dado escolhido. O grupo que optou pelo dado B percebeu certa desvantagem no dado B, pois, segundo os mesmo "o dado A tem mais faces para ganhar do dado B do que o dado B tem faces para ganhar do dado À". Obviamente esse comentário, do ponto de vista matemática é correto.

O resultado com os alunos foi tão expressivo que pediram para jogar mais, modificando algo nas regras: embate entre dois grupos com a escolha dos dados antes de cada arremesso e todos contra todos, onde, a equipe vencedora é a que obtiver a maior soma absoluta de valores observados.

Quando houve a alteração antes de cada jogada, muitos grupos chegaram à conclusão que o melhor dado seria C, mesmo tendo perdidos algumas partidas. Os duelos que mais ocorreram foram entre os dados B e C num primeiro momento. Alguns grupos, num segundo momento, quando analisavam uma maior frequência de escolha do seu adversário pelo dado B, começaram a escolher o dado A. A palavra sorte começou a aparecer menos vezes do que estava aparecendo.

Nesses dois cenários tínhamos outro fator importante que não era possível nos primeiros duelos: eles tinham que pensar que decisão tomar, tentando prever o que o outro (ou outros) grupo (s) pensava (m).

Não será feito um detalhamento tão amplo quanto nas jogadas anteriores, mas, quando possível escolher cada dado antes de cada jogada, destaca-se que, após também uma melhor assimilação das regras, a maioria dos grupos escolhiam entre os dados B e C. Ao questionar as escolhas, os alunos comentavam que era melhor jogar um dado mais "equilibrado". Porém, poucos grupos notaram que o dado A quando jogado contra o dado B, tem uma possibilidade maior de êxito. O curioso foi que em determinado lance, o grupo 5 foi com o dado B e o grupo 6 foi com o dado A. Houve um comentário em particular, de um integrante do grupo 6, prevendo a escolha pela parte do grupo 5 do dado A, já que perderam algumas jogadas sucessivas para esse dado. Naquele momento, o restante do grupo concordou e escolheu o dado C. Nesse momento, mais

uma questão foi posta no nosso banco: probabilidade condicional. A escolha, do ponto de vista matemático, foi a mais ajustada, porém não era certa a marcação do ponto. Nessa rodada, o grupo 5 marcou ponto, pois o resultado do lançamento foi 10.

Por fim, jogou-se todos os grupos contra todos, valores de lançamento absolutos, destacando-se que, após algumas rodadas, os grupos que marcavam menos pontos optavam pelo dado A, para a busca dos 10 pontos. Quanto mais um grupo se isolava na liderança, a opção era sempre pelo dado C, buscando uma maior segurança. O dado B foi o menos utilizado, pois, julgaram ser melhor arriscar tirar 10, como fracasso sendo tirar 1, do que arriscar tirar 6, tendo como fracasso o 0.

O JOGO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Aplicou-se também o jogo no 7º ano do Ensino Fundamental, porém, será feita uma análise mais geral e menos abrangente.

Os alunos foram divididos em duplas, pois houve um julgamento que uma quantidade maior de integrantes por grupo poderia fazer a discussão não ser tão proveitosa.

A escolha maioritária foi pelo dado A, pois eles buscavam tirar 10, o valor máximo, resultando assim por bastantes partidas entre duas duplas com o dado A. Conforme será apresentado na análise, esses duelos são os que mais demoram a sair algum favorecido, pois, o cenário mais esperado é o empate.

Houve, por um pequeno instante de tempo onde duas duplas que competiam entre si escolheram o dado C, e propositalmente, esperou-se algum aluno concluir que não sairia vencedor, evidenciando assim a baixa preocupação em analisar o dado adversário, diferentemente (e esperado) do 2º ano do Ensino Médio. Foram necessárias 4 rodadas para uma troca de dado.

No geral foi uma atividade que colheu os melhores resultados, classificada como extremamente satisfatória, tendo o índice de participação e comprometimento muito próximo a 100%.

ANALISANDO AS PARTIDAS

Muito se falou no decorrer do trabalho sobre futuras analises de cenários, as quais serão feitas nesse capítulo. As tabelas abaixo mostram as chances das disputas possíveis entre dois grupos. Sempre que necessário, a fim de diferenciarmos um lado para ganhar ou perder, quando há vencedor, trataremos genericamente grupo I e o grupo II.

DADO A VS DADO A

Nosso espaço amostral quando temos o evento dos dois grupos escolherem dados A é o seguinte:

		Dado A (Grupo I)					
		1	1	1	1	10	10
Dado A (Grupo II)	1	Empate	Empate	Empate	Empate	Grupo I	Grupo I
	1	Empate	Empate	Empate	Empate	Grupo I	Grupo I
	1	Empate	Empate	Empate	Empate	Grupo I	Grupo I
	1	Empate	Empate	Empate	Empate	Grupo I	Grupo I
	10	Grupo II	Grupo II	Grupo II	Grupo II	Empate	Empate
	10	Grupo II	Grupo II	Grupo II	Grupo II	Empate	Empate

Das 36 possibilidades, o empate é o resultado mais provável, na ordem de 55,6% ($\frac{20}{36}$). O restante é dividido igualmente entre os dois grupos restantes, com $\frac{8}{36}$de chance para cada grupo – aproximadamente 22,2% para cada.

Os cenários possíveis são:

- Empate: o evento: sair nos dois dados à face 1

  P(I = 1).P(II = 1) = $\frac{4}{6}.\frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

- Empate: o evento: sair nos dois dados à face 10

  P(I = 10) . P(II = 10) = $\frac{2}{6}.\frac{2}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Ou seja, a chance de dar empate é a união dos dois cenários acima, que é de 5/9 (aproximadamente 55,6%).

Há um único cenário que há vitória de algum dos lados: quando sai uma face 10 ante face 1.

- P(I = 10). P(II = 1) = $\frac{2}{6}.\frac{4}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

- P(I=1).P(II = 10) = P(I = 10). P(II = 1) = $\frac{2}{6}.\frac{4}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

  Ou seja, a chance de haver ganhador é de $\frac{4}{9}$.

DADO A VS DADO B

Já no espaço amostral de um duelo de escolha do dado A frente ao dado B, teremos:

		Dado A					
		1	1	1	1	10	10
Dado B	0	Dado A	Dado A	Dado A	Dado A	Dado A	Dado A
	0	Dado A	Dado A	Dado A	Dado A	Dado A	Dado A
	0	Dado A	Dado A	Dado A	Dado A	Dado A	Dado A
	6	Dado B	Dado B	Dado B	Dado B	Dado A	Dado A
	6	Dado B	Dado B	Dado B	Dado B	Dado A	Dado A
	6	Dado B	Dado B	Dado B	Dado B	Dado A	Dado A

Nesse embate, provavelmente o grupo que escolheu o dado A tem vantagem sobre o grupo que escolheu o dado B. A cada rodada, a chance do dado A se sobressair sobre o resultado do dado B é de 66,7%, ou 2/3. Os 33,3% restantes é o resultado de quando os resultados do dado são, necessariamente, 1 e 6.

Matematicamente falando, para o dado A sair vitorioso, teremos três cenários:

- sair face 1 frente à face 0

  P(A=1).P(B=0) = $\frac{4}{6}.\frac{3}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

- sair à face 10 frente à face 0

  P(A=10). P(B=0) = $\frac{2}{6}.\frac{3}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- sair à face 10 frente à face 6

Idem à chance acima, pois a possibilidade de sair face 0 ou 6 é a mesma, conforme já analisamos o dado B.

Logo, a chance de ganho de A é:

P(A=1).P(B=0) + P(A=10). P(B=0) + P(A=10). P(B=6) = $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Para analisarmos a vitória de B, podemos pensar que nesse caso é a chance de A não ganhar (o complemento de A), pois não há empate.

P(B ganhar de A) = 1 – P(A ganhar de B) = 1 – 2/3 = 1/3.

Ou então, o evento sair à face 6 frente à face 1 (que é o mesmo que o complemento de A):

P(A=1) .P(B=6) = $\frac{4}{6}.\frac{3}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

DADO B VS DADO B

No caso dos dois grupos escolherem o dado B, teremos:

	Dado B (Grupo I)						
		0	0	0	6	6	6
Dado B (Grupo II)	0	Empate	Empate	Empate	Grupo I	Grupo I	Grupo I
	0	Empate	Empate	Empate	Grupo I	Grupo I	Grupo I
	0	Empate	Empate	Empate	Grupo I	Grupo I	Grupo I
	6	Grupo II	Grupo II	Grupo II	Empate	Empate	Empate
	6	Grupo II	Grupo II	Grupo II	Empate	Empate	Empate
	6	Grupo II	Grupo II	Grupo II	Empate	Empate	Empate

Nesse cenário, espera-se que o aconteça empate na metade das rodadas. A expectativa matemática é que cada grupo vença uma em cada quatro.

Os dois eventos que empatam são sair nos dois dados à face 0 ou sair nos dois dados à face 6.

Evento: empatar

P(A = 0) . P(B=0) + P(A = 6) . P (B=6) = $2.[\frac{1}{2}.\frac{1}{2}] = 2.\left[\frac{1}{4}\right] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Para algum grupo ganhar, temos o complemento do empate:

1 – P(empate) = $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Ou então, analisando as chances que são

P(A = 6) . P(B=0) + P(A = 6) . P (B = 0) = $\left[\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right] = 2.\left[\frac{1}{4}\right] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

DADO A VS DADO C

Quando um grupo escolhe o dado A e o outra escolhe o dado C, nosso espaço amostral é o seguinte:

	Dado A						
		1	1	1	1	10	10
Dado C	4	Dado C	Dado C	Dado C	Dado C	Dado A	Dado A
	4	Dado C	Dado C	Dado C	Dado C	Dado A	Dado A
	4	Dado C	Dado C	Dado C	Dado C	Dado A	Dado A
	4	Dado C	Dado C	Dado C	Dado C	Dado A	Dado A
	4	Dado C	Dado C	Dado C	Dado C	Dado A	Dado A
	4	Dado C	Dado C	Dado C	Dado C	Dado A	Dado A

Como se percebe, não há empate e o dado C tem mais chances de sair vitorioso do que o contrário. E com só há um valor nas faces do dado C, o que conta mesmo para o êxito de algum grupo é o que sairá no dado A. Vitória do dado A quando sai à face 10; ganha o dado C no outro cenário.

Relembrando as chances contidas no arremesso do dado A, temos:

P(A= tirar a face 1) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

P(A = tirar a face 10) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

A chance de, em um arremesso o dado A sair vitorioso é de apenas $\frac{1}{3}$, enquanto o dado C espera-se ganhar em $\frac{2}{3}$ das jogadas.

DADO B VS DADO C

O ultimo cenário passível de analise, visto que não é necessário analisarmos quando temos dois dados C, tem uma analise muito parecida com o item 4.4; depende exclusivamente do lançamento do dado B – o lançamento do dado C tem sempre o mesmo resultado.

Conforme é mostrado a seguir, o dado C ganha das faces 0 e perde das faces 6 do dado B:

	Dado B						
		0	0	0	6	6	6
Dado C	4	Dado C	Dado C	Dado C	Dado B	Dado B	Dado B
	4	Dado C	Dado C	Dado C	Dado B	Dado B	Dado B
	4	Dado C	Dado C	Dado C	Dado B	Dado B	Dado B
	4	Dado C	Dado C	Dado C	Dado B	Dado B	Dado B
	4	Dado C	Dado C	Dado C	Dado B	Dado B	Dado B
	4	Dado C	Dado C	Dado C	Dado B	Dado B	Dado B

Os descuidados diriam que quando há esse encontro, o resultado é imprevisível. Mas todo jogo, com exceção do cenário abaixo, e imprevisível. Neste caso analisado, o que temos é a chance da disputa mais acirrada, com as duas equipes com chances iguais de vitória.

Conforme já citado anteriormente, desnecessário construir uma tabela para explicar que, caso os dois grupos escolhessem o dado C, sempre empatariam, pois não haveria face distinta a 4. Logo, sempre empatariam.

Usando friamente os números, uma reprodução entre os dados, as maiores chances de ganho de cada um é:

	Dado A	Dado B	Dado C
Dado A	Empate	Dado A	Dado C
Dado B	Dado A	Empate	Empate
Dado C	Dado C	Empate	Sem ganhador

O dado C não fica em desvantagem de chances contra nenhum outro dado, em qualquer que seja o cenário que ele participe, embora, se os dois concorrentes o escolherem, teremos que fazer nova sessão de escolha. Mas isso não responde a

pergunta qual dado é o melhor! Essa pergunta certamente não tem resposta, como tantas outras questões.

Desnecessário falar para não se tornar repetitivo o quanto é importante utilizarmos jogos nas aulas para uma compreensão mais rica, com mais propriedade. Porém, ao utilizar um jogo, seja com qual for à faixa etária, nível de ensino, e temperamento de alunos, mostra-se como ele põe em prática os aprendizados e seu raciocínio lógico. As palavras de Constance Kamii (1992, P. 172), embora voltadas para o processor de alfabetização matemática para crianças, soa como boa música: *"É verdade que as folhas de exercícios muitas vezes produzem algum aprendizado. Algumas crianças aprendem o resultado 4 + 2 só depois de terem escrito várias vezes. Em jogos, porém, as crianças são mais ativas mentalmente. Elas constantemente supervisionam-se mutuamente. Entretanto, elas frequentemente percebem meios mais inteligíveis de lidar com números do que mecanicamente".*

O que se torna consenso em educação, por mais divergente que seja a corrente de pensamento que a permeia, é que estamos com limite ultrapassado de hora para mudarmos a metodologia já desgastada da equação "professor + giz + lousa = conhecimento". Há conhecimento nessa equação, o professor tem que, de antemão, dominar sua matéria, e por consequência, a situação que ainda é a realidade da imensa maioria das escolas, sobretudo as públicas, de giz e lousa. Porém, para propiciar aos alunos um aprendizado significativo, cada vez mais é necessário ter cartas na manga. Ou dados na mesa, literalmente...

Relato digno de comentário no decorrer das partidas é que não houve necessidade de uma única chamada de atenção por parte disciplinar, nem na hora das partidas, como nas aulas que sucederam com as devidas explicações para as indagações pertinentes.

Fica uma sugestão com muito entusiasmo para a aplicação dos jogos, mas principalmente o Jankenpon. Além de o jogo em si ser muito proveitoso, pois alia inúmeros conceitos de probabilidade, possibilidades de fazer inúmeros paralelos com situações que acontecem no cotidiano, os alunos abraçaram a ideia e a aula como há tempos não acontecia. Não houve um pedestal entre o professor e os alunos, com um muro de conhecimento; houve um momento que tudo era a mesma coisa: diversão, conhecimento, aprendizado. Alunos estavam em igual posição, não tinha o mais esperto e o com mais dificuldade. Eram todos concorrentes ou parceiros.

REFERÊNCIAS

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação, Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – São Paulo : SEE, 2010.

O jogo Jankenpon, http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1016, acessado em 01/10/2012.

http://www.infomoney.com.br/mercados/cambio/noticia/2599976/Dolar-sobe-outubro-sob-vigilancia-Banco-Central, acessado em 23/11/2012

LA TAILLE., Y. Prefácio. In, PIAGET, J. A construção do real na criança. 3.ed. São Paulo: Editora Ática, 2003.

BANDET, J.P. & SARAZANAS, R. A criança e os brinquedos, Lisboa, Ed. Estampa, 1973.

http://www.financeone.com.br/moedas/cotacoes-do-dolar/, acessado em 23/11/2012

MEYER, PAUL L., Probabilidade Aplicações a Estatística. 2ª ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora

KAMII, C.; DECLARK, G. Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget. 6a ed. Campinas, SP: Papirus, 1992.