

MODELOS DETERMINÍSTICOS COM PARÂMETROS SUBJETIVOS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Laécio Carvalho de Barros e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 27 de março de 1992

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (UNICAMP), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada na área de Análise Aplicada.

MARÇO – 1992

Aos meus queridos pais,

Luciano e

Raimunda

À minha adorada esposa

Maria Cristina

Aos meus queridos filhos

Otávio e

Luiza

“Every man thinketh his burden is the heaviest...”

*Bob Marley and
Neville Livingstone*

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Rodney C. Bassanezy pela orientação e pela dedicação durante a elaboração deste trabalho.

A todas as pessoas que, de alguma maneira, colaboraram para a realização deste trabalho, com destaque:

A sub-cpg de Matemática Aplicada da UNICAMP,

O Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli,

A secretaria de Pós-Graduação do IMECC-UNICAMP,

Lourdes, pela digitação deste trabalho,

Aos amigos Maria Beatriz (Bia), pela sua colaboração técnica, Diomar, Luiz Alberto e Atelmo.

E a todos os meus familiares, evidenciando o apoio de D. Rosa e Marina Shimabukuro.

Sumário

Introdução	7
1 CONJUNTOS FUZZY	9
1.1 Introdução	9
1.2 Conjuntos fuzzy	10
1.3 Operações com conjuntos fuzzy	14
2 MEDIDAS FUZZY	20
2.1 Introdução	20
2.2 Medida de Lebesgue	21
2.3 Medidas Fuzzy	22
2.4 Medida de probabilidade	24
2.5 Medida de possibilidade	28
2.6 Medida λ -fuzzy ou medida de Sugeno	30
3 INTEGRAIS FUZZY, VARIÁVEIS INEXATAS E VALOR ESPERADO (FEV)	32
3.1 Integrais Fuzzy	32
3.2 Propriedades da integral fuzzy	37
3.3 Convergências e teoremas de convergências	44
3.4 Variável aleatória	46

3.5	Variáveis inexatas e valor Esperado Fuzzy (FEV: Fuzzy Expected Value). . . .	48
3.6	Comparação entre a esperança clássica e a esperança fuzzy	50
4	APLICAÇÕES	54
4.1	Modelo I	54
4.2	O Modelo	55
	Bibliografia	85

Introdução

Ao se estudar uma equação diferencial bem como um sistema de equações diferenciais, os parâmetros que aparecem são, de um modo geral, difíceis de serem medidos e às vezes dá-se uma interpretação subjetiva dos mesmos. Por exemplo, as equações que regem o crescimento populacional em um sistema presa-predador proposto por Lotka-Volterra são

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases}$$

onde a, b, α e β são constantes positivas sendo a a taxa de crescimento das presas, b a taxa de mortalidade dos predadores e α, β os coeficientes de interação entre as duas espécies. Neste exemplo, as constantes α e β não estão definidas de maneira objetiva. Aliás, Lotka propõe em seu modelo que α seja a probabilidade de um indivíduo da espécie x ser comido por um da espécie y .

Em nosso trabalho, nosso principal objetivo é modelar os coeficientes que aparecem em um sistema de equações diferenciais, usando técnicas da teoria fuzzy, pois em alguns casos nos parece que tais coeficientes apresentam um forte grau de subjetividade. Assim, a teoria fuzzy nos parece ser adequada para modelar tais coeficientes. Para isto, apresentamos uma boa parte da teoria fuzzy nos três primeiros capítulos, deixando o quarto e último capítulo para apresentarmos duas aplicações.

No primeiro capítulo, é dada a definição de conjuntos fuzzy, introduzida por Zadeh (1965), apresentamos alguns exemplos e enunciamos as principais propriedades dos conjuntos fuzzy.

No segundo capítulo, apresentamos um pequeno resumo da teoria da medida e medida de Lebesgue no \mathbb{R}^n , o conceito de medida fuzzy, introduzido por Sugeno (1974), exemplos de

medidas fuzzy, em particular a medida de probabilidade e o conceito de medida de possibilidade, introduzida por Zadeh (1978).

No terceiro capítulo, estão resumidos os principais conceitos da estatística fuzzy que usamos neste trabalho. São apresentados os conceitos de integral fuzzy, introduzidos por Sugeno (1974) bem como suas principais propriedades, o conceito de variáveis inexatas, o de valor esperado, além de enunciarmos vários teoremas de convergências tanto da teoria de medida clássica como da teoria fuzzy. É enunciada uma condição necessária e suficiente para que uma sequência de funções que converge em medida, tenha a convergência de suas integrais fuzzy e finalmente apresentamos o principal resultado deste capítulo que é a comparação entre as esperanças clássica e fuzzy.

No quarto capítulo, é feito um estudo comparativo entre o modelo estocástico clássico e as técnicas da estatística fuzzy, usando o modelo estocástico de Boltzman para fornecer o número de indivíduos existentes em um grupo no instante t , assumindo que as "causas mortis" sejam naturais e também influenciadas pelo grau de pobreza de cada indivíduo do grupo estudado.

Finalmente, na segunda aplicação do último capítulo, é apresentado um modelo de competição entre espécies onde, diferentemente do que tinha sido feito até então, procura-se dar aos coeficientes envolvidos, um caráter mais biológico. Primeiramente, é sugerido por MacArthur e Levins (1976) que os coeficientes de competição sejam baseados em uma utilização preferencial de um determinado tipo de recurso por uma espécie. Finalmente, Giering III e Kandel (1983), sugerem que os coeficientes de competição sejam baseados na distribuição fenotípica nas espécies e nos recursos de cada fenótipo, usando técnicas da teoria fuzzy. Neste caso obtemos uma tabela de valores dos coeficientes de competição dados em função das distâncias entre-fenótipos e inter-fenótipos, usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Capítulo 1

CONJUNTOS FUZZY

1.1 Introdução

A noção de conjunto fuzzy foi dada por Zadeh, em 1965 com o objetivo de definir “conjuntos” que não possuem fronteiras bem definidas.

Nos conjuntos clássicos, nós sabemos dizer se um dado elemento pertence ou não ao conjunto, mais precisamente; dado um conjunto A e um elemento x , dizemos que $x \in A$ ou que $x \notin A$. Por exemplo, sabemos que $2 \in \mathbb{Z}$ e que $0,5 \notin \mathbb{Z}$. Porém existem casos em que esta relação de pertinência não está muito clara, isto é, não sabemos dizer se um elemento pertence ou não a um dado “conjunto”. Por exemplo, o conjunto dos números inteiros que são pequenos, ou seja,

$$\mathbb{F} = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é pequeno}\} .$$

Os números 2 e 20 pertencem a \mathbb{F} ? A resposta a esta pergunta é incerta pois não sabemos até que ponto podemos dizer objetivamente que um número inteiro é ou não pequeno. Porém, podemos associar aos números 2 e 20, *graus de pertinências* compatíveis com o conceito que “caracteriza” o “conjunto”. Por exemplo, podemos associar a 2 e a 20 os respectivos graus de pertinências 0,5 e 0,1, que representam, subjetivamente, os graus de pertinência de 2 e 20 ao conjunto \mathbb{F} .

Podemos assim imaginar uma infinidade de conceitos que possuem a característica de não estarem bem definidos em suas fronteiras. Por exemplo, o “conjunto” dos homens altos, das ruas grandes de uma cidade, o diagnóstico médico de um paciente, classificação de bactérias quanto a sua natureza vegetal ou animal, o “conjunto” dos pobres de uma determinada localidade, etc.

1.2 Conjuntos fuzzy

Seja \mathcal{U} um conjunto (clássico) universo.

Definição 1.1. Um *subconjunto fuzzy* \mathbb{F} em \mathcal{U} é um conjunto de pares ordenados $\mathbb{F} = \{(u, \chi_{\mathbb{F}}(u)) : u \in \mathcal{U}\}$ onde $\chi_{\mathbb{F}} : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$ é uma função chamada *grau de pertinência* de u em \mathbb{F} , com os graus 1 e 0 representando, respectivamente, a pertinência completa e a não pertinência do elemento ao conjunto fuzzy.

Observações:

1. Quando quisermos nos referir a um conjunto clássico A , iremos apenas dizer conjunto A , sem usar a palavra “clássico”. Porém se \mathbb{F} for um conjunto fuzzy, usaremos a palavra fuzzy para diferenciá-lo do conjunto clássico.

2. Veja que fixado o conjunto universo \mathcal{U} , a função $\chi_{\mathbb{F}}$ caracteriza completamente o conjunto fuzzy \mathbb{F} . Por esse motivo, muitas vezes iremos nos referir ao conjunto fuzzy \mathbb{F} citando apenas a função que o caracteriza $\chi_{\mathbb{F}}$. Omitiremos também o índice \mathbb{F} , na notação $\chi_{\mathbb{F}}$, isto é, $\chi_{\mathbb{F}}$ será denotada apenas por χ .

Convencionalmente, quando A é um subconjunto finito de \mathcal{U} , cujos elementos são a_1, a_2, \dots, a_n , expressa-se A por:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Para o caso de subconjuntos fuzzy finito em \mathcal{U} temos:

$$\mathbb{F} = \chi_1 u_1 + \chi_2 u_2 + \dots + \chi_n u_n$$

ou

$$\mathbb{F} = \chi_1/u_1 + \chi_2/u_2 + \dots + \chi_n/u_n$$

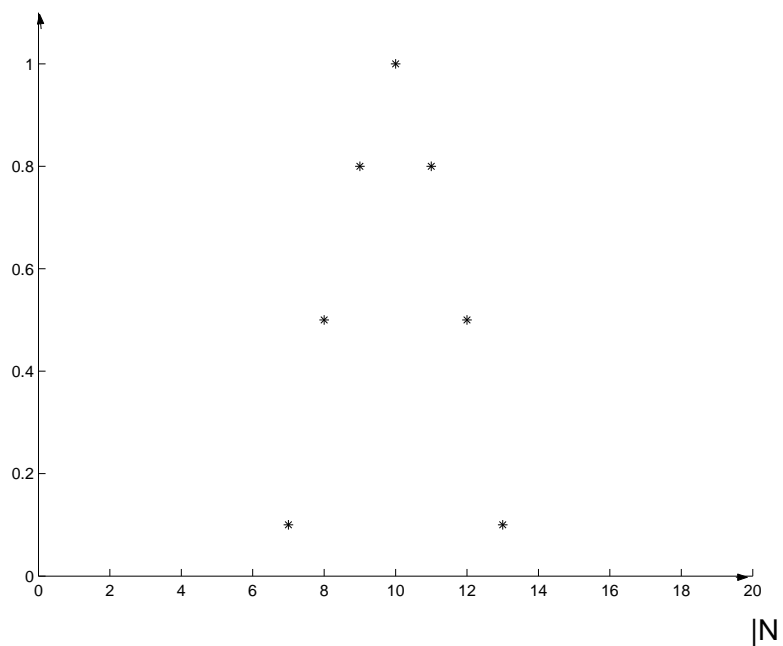
onde $\chi_i = \chi(u_i)$. Quando $\chi_i = 0$, omite-se o termo χ_i/u_i da expressão acima.

Exemplo 1. Seja \mathbb{F} o subconjunto dos números naturais “aproximadamente iguais a 10” dado por:

$$\mathbb{F} = 0,1/7 + 0,5/8 + 0,8/9 + 1,0/10 + 0,8/11 + 0,5/12 + 0,1/13.$$

Observamos que quando o número natural não aparece na expressão, significa que possui grau de pertinência igual a zero.

Graficamente temos:



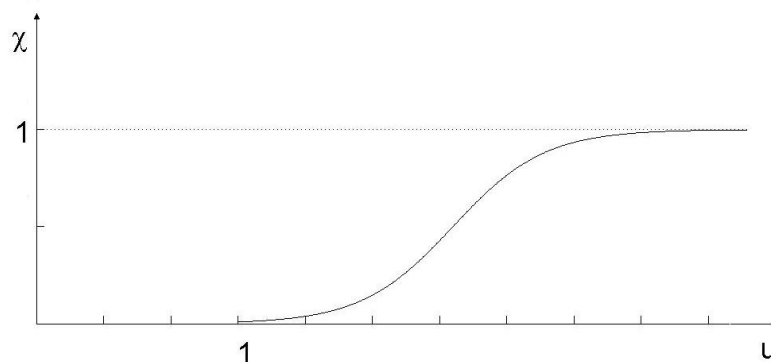
Exemplo 2. Seja \mathbb{F} o subconjunto fuzzy dos números reais bem maiores que 1.

Assim, $\mathbb{F} = \{(u, \chi(u)) : u \in \mathcal{U} = \mathbb{R}\}$.

Sempre temos uma infinidade de escolhas para χ :

$$i. \quad \chi(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \leq 1 \\ \frac{u-1}{u} & \text{se } u > 1 \end{cases}$$

Graficamente



Observe que χ é crescente, $\lim_{u \rightarrow \infty} \chi(u) = 1$ e $\chi(u) = 0$ se $u \leq 1$.
A escolha de χ é subjetiva porém não tão arbitrária. Seria totalmente errado escolhermos:

$$\text{ii. } \chi(u) = \begin{cases} \frac{u-1}{u} & \text{se } u \leq 1 \\ 0 & \text{se } u > 1 \text{ por razões óbvias.} \end{cases}$$

$$\text{iii. } \chi(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \leq 1 \\ 1 - e^{-1000(u-1)} & \text{se } u > 1 \end{cases}$$

Neste caso, χ é crescente porém aproximadamente igual a 1 se $u = 1,1$.
Assim, esta também não é uma boa escolha para χ .

Exemplo 3. O conjunto fuzzy dos fumantes dado por $\chi(u, t) = \frac{ut}{1+ut}$ onde u é proporcional ao número de cigarros fumados por unidade de tempo e t o tempo em que o indivíduo fumou durante sua vida.

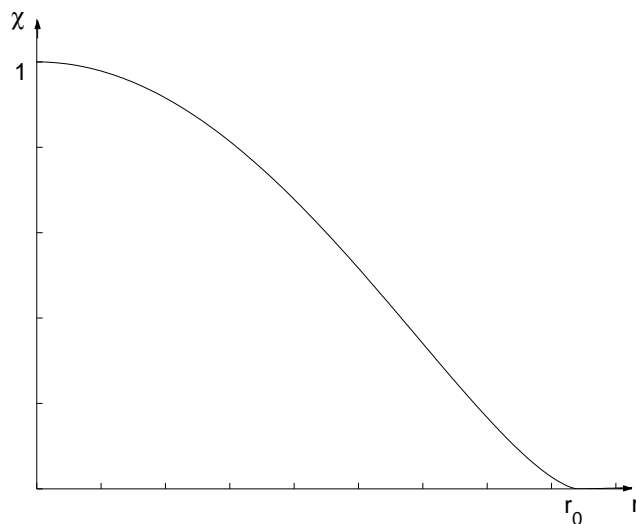
Exemplo 4. O conjunto fuzzy dos pobres de uma determinada localidade dado por

$$\chi(r) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^2 & \text{se } 0 \leq r < r_0 \\ 0 & \text{se } r \geq r_0 \end{cases}$$

onde r é um parâmetro proporcional a algum indicador de pobreza (por exemplo, renda, número de calorias ou vitaminas consumidas, etc.) e r_0 seria um determinado valor de r que, a partir do qual, não se diferenciam os indivíduos quanto à pobreza.

Observe que o mais pobre é aquele indivíduo associado a $\chi(0) = 1$. Já aos menos pobres, $r > r_0$, está associado o valor $\chi(r) = 0$.

Graficamente,



1.3 Operações com conjuntos fuzzy

Sejam \mathbb{F} e \mathbb{G} dois subconjuntos fuzzy em um mesmo conjunto universo \mathcal{U} . Definiremos as seguintes operações com conjuntos fuzzy:

1. Diremos que $\mathbb{F} = \mathbb{G}$ se, e somente se,

$$\chi_{\mathbb{F}}(u) = \chi_{\mathbb{G}}(u) \quad , \quad \forall u \in \mathcal{U} .$$

2. Diremos que $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ se, e somente se,

$$\chi_{\mathbb{F}}(u) \leq \chi_{\mathbb{G}}(u) \quad , \quad \forall u \in \mathcal{U} .$$

3. A união de \mathbb{F} e \mathbb{G} , denotada por $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$, é dada por:

$$\chi_{\mathbb{F} \cup \mathbb{G}}(u) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \{ \chi_{\mathbb{F}}(u), \chi_{\mathbb{G}}(u) \} \quad , \quad \forall u \in \mathcal{U} .$$

4. A intersecção de \mathbb{F} e \mathbb{G} , denotada por $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$, é dada por:

$$\chi_{\mathbb{F} \cap \mathbb{G}}(u) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{ \chi_{\mathbb{F}}(u), \chi_{\mathbb{G}}(u) \} \quad , \quad \forall u \in \mathcal{U} .$$

5. O complemento $\overline{\mathbb{F}}$ de \mathbb{F} é definido por:

$$\chi_{\overline{\mathbb{F}}} = 1 - \chi_{\mathbb{F}}(u) \quad , \quad \forall u \in \mathcal{U} .$$

6. O produto cartesiano dos subconjuntos fuzzy \mathbb{F} e \mathbb{G} de \mathcal{U} e \mathcal{V} respectivamente, é dado por:

$$\chi_{\mathbb{F} \times \mathbb{G}}(u, v) = \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ v \in \mathcal{V}}} \{ \chi_{\mathbb{F}}(u), \chi_{\mathbb{G}}(v) \} .$$

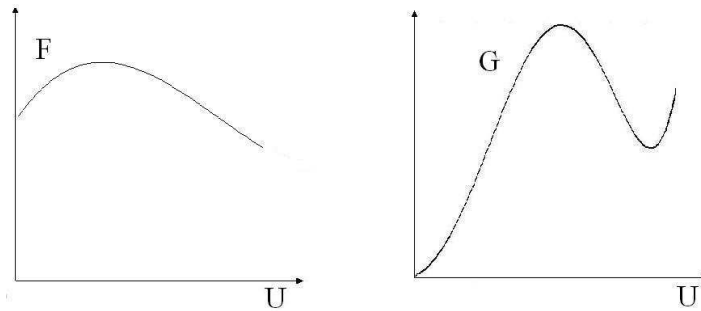
7. O conjunto vazio terá como função pertinência a função

$$\chi_{\phi}(u) = 0 \quad , \quad \forall u \in \mathcal{U} .$$

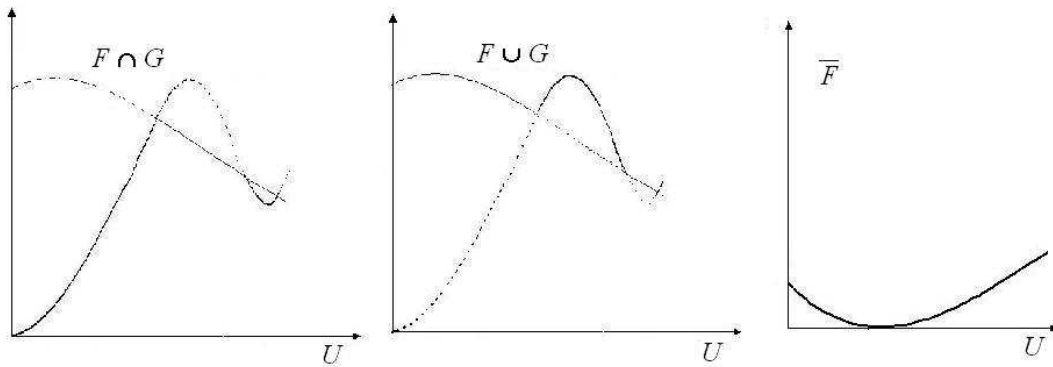
8. O conjunto universo \mathcal{U} terá como função pertinência a função

$$\chi_{\mathcal{U}}(u) = 1 \quad , \quad \forall u \in \mathcal{U} .$$

Quando $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$, podemos visualizar graficamente a intersecção, a união e o complemento. Considere os subconjuntos fuzzy em \mathcal{U} dados abaixo:



Representações gráficas de $\mathbf{F} \cap \mathbf{G}$, $\mathbf{F} \cup \mathbf{G}$ e $\overline{\mathbf{F}}$.



Proposição 1.1. As operações de união, intersecção e complemento definidas anteriormente gozam das seguintes propriedades:

1. $\mathbf{F} \cup \mathbf{G} = \mathbf{G} \cup \mathbf{F}$
2. $\mathbf{F} \cap \mathbf{G} = \mathbf{G} \cap \mathbf{F}$
3. $\mathbf{F} \cup (\mathbf{G} \cap \mathbf{H}) = (\mathbf{F} \cup \mathbf{G}) \cap \mathbf{H}$
4. $\mathbf{F} \cap (\mathbf{G} \cup \mathbf{H}) = (\mathbf{F} \cap \mathbf{G}) \cup (\mathbf{F} \cap \mathbf{H})$
5. $\mathbf{F} \cup \mathbf{F} = \mathbf{F}$
6. $\mathbf{F} \cap \mathbf{F} = \mathbf{F}$
7. $\mathbf{F} \cup (\mathbf{G} \cap \mathbf{H}) = (\mathbf{F} \cup \mathbf{G}) \cap (\mathbf{F} \cup \mathbf{H})$
8. $\mathbf{F} \cap (\mathbf{G} \cup \mathbf{H}) = (\mathbf{F} \cap \mathbf{G}) \cup (\mathbf{F} \cap \mathbf{H})$
9. $\mathbf{F} \cap \emptyset = \emptyset$
10. $\mathbf{F} \cap \mathbf{U} = \mathbf{F}$
11. $\mathbf{F} \cup \emptyset = \mathbf{F}$

12. $\mathbb{F} \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

13. As leis de Morgan:

i. $(\overline{\mathbb{F} \cap \mathcal{G}}) = \overline{\mathbb{F}} \cup \overline{\mathcal{G}}$

ii. $(\overline{\mathbb{F} \cup \mathcal{G}}) = \overline{\mathbb{F}} \cap \overline{\mathcal{G}}$

As demonstrações são aplicações imediatas das propriedades de máximo e mínimo. Faremos aqui apenas as demonstrações das leis de Morgan.

Primeiro, observamos que:

$$\max[f(x), g(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|] \quad e$$

$$\min[f(x), g(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$$

onde f e g são funções quaisquer com contradomínio em \mathbb{R} .

Demonstração de 13.i

$$\begin{aligned} \chi_{\overline{\mathbb{F} \cap \mathcal{G}}}(u) &= \max[1 - \chi_{\mathbb{F}}(u), 1 - \chi_{\mathcal{G}}(u)] = \frac{1}{2}[1 - \chi_{\mathbb{F}}(u) + 1 - \chi_{\mathcal{G}}(u) + |\chi_{\mathbb{F}}(u) - \chi_{\mathcal{G}}(u)|] \\ &= \frac{1}{2}[2 - (\chi_{\mathbb{F}}(u) + \chi_{\mathcal{G}}(u) - |\chi_{\mathbb{F}}(u) - \chi_{\mathcal{G}}(u)|)] \\ &= 1 - \frac{1}{2}[\chi_{\mathbb{F}}(u) + \chi_{\mathcal{G}}(u) - |\chi_{\mathbb{F}}(u) - \chi_{\mathcal{G}}(u)|] \\ &= 1 - \min[\chi_{\mathbb{F}}(u), \chi_{\mathcal{G}}(u)] \\ &= 1 - \chi_{\mathbb{F} \cap \mathcal{G}}(u) = \chi_{\overline{\mathbb{F} \cap \mathcal{G}}}(u) \quad \forall u \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

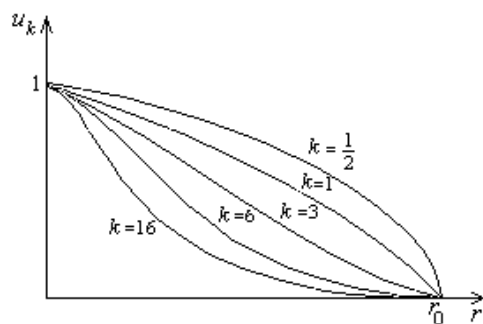
De modo análogo, demonstra-se 13.ii.

Exemplo 5. Vamos supor que o conjunto dos pobres de uma determinada localidade seja dado por:

$$\chi_k(r) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^k & \text{se } 0 \leq r < r_0 \\ 0 & \text{se } r \geq r_0 \end{cases}$$

onde aqui, r é um parâmetro proporcional à renda, r_0 é um determinado nível de r que a partir do qual, os indivíduos não são mais diferenciados quanto à pobreza e k é um parâmetro que nos dá uma característica do grupo estudado.

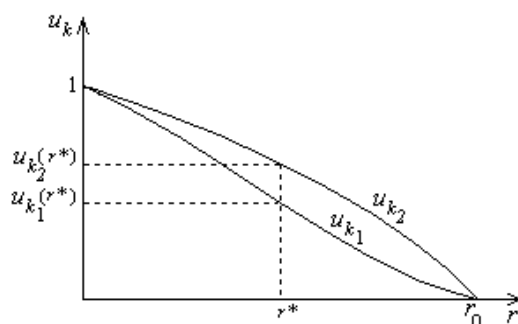
O valor r_0 , pode eventualmente depender do ambiente onde vive o grupo estudado. A seguir nós representamos graficamente alguns conjuntos fuzzy para alguns valores de k e r_0 fixado.



Podemos verificar facilmente que se $k_1 \geq k_2$ então $\chi_{k_1}(r) \leq \chi_{k_2}(r)$ para todo r e portanto $\mathbb{F}_{k_1} \subset \mathbb{F}_{k_2}$ onde \mathbb{F}_{k_1} e \mathbb{F}_{k_2} são os conjuntos fuzzy dos pobres dados por χ_{k_1} e χ_{k_2} respectivamente.

Vale ressaltar aqui uma interpretação para $\mathbb{F}_{k_1} \subset \mathbb{F}_{k_2}$ qual seja; se um indivíduo for pobre em \mathbb{F}_{k_1} , então será “mais” pobre ainda em \mathbb{F}_{k_2} .

Veja graficamente



O gráfico acima mostra que se um indivíduo de \mathbb{F}_{k_1} tem renda r^* e outro indivíduo de \mathbb{F}_{k_2} também tem a mesma renda r^* , então o indivíduo de \mathbb{F}_{k_2} tem um grau de pobreza maior que o grau de pobreza do indivíduo de \mathbb{F}_{k_1} .

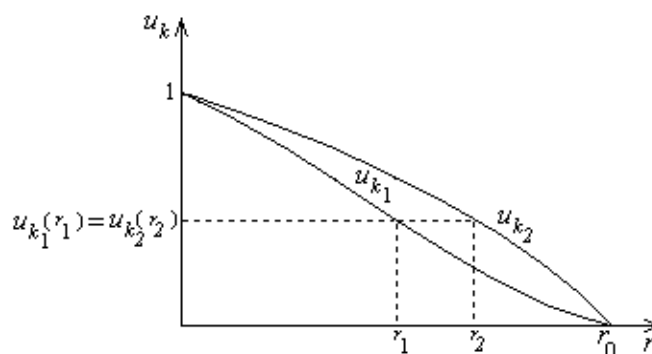
Assim podemos dizer que, quanto à renda, é mais fácil viver nas localidades onde k é grande. Portanto, k nos revela intuitivamente se o ambiente em que o grupo vive é mais ou menos favorável à vida. O parâmetro k pode nos dar uma idéia do grau de saturação do ambiente e por isso chamaremos k de *parâmetro ambiental*.

Observamos ainda que

$$\text{se } k \rightarrow +\infty \text{ então } \chi_k(r) \rightarrow \chi_\infty(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r > 0 \\ 1 & \text{se } r = 0 \end{cases}$$

Portanto, se por algum motivo, o parâmetro ambiental k de uma determinada localidade diminuir, então a vida neste local torna-se mais cara. Assim, se houver danos ambientais tais como destruições de rios, poluição do ar, etc., o nível de renda naquela localidade deve ser aumentado de maneira que o grau de pobreza permaneça o mesmo de antes do dano ambiental.

Graficamente,



k_1 : parâmetro ambiental antes do dano ambiental.

k_2 : parâmetro ambiental depois do dano ambiental.

r_1 : renda de um indivíduo antes do dano ambiental.

r_2 : renda necessária para que um indivíduo que, antes do dano, tinha nível de renda r_1 , passa a ter depois do dano ambiental.

É claro que há outras maneiras de compensar tais danos como, por exemplo, construções de hospitais, tornar mais baratos os produtos básicos como alimentação, melhorar o saneamento básico, etc.

Os conjuntos fuzzy aqui sugeridos por nós para representar pobreza, com a interpretação dada acima para o parâmetro k , nos parecem razoáveis para pequenas localidades.

Capítulo 2

MEDIDAS FUZZY

2.1 Introdução

O conceito de medidas fuzzy, introduzido por Sugeno em 1974, é uma forma natural para se avaliar graus de incertezas, e tais valores dependem, quase sempre, da subjetividade de quem está medindo. Por exemplo, quando se faz uma avaliação de uma jóia, do valor do quilo de alguma mercadoria, do valor da remuneração de um trabalho executado por alguém, etc. Porém, mesmo que esta avaliação seja subjetiva, somos unânimes em concordar que uma jóia A , maior ou de melhor qualidade que uma jóia B , ($B \subset A$), deve ter maior avaliação que a jóia B , assim como quem produz mais em um mesmo serviço, deve ter maior avaliação, no caso remuneração, do que quem produz menos.

Assim é de se esperar que se B é um subconjunto de A , então $\mu(B) \leq \mu(A)$ sendo μ uma medida subjetiva ou não.

A seguir, faremos um pequeno resumo sobre medida em geral e medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n . Antes porém daremos a seguinte

Definição 2.1. Dizemos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$, $\mathcal{A} \neq \phi$, é uma σ -álgebra se valem

1. $A \in \mathcal{A} \implies \bar{A} \in \mathcal{A}$, onde \bar{A} é o complemento de A .
2. $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.

2.2 Medida de Lebesgue

Sejam E um conjunto e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$, uma σ -álgebra de subconjuntos de E .

1. A função $\mu^* : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, \infty]$ é uma medida exterior se

- i. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- ii. μ^* é σ -subaditiva, isto é,

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \implies \mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

2. A função $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, definida por

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\},$$

é uma medida exterior (medida exterior de Lebesgue).

3. A função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ é uma medida se

- i. $\mu(\emptyset) = 0$.
- ii. μ é σ -aditiva, isto é,

$$\mu \left(\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

onde $\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} A_k$ denota a união de conjuntos dois a dois disjuntos.

4. Se μ é uma medida, então

- i. $\mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$ sempre que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq \dots$
- ii. $\mu \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$ sempre que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_k \supseteq \dots, \mu(A_1) < \infty$

5. $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável se para todo $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$, temos

$$m^*(\mathbb{X}) = m^*(\mathbb{X} \cap \mathbb{M}) + m^*(\mathbb{X} \cap \overline{\mathbb{M}}), \text{ onde } \overline{\mathbb{M}} = \mathbb{R}^n - \mathbb{M}.$$

6. Se m^* é a medida exterior de Lebesgue no \mathbb{R}^n , então

- i. A classe $\mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ de todos os subconjuntos mensuráveis de \mathbb{R}^n é uma σ -álgebra.

ii. A restrição m de m^* à σ -álgebra $\mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ é uma medida, chamada *medida de Lebesgue* em \mathbb{R}^n .

iii. Todo conjunto de medida exterior nula é mensurável.

7. Seja E um conjunto mensurável. Dizemos que uma propriedade P *vale quase sempre* (q.s.) em E se os pontos de E para os quais P não está definida ou então para os quais P não vale, formam um conjunto de medida de Lebesgue nula.

A σ -aditividade, exigida para que tenhamos uma medida clássica, torna a teoria da medida rica em conceitos e resultados. Porém, há casos em que gostaríamos de ter uma avaliação de um objeto e a aditividade não é nada natural ou nem mesmo se verifica para nossa medida (ver exemplo 1 do parágrafo 2.3). Por esse motivo, damos a seguir o conceito de *medida fuzzy*.

2.3 Medidas Fuzzy

Sejam $\Omega \neq \phi$ um conjunto e \mathcal{A} uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω .

Definição 2.2. A uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, satisfazendo:

$$(MF1) \quad \mu(\phi) = 0 \quad \text{e} \quad \mu(\Omega) = 1.$$

$$(MF2) \quad \mu(A) \leq \mu(B) \quad \text{se} \quad ; \quad A \subset B, \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

$$(MF3) \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad \text{se} \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots, A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(MF4) \quad \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad \text{se} \quad A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots, A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$$

dá-se o nome de *medida fuzzy* em Ω .

A terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é comumente chamada de *espaço de medida fuzzy*.

De maneira geral, não há necessidade de termos $\mu(\Omega) = 1$ e sim que $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$.

Proposição 2.1. Sejam Ω um conjunto finito e \mathcal{A} uma σ -álgebra de Ω . Uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ é uma medida fuzzy em Ω se, e somente se, valem

$$(MF1) \quad \mu(\emptyset) = 0 \quad \text{e} \quad \mu(\Omega) = 1.$$

$$(MF2) \quad \mu(A) \leq \mu(B) \quad \text{se ;} \quad A \subset B, \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

Demonstração.

Claro que se μ for uma medida fuzzy, nada temos a demonstrar. Por outro lado se tivermos uma sequência crescente de subconjuntos de Ω , tal sequência tem no máximo um número finito de conjuntos, digamos $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m$, daí, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) = \mu(A_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ e assim está demonstrado (MF3). De modo análogo demonstra-se (MF4).

Exemplo 1. [15] Suponha que Ω seja o conjunto de trabalhadores de uma determinada indústria, portanto finito, e que eles produzem os mesmos tipos de produtos. Se $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ é um grupo de trabalhadores e $\mu(A)$ o número de produtos feitos por A em uma hora. Então, podemos definir uma medida de produtividade μ .

Vamos supor que $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$, (poderíamos supor também que $\mu(\Omega) = 1$, fazendo μ ser uma produtividade relativa, por exemplo).

As seguintes afirmações são naturais:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

Isto é, μ é uma medida fuzzy.

O que queremos aqui, é mostrar que a aditividade não é uma condição natural para medidas subjetivas.

Voltando ao exemplo, sejam A e B dois subconjuntos distintos de Ω e vamos analisar a produtividade do grupo $A \cup B$. Se A e B trabalham separadamente, então é razoável que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Mas uma vez que eles geralmente interagem, a igualdade pode não ser verdadeira. A desigualdade $\mu(A \cup B) > \mu(A) + \mu(B)$, mostra a efetiva cooperação entre os membros de $A \cup B$, isto é, há uma melhor produtividade se o grupo não se separar. A desigualdade inversa, $\mu(A \cup B) < \mu(A) + \mu(B)$, mostra a incompatibilidade entre as operações de A e B . Por exemplo, a incompatibilidade, pode ser causada pela insuficiência de ferramentas disponíveis ao mesmo tempo para os elementos de $A \cup B$. É bom notar que se

o grau de cooperação é maior que o grau de incompatibilidade, então temos necessariamente, $\mu(A \cup B) > \mu(A) + \mu(B)$. Se não for o caso teremos a desigualdade contrária.

A fim de darmos mais exemplos de medidas fuzzy, vamos enunciar a seguinte

Proposição 2.2. Se λ é uma medida finita em Ω e $F : [0, \lambda(\Omega)] \rightarrow [0, 1]$ é uma função monótona, crescente, contínua e tal que $F(0) = 0$ e $F(\lambda(\Omega)) = 1$, então a função composta $\mu = F \circ \lambda$ é uma medida fuzzy em Ω .

Demonstração: De fato

$$\mu(\emptyset) = F \circ \lambda(\emptyset) = F(\lambda(\emptyset)) = F(0) = 0.$$

$$\mu(\Omega) = F(\lambda(\Omega)) = 1 \text{ e assim está demonstrado (MF1).}$$

Sejam agora $A, B \in \mathcal{A}$ com $A \subset B$, então

$$\mu(A) = F(\lambda(A)) \leq F(\lambda(B)) = \mu(B),$$

pois λ é medida e F é crescente, o que demonstra (MF2). Vamos agora demonstrar (MF3) e de maneira análoga, demonstra-se (MF4).

Sejam

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset \dots, A_k \in \mathcal{A}$$

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = F\left(\lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)\right) = F\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(A_k)\right)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} F(\lambda(A_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} F \circ \lambda(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k), \text{ pois } F \text{ é contínua.}$$

2.4 Medida de probabilidade

Seja Ω um conjunto não vazio (espaço amostral) e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω .

Definição 2.3. Uma função P definida em \mathcal{A} é uma medida de probabilidade em Ω se:

(P1) $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$

(P2) $P(\Omega) = 1$

(P3) (σ -aditividade). Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ são disjuntos, então

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

A seguir enunciaremos algumas propriedades para medida de probabilidade.

Proposição 2.3. Sejam P uma probabilidade em Ω e \mathcal{A} uma σ -álgebra. Para cada $A \in \mathcal{A}$ valem as seguintes propriedades:

i. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, onde $\bar{A} = \Omega - A$
 caso particular: $P(\phi) = 1 - P(\Omega) = 0$

ii. $0 \leq P(A) \leq 1$

iii. (aditividade finita). Se $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ com $A_i \cap A_j = \phi$ se $i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

iv. $A_1 \subset A_2 \implies P(A_1) \leq P(A_2)$

v. $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$

vi. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

vii. (continuidade no vazio). Se $(A_n)_{n \geq 1}$, onde $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n$, decresce para o vazio, então $P(A_n) \longrightarrow 0$.

viii. (continuidade da probabilidade). Se $A_n \uparrow A$, então $P(A_n) \uparrow P(A)$. Se $A_n \downarrow A$, então $P(A_n) \downarrow P(A)$.

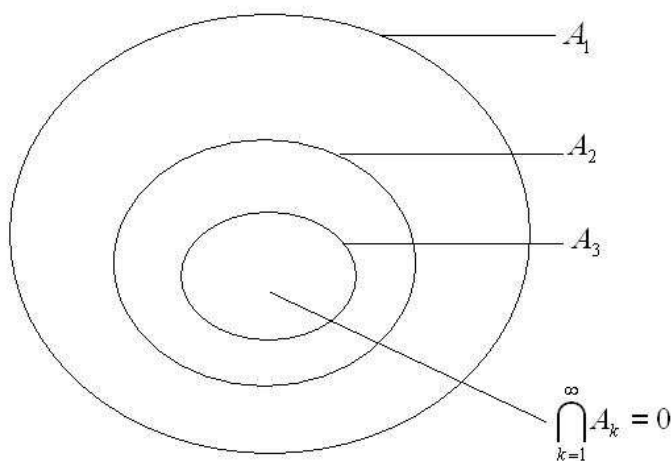
Demonstração: Vamos demonstrar apenas algumas destas propriedades.

iii. Sejam $A_k = \phi$ para $k = n + 1, n + 2, \dots$, então A_1, A_2, \dots , são disjuntos, logo

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

iv. $P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) \geq P(A_1)$, pois $A_1 \cap (A_2 - A_1) = \phi$.

vii. Se $A_n \downarrow \phi$, temos $A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k - A_{k+1})$.



Os conjuntos $A_k - A_{k+1}$ são disjuntos, logo

$$P(A_1) = P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k - A_{k+1})\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k - A_{k+1})$$

mas pela aditividade finita temos:

$$P(A_k) = P(A_{k+1}) + P(A_k - A_{k+1}) \quad \text{ou}$$

$P(A_k - A_{k+1}) = P(A_k) - P(A_{k+1})$, assim

$$P(A_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k - A_{k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} (P(A_k) - P(A_{k+1}))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P(A_1) - P(A_n)) = P(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n), \text{ logo } P(A_n) \rightarrow 0.$$

viii. Vamos supor que $A_n \downarrow A$, isto é, que $A_n \supset A_{n+1}$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$. Então

$P(A_n) \geq P(A_{n+1})$ e $(A_n - A) \downarrow \phi$, daí por vii., $P(A_n - A) \rightarrow 0$, mas $P(A_n - A) = P(A_n) - P(A)$, pois $A \subset A_n$, logo $(P(A_n) - P(A)) \downarrow 0$ ou $P(A_n) \downarrow P(A)$.

Se $A_n \uparrow A$ (isto é, $A_n \subset A_{n+1}$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$), então

$\bar{A}_n \downarrow \bar{A}$, logo $P(\bar{A}_n) \downarrow P(\bar{A})$ ou $(1 - P(A_n)) \downarrow (1 - P(A))$.

Portanto, $P(A_n) \uparrow P(A)$.

Sejam $\Omega \neq \phi$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ uma σ -álgebra e P uma probabilidade em Ω , então a terna (Ω, \mathcal{A}, P) é dita *espaço de probabilidade*.

Das propriedades acima e da definição de probabilidade, temos que todo espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) é um espaço de medida fuzzy.

Exemplo 2. Sejam $\Omega \neq \phi$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω e $x_0 \in \Omega$. A função μ_{x_0} definida em \mathcal{A} por:

$$\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

é uma medida de probabilidade em Ω , chamada *medida concentrada* em x_0 ou medida de Dirac.

Demonstração:

É claro que μ_{x_0} satisfaz (P1) e (P2). Consideremos uma sequência $(A_n)_{n \geq 1}$ de conjuntos de \mathcal{A} e tal que $A_i \cap A_j = \phi$ se $i \neq j$

$$\mu_{x_0} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A_i \text{ para algum } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $x_0 \in A_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$, digamos i_0 , daí $x_0 \notin A_i, \forall i_0 \neq i$, logo

$$\mu_{x_0} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = 1 = \mu_{x_0}(A_{i_0}) = \mu(A_{i_0}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{\infty} \mu_{x_0}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{x_0}(A_i).$$

Se $x_0 \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, nada temos a fazer.

Portanto μ_{x_0} é uma medida de probabilidade logo, uma medida fuzzy.

2.5 Medida de possibilidade

O conceito de medida de possibilidade foi introduzido por Zadeh [28].

Sejam $\Omega \neq \phi$ e $\mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto de todos os subconjuntos de Ω .

Definição 2.4. Uma medida de possibilidade em Ω , é uma função $\pi : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ satisfazendo:

$$(\pi_1) \quad \pi(\phi) = 0.$$

$$(\pi_2) \quad \pi(A) \leq \pi(B) \text{ se } A \subset B.$$

$$(\pi_3) \quad \pi \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sup_{i \in I} \pi(A_i), \text{ onde } I \text{ é um conjunto de índices, } \forall A_i \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Verifica-se que se $f : \Omega \longrightarrow [0, 1]$, então a função $\pi : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ definida por

$$\pi(A) = \begin{cases} \sup_{x \in A} f(x) & \text{se } A \neq \phi \\ 0 & \text{se } A = \phi \end{cases}$$

é uma medida de possibilidade em Ω .

A função f acima é chamada *função densidade* de π em Ω .

O exemplo abaixo mostra que, mesmo tendo $\sup_{x \in \Omega} f(x) = 1$, nem toda medida de possibilidade é uma medida fuzzy [17].

É fácil ver que toda medida de possibilidade satisfaz (MF1), (MF2) e (MF3).

Exemplo 3. Sejam $\Omega = [0, 1]$, $f(x) = 1$ para $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 0$. Considere $A_n = [1 - \frac{1}{n}, 1]$; assim $\pi(\bigcap_{n \geq 1} A_n) = 0$, enquanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(A_n) = 1$, para $\pi : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ definida por $\pi(A) = \sup_{x \in A} f(x)$. No entanto π é uma medida de possibilidade com função de densidade f .

Proposição 2.4. Se Ω é um conjunto finito e $\sup_{x \in \Omega} f(x) = 1$, onde f é a função densidade da medida de possibilidade π , então π é uma medida fuzzy.

A demonstração é trivial pois pelo fato de Ω ser finito, basta verificar (MF1) e (MF2).

Proposição 2.5. Suponha que $f : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$ seja função densidade da medida de possibilidade π . Se π é uma medida fuzzy em \mathbb{R}^k , então $f(x) = 0$ para todo ponto de continuidade x de f .

Demonstração: Suponha que x_0 é um ponto de continuidade de f .

Seja a sequência $A_n = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x - x_0\| < \frac{1}{n}, x \neq x_0\}$.

Temos $A_n \neq \emptyset$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ e $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \emptyset$. Como π é uma medida fuzzy, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(A_n) = 0.$$

Seja a sequência $\{x_j\}$ tal que $x_j \rightarrow x_0$, $x_j \neq x_0$. Fixado n , então $x_j \in A_n$ para todo $j \geq j_n$, para algum j_n . Assim $f(x_j) \leq \sup_{x \in A_n} f(x)$ para $j \geq j_n$, segue então que $0 \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} f(x_j) \leq \sup_{x \in A_n} f(x) = \pi(A_n)$ ou $0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) \leq \pi(A_n)$, uma vez que a desigualdade vale para todo $n \geq 1$, então $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = 0 = f(\lim_{j \rightarrow \infty} x_j) = f(x_0)$ pois f é contínua em x_0 .

Corolário. Se π é uma medida de possibilidade com densidade contínua f . Então $\pi \equiv 0$ se π for uma medida fuzzy.

Demonstração: Basta ver que $\pi(x) = \pi\{x\} = f(x)$, $\forall x$.

2.6 Medida λ -fuzzy ou medida de Sugeno

Estas medidas foram introduzidas por Sugeno (1974) com o intuito de enfraquecer a aditividade e σ -aditividade na medida de probabilidade.

Definição 2.5. Seja $\Omega \neq \phi$ um conjunto. Uma função $g_\lambda : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, com $\lambda > -1$, é dita λ -fuzzy ou de Sugeno se

$$(\lambda_1) \quad g_\lambda(\Omega) = 1.$$

$$(\lambda_2) \quad g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B) \text{ se } A \cap B = \phi.$$

$$(\lambda_3) \quad g_\lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} g_\lambda(A_i), \text{ para } A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

$$(\lambda_4) \quad g_\lambda\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} g_\lambda(A_i), \text{ para } A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

Proposição 2.6. Se g_λ é uma medida de Sugeno, então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- i. g_λ é uma medida fuzzy.
- ii. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tem-se

$$g_\lambda(A \cup B) = \frac{g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \cap B) + \lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B)}{1 + \lambda g_\lambda(A \cap B)}$$

- iii. $g_\lambda(A) + g_\lambda(\bar{A}) = 1 - \lambda g_\lambda(A)g_\lambda(\bar{A})$ onde $\bar{A} = \Omega - A$.

Demonstração: (Ver [6]).

Proposição 2.7. Sejam $\Omega \neq \phi$ um conjunto finito e g_λ uma medida de Sugeno em Ω .
Então

$$g_\lambda(A) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \left\{ \prod_{x \in A} [1 + \lambda g_\lambda(\{x\})] - 1 \right\} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \sum_{x \in A} g_\lambda(\{x\}) & \text{se } \lambda = 0, \text{ para todo } A \in \mathcal{P}(\Omega). \end{cases}$$

Demonstração: (Ver [6]).

Para ver mais exemplos de medidas fuzzy, ver Bassanezi ([2], [6]).

Capítulo 3

INTEGRAIS FUZZY, VARIÁVEIS INEXATAS E VALOR ESPERADO (FEV)

3.1 Integrais Fuzzy

A integral fuzzy, introduzida por Sugeno em sua tese de doutorado, é um instrumento próprio para avaliar conjuntos fuzzy, usando medidas fuzzy.

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida fuzzy.

Definição 3.1. Uma função $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$ é dita *mensurável* se $\{f \geq \alpha\} = \{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 3.2. Seja $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$, uma função mensurável. A *integral fuzzy* com respeito a μ é dada por:

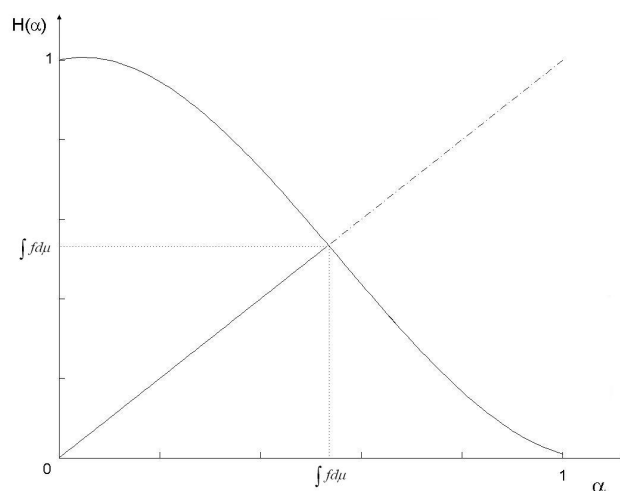
$$\int_A f d\mu = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, \mu[\{f \geq \alpha\} \cap A]]], \quad A \in \mathcal{A}.$$

Observações:

1. $\int_{\Omega} f d\mu = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, \mu\{f \geq \alpha\}]]$.
2. $\int_A f d\mu = \int_{\Omega} f/A d\mu$, uma vez que para cada $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$\{f \geq \alpha\} \cap A = \{x \in A : f(x) \geq \alpha\}.$$

3. Se $H(\alpha) = \mu\{f \geq \alpha\}$ for contínua, então o cálculo de $\int_{\Omega} f d\mu$, consiste em descobrir a intersecção de $y = \alpha$ com $g = H(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$.



Mais geralmente temos a seguinte

Proposição 3.1. Seja $H : [a, b] \longrightarrow [c, d]$, com $[a, b] \cap [c, d] \neq \emptyset$, uma função decrescente tal que $H(\alpha^*) = \alpha^*$ para algum $\alpha^* \in [a, b]$. Então,

$$\sup_{a \leq \alpha \leq b} [\min[\alpha, H(\alpha)]] = \alpha^* = H(\alpha^*).$$

Demonstração:

Seja $g(\alpha) = \min[\alpha, H(\alpha)]$, $a \leq \alpha \leq b$.

Queremos mostrar que $g(\alpha) \leq g(\alpha^*)$ para todo $\alpha \in [a, b]$.

Se $\alpha < \alpha^*$, então $H(\alpha) \geq H(\alpha^*) = \alpha^* > \alpha$, assim $g(\alpha) = \alpha < \alpha^* = g(\alpha^*)$.

Se $\alpha > \alpha^*$, então $H(\alpha) \leq H(\alpha^*) = \alpha^* < \alpha$, assim $g(\alpha) = H(\alpha) \leq \alpha^* = g(\alpha^*)$.

Portanto, $g(\alpha^*) = \sup_{a \leq \alpha \leq b} g(\alpha) = \alpha^* = H(\alpha^*)$.

Veja que a observação 3 mencionada acima, é uma consequência imediata da proposição 3.1 uma vez que a função $H : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ dada por $H(\alpha) = \mu\{f \geq \alpha\}$ é contínua por

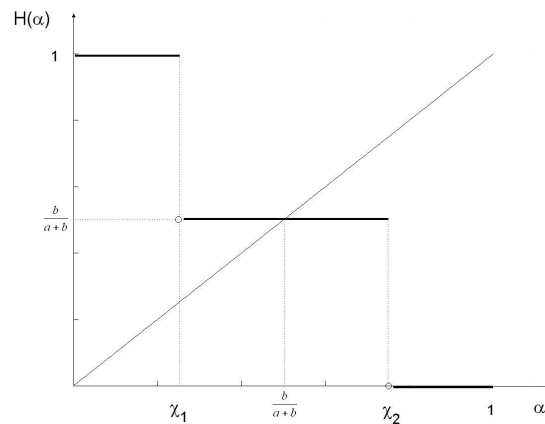
hipótese, logo tem ponto fixo, é decrescente e $H(0) = 1$.

Exemplo 1. Suponha que Ω é o conjunto das pessoas de uma determinada localidade e \mathbb{F} o conjunto fuzzy das “pessoa altas” de Ω dado pelos graus de pertinências χ_1 e χ_2 . Isto é, suponha que a pessoas estejam associados com χ_1 , b pessoas estejam associadas com χ_2 e $\#\Omega = a + b$.^(*)

Se $\mu(S) = \frac{\#S}{\#\Omega}$, $\forall S \in \mathcal{P}(\Omega)$, e se $0 \leq \chi_1 < \chi_2 \leq 1$, então

$$H(\alpha) = \mu\{\chi \geq \alpha\} = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \chi_1 \\ \frac{b}{a+b} & \text{se } \chi_1 < \alpha \leq \chi_2 \\ 0 & \text{se } \chi_2 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Se $\chi_1 \leq \frac{b}{a+b} \leq \chi_2$, então $H\left(\frac{b}{a+b}\right) = \frac{b}{a+b}$ e assim, pela proposição 3.1

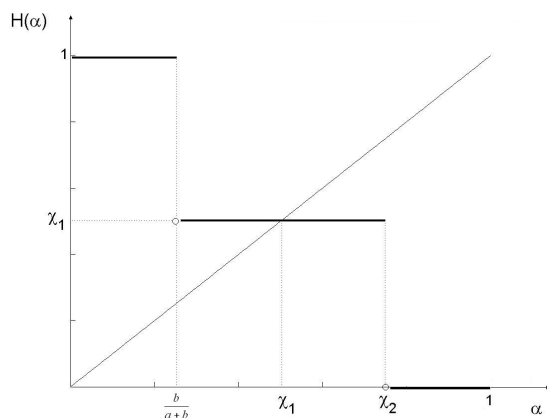


$$\int_{\Omega} \chi d\mu = \frac{b}{a+b}$$

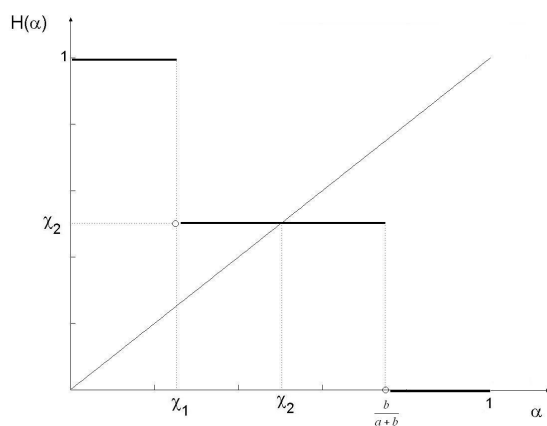
Observe que:

^{0(*)} $\#\Omega$ = cardinalidade do conjunto Ω .

$$1. \int_{\Omega} \chi d\mu = \chi_1 \text{ se } \chi_1 \geq \frac{b}{a+b}$$



$$2. \int_{\Omega} \chi d\mu = \chi_2 \text{ se } \chi_2 \leq \frac{b}{a+b}$$



A proposição abaixo, generaliza o exemplo anterior e nos ensina a calcular a integral fuzzy, supondo que f assume um numero finito de valores.

Proposição 3.2. Suponha que $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$, assume apenas $n + 1$ valores; $\{f_i\}_{i=1}^{n+1}$ e sejam $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ os valores distintos de $\mu\{f \geq \alpha\}$ sendo $\mu_i = \{f \geq f_i\}$, excluindo os valores

$\mu = 1$ e $\mu = 0$.

Supondo, sem perda de generalidade, que $0 \leq f_i \leq f_j \leq 1$ se $i \leq j$, então

$$\int_{\Omega} f d\mu = \text{mediana de } A \text{ onde } A = \{f_1, f_2, \dots, f_{n+1}, \mu_1, \dots, \mu_n\}$$

e está ordenado em ordem crescente.

Demonstração: (Ver Kandel [13], teorema 4.2.3, pág. 80).

Exemplo 2. Suponhamos que o conjunto fuzzy das pessoas que “ganhavam bem” de uma determinada empresa, seja dado por:

- 1 pessoa ganha por hora Cr\$ 3,00 $\longrightarrow f_1 = 0,40$
- 2 pessoas ganham por hora Cr\$ 4,00 $\longrightarrow f_2 = 0,50$
- 4 pessoas ganham por hora Cr\$ 4,20 $\longrightarrow f_3 = 0,55$
- 2 pessoas ganham por hora Cr\$ 4,50 $\longrightarrow f_4 = 0,60$
- 2 pessoas ganham por hora Cr\$ 10,00 $\longrightarrow f_5 = 1,00$

Suponha que $\mu(S) = \frac{\# S}{\# \Omega} = \frac{\# S}{12}$.

$$\mu\{f \geq \alpha\} = \begin{cases} 1 = \mu_0 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq f_1 \\ \frac{11}{12} = \mu_1 & \text{se } f_1 < \alpha \leq f_2 \\ \frac{8}{12} = \mu_2 & \text{se } f_2 < \alpha \leq f_3 \\ \frac{4}{12} = \mu_3 & \text{se } f_3 < \alpha \leq f_4 \\ \frac{2}{12} = \mu_4 & \text{se } f_4 < \alpha \leq f_5 \\ 0 = \mu_5 & \text{se } f_5 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Portanto $\int_{\Omega} f d\mu = \text{mediana de } \left\{ \frac{2}{12}; \frac{4}{12}; 0,40; 0,50; 0,55; 0,60; \frac{8}{12}; \frac{11}{12}; 1 \right\}$
 $\cong 0,55$.

Observe que a média aritmética é 0,61.

Como veremos mais adiante, a esperança de uma variável, assim como se faz no caso clássico, será definida como a integral fuzzy desta variável.

Note que no exemplo acima, a integral fuzzy nos dá uma indicação boa dos dados uma vez que o valor extremo de Cr\$ 10,00 não afeta o resultado. Já a média aritmética clássica é afetada pelos valores extremos.

Para encerrar este parágrafo, vamos enunciar uma proposição que nos dá uma outra maneira de obtermos a integral fuzzy de um conjunto fuzzy:

Proposição 3.3. Seja $f : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ uma função mensurável, então

$$\int_A f d\mu = \sup_{E \in \mathcal{A}} [\min[\inf_{x \in E} f(x), \mu(A \cap E)]] , \forall A \in \mathcal{A} .$$

Demonstração:

Sem perda de generalidade, vamos supor que $A = \Omega$. Assim, devemos mostrar que

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sup_{E \in \mathcal{A}} [\min[\inf_{x \in E} f(x), \mu(E)]] .$$

Sejam $E \in \mathcal{A}$ e $\alpha_0 = \inf_{x \in E} f(x)$. Então $E \subset \{f \geq \alpha_0\}$ e assim $\mu(E) \leq \mu\{f \geq \alpha_0\}$. Daí,

$$\min[\mu(E), \alpha_0] \leq \min[\mu\{f \geq \alpha_0\}, \alpha_0] \leq \int_{\Omega} f d\mu .$$

Agora sejam $\alpha > 0$ e $E_0 = \{f \geq \alpha\}$. Como $\inf_{x \in E_0} f(x) \geq \alpha$, nós obteremos,

$$\sup_{E \in \mathcal{A}} [\min[\mu(E), \inf_{x \in E} f(x)]] \geq \min[\mu(E_0), \inf_{x \in E_0} f(x)] \geq \min[\mu\{f \geq \alpha\}, \alpha] .$$

Portanto $\sup_{E \in \mathcal{A}} [\min[\mu(E), \inf_{x \in E} f(x)]] \geq \int_{\Omega} f d\mu$, terminando assim a prova.

3.2 Propriedades da integral fuzzy

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida fuzzy.

Proposição 3.4. Se $f, g : \Omega \rightarrow [0, 1]$ são funções mensuráveis e $c \in [0, 1]$, então:

i. $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$ se $f \leq g, \forall A \in \mathcal{A}$

ii. $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$ se $A \subset B$

iii. $\int_A f d\mu = 0$ se $\mu(A \cap \{f > 0\}) = 0$

iv. $\int_A c d\mu = \min[c, \mu(A)], c$ constante

v. $\int_A (f + c) d\mu \leq \int_A f d\mu + \min[c, \mu(A)] = \int_A f d\mu + \int_A c d\mu, c$ constante.

Demonstração:

i. Dado $\alpha \in [0, 1]$, temos que $\{f \geq \alpha\} \subset \{g \geq \alpha\}$, logo

$$\int_A f d\mu = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, \mu(\{f \geq \alpha\} \cap A)] \leq \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, \mu(\{g \geq \alpha\} \cap A)] = \int_A g d\mu.$$

ii. Consequência imediata de (MF2): se $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$

iii. Como $\{f > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f \geq \frac{1}{n}\}$, então $\{f > 0\}$ e para todo $\alpha \in [0, 1]$,

$$\{f \geq \alpha\} \subset \{f > 0\}, \text{ logo } \mu(A \cap \{f \geq \alpha\}) \leq \mu(A \cap \{f > 0\}) = 0.$$

iv. Observe que

$$\min[\alpha, \mu(A \cap \{c \geq \alpha\})] = \begin{cases} \min[\alpha, \mu(A)] & \text{se } c \geq \alpha \\ 0 & \text{se } c < \alpha. \end{cases} \text{ Assim,}$$

$$\begin{aligned} \int_A c d\mu &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, \mu(\{c \geq \alpha\} \cap A)]] \\ &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, \mu(A)]] = \min[c, \mu(A)]. \end{aligned}$$

v. Antes vamos lembrar que quaisquer que sejam $\ell, m, n \geq 0$, temos:

$$\min[\ell + m, n] \leq \min[\ell, n] + \min[m, n] \leq \min[m, n] + \ell.$$

Pela proposição 3.3 temos

$$\begin{aligned} \int_A (f + c)d\mu &= \sup_{E \in \mathcal{A}} [\min[\inf_{x \in E} (f(x) + c), \mu(A \cap E)]] \\ &\leq \sup_{E \in \mathcal{A}} [\min[\inf_{x \in E} (f(x) + c), \mu(A)]] \\ &= \sup_{E \in \mathcal{A}} [\min[\inf_{x \in E} (f(x) + c), \mu(A)]] \\ &\leq \sup_{E \in \mathcal{A}} [\min[\inf_{x \in E} (f(x), \mu(A)) + \min[c, \mu(A)]] \\ &= \sup_{E \in \mathcal{A}} [\min[\inf_{x \in E} (f(x), \mu(A)) + \min[c, \mu(A)]] \\ &= \int_A f d\mu + \min[c, \mu(A)] = \int_A f d\mu + \int_A c d\mu. \end{aligned}$$

Devemos observar que não valem as igualdades:

$$1. \int_A c f d\mu = c \int_A f d\mu$$

$$2. \int_A (f + g)d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu.$$

Teorema 3.1. Seja $a \in [0, 1]$. Se $|f - g| \leq a$ em A , então

$$\left| \int_A f d\mu - \int_A g d\mu \right| \leq a.$$

Demonstração: Se $f \leq g + a$ em A , temos

$$\int_A f d\mu \leq \int_A (g + a)d\mu \leq \int_A g d\mu + \int_A a d\mu \leq \int_A g d\mu + a.$$

Analogamente, se $g \leq f + a$

$$\int_A g d\mu \leq \int_A f d\mu + a.$$

Consequentemente, $-a \leq \int_A f d\mu - \int_A g d\mu \leq a$,

ou seja, $\left| \int_A f d\mu - \int_A g d\mu \right| \leq a$.

Para encerrar este parágrafo, vamos apresentar uma outra maneira de definir integral fuzzy, que tem uma certa semelhança com a definição da integral de Lebesgue. Em seguida mostraremos que as duas definições são equivalentes (Ver Ralescu e Adams, [21]).

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uma espaço de medida fuzzy.

Seja S uma função mensurável, simples e positiva. Então S pode ser escrita por:

$$S = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \text{ com } \alpha_i \neq \alpha_j \text{ para } i \neq j, \text{ onde}$$

$$A_i = S^{-1}(\alpha_i) = \{x \in \Omega : S(x) = \alpha_i\} \text{ e}$$

$$\mathbb{1}_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A_i \\ 0 & \text{se } x \notin A_i \end{cases}$$

Seja $Q_A(S) = \sup_{0 \leq i \leq n} [\min[\alpha_i, \mu(A_i \cap A)]]$, $A \in \mathcal{A}$.

Definição 3.3. Se $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$ é uma função mensurável, definimos

$$\int_A f d\mu = \sup_{0 \leq S \leq f} Q_A(S),$$

onde o sup é tomado sobre todas as funções simples mensuráveis tais que $0 \leq S \leq f$.

Observações:

1. Se $A = \Omega$, denotaremos $Q_\Omega(S)$ por $Q(S)$, então

$$\int_\Omega f d\mu = \sup_{0 \leq S \leq f} Q(S).$$

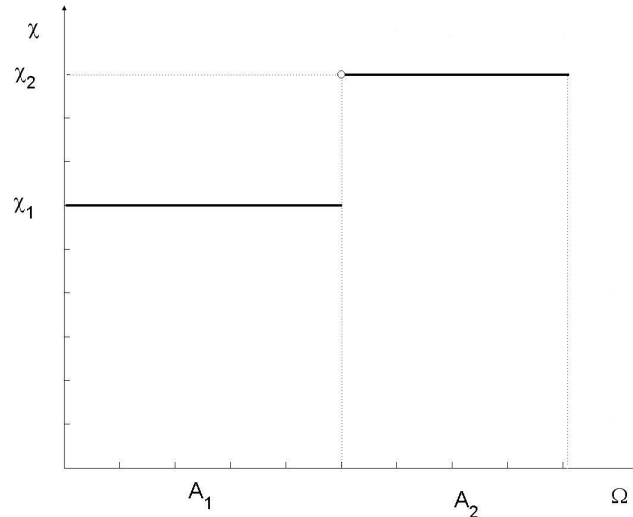
2. $\int_A f d\mu = \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_A d\mu = \int_\Omega f/A d\mu$, onde

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A_i \\ 0 & \text{se } x \notin A_i \end{cases}$$

Exemplo 2. A título de comparação vamos calcular, com os dados do exemplo 1 deste parágrafo, o valor de $\int_{\Omega} \chi d\mu$:

Inicialmente observe que χ é uma função simples e que

$\#A_1 = a$ e $\#A_2 = b$; onde $A_i = \chi^{-1}(\chi_i)$, para $i = 1, 2$.



$$\begin{aligned} Q(\chi) &= \sup_{1 \leq i \leq 2} [\min[\chi_i, \mu(A_i)]] = \sup\left[\min\left[\chi_1, \frac{a}{a+b}\right], \min\left[\chi_2, \frac{b}{a+b}\right]\right] \\ &= \sup\left[\chi_1, \frac{b}{a+b}\right] = \frac{b}{a+b}. \end{aligned}$$

Por outro lado, seja S uma função simples,

$$S = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} \leq \chi \quad \text{e} \quad B_i = S^{-1}(\alpha_i).$$

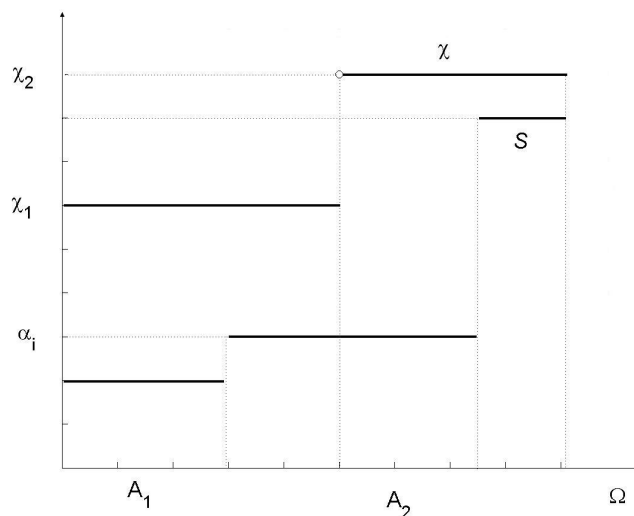
Para cada α_i temos:

se $B_i \cap A_1 \neq \emptyset$ e $B_i \cap A_2 = \emptyset$, então $B_i \subset A_1$ e

$$\min[\alpha_i, \mu(B_i)] \leq \min(\chi_1, \mu(A_1)) \leq \chi_1 \leq \mu(A_2) = Q(\chi).$$

se $B_i \cap A_1 = \emptyset$ e $B_i \cap A_2 \neq \emptyset$, então

$$\min[\alpha_i, \mu(B_i)] \leq \alpha_i \leq \chi_1 \leq \mu(A_2) = Q(\chi).$$



se $B_i \cap A_1 = \phi$ e $B_i \cap A_2 \neq \phi$, então $B_i \subset A_2$ e

$$\min[\alpha_i, \mu(B_i)] \leq \min(\chi_2, \mu(A_2)) = \mu(A_2) = Q(\chi).$$

Assim, para qualquer $S \leq \chi$ temos

$$Q(S) = \sup_{1 \leq i \leq n} [\min(\alpha_i, \mu(B_i))] \leq Q(\chi) = \mu(A_2) = \frac{b}{a+b}.$$

Portanto $\sup_{0 \leq S \leq \chi} Q(S) \leq Q(\chi)$.

Como χ é uma função simples, então pela definição de supremo temos

$$\int_{\Omega} \chi d\mu = \sup_{0 \leq S \leq \chi} Q(S) = Q(\chi) = \frac{b}{a+b}.$$

Pelo exemplo, vemos que o cálculo acima nos dá um certo trabalho. Isso deve-se ao fato de que em geral, uma vez que $Q_A(S)$ não é crescente com S , temos $Q_A(S) \neq \int_A S d\mu$.

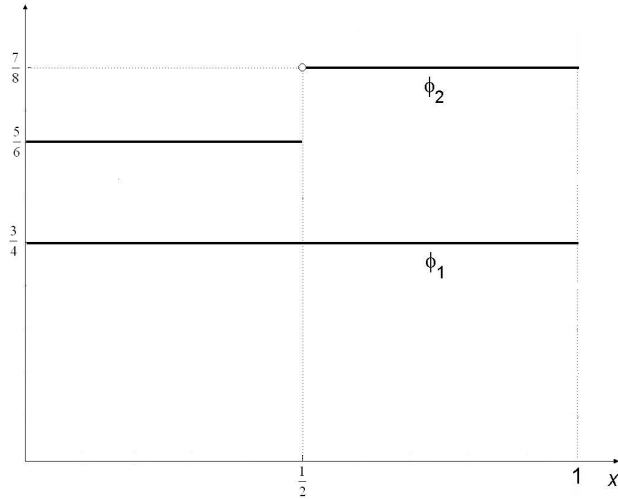
Exemplo 3. Vamos aqui construir um exemplo para o qual tem-se $Q(S) \neq \int_{\Omega} S d\mu$:

Sejam $\Omega = [0, 1]$, μ a medida de Lebesgue e as funções simples:

$$\phi_1(x) = \frac{3}{4}, \forall x \in [0, 1] \quad \text{e} \quad \phi_2(x) = \begin{cases} \frac{5}{6} & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{7}{8} & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Assim temos $\phi_1 \leq \phi_2$, no entanto

$$\int_{\Omega} \phi_1 d\mu = Q(\phi_1) = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \phi_2 d\mu = \sup_{0 \leq S \leq \phi_2} Q(S) \geq \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = Q(\phi_2).$$



Teorema 3.2. Se $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$ é mensurável, então

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

Demonstração: (Ver Ralescu e Adams, [21]).

Corolário.

$$\int_A f d\mu = \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Demonstração. Pelas observações 2 da definição 3.2 e 2 da definição 3.3 e o teorema 3.2, temos

$$\int_A f d\mu = \int_{\Omega} f/A d\mu = \int_{\Omega} f/A d\mu = \int_A f d\mu.$$

A partir de agora, usaremos uma ou outra definição de integral fuzzy.

3.3 Convergências e teoremas de convergências

Neste parágrafo, iremos enunciar alguns teoremas de convergência da teoria de medida clássica que ainda valem no caso da teoria fuzzy.

As funções que aparecem neste parágrafo têm domínios em um conjunto Ω e contradomínios $[0, 1]$.

Teorema 3.3. (teorema da convergência monótona). Se $f_n : \Omega \rightarrow [0, 1]$ são mensuráveis, $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in \Omega$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

Demonstração. (Ver Wang [26] ou Ralescu [21]).

Lema 3.1.

$$\int_A f d\mu \geq \alpha \iff \mu(A \cap \{f \geq \alpha\}) \geq \alpha.$$

Demonstração. Se $\mu(A \cap \{f \geq \alpha\}) \geq \alpha$ então é óbvio que $\int_A f d\mu \geq \alpha$. Para mostrar a desigualdade no outro sentido, (ver Wang [26]).

Para uma sequência decrescente, temos

Teorema 3.4. Se $\{f_n\}$ é uma sequência decrescente de funções mensuráveis, convergindo para f , então

$$\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Demonstração. Vamos assumir, sem perda de generalidade que $A = \Omega$. Se $\int_{\Omega} f d\mu = c$, nós temos $\int_{\Omega} f_n d\mu \geq c$, pois por hipótese $f_n \geq f \quad \forall n$.

Suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu > c$, então existe $\delta > 0$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu \geq c + \delta. \text{ Como } \{f_n\} \text{ é decrescente nós temos } \int_{\Omega} f_n d\mu \geq c + \delta.$$

Por outro lado, $\{f_n \geq c + \delta\}$ é decrescente com n e

$\bigcap_{n \geq 1} \{f_n \geq c + \delta\} = \{f \geq c + \delta\}$, logo pela continuidade de μ ,

$\mu\{f \geq c + \delta\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{f_n \geq c + \delta\} \geq c + \delta$, usando o lema 3.1 para as f_n .

Agora usando o lema 3.1 para f , temos que

$$\int_{\Omega} f d\mu \geq c + \delta \quad \text{o que é uma contradição.}$$

Este resultado vale em um caso mais geral (Ver Wang [26]).

Teorema 3.5. Se $\{f_n\}$ converge uniformemente para f em $A \in \mathcal{A}$, então

$$\int_A f_n d\mu \longrightarrow \int_A f d\mu.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, uma vez que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente, existe n_0 tal que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in A$ com $n \geq n_0$. Segue, usando o teorema 3.1, que

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| \leq \varepsilon.$$

Em seguida enunciaremos uma condição necessária e suficiente para convergência de integrais fuzzy.

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções tais que $f_n : \Omega \longrightarrow [0, 1]$.

Definição 3.4. Dizemos que a sequência $\{f_n\}$ converge quase sempre (q.s.) para f e escrevemos $f_n \longrightarrow f$ q.s. se $\mu\{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\} = 0$.

Definição 3.5. Dizemos que a sequência $\{f_n\}$ converge para f em medida se $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

Definição 3.6. Uma medida fuzzy μ é autocontínua se, e somente se, temos $\mu(A \Delta B_n) \longrightarrow \mu(A)$, sempre que $A \in \mathcal{A}$, $B_n \in \mathcal{A}$ e $\mu(B_n) \longrightarrow 0$.

Observações:

1. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
2. Qualquer medida clássica, em particular a medida de probabilidade, é uma medida autocontínua (Ver Wang [26]).

3. Se μ é uma medida (clássica) e finita, então convergência quase sempre implica na convergência em medida (Ver Hönig [10]).

Teorema 3.6. Sejam $\{f_n\}$ e f funções mensuráveis. Se $\{f_n\}$ converge em medida para f em $A \in \mathcal{A}$, então

$$\int_A f_n d\mu \longrightarrow \int_A f d\mu$$

se, e somente se, μ é uma medida autocontínua.

Demonstração. (Ver Wang [26]).

Ralescu e Adams [21] enunciam um teorema semelhante ao teorema 3.6, supondo que a medida μ satisfaça $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ e mostram através de um exemplo que esta hipótese é imprescindível. Porém, Wang [26] mostra que esse exemplo dado por Ralescu e Adams não estava correto e que a hipótese de subaditividade ($\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$), é muito forte (subaditividade \implies autocontinuidade).

Uma generalização destes resultados é encontrada em Greco e Bassanezi [8].

3.4 Variável aleatória

Vamos aqui fazer um pequeno resumo de variáveis aleatórias no sentido clássico da teoria da probabilidade.

Seja (Ω, \mathcal{A}, P) um espaço de probabilidade.

Definição 3.7. A função $\chi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *variável aleatória* se χ for mensurável.

Definição 3.8. A função $F(x) = P\{\omega \in \Omega : \chi \leq x\} = P\{\chi \leq x\}$ é chamada função de distribuição acumulada de χ .

Propriedades de F .

1. Se $x \leq y$, então $F(x) \leq F(y)$.
2. F é contínua à direita. Isto é, se $x_n \downarrow x$, então $F(x_n) \downarrow F(x)$.

3. Se $x_n \downarrow -\infty$, então $F(x_n) \downarrow 0$. Se $x_n \uparrow +\infty$, então $F(x_n) \uparrow 1$. (Logo podemos escrever $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$).

Demonstração. (Ver James, [12]).

Observe que

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_-) &= F(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} F(x - \frac{1}{n}) = P\{\chi \leq x\} - \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\chi \leq x - \frac{1}{n}\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\{x - \frac{1}{n} < \chi \leq x\} = P\{\chi = x\}. \end{aligned}$$

Portanto o “salto” de F em x é igual a $P\{\chi = x\}$ e F é contínua no ponto x se, e somente se, $P\{\chi = x\} = 0$. Veja também que sendo F monótona crescente, seu conjunto de descontinuidade é no máximo enumerável.

Definição 3.9. A *esperança* de χ é definida por:

$$E(\chi) = \int_{\Omega} \chi dP = \int_{-\infty}^{\infty} x dF,$$

onde a primeira integral é a integral de Lebesgue com respeito a medida de probabilidade e a segunda é a integral de Stieltjes.

Teorema 3.7. Seja χ uma variável aleatória positiva, então

$$E(\chi) = \int_0^{\infty} P\{\chi > x\} dx = \int_0^{\infty} P\{\chi \geq x\} dx.$$

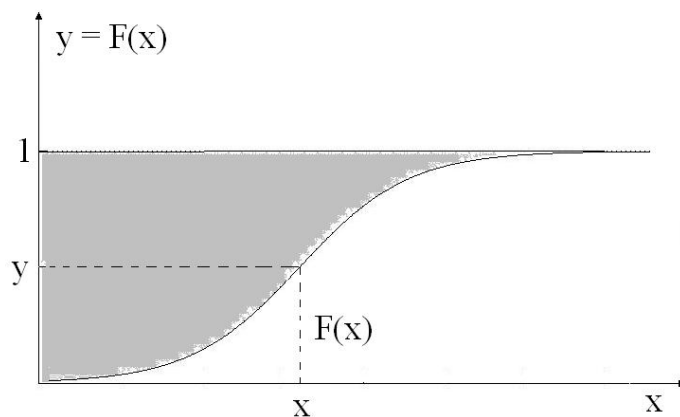
Demonstração:

Veja que a área hachurada corresponde a $\int_0^1 x dy$ e

$$E(\chi) = \int_0^1 x dF = \int_0^1 x dy = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx = \int_0^{\infty} P\{\chi > x\} dx.$$

A segunda igualdade no teorema, vem do fato que

$$P\{\chi \geq x\} = P\{\chi > x\} + P\{\chi = x\} = P\{\chi > x\} \text{ q.s.}$$



uma vez que o conjunto dos pontos de descontinuidades de $f(x) = P\{\chi \geq x\}$ é no máximo enumerável e assim

$$\int_0^{\infty} P\{\chi > x\}dx = \int_0^{\infty} P\{\chi \geq x\}dx.$$

3.5 Variáveis inexatas e valor Esperado Fuzzy (FEV: Fuzzy Expected Value).

Vamos voltar aos nossos conjuntos fuzzy do início de nosso trabalho, isto é, $\chi : \Omega \rightarrow [0, 1]$ e $\chi(\omega) \in [0, 1]$ dá a $\omega \in \Omega$, o grau de pertinência de ω ao nosso conjunto fuzzy.

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida fuzzy.

Definição 3.10. Uma *variável inexata* (v.i.) em Ω é qualquer função mensurável $\chi : \Omega \rightarrow [0, 1]$.

Se χ é uma variável inexata, então a função $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(\alpha) = \mu\{\chi \geq \alpha\}$, tem propriedades análogas às da função de distribuição acumulada. A função $f(\alpha) = \mu\{\chi \geq \alpha\}$ é chamada *função de nível* e tem as seguintes propriedades:

1. Se $\alpha \leq \beta$, então $f(\alpha) \geq f(\beta)$.
2. f é contínua à esquerda, isto é, se $\alpha_n \uparrow \alpha$, então $f(\alpha_n) \rightarrow f(\alpha)$.

3. $f(0) = 1$.

De fato,

1. Se $\chi \geq \beta$, então $\chi \geq \alpha$. Logo $\{\chi \geq \beta\} \subset \{\chi \geq \alpha\}$ e $f(\beta) = \mu(\{\chi \geq \beta\}) \leq \mu(\{\chi \geq \alpha\}) = f(\alpha)$.

2. Se $\alpha_n \uparrow \alpha$, então $\{\chi \geq \alpha_n\}$ é decrescente e $\bigcap_{n \geq 1} \{\chi \geq \alpha_n\} \downarrow \{\chi \geq \alpha\}$, logo pela continuidade de μ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bigcap_{n \geq 1} \{\chi \geq \alpha_n\}) = \mu\{\chi \geq \alpha\} = f(\alpha)$.

3. Se $\alpha_n \downarrow 0$, então $\{\chi \geq \alpha_n\}$ é crescente e $\bigcup_{n \geq 1} \{\chi \geq \alpha_n\} \uparrow \{\chi \geq 0\}$. Assim pela continuidade de μ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{n \geq 1} \{\chi \geq \alpha_n\}) = \mu\{\chi \geq 0\} = f(0) = 1$.

Definição 3.11. Se $f(\alpha) = \mu\{\chi \geq \alpha\}$ for contínua, então diremos que χ é uma *variável inexata do tipo contínua*.

Sejam $\{\chi_n\}$ e χ variáveis inexatas. Nós dizemos que χ_n *converge fracamente* para χ se $f_n(\alpha)$ converge para $f(\alpha)$ em todo ponto de continuidade de f onde $f_n(\alpha) = \mu\{\chi_n \geq \alpha\}$ e $f(\alpha) = \mu\{\chi \geq \alpha\}$. Porém se $\lambda\{\alpha : |f_n - f| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$, para todo $\varepsilon > 0$, onde λ é a medida de Lebesgue em $[0, \infty)$, dizemos que χ_n *converge fracamente em medida* para χ .

Definição 3.12. O *valor esperado fuzzy (FEV)* ou *esperança fuzzy*, de uma variável inexata, é definido por

$$FEV(\chi) = \int_{\Omega} \chi d\mu = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, \mu\{\chi \geq \alpha\}]].$$

Teorema 3.8. Se $\{\chi_n\}$ é uma sequência de variáveis inexatas convergindo fracamente em medida para χ então $FEV(\chi_n) \rightarrow FEV(\chi)$.

Demonstração: (Ver Ralescu [20]).

Corolário. Se $\{\chi_n\}$ é uma sequência de variáveis inexatas convergindo fracamente para χ , então $FEV(\chi_n) \rightarrow FEV(\chi)$.

Demonstração. Basta ver que convergência fraca implica em convergência fraca em medida para este caso, uma vez que nossa função $f(\alpha) = \mu\{\chi \geq \alpha\}$ é descontínua em um número no máximo enumerável de pontos.

Teorema 3.9. Se $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é contínua, decrescente e $f(0) = 1$, então $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, f(\alpha)]] = \alpha^* = f(\alpha^*)$ para algum $\alpha^* \in (0, 1]$.

Demonstração. A função $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é contínua, portanto tem ponto fixo $\alpha^* \in [0, 1]$. Como $f(0) = 1$, então $\alpha^* \in (0, 1]$.

Assim, f está nas condições da proposição 3.1, logo segue o resultado.

Corolário. Se χ é uma variável inexata do tipo contínua e μ uma medida fuzzy, então $FEV(\chi) = \mu\{\chi \geq \alpha^*\}$, para algum $\alpha^* \in [0, 1]$.

Demonstração. Basta ver que a função $f(\alpha) = \mu\{\chi \geq \alpha\}$ está nas condições do teorema 3.9.

3.6 Comparação entre a esperança clássica e a esperança fuzzy

Neste parágrafo vamos comparar as esperanças clássica e fuzzy de uma variável inexata. Note que esta comparação faz sentido uma vez que qualquer medida de probabilidade é, em particular, uma medida fuzzy.

Nosso problema inicial é calcular

$$\sup_{f \in \mathcal{U}} \left| \int_0^1 f(\alpha) d\alpha - \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, f(\alpha)]] \right| \quad \text{onde,}$$

$\mathcal{U} = \{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : f \text{ é não crescente, contínua à esquerda e } f(0) = 1\}$.

Antes porém vamos fazer a comparação para uma f particular; seja f dada por:

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Então, $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, f(\alpha)]] = \sup_{0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}} [\min[\alpha, \frac{1}{2}]] = \frac{1}{2}$. Assim,

$$\left| \int_0^1 f(\alpha) d\alpha - \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, f(\alpha)]] \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4}.$$

Seja agora $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{U} : f \text{ é contínua}\}$.

Lema 3.2.

$$\sup_{f \in \mathcal{W}} \left| \int_0^1 f(\alpha) d\alpha - \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, f(\alpha)]] \right| \leq \frac{1}{4}.$$

Demonstração. Pelo teorema 3.9, temos que para qualquer $f \in \mathcal{W}$, existe $\alpha^* \in (0, 1]$ tal que $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, f(\alpha)]] = \alpha^* = f(\alpha^*)$. Portanto,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 f(\alpha) d\alpha - \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, f(\alpha)]] \right| = \left| \int_0^1 f(\alpha) d\alpha - \alpha^* \right| \\ & = \left| \alpha^* - \int_0^1 f(\alpha) d\alpha \right| = \left| \int_0^{\alpha^*} 1 d\alpha - \int_0^{\alpha^*} f(\alpha) d\alpha - \int_{\alpha^*}^1 f(\alpha) d\alpha \right| \\ & = \left| \int_0^{\alpha^*} (1 - f(\alpha)) d\alpha - \int_{\alpha^*}^1 f(\alpha) d\alpha \right|. \end{aligned}$$

i) Vamos supor que $\int_0^{\alpha^*} (1 - f(\alpha)) d\alpha > \int_{\alpha^*}^1 f(\alpha) d\alpha$.

$$\int_0^{\alpha^*} (1 - f(\alpha)) d\alpha \leq \int_0^{\alpha^*} (1 - f(\alpha^*)) d\alpha = \int_0^{\alpha^*} (1 - \alpha^*) d\alpha = (1 - \alpha^*)\alpha^* \leq \frac{1}{4}.$$

Como $\int_{\alpha^*}^1 f(\alpha) d\alpha \geq 0$, temos

$$\left| \int_0^{\alpha^*} (1 - f(\alpha)) d\alpha - \int_{\alpha^*}^1 f(\alpha) d\alpha \right| \leq \frac{1}{4}.$$

ii) Se $\int_0^{\alpha^*} (1 - f(\alpha)) d\alpha < \int_{\alpha^*}^1 f(\alpha) d\alpha$, temos

$$0 \leq \int_{\alpha^*}^1 f(\alpha) d\alpha \leq \int_{\alpha^*}^1 f(\alpha^*) d\alpha = \int_{\alpha^*}^1 \alpha^* d\alpha = \alpha^*(1 - \alpha^*) \leq \frac{1}{4}$$

como $\int_1^{\alpha^*} (1 - f(\alpha))d\alpha \geq 0$, temos

$$\left| \int_0^{\alpha^*} (1 - f(\alpha))d\alpha - \int_{\alpha^*}^1 f(\alpha)d\alpha \right| \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Assim, } \sup_{f \in \mathcal{U}} \left| \int_0^1 f(\alpha)d\alpha - \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, f(\alpha)]] \right| \leq \frac{1}{4}.$$

Como vimos no início do parágrafo 3.6, infelizmente, esta majoração não pode ser melhorada para $f \in \mathcal{U}$.

Corolário. Se χ é uma variável aleatória do tipo contínua em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) , então

$$|E(\chi) - FEV(\chi)| \leq \frac{1}{4}.$$

Demonstração. Pelo corolário do teorema 3.9, $FEV(\chi) = f(\alpha^*) = \alpha^*$, onde $f(\alpha) = P\{\chi \geq \alpha\}$ e pelo teorema 3.7, $E(\chi) = \int_0^1 f(\alpha)d\alpha$. Como f está nas condições do lema 3.2, segue o resultado.

Teorema 3.10. Seja χ uma variável aleatória em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) , então

$$|E(\chi) - FEV(\chi)| \leq \frac{1}{4}.$$

Demonstração. Como $f(\alpha) = P\{\chi \geq \alpha\}$ é mensurável e $f(\alpha) \in [0, 1]$, existe uma sequência $\{f_n\}$ de funções contínuas tal que $f_n(\alpha) \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha) = f(\alpha)$ q.s. e para n suficientemente grande, f_n está nas condições do lema 3.2. (Ver Rudin [24], pág. 57).

Sejam $\chi_n : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tais que $f_n(\alpha) = P\{\chi_n \geq \alpha\}$ (Ver James [12], pág. 201).

Como, para cada n suficientemente grande, f_n está nas condições do corolário do lema 3.2, então

$$|E(\chi_n) - FEV(\chi_n)| \leq \frac{1}{4}.$$

Pelo teorema 3.7, temos $E(\chi_n) = \int_0^1 f_n(\alpha)d\alpha$ e $E(\chi) = \int_0^1 f(\alpha)d\alpha$.

Agora, se por um lado, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\int_0^1 f_n(\alpha)d\alpha \rightarrow \int_0^1 f(\alpha)d\alpha$$

por outro lado, pelo Teorema 3.8 $FEV(\chi_n) \rightarrow FEV(\chi)$, uma vez que $\chi_n \rightarrow \chi$ fracamente em medida. Assim temos

$$|E(\chi_n) - FEV(\chi_n)| \leq \frac{1}{4} \quad \text{daí} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |E(\chi_n) - FEV(\chi_n)| \leq \frac{1}{4} \quad \text{ou}$$

$$|\lim_{n \rightarrow \infty} E(\chi_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} FEV(\chi_n)| = |E(\chi) - FEV(\chi)| \leq \frac{1}{4}.$$

Observações:

1) Se $f_n \rightarrow f$ fracamente onde $f_n = P\{\chi_n \geq \alpha\}$ e $f = P\{\chi \geq \alpha\}$, então, pelo corolário do teorema 3.8., tem-se

$$|E(\chi) - FEV(\chi)| \leq \frac{1}{4}.$$

2) Se existir uma sequência $\chi_n \rightarrow \chi$ em medida, como P é autocontínua, então pelo teorema 3.6 $FEV(\chi_n) \rightarrow FEV(\chi)$ e daí tem-se também

$$|E(\chi) - FEV(\chi)| \leq \frac{1}{4}.$$

3) O teorema 3.10 está demonstrado na tese de doutorado de Michio Sugeno (1974).

Capítulo 4

APLICAÇÕES

4.1 Modelo I

“Hear the children crying.
But I know they cry not in vain
Now the times are changing
... As you can hear the children singing
Hallelujah!
As they grow singing by and by
Halleluiah, singing in the morning
Let them sing, never let them cry.”
Jean Watt and The Wailers.

Mortalidade × Pobreza

A saúde está, em grande parte, associada às características do meio ambiente físico e social em que vivem os indivíduos, bem como às possibilidades que eles têm de se precaver ou, pelo menos, sanar os eventuais danos físicos e mentais causados por este meio. Antes mesmo de nascerem, as pessoas já se encontram sujeitas a vários fatores que podem contribuir em desastrosas seqüelas, devido às condições do ambiente onde vivem seus pais.

É sob este aspecto que somos levados a indagar como a saúde de um determinado grupo de pessoas é afetada pelo meio onde vive. Por exemplo, se o meio for urbano, destacamos a poluição como grande causador de doenças bem como as altas densidades demográficas poderem conduzir à rápida propagação de doenças transmissíveis que decorrem, muitas vezes, da ausência de sistemas de saneamentos básicos. Para evitar ou, pelo menos, sanar os problemas causados pelo meio ambiente, as pessoas devem residir em áreas menos poluídas e com melhor saneamento básico. Para tanto, o grau de pobreza de cada um é que vai permitir ou não

o acesso a tais áreas.

A assistência médica e sanitária, de caráter público, é, em princípio, um serviço ao qual as pessoas têm acesso independentemente de sua pobreza, porém a demanda é, em geral, maior que a oferta e assim o sistema fica comprometido.

A assistência médica de caráter privado, que costuma ser mais abundante, mais especializado e de melhor qualidade, evidentemente seleciona seus usuários em função do seu nível de renda.

Enfim, os problemas de saúde, conseqüentemente da mortalidade, estão muitas vezes, associados ao meio em que cada grupo vive.

Assim, citamos apenas a renda como um fator para se analisar os problemas de saúde, porém, temos outros indicadores importantes tais como uma boa alimentação (consumo de calorias, de ferro, de vitaminas), posse de bens, níveis de educação, etc. Mas todos os indicadores mencionados aqui são indicadores de "pobreza" ou complementarmente de "riqueza".

O objetivo de nosso trabalho é mostrar efetivamente a influência da pobreza na esperança de vida de um grupo. Poderíamos ter usado, se tivéssemos dados suficientes, qualquer indicador de pobreza ou mesmo uma composição destes indicadores. Por simplicidade e sendo realistas quanto aos dados obtidos, usaremos o indicador nível de renda como medida subjetiva de pobreza, isto é, alguém será tanto mais pobre quanto menor for sua renda.

Os valores aqui apresentados tem como fontes o DIEESE (1988) e Carvalho - Wood (1977). Carvalho - Wood calcularam com base no censo de 1970, a expectativa de vida ao nascer, nas diversas regiões brasileiras sendo consideradas, separadamente, as áreas rurais e urbanas.

Neste trabalho fazemos um estudo comparativo entre o método estocástico clássico e as técnicas da estatística fuzzy, usando um modelo de esperança de vida para um grupo de indivíduos, considerando seu nível salarial. A comparação é feita com base na distribuição de Pareto para a distribuição salarial.

A nosso ver o procedimento com os argumentos fuzzy, além de ser mais lógico, natural e mais simples que o estocástico usual, é uma nova ferramenta a ser usada.

4.2 O Modelo

Seja A um grupo de pessoas com $n(t)$ indivíduos num instante t . A questão é saber quantos elementos do conjunto A estarão vivos no instante $(t + \Delta t)$, assumindo que as "causa mortis" sejam naturais e também influenciadas pelo grau de pobreza. Assim, estamos

interessados em saber o valor de $n(t + \Delta t)$. Estamos supondo que não haja “entrada” de outros elementos no grupo A .

O modelo estocástico de Boltzman nos dá:

$$n(t + \Delta t) = n(t)(1 - P(\Delta t))$$

onde $P(\Delta t)$ é a probabilidade de um indivíduo do grupo A morrer durante o tempo Δt .

Agora, se considerarmos que a pobreza (aqui avaliada subjetivamente pelo nível de renda) seja um fator de redução do tempo de vida de cada elemento de A , podemos considerar:

$$P(\Delta t) = \Delta t(\lambda_1 + \chi(r)\lambda_2)$$

onde λ_1 é a taxa de mortalidade natural (obtida em um grupo que dispõe de condições satisfatórias de sobrevivência)

$\chi(r)\lambda_2$ indica a influência da pobreza no aumento da taxa λ_1 .

$\chi(r)$ indica o conjunto fuzzy dos pobres, isto é, $\chi(r) \in [0, 1]$ onde r é um parâmetro proporcional à renda e λ_2 uma constante oportuna de cada grupo.

Observamos que $\chi(r)$ é não crescente com r e quando $\chi(r) \cong 1$, temos $P(\Delta t) \cong \Delta t(\lambda_1 + \lambda_2)$. Então, $(\lambda_1 + \lambda_2)$ pode ser considerada como a taxa de mortalidade dos mais pobres.

Temos então,

$$n(t + \Delta t) = n(t)[1 - \Delta t(\lambda_1 + \chi(r)\lambda_2)]$$

ou

$$\frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{\Delta t} = -(\lambda_1 + \chi(r)\lambda_2)n(t).$$

Passando ao limite com $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos a equação diferencial

$$\frac{dn}{dt} = -(\lambda_1 + \chi(r)\lambda_2)n$$

cuja solução é dada por

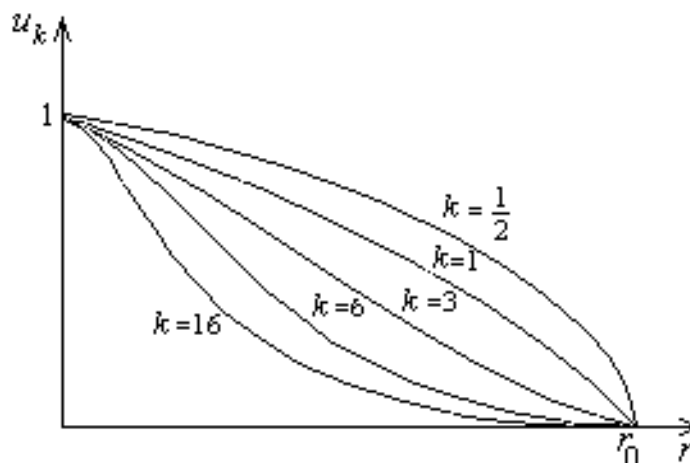
$$n(t) = n(0)e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 \chi(r)t}.$$

O conjunto fuzzy $\chi(r)$ pode ser representado de uma maneira subjetiva por qualquer função não crescente com valores em $[0, 1]$.

No nosso caso específico, achamos conveniente definir

$$\chi_k(r) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^k & \text{se } 0 < r < r_0 \\ 0 & \text{se } r \geq r_0. \end{cases}$$

O parâmetro k nos dá uma característica do grupo estudado.



Como já foi observado no exemplo 5 do capítulo 1, $\chi_{k_1}(r) \leq \chi_{k_2}(r)$ para todo r se $k_1 \geq k_2$, e portanto, quanto maior for o valor de k menor será a taxa de mortalidade $(\lambda_1 + \chi_k(r)\lambda_2)$ do grupo.

$$\text{se } k \rightarrow +\infty \text{ então } \chi_k(r) \rightarrow \chi_\infty(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r > 0 \\ 1 & \text{se } r = 0 \end{cases}$$

Queremos ressaltar que se alguém escolher um outro conjunto fuzzy para os pobres, de acordo com o teorema (3.10), tem-se que a diferença entre a média clássica, $\langle n(t) \rangle$, e a média fuzzy, $FEV[n(t)]$, não é superior a $\frac{1}{4}$.

Observação. Dado uma equação do tipo

$$Lu + \langle \lambda \rangle \mu = 0$$

onde L é um operador diferenciável e $\langle \lambda \rangle$ a média de algum parâmetro λ , não é geralmente verdade que a sua solução u seja a mesma solução média $\langle u \rangle$ da equação

$$Lu + \lambda \mu = 0.$$

Nosso problema agora é determinar o valor esperado $\langle n(t) \rangle$ da população do grupo A no instante t .

A esperança matemática é dada por:

$$\langle n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)h(r)dr$$

onde $h(r)$ é a função de densidade de r .

De um modo geral, não temos $h(r)$, porém se tivermos r proporcional ao salário, $r(S) = cS^m$, onde c e m são constantes e S a variável salário do grupo, então a esperança matemática pode ser dada por:

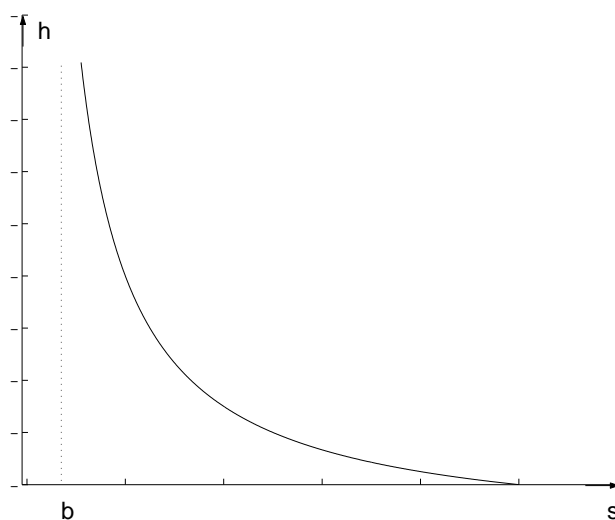
$$\langle n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)h(s)ds$$

onde $h(s)$ é a densidade de S .

Esperança Matemática

Aqui o conjunto A é um grupo de trabalhadores do nordeste central [Tabela 3].

Para nosso caso específico, vamos usar a distribuição de Pareto [4], com parâmetros a e b para a variável salário S :



$$h(s) = \begin{cases} ab^a s^{-a-1} & \text{se } s \geq b \\ 0 & \text{se } s < b. \end{cases}$$

Reescrevendo χ_k em função de S temos

$$Z_k(S) = \chi_k(r(S)) = \chi_k(cS^m) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{S}{S_0}\right)^{2m}\right]^k & \text{se } 0 < S < S_0 \\ 0 & \text{se } S \geq S_0 \end{cases}$$

onde $r_0 = cS_0^m$ e assim, $n(t) = n(0)e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 Z_k(S)t}$.

Portanto

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} n(t)h(s)ds = \int_b^{\infty} n(t)h(s)ds \\ &= n(0)e^{-\lambda_1 t} ab^a \int_b^{\infty} e^{-\lambda_2 Z_k(s)t} s^{-a-1} ds. \end{aligned}$$

Agora,

se $S_0 \leq b$, $Z_k(S) = 0$ para $S \geq b$ e

$$\langle n(t) \rangle = n(0)e^{-\lambda_1 t} ab^a \int_b^{\infty} s^{-a-1} ds = n(0)e^{-\lambda_1 t} \text{ para todo } a > 0,$$

ou seja, o valor de b no grupo é (suficientemente) grande para que não haja interferência da pobreza na esperança do grupo.

Se $S_0 > b$, então o valor de $\langle n(t) \rangle$ depende dos valores de todas as constantes envolvidas.

Para a avaliação dos parâmetros a e b da distribuição salarial, usaremos a tabela 1.

Já para obtermos λ_1, λ_2, k e m , usaremos a tabela 3.

Tabela 1

DISTRIBUIÇÃO DO TOTAL DOS TRABALHADORES,
 POR FAIXAS DE SALÁRIO MÍNIMO E
 PARTICIPAÇÃO NA FOLHA DE PAGAMENTOS,
 S.T.I. METALÚRGICAS, MECÂNICAS E DE
 MATERIAL ELÉTRICO DE RECIFE
 MARÇO DE 1998

Faixa de Salários Mínimos	Distribuição		% da folha de pagamentos
	No.abs	%	
até 2	4003	45,0	21,1
2 a 3	2099	23,6	18,8
até 3	6102	68,7	39,9
3 a 4	933	10,5	12,09
4 a 5	670	7,5	11,0
5 a 6	300	3,4	6,0
6 a 7	264	3,0	6,2
7 a 10	367	4,1	11,1
10 a 15	171	1,9	7,8
+ de 15	81	0,9	6,1
Total	8888	100,0	100,0

Fonte DIEESE.

De acordo com os dados da tabela acima, achamos conveniente avaliarmos a e b , usando a função de distribuição acumulada dos salários:

$$F(s) = \int_b^s ab^a u^{-a-1} du = 1 - b^a s^{-a} = R$$

ou

$$\ln(1 - R) = a \ln b - a \ln s$$

que é uma equação da forma $Y = A + BX$

Tabela 2 - Distribuição Salarial Linearizada

S	R	$X(\log[S])$	$Y(\log[R])$
2	0,45	0,693147	-0,59783
3	0,687	1,09861	-1,16155
4	0,792	1,38629	-1,57022
5	0,867	1,60944	-2,01741
6	0,901	1,79176	-2,31264
7	0,931	1,94591	-2,67365
10	0,972	2,30259	-3,57555
15	0,899	2,70805	-4,71053

Pela regressão linear dos dados acima encontramos $a \cong 2,031$ e $b \cong 1,726$, logo

$$h(s) = \begin{cases} 6,15 s^{-3,031} & \text{se } s > 1,726 \\ 0 & \text{se } s \leq 1,726. \end{cases}$$

Já a tabela 3 abaixo nos permitirá avaliar os valores de $\lambda_1, \lambda_2, S_0, k$ e m .

Tabela 3 - Esperança de vida ao nascer do Nordeste Central (CE, RN, PB, AL e FN) por classe de renda familiar per capita (zona urbana)

Classe de Renda	Renda (Cr\$)	E. de Vida (anos)
1	1 a 150	40,0
2	151 a 300	45,9
3	301 a 500	50,8
4	+ de 500	54,4

(Salário vigente nos quatro primeiros meses de 1970: Cr\$ 156,00)

FONTE: CARVALHO e WOOD (1977).

A tabela 3 apresenta quatro faixas de esperanças de vida.

A taxa de mortalidade natural λ_1 , se dá quando a esperança de vida é também a natural do grupo, isto é, sem interferência do salário, que neste caso é 54,4 anos.

Assim $\lambda_1 = \frac{1}{54,4}$.

Já λ_2 é tal que $\lambda_1 + \lambda_2$ é a taxa máxima de mortalidade do grupo. Assim,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{40} \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = \frac{1}{40} - \frac{1}{54,4} = 6,618 \times 10^{-3}.$$

Temos mais duas esperanças de vida intermediárias na tabela 3:

$$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 \chi_k(r_1)} = 45,9 \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \chi_k(r_1) = \frac{1}{45,9} - \frac{1}{54,4} = 3,404 \times 10^{-3}$$

$$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 \chi_k(r_2)} = 50,8 \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \chi_k(r_2) = \frac{1}{50,8} - \frac{1}{54,4} = 1,303 \times 10^{-3}$$

como $\lambda_2 = 6,618 \times 10^{-3}$, temos $\chi_k(r_1) = 0,514$ e $\chi_k(r_2) = 0,197$.

A tabela 3 também sugere que o nível salarial mínimo satisfatório seja $S_0 = \frac{500}{156} \cong 3,2$ salários mínimos.

Observamos que r_1 corresponde a $s_1 = 1$ salário mínimo e r_2 a $s_2 = 2$ salários mínimos.

Sendo $r = cS^m$, temos

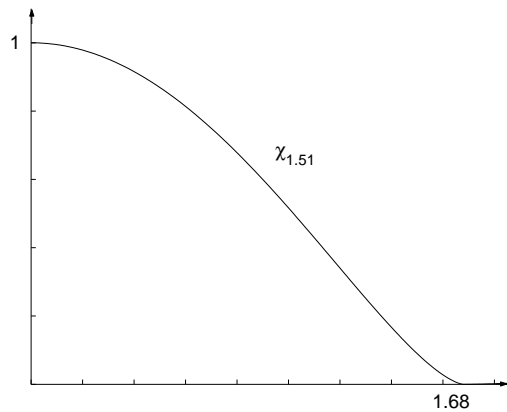
$$\begin{cases} \chi_k(r_1) = 0,514 \\ \chi_k(r_2) = 0,197 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{1}{S_0}\right)^{2m}\right]^k = 0,514 \\ \left[1 - \left(\frac{2}{S_0}\right)^{2m}\right]^k = 0,197 \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3,2}\right)^{2m} = 1 - 0,514^{\frac{1}{k}} \\ \left(\frac{2}{3,2}\right)^{2m} = 1 - 0,197^{\frac{1}{k}} \end{cases} \quad \text{donde } m \cong 0,4435 \quad \text{e} \quad k \cong 1,51.$$

Para $c = 1$, como $S_0 = 3,2$ temos $r_0 = (3,2)^{0,4435} \cong 1,68$.

$$\text{Assim } r = cS^{0,4435} \quad \text{e} \quad \chi_k(r) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{1,51} & \text{se } 0 < r < 1,68 \\ 0 & \text{se } r \geq 1,68. \end{cases}$$



$$\text{Enquanto } Z_k(S) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{S}{3,2} \right)^{0,887} \right]^{1,51} & \text{se } 0 < S < 3,2 \\ 0 & \text{se } S \geq 3,2 . \end{cases}$$

Voltando ao nosso problema que é o cálculo de $\langle n(t) \rangle$, com os valores: $a = 2,031$; $b = 1,726$; $\lambda_1 = \frac{1}{54,4}$; $\lambda_2 = 6,618 \times 10^{-3}$; $k = 1,51$; $m = 0,4335$ e $S_0 = 3,2$ obtemos a tabela

Tabela 4

t	$e^{-\lambda_1 t}$	$ab^a \int_b^\infty e^{-\lambda_2 Z_k(s)} s^{-a-1} ds$ (fator redutor devido à pobreza)	$\left\langle \frac{n(t)}{n(0)} \right\rangle$	Interferência percentual da pobreza
1	0,9817855	0,9992888	0,9810872	0,07113
2	0,9639029	0,9985811	0,9625352	0,1419
3	0,9463459	0,9978672	0,9443244	0,2131
4	0,9291088	0,9971596	0,9264697	0,2840
5	0,9121856	0,9964519	0,908949	0,3548
10	0,8320826	0,9929258	0,8261962	0,7074
20	0,6923615	0,9859474	0,682632	1,4052
40	0,4793644	0,972243	0,4660586	2,7757

Valor Esperado Fuzzy (FEV: Fuzzy Expected Value)

De acordo com a definição 3.12 só se calcula a média fuzzy (FEV) para conjuntos fuzzy χ , isto é, $\chi \in [0, 1]$.

Aqui vamos calcular $FEV[Y]$ onde

$$Y = e^{-[\lambda_1 + \lambda_2 \chi_k(r)]t} = \begin{cases} e^{-[\lambda_1 + \lambda_2 \chi_k(r)]t} & \text{se } 0 \leq r < r_0 \\ e^{-\lambda_1 t} & \text{se } r \geq r_0 \end{cases}$$

Considerando $H(\alpha) = P\{Y \geq \alpha\}$ então

$$H(\alpha) = P\{r : e^{-\lambda_2 \chi_k(r)t} \geq \alpha e^{\lambda_1 t}\}.$$

Assim, $H(\alpha) = 0$ se $\alpha > e^{-\lambda_1 t}$ e $H(0) = 1$.

Por outro lado, se $\alpha \leq e^{-\lambda_1 t}$ e $\alpha \neq 0$,

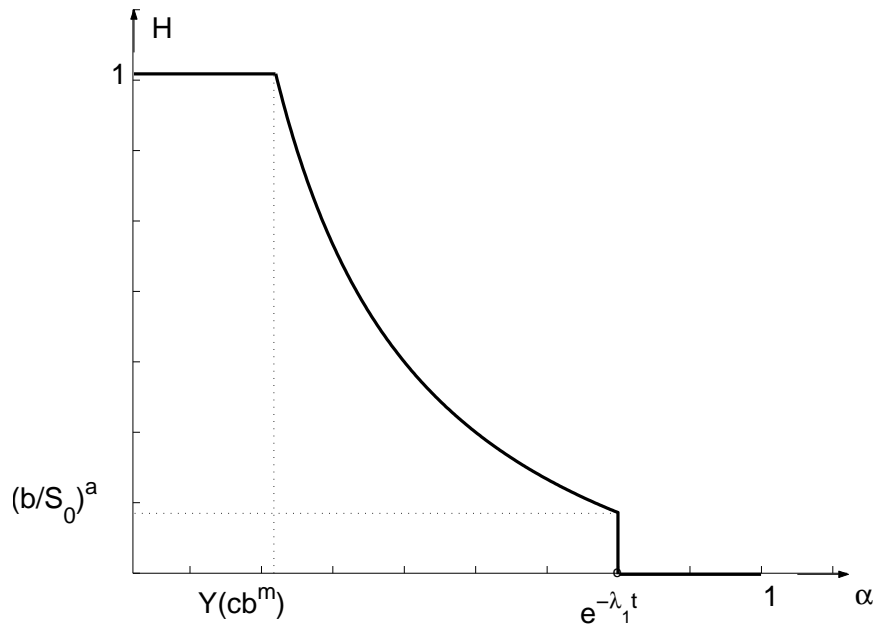
$$\begin{aligned} H(\alpha) &= P\{\alpha \leq Y < e^{-\lambda_1 t}\} + P\{Y = e^{-\lambda_1 t}\} \\ &= P\{\alpha \leq Y < e^{-\lambda_1 t}\} + P\{r \geq r_0\} \\ &= P\left\{r_0 \sqrt{1 - \left[-\left(\frac{\ln \alpha}{\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right]^{\frac{1}{k}}} \leq r < r_0\right\} + P\{r \geq r_0\} \\ &= P\left\{r \geq r_0 \sqrt{1 - \left[-\left(\frac{\ln \alpha}{\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right]^{\frac{1}{k}}}\right\} = P\{r \geq \gamma\} \\ &= P\{cS^m \geq \gamma\} = P\left\{S \geq \left(\frac{\gamma}{c}\right)^{\frac{1}{m}}\right\} \\ &= \begin{cases} 1 - ab^a \int_b^{\left(\frac{\gamma}{c}\right)^{\frac{1}{m}}} s^{-a-1} ds & \text{se } \left(\frac{\gamma}{c}\right)^{\frac{1}{m}} \geq b \\ 1 & \text{se } \left(\frac{\gamma}{c}\right)^{\frac{1}{m}} < b \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left[\frac{cb^m}{\gamma}\right]^{\frac{a}{m}} & \text{se } Y(cb^m) < \alpha \leq e^{-\lambda_1 t} \\ 0 & \text{se } \alpha > e^{-\lambda_1 t} \end{cases} \end{aligned}$$

Em resumo:

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \leq Y(cb^m) \\ \left[\frac{cb^m}{r_0 \sqrt{1 - \left[-\left(\frac{\ell n \alpha}{\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right]^{\frac{1}{k}}}} \right]^{\frac{a}{m}} & \text{se } Y(cb^m) < \alpha \leq e^{-\lambda_1 t} \\ 0 & \text{se } \alpha > e^{-\lambda_1 t} \end{cases}$$

ou

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \leq Y(cb^m) \\ \left[\frac{b}{S_0 \left\{ 1 - \left[-\left(\frac{\ell n \alpha}{\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right]^{\frac{1}{k}} \right\}^{\frac{1}{2m}}} \right]^a & \text{se } Y(cb^m) < \alpha \leq e^{-\lambda_1 t} \\ 0 & \text{se } \alpha > e^{-\lambda_1 t} \end{cases}$$



É fácil ver que $H(\alpha)$ é contínua em $[0,1]$ com exceção para $\alpha = e^{-\lambda_1 t}$ e que $FEV(Y)$ está compreendido entre $Y(cb^m)$ e $e^{-\lambda_1 t}$.

Se $\left(\frac{b}{S_0} \right)^a \geq e^{-\lambda_1 t}$ então $FEV(Y) = e^{-\lambda_1 t} = FEV(e^{-\lambda_1 t})$.

É o caso em que a esperança fuzzy independe da renda. Em particular quando $b \geq S_0$ sempre teremos $\left(\frac{b}{S_0}\right)^a \geq e^{-\lambda_1 t}$ para todo $a > 0$ e todo t . Porém, pode-se ter b pequeno e um grande achatamento a e ainda assim a esperança fuzzy do grupo não ser influenciada pela renda. Basta que o grupo estudado não precise de muita renda para sobrevivência.

Como $\left(\frac{b}{S_0}\right)^a$ está fixado, então $\left(\frac{b}{S_0}\right)^a \geq e^{-\lambda_1 t}$ a partir de um determinado \bar{t} e a partir daí, a esperança fuzzy de Y passa a independe da pobreza, o que é coerente com a nossa hipótese de que não há nascimento de pessoas no grupo estudado. Assim a pobreza influencia no número médio fuzzy de pessoas do grupo enquanto houver pobreza.

Se $\left(\frac{b}{S_0}\right)^a < e^{-\lambda_1 t}$, vamos calcular $FEV(Y)$ determinando o ponto de fixo de H , (usando a proposição 3.1, uma vez que H é decrescente e continua para $\alpha < e^{-\lambda_1 t}$).

Observamos inicialmente que H tem os mesmos pontos fixos de

$$H^{-1}(\alpha) = e^{-[\lambda_1 + \lambda_2 Z_k(\frac{b}{\alpha^a})]t} \text{ para } \left(\frac{b}{S_0}\right)^a < \alpha < 1.$$

Assim,

$$\frac{dH^{-1}}{d\alpha} = -\frac{2\lambda_2 kmt}{a} \left(\frac{b}{S_0}\right)^{2m} \frac{1}{\alpha^{\frac{2m}{a}+1}} Z_{k-1}\left(\frac{b}{\alpha^a}\right) e^{-[\lambda_1 + \lambda_2 Z_k(\frac{b}{\alpha^a})]t}$$

e

$$\left|\frac{dH^{-1}}{d\alpha}\right| = \frac{2\lambda_2 kmt}{a} \left(\frac{b}{S_0}\right)^{2m} \frac{1}{\alpha^{\frac{2m}{a}+1}} Z_{k-1}\left(\frac{b}{\alpha^a}\right) e^{-[\lambda_1 + \lambda_2 Z_k(\frac{b}{\alpha^a})]t} \leq$$

$$\frac{2\lambda_2 kmt}{a} \left(\frac{b}{S_0}\right)^{2m} \frac{1}{\left(\frac{b}{S_0}\right)^{2m+a}} e^{-\lambda_1 t} = \frac{2\lambda_2 kmt}{a} \left(\frac{S_0}{b}\right)^a e^{-\lambda_1 t}.$$

como os nossos dados; supondo $c = 1$, são $\lambda_2 = 6,618 \times 10^{-3}$; $k = 1,51$; $m = 0,4435$; $\lambda_1 = \frac{1}{54,4}$; $a = 2,031$ e $b = 1,726$ temos

$$\left|\frac{dH^{-1}}{d\alpha}\right| \leq \frac{2\lambda_2 km}{a} \left(\frac{S_0}{b}\right)^a t e^{-\lambda_1 t} < 2.10^{-2} t e^{-\lambda_1 t} \leq 2.10^{-2} \frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \frac{1}{\lambda_1}}$$

$$\cong 0,40 < 1$$

de onde concluímos que H^{-1} é uma contração, qualquer que seja t e

$$H^{-1}(\alpha) = e^{-[\frac{1}{54,4} + 6,618 \times 10^{-3} (1 - (\frac{0,539375}{\alpha^{0,4923682}})^{0,887})^{1,51}]t}.$$

Agora, usando o teorema do ponto fixo de Banach [1], podemos determinar α^* de modo que $\alpha^* = H^{-1}(\alpha^*)$. Iniciamos com um valor α_0 satisfazendo $\left(\frac{b}{S_0}\right)^a < \alpha_0 < 1$ e obtemos:

Tabela 5

t	$\alpha^* = FEV\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right]$
1	0,9800555
2	0,9605718
3	0,941537
4	0,9229397
5	0,9047686
10	0,8199376
20	0,6766003
40	0,4687494

A seguir apresentamos uma tabela com as diferenças entre as esperanças clássicas, $\langle \frac{n(t)}{n(0)} \rangle$, e as diversas esperanças fuzzy, $FEV\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right]$ para alguns valores de t .

Tabela 6

t	$\langle \frac{n(t)}{n(0)} \rangle$	$FEV\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right]$	$ \langle \frac{n(t)}{n(0)} \rangle - FEV\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right] \times 10^3$
1	0,9810872	0,9800555	1,0317
2	0,9625352	0,9605718	1,9634
3	0,9443294	0,941537	2,7924
4	0,9264697	0,9229397	3,5300
5	0,908949	0,9047686	4,1804
10	0,8261962	0,8199376	6,2486
20	0,682632	0,6766003	6,0317
40	0,4660586	0,4687494	2,6908

A quarta coluna da tabela 6 acima, nos mostra as diversas diferenças das esperanças. De um modo geral, o teorema (3.10) nos garante que estas diferenças não poderiam ser superiores a $\frac{1}{4}$.

Para o nosso caso específico, é fácil ver que $FEV\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right]$ está compreendido entre $Y(cb^m)$ e $e^{-\lambda_1 t}$. Assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \langle \frac{n(t)}{n(0)} \rangle - FEV\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right] \right| = 0,$$

ou seja, $\left\langle \frac{n(t)}{n(0)} \right\rangle \cong FEV\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right]$ para t suficientemente grande.

Vale observar que, em se tratando de idade de pessoas, t é limitado.

Ainda, como exemplificação, vamos comparar as médias clássica e fuzzy para os valores de $Y = \frac{n(t)}{n(0)} = e^{-[\lambda_1 + \lambda_2 Z_k(S)]t}$ com os valores dos parâmetros como anteriormente.

Vamos supor que os elementos do conjunto A , com $n(0) = 150 = \#A$, estejam divididos em subgrupos classificados pelos distintos salários distribuídos assim:

$$\begin{aligned} n_1 = 100 & \text{ está associado com } S_1 = 2,0 \longrightarrow Y_1 = e^{-0,0013t} e^{-\lambda_1 t} \\ n_2 = 40 & \text{ está associado com } S_2 = 2,5 \longrightarrow Y_2 = e^{-0,00057t} e^{-\lambda_1 t} \\ n_3 = 10 & \text{ está associado com } S_3 = 2,5 \longrightarrow Y_3 = 1 e^{-\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

Aqui podemos considerar $\mu\{n | Y \geq \alpha\} = P\{n | Y \geq \alpha\} = \frac{\#\{n | Y \geq \alpha\}}{\#A}$ onde $Y(n_i) = e^{-\lambda_2 t \chi_k(I(n_i))} e^{-\lambda_1 t}$, $I(n_i) = S_i$ e S_i é o valor do salário S associado com o grupo n_i .

$$\text{Se } Y_1 < \alpha \leq Y_2 \text{ então } \mu\{Y \geq \alpha\} = \frac{n_2 + n_3}{\#A} = \frac{50}{150} = 0,333.$$

$$\text{Se } Y_2 < \alpha \leq Y_3 \text{ então } \mu\{Y \geq \alpha\} = \frac{n_3}{\#A} = \frac{10}{150} = 0,0667.$$

Assim de acordo com a proposição 3.2, temos

$$FEV[Y] = \text{mediana}\{0,0677; 0,333; e^{-0,0013t} e^{-\lambda_1 t}, e^{-0,00057t} e^{-\lambda_1 t}, 1, e^{-\lambda_1 t}\}$$

Para $t = 1$, temos $FEV[Y] \cong 0,9987 e^{-\lambda_1}$.

Enquanto que se tomarmos a média clássica para estes mesmos dados, obteremos

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle &= \frac{100Y_1 + 40Y_2 + 10Y_3}{150} = \frac{e^{-\lambda_1}}{150} (100 e^{-0,0013t} + 40 e^{-0,00057t} + 10) \\ &\cong 0,9998 e^{-\lambda_1}. \end{aligned}$$

Pelo que observamos neste modelo simples temos agora um outro instrumento de avaliação da esperança, que pode ser adaptado em vários estudos, como sistemas biológicos, onde os parâmetros envolvidos são fortemente subjetivos. Este é um campo ainda aberto para a pesquisa.

Para finalizar, queremos ressaltar a simplicidade de se fazer o cálculo da esperança fuzzy comparado com o cálculo da esperança clássica. Para obtermos a esperança fuzzy foi necessário apenas uma máquina de bolso. Já para se obter a esperança clássica, precisamos de um microcomputador e um pacote sofisticado uma vez que a função envolvida não tinha primitiva.

Modelo II

“Eram milhões de passarinhos...”

Luíz Melodia.

“... Give them a food

And let them grow.

Let the roots, man,

Take a floor...”

Bob Marley and The Wailers.

Competição entre Espécies

A modelagem matemática para analisar a competição entre espécies é um instrumento relativamente novo em ecologia. Ela é baseada na interrelação entre os organismos que competem por um recurso abiótico (luz, solo, água, etc) ou biótico (representado, por exemplo, por um item alimentar comum em suas dietas) – se um organismo for presa do outro, há uma relação presa-predador. Se um é animal e o outro é vegetal por ele comido, temos uma relação herbívora e assim por diante.

De um modo geral as populações se relacionam para persistirem, e para tal necessitam aumentar suas densidades.

Os modelos matemáticos de competição e predação tiveram origem com os trabalhos independentes de Lotka (1926) e Volterra (1931), formulados através de sistemas de equações diferenciais tais como:

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i \left(r_i - \frac{r_i}{K_i} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} N_j \right) \quad (4.1)$$

onde

n : é o número de espécies presentes na competição.

N_i : é a população da espécie i no instante t .

r_i : é a razão de crescimento intrínseca da espécie i .

K_i : é a densidade populacional na espécie i que poderia existir na ausência de competição (a capacidade de saturação do ambiente).

α_{ij} : é o coeficiente de competição caracterizando a competição entre as espécies i e j . É assumido que $\alpha_{ii} = 1$ (isto é, a competição dentro da mesma espécie é logística).

Muito tem sido escrito e pesquisado sobre este modelo geral ainda que os ecólogos coloquem fortes dúvidas sobre sua validade pois tem se mostrado frustrante a tentativa de *se medir a competição* na natureza. Acreditamos que neste aspecto a teoria fuzzy possa contribuir substancialmente.

No que se segue, mostramos um processo proposto por Giering III-Kandell [7] utilizando ferramentas de Teoria Fuzzy para a obtenção dos coeficientes de competição α_{ij} .

Medidas de competição

Como originalmente proposto por Lotka, os coeficientes α_{ij} e K_i são constantes empíricas a serem determinadas. Estudos mais recentes têm tentado dar a estes parâmetros um significado mais biológico. MacArthur e Levins (in [7]) propõem uma medida para α_{ij} baseados em uma utilização preferencial de um determinado tipo de recurso por uma espécie. Eles assumem para seu modelo que o conjunto de recursos pode ser colocado ao longo de um eixo S . Por exemplo, a competição pode se dar por comida e um competidor pode selecionar seu alimento baseado no "tamanho" do mesmo. Também definem funções de utilização $u_i(s)$ para cada espécie i . Estas descrevem a utilização de um recurso no ponto s sobre o eixo S como a *probabilidade com que um item de recurso s é consumido em uma unidade de tempo por um membro da espécie i* . Então a probabilidade de um membro da espécie i e um da espécie j de usar o mesmo recurso é $u_i(s)u_j(s)$, dado que os dois eventos são independentes. Uma vez que a competição é apenas por estes recursos, os autores supõem que a soma destas probabilidades para todos os recursos deva ser uma boa medida de competição. Para recursos variando discretamente temos

$$\alpha_{ij} = \frac{\sum_{s \in S} u_i(s)u_j(s)}{\sum_{s \in S} [u_i(s)]^2}, \quad (4.2)$$

onde o denominador sugere que $\alpha_{ii} = 1$. Esta condição é equivalente a assumir que cada espécie tem um crescimento logístico na ausência de competidores. Neste caso, como $\alpha_{ii} = 1$, as equações de Lotka-Volterra são dadas por:

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i \left(r_i - \frac{r_i}{K_i} \alpha_{ii} N_i \right) = N_i r_i \left(1 - \frac{N_i}{K_i} \right).$$

Para recursos variando continuamente, temos

$$\alpha_{ij} = \frac{\int u_i(s)u_j(s)ds}{\int [u_i(s)]^2 ds}$$

Neste modelo é assumido que os recursos são rapidamente renovados comparados com a predação pelos competidores. Em uma série de trabalhos anteriores, contudo, MacArthur (in [7]) mostrou que uma fórmula similar para α_{ij} , poderia ser diretamente deduzida de um modelo mais detalhado de recursos assumindo que a população cresce logisticamente.

A fórmula deduzida por MacArthur é baseada em dois conjuntos de equações diferenciais; um descreve o crescimento populacional dos competidores e o outro descreve o crescimento populacional dos recursos. Este é mais facilmente visualizado como várias espécies de organismos que os competidores utilizam como comida. Para os competidores é assumido que

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i C_i \left[\sum_{s \in S} a_i(s)W(s)n(s) - M_i \right], \quad (4.3)$$

onde

s : é um ponto no eixo de recursos S , aqui assumido discreto.

$a_i(s)$: é a probabilidade que um dado membro dos competidores da espécie i encontra e consome um dado indivíduo do recurso s .

$W(s)$: é o peso individual de um recurso s .

$n(s)$: é o tamanho da população do recurso s .

M_i : é o custo de manutenção de um indivíduo da espécie i .

C_i : é o fator que governa a conversão de unidades de recursos em indivíduos da espécie i .

Para as populações $n(s)$ assumem-se que estas serão governadas por uma série de equações logísticas modificadas pela predação

$$\frac{dn(s)}{dt} = n(s) \left\{ \frac{r(s)}{K(s)} [K(s) - n(s)] - \sum_j a_j(s) N_j \right\},$$

onde

$K(s)$: é a capacidade de saturação ambiental para o recurso s .

$r(s)$: é a razão intrínseca de crescimento dos recursos s .

$\sum_j a_j(s) N_j$: é o número de indivíduos dos recursos s , reduzido pela predação dos competidores.

Assumindo o equilíbrio tanto para a população de recursos como para a de competidores, temos

$$\begin{cases} n(s) \left\{ \frac{r(s)}{K(s)} [K(s) - n(s)] - \sum_j a_j(s) N_j \right\} = 0 \\ N_i C_i \left\{ \sum_s a_i(s) W(s) n(s) - M_i \right\} = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} n(s) = K(s) - \frac{K(s)}{r(s)} \sum_j a_j(s) N_j = 0 & \text{(i)} \\ \sum_s a_i(s) W(s) n(s) - M_i = 0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

e substituindo (i) em (ii) obtemos

$$\sum_s a_i(s) W(s) \left[K(s) - \frac{K(s)}{r(s)} \sum_j a_j(s) N_j \right] - M_i = 0$$

ou

$$\left[\sum_s a_i(s) W(s) K(s) - M_i \right] - \sum_j \left[\sum_s \frac{K(s) W(s)}{r(s)} a_i(s) a_j(s) \right] N_j = 0. \quad (4.4)$$

Comparando este equilíbrio com o da equação (1), temos que os termos em colchetes são respectivamente K_i e α_{ij} de (1). A fim de termos $\alpha_{ii} = 1$, devemos dividir (4) por

$$\sum_s \frac{K(s)W(s)}{r(s)} [a_i(s)]^2$$

e assim obtemos

$$K_i = \left\{ \sum_s a_i(s)W(s)K(s) - M_i \right\} / \left\{ \sum_s \frac{K(s)W(s)}{r(s)} [a_i(s)]^2 \right\}$$

$$\alpha_{ij} = \left\{ \sum_s \frac{K(s)W(s)}{r(s)} a_i(s)a_j(s) \right\} / \left\{ \sum_s \frac{K(s)W(s)}{r(s)} [a_i(s)]^2 \right\}$$

Esta fórmula para α_{ij} é a mesma dada em (2) onde

$$u_i(s) = \sqrt{\frac{K(s)W(s)}{r(s)}} a_i(s) .$$

Similaridade Limite

Um importante princípio em um sistema de competição é o *Princípio de Exclusão Competitiva* ou Lei de Gause que estabelece que não podem coexistir duas espécies competindo fortemente pelos mesmos recursos limitados, uma vai para a extinção. Como os modelos acima pressupõem recursos limitados, eles podem ser usados para verificar este princípio.

O grau com que uma espécie se sobrepõe à outra em um nicho, onde a coexistência torna-se impossível, é chamado de *similaridade limite*.

Para se encontrar α_{ij} como função do nicho sobreposto, nós começaremos com o caso contínuo e assumiremos que as funções de utilização $u_i(s)$ estão distribuídas normalmente

$$u_i(s) = C \exp\left[-\frac{1}{2}(s - \theta_i)^2/\sigma^2\right] .$$

C : é uma constante de normalização.

σ : é o desvio padrão das curvas de utilização, assumindo o mesmo para todo i .

θ_i : é a média de todos os tipos de recursos usados pela espécie i .

A hipótese que σ é o mesmo para todas as espécies significa que todas as curvas $u_i(s)$ tem a mesma forma.

Para obtermos α_{ij} como função da distância, ou similaridade, entre as espécies i e j , nós faremos uma mudança de coordenadas. Pode ser assumido, sem perda de generalidade, que $\theta_i \leq \theta_j$. Nós podemos agora mudar o significado do eixo de recursos de maneira que

$$\theta'_i = 0 \quad \text{e} \quad \theta'_j = \theta_j - \theta_i = \delta$$

onde δ é a distância entre as médias dos recursos utilizados pelas duas espécies, dependendo de i e j . Agora as funções utilizações podem ser escritas como

$$u_i(s) = C \exp[-\frac{1}{2} (s^2/\sigma^2)] \quad \text{e} \quad u_j(s) = C \exp[-\frac{1}{2} (s - \delta)^2/\sigma^2]$$

e assim

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} = \alpha(\delta) &= \frac{C^2 \int \exp(-\frac{1}{2} s^2/\sigma^2) \exp[-\frac{1}{2} (s - \delta)^2/\sigma^2] ds}{C^2 \int [\exp(-\frac{1}{2} s^2/\sigma^2)]^2 ds} \\ &= \exp(-\frac{\delta^2}{4\sigma^2}) \frac{\int \exp[-(s - \frac{\delta}{2})^2/\sigma^2] ds}{\int \exp(-s^2/\sigma^2) ds}. \end{aligned}$$

Como as curvas $\exp(-s^2/\sigma^2)$ e $\exp[-(s - \frac{\delta}{2})^2/\sigma^2]$ têm a mesma forma, as áreas limitadas por seus gráficos são as mesmas, quando s varia de $-\infty$ a $+\infty$. Assim

$$\alpha_{ij} = \alpha(\delta) = \exp\left[-\left(\frac{\delta}{2\sigma}\right)^2\right]. \quad (4.5)$$

Nós devemos agora determinar as condições que permitem a coexistência das espécies. Por simplicidade nós iremos usar um sistema com apenas duas espécies.

Voltando ao sistema original (1) e supondo $N_i > 0$, a condição de equilíbrio nos dá

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i(r_i - \frac{r_i}{K_i} \sum_j \alpha_{ij} N_j) = 0 \implies K_i - \sum_j \alpha_{ij} N_j = 0.$$

Para duas espécies,

$$\begin{cases} K_1 - N_1 - \alpha_{12} N_2 = 0 \\ K_2 - N_2 - \alpha_{21} N_1 = 0 \end{cases}$$

daí

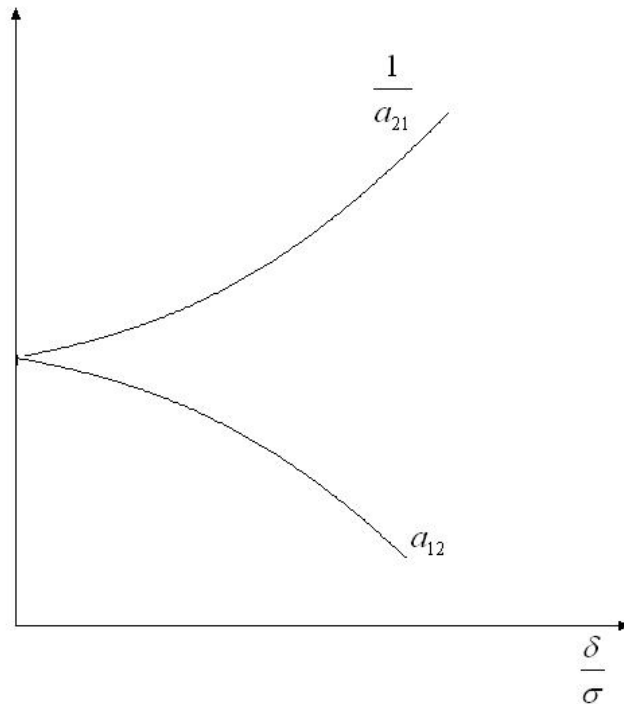
$$N_1 = \frac{K_1 - \alpha_{12} K_2}{1 - \alpha_{12} \alpha_{21}} > 0 \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{K_2 - \alpha_{21} K_1}{1 - \alpha_{12} \alpha_{21}} > 0.$$

Como $1 - \alpha_{12} \alpha_{21}$ e K_i são positivos, temos

$$\frac{1}{\alpha_{21}} > \frac{K_1}{K_2} > \alpha_{12}$$

e usando $\alpha_{ij} = \alpha(\delta) = \exp\left[-\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^2/4\right]$ vem

$$\exp\left(\frac{\delta}{2\sigma}\right)^2 > \frac{K_1}{K_2} > \exp\left[-\left(\frac{\delta}{2\sigma}\right)^2\right]$$



que dá a restrição sobre as relações das capacidades de saturação em termos das distâncias dos nichos.

Este gráfico mostra que para $K_1 = K_2$ a coexistência é sempre possível, mas quanto mais próximo estão os nichos, mais restritas são suas relações.

Modelo Fuzzy de Competição por Recursos (Giering III-Kandel)

Distância do nicho *entre-fenótipos*, refere-se às diferenças no estilo de vida de diferentes membros de uma espécie devido a diferenças fenotípicas.

Distância do nicho *inter-fenótipos*, refere-se aos diferentes nichos que um simples fenótipo pode ocupar.

A avaliação dos α_{ij} é baseada na distância do nicho, entre-fenótipos e inter-fenótipos.

Nós definimos o conjunto de todos os organismos da espécie i como O_i . Um elemento genérico deste conjunto é o_i . O fenótipo é uma função (caracter) de o_i ,

$$o_i \in O_i, \quad o_i \longrightarrow C(o_i).$$

O fenótipo é um atributo implícito do organismo.

Será assumido que os fenótipos podem ser colocados ao longo de um eixo unidimensional contínuo.

Poderia se considerar que uma característica dominasse a competição a ponto de se ignorar as demais. Poderia também representar várias características que pudessem ser convertidas de algum modo para uma dimensão contínua.

A imagem $C(o_i)$ para todo i é o conjunto $\mathbb{W} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, onde m é o número total de fenótipos medidos por $C(\cdot)$ entre todos os competidores.

A distribuição de um particular fenótipo na espécie i é determinada pela probabilidade, ou frequência relativa, a_{ik} definida como

$$a_{ik} = \frac{v_{ik}}{N_i}$$

onde

v_{ik} : é a cardinalidade do fenótipo v_k na espécie i , isto é, o número de o_i para o qual $C(o_i) = v_k$.

N_i : é o número de indivíduos na espécie i .

Os a_{ik} 's aqui definidos não são os mesmos que aparecem em (3) no modelo não fuzzy mostrado antes. Os recursos usados podem variar mesmo em um indivíduo, mas cada indivíduo tem um fenótipo fixado.

Para variação dentro do fenótipo, nós definimos uma restrição fuzzy [28] para certos recursos preferenciais dos organismos associados ao conjunto fuzzy de recursos ótimos para o fenótipo v_k ; $F_{ot}(v_k)$. Usando a notação de Zadeh [28],

$$R(Pref(v_k)) = F_{ot}(v_k)$$

onde

R : denota uma restrição fuzzy.

$Pref(v_k)$: denota aqueles recursos mais utilizados pelos organismos com fenótipo v_k

F_{ot} : é o conjunto fuzzy dos recursos ótimos para os organismos com fenótipo v_k .

A função grau de pertinência de $F_{ot}(v_k)$ é

$$\chi_{ot}(v_k) : S \longrightarrow [0, 1].$$

Assim $\chi_{ot}(v_k, s)$ representa o grau de pertinência do recurso s no conjunto de recursos ótimos para os organismos com fenótipo v_k . Usando a notação de conjunto fuzzy:

$$F_{ot}(v_k) = \sum_s \chi_{ot}(v_k, s) / s.$$

Está sendo assumido que a única maneira de duas espécies interagirem é através de seus recursos ótimos; este fator determina totalmente a competição. Portanto, para medir os coeficientes de competição α_{ij} , nós devemos determinar qual o grau que a espécie j afeta os recursos de i . Uma vez assumido que os organismos competem apenas por recursos ótimos, isto envolve os recursos que são ótimos para ambas as espécies i e j .

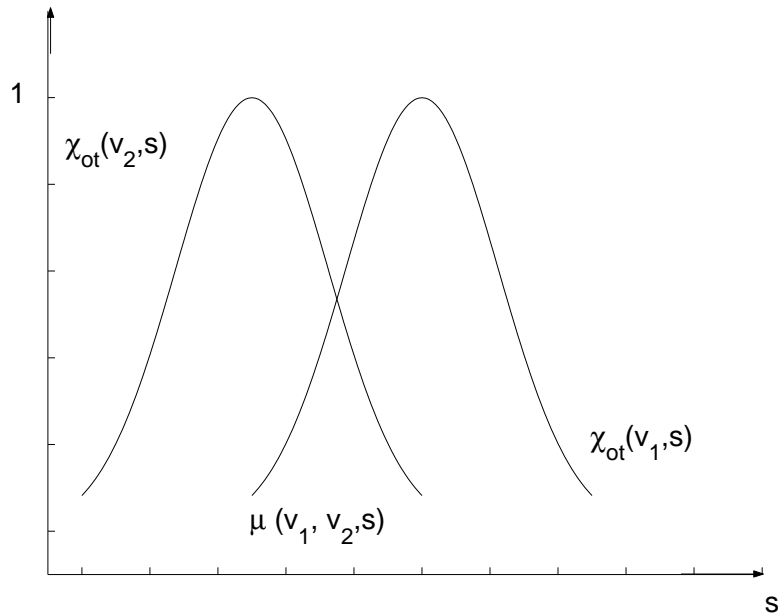
Vamos supor, que por simplicidade, existam apenas dois organismos competindo e que seus fenótipos são v_1 e v_2 . É razoável definir os recursos ótimos como os conjuntos fuzzy

$$F_{ot}(v_1) = \sum_s \chi_{ot}(v_1, s)/s \quad \text{e} \quad F_{ot}(v_2) = \sum_s \chi_{ot}(v_2, s)/s.$$

Nós definimos o conjunto de recursos ótimos para ambos os organismos como

$$F_{ot}(v_1, v_2) = F_{ot}(v_1) \cap F_{ot}(v_2) = \sum_s \min[\chi_{ot}(v_1, s)\chi_{ot}(v_2, s)]/s = \sum_s \mu(v_1, v_2, s)/s.$$

Vamos supor que sempre exista algum recurso s ótimo para cada organismo, isto é, existem s_1 e s_2 tais que $\chi_{ot}(v_1, s_1) = \chi_{ot}(v_2, s_2) = 1$.



Giering III e Kandel [7] sugerem uma medida para os coeficientes de competição α_{ij} do modelo inicial (1), baseados no conjunto $F_{ot}(v_1, v_2)$ definido acima. Para isto é definido o conjunto fuzzy de recursos ótimos comuns entre as espécies i e j como

$$F_{ij} = \sum_s \mu_{ij}(s)/s$$

onde

$$\mu_{ij} = \sup_{0 \leq T \leq 1} [\min(T, \eta_{ij}(\xi_T))];$$

$$\xi_T = \{(v_k, v_\ell) : \mu(v_k, v_\ell, s) \geq T\}$$

$$\eta_{ij} = \sum_{k,\ell} a_{ik}a_{j\ell} \quad \text{para o caso discreto}$$

$$\eta_{ij} = \int \int_{\xi_T} a_{ik}a_{j\ell} dv_k dv_\ell \quad \text{para o caso contínuo}$$

com $(v_k, v_\ell) \in \xi_T$.

Observe que quanto maior $\mu_{ij}(s)$, tanto melhor é o recurso s para as duas espécies i e j , portanto maior a competição por este recurso.

Como $\mu_{ij} : S \rightarrow [0, 1]$, então a função, como visto no parágrafo 2.5, definida por

$$\pi(A) = \begin{cases} \sup_{s \in A} \mu_{ij}(s) & \text{se } A \neq \phi \\ 0 & \text{se } A = \phi \end{cases}, \quad \forall A \in S$$

é uma medida de possibilidade sobre S .

Nós poderemos interpretar $\mu_{ij}(s)$ como a possibilidade de s ser um recurso ótimo para ambas as espécies i e j , uma vez que $\pi\{s\} = \mu_{ij}(s)$.

Em [7], define-se

$$\alpha_{ij} = \frac{\sup_{s \in S} \mu_{ij}(s)}{\sup_{s \in S} \mu_{ii}(s)}, \quad (4.6)$$

isto é, α_{ij} é **definido como a possibilidade relativa de um recurso s que é ótimo para a espécie i , ser também ótimo para a espécie j .**

Veja que, como em (2), $\alpha_{ii} = 1$. Aliás, as definições dadas em (2) e em (5) para α_{ij} são muito semelhantes.

A fim de ilustrar a similaridade limite no modelo fuzzy, foi assumido que os fenótipos estão distribuídos normalmente, isto é,

$$a_{ik} = a_i(v_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp[-(v_k - m_i)^2/2\sigma^2]$$

onde

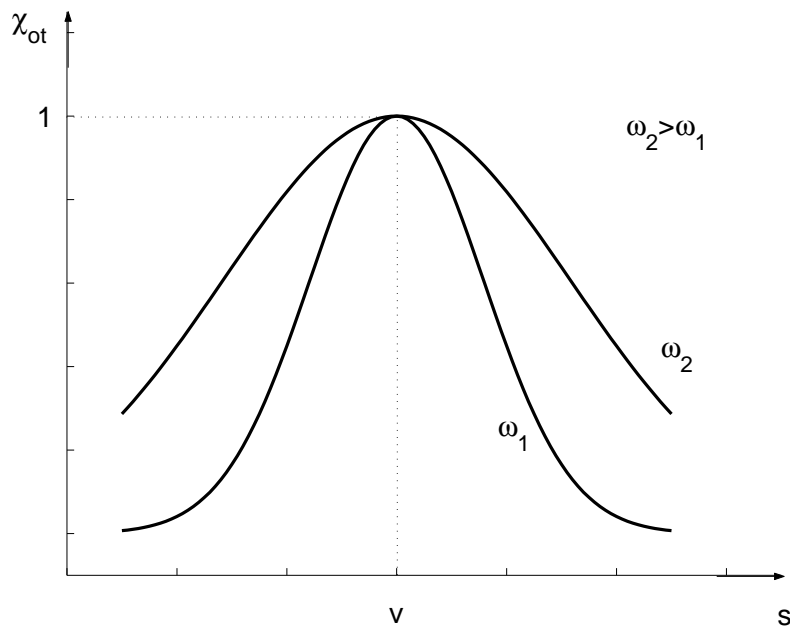
m_i : é o fenótipo médio na espécie i .

σ : é o desvio padrão dos fenótipos nas espécies para todas as espécies.

Para a função grau de pertinência dos recursos ótimos, foi escolhida a função de Lorentz:

$$\chi_{ot}(v, s) = \frac{1}{1 + 4w^{-2}(v - s)^2}, \quad \text{onde}$$

s : é um ponto no eixo de recursos.
 v : é o fenótipo de um competidor.
 w : é um parâmetro particular do fenótipo.



Função de Lorentz

Observe que quanto maior for w , maior a faixa de recursos ótimos para os fenótipos. Assim é de se esperar que quanto maior for w , maior será a competição entre os organismos, daí maiores serão os coeficientes α_{ij} .

Como foi feito no modelo não fuzzy, vamos supor que haja apenas duas espécies competindo. Assim, para a coexistência, devemos ter

$$N_1 = \frac{K_1 - \alpha_{12}K_2}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}} > 0 \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{K_2 - \alpha_{21}K_1}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}} > 0$$

ou

$$\frac{1}{\alpha_{21}} > \frac{K_1}{K_2} > \alpha_{12} \quad \text{uma vez que} \quad 0 < \alpha_{12}\alpha_{21} < 1.$$

Para calcularmos α_{ij} , temos de calcular

$$\eta_{ij}(\xi_T) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int \int_{\xi_T} \exp[-(v_k - m_i)^2/2\sigma^2] \exp[-(v_\ell - m_j)^2/2\sigma^2] dv_k dv_\ell .$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $m_j \geq m_i$ e fazendo $m'_i = 0$,

$m'_j = m_j - m_i = d$ obtemos uma espécie de distância entre-fenótipos, e podemos escrever

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int \int_{\xi_T} \exp[-v_k^2/2\sigma^2] \exp[-(v_\ell - d)^2/2\sigma^2] dv_k dv_\ell ,$$

onde

$$\begin{aligned} \xi_T &= \left\{ (v_k, v_\ell) : \min\left(\frac{1}{1 + 4w^{-2}(v_k - s)^2} ; \frac{1}{1 + 4w^{-2}(v_\ell - s)^2}\right) \geq T \right\} \\ &= \left\{ v_k : \frac{1}{1 + 4w^{-2}(v_k - s)^2} \geq T \right\} \times \left\{ v_\ell : \frac{1}{1 + 4w^{-2}(v_\ell - s)^2} \geq T \right\}. \end{aligned}$$

Assim, para todo $T \neq 0$, os limites de integração, v_k e v_ℓ , são tais que

$$v_k, v_\ell \in \left[s - \frac{w\sqrt{T^{-1} - 1}}{2}, s + \frac{w\sqrt{T^{-1} - 1}}{2} \right].$$

Para $T = 0$, $\xi_T = \mathbb{W} \times \mathbb{W}$.

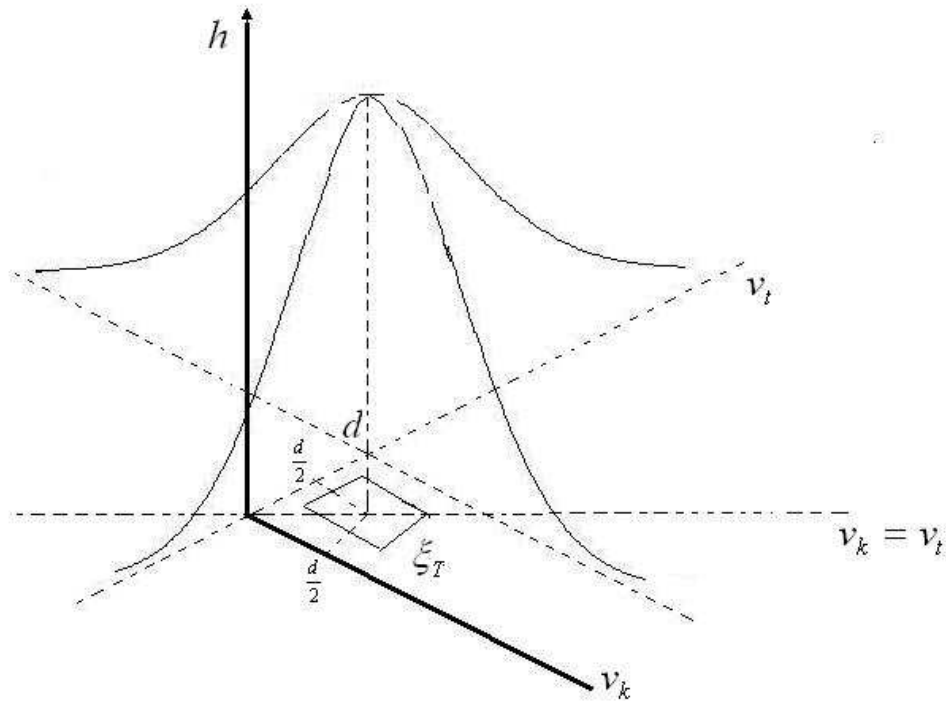
Isto significa que para se obter $\eta_{ij}(\xi_T)$ nós integramos a função

$$h(v_k, v_\ell) = \exp\{[-v_k^2 - (v_\ell - d)^2]/2\sigma^2\} \quad (4.7)$$

sobre o quadrado no plano $v_k v_\ell$ com o centro (s, s) e lado $2g = w\sqrt{T^{-1} - 1}$.

Observe que d nos dá a distância entre-fenótipos e assim é de se esperar que quanto maior for o valor de d , tanto menor será a competição entre os organismos, daí menores serão os α_{ij} .

Para obter $\sup_s \mu_{ij}(s)$, nós vamos posicionar o domínio de integração acima, de maneira a obter o maior volume sob a superfície dada por (7)



É fácil ver que $h(v_k, v_l)$ tem um ponto de máximo em $(v_k, v_l) = (0, d)$ e o volume do sólido limitado por

$$h(v_k, v_l), \text{ com } v_k, v_l \in [s - g, s + g]$$

é máximo quando a distância do centro (s, s) do quadrado ao ponto de máximo $(0, d)$ for mínima

$$\text{dist}[(s, s), (0, d)] = \sqrt{s^2 + (s - d)^2}.$$

O valor de s que minimiza a distância acima é o mesmo que minimiza a função quadrática

$$s^2 + (s - d)^2 = 2s^2 - 2ds + d^2,$$

assim o valor procurado para s é $\frac{2d}{4}$, isto é, $s = \frac{d}{2}$ é o centro do quadrado que maximiza o valor de

$$\eta_{ij} = \eta(s, T) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int \int_{\xi_T} \exp\{[-v_k^2 - (v_l - d)^2]/\sigma^2\} dv_k dv_l,$$

independente do valor de T , de maneira que

$$\sup_{0 \leq T \leq 1} [\min(T, \eta(s, T))] \leq \sup_{0 \leq T \leq 1} [\min(T, \eta(\frac{d}{2}, T))], \forall s.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sup_{s \in S} \{ \sup_{0 \leq T \leq 1} [\min(T, \eta(s, T))] \} &\leq \sup_{s \in S} \{ \sup_{0 \leq T \leq 1} [\min(T, \eta(\frac{d}{2}, T))] \} \\ &= \sup_{0 \leq T \leq 1} [\min(T, \eta(\frac{d}{2}, T))] , \end{aligned}$$

porém, pelo que vimos acima,

$$\sup_{s \in S} \{ \sup_{0 \leq T \leq 1} [\min(T, \eta(s, T))] \} \text{ é assumido para } s = \frac{d}{2} .$$

Assim nós temos uma fórmula simplificada para α_{ij} :

$$\alpha_{ij} = \alpha(d, w) = \frac{\sup_{0 \leq T \leq 1} [\min(T, \eta(\frac{d}{2}, T))]}{\sup_{0 \leq T \leq 1} [\min(T, \eta(0, T))]}$$

e

$$\begin{aligned} \eta(\frac{d}{2}, T) &= \frac{1}{2\pi\sigma} \int \int_{\xi_T} \exp\{-v_k^2 - (v_\ell - d)^2/2\sigma^2\} dv_k dv_\ell \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{\frac{d}{2}-g}^{\frac{d}{2}+g} \exp[-v_k^2/2\sigma^2] dv_k \cdot \int_{\frac{d}{2}-g}^{\frac{d}{2}+g} \exp[-(v_\ell - d)^2/2\sigma^2] dv_\ell \end{aligned}$$

Como $\exp[-(v_\ell - d)^2/2\sigma^2]$ é simétrica em relação a $v_\ell = d$, temos

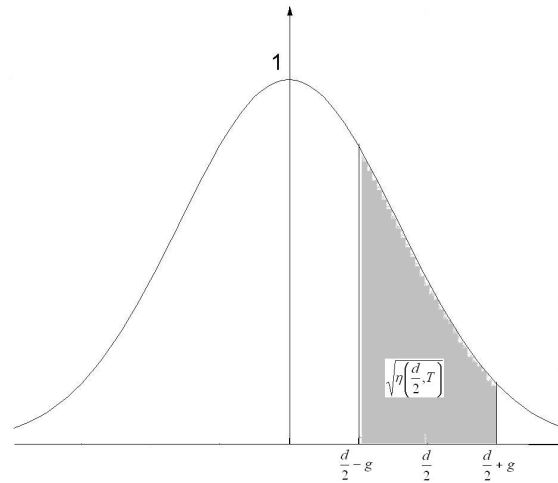
$$\int_{\frac{d}{2}-g}^{\frac{d}{2}+g} \exp[-(v_\ell - d)^2/2\sigma^2] dv_\ell = \int_{\frac{3d}{2}-g}^{\frac{3d}{2}+g} \exp[-(v_\ell - d)^2/2\sigma^2] dv_\ell$$

e da mudança $v = v_\ell - d$, vem

$$\int_{\frac{3d}{2}-g}^{\frac{3d}{2}+g} \exp[-(v_\ell - d)^2/2\sigma^2] dv_\ell = \int_{\frac{d}{2}-g}^{\frac{d}{2}+g} e^{-v^2/2\sigma^2} dv .$$

Assim,

$$\eta(\frac{d}{2}, T) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{\frac{d}{2}-g}^{\frac{d}{2}+g} e^{-v^2/2\sigma^2} dv \right\}^2 .$$



Desta forma $\sqrt{\eta(\frac{d}{2}, T)}$ corresponde à área da figura limitada pelas retas $v = \frac{d}{2} - g$ e $v = \frac{d}{2} + g$, onde $g = \frac{1}{2} w \left(\sqrt{\frac{1-T}{T}} \right)$, pelo eixo das abscissas e pela curva normal de média zero.

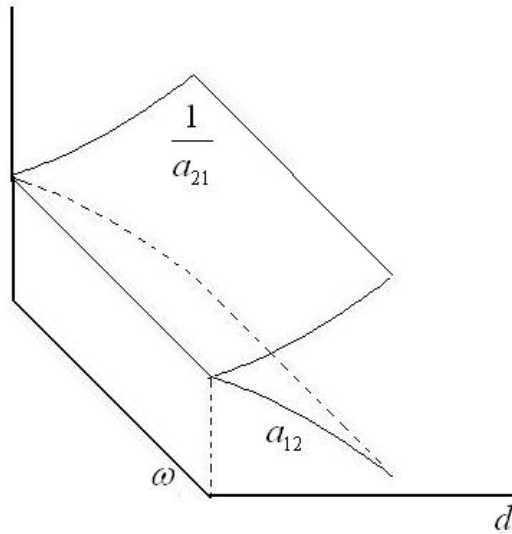
Observações:

1) Para cada par (w, T) fixado, η decresce com o aumento de d , ou seja, *dado um conjunto de recursos ótimos a competição diminui conforme a distância entre-fenótipos aumenta.*

2) Para cada par (d, T) fixado, η cresce com w :-*organismos que têm a mesma distância entre-fenotípica têm sua competição aumentada quando existem mais recursos ótimos comuns.*

3) Nós observamos o crescimento de α_{ij} com o aumento de w , numericamente, como mostra a tabela dos α_{ij} e para alguns valores de d . [tabela pág. 74]

A similaridade limite, isto é, a relação $\frac{K_1}{K_2}$ de modo que $N_1 > 0$ e $N_2 > 0$, pode ser melhor entendida através do gráfico seguinte:



O cálculo dos coeficientes de competição $\alpha_{ij} = \alpha(d, w)$ pode ser efetuado se considerarmos que a função $\eta(\frac{d}{2}, T)$ é decrescente e contínua em T para todo d , e ainda

$$\eta(\frac{d}{2}, 0) = \lim_{T \rightarrow 0} \eta(\frac{d}{2}, T) = 1 .$$

Desta forma, para cada d fixado existe T^* tal que $\eta(\frac{d}{2}, T^*) = T^*$ e

$$\sup_{0 \leq T \leq 1} [\min[T^*, \eta(\frac{d}{2}, T^*)]] = T^* \quad (\text{cf. Proposição 3.1}), \quad (4.8)$$

Apresentamos a seguir uma tabela com valores de α_{ij} , considerando, por simplicidade, o valor da variância $\sigma^2 = 1$, na expressão de $\eta(\frac{d}{2}, T)$ e calculamos numericamente (Mathemática) usando a fórmula (8) acima.

Tabela dos α_{ij}

d	w	2	4	6	8	10
0		1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,2		0,9970502	0,9980361	0,9985858	0,9989281	0,9991541
0,4		0,9882793	0,9921985	0,9945392	0,9957495	0,9966528
0,6		0,9739117	0,9826468	0,9875473	0,9905805	0,9925953
0,8		0,9543162	0,9696502	0,9782675	0,983603	0,9871408
1,0		0,9300118	0,9535717	0,9668449	0,9750534	0,9804898
1,2		0,9016454	0,9348605	0,9536099	0,9651967	0,9728574
1,4		0,8699605	0,9140098	0,93892	0,9543003	0,9644508

d	w	12	14	16	18	20
0		1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,2		0,9993125	0,9994299	0,9995171	0,9995847	0,9996396
0,4		0,9972843	0,9977469	0,9980954	0,9983654	0,9985795
0,6		0,994004	0,9950335	0,9958086	0,9964089	0,9968837
0,8		0,9896133	0,9914145	0,9927691	0,9938157	0,9946437
1,0		0,9842815	0,9870387	0,9891077	0,9907045	0,9919635
1,2		0,9781892	0,9820582	0,9849568	0,9871855	0,9895723
1,4		0,9715024	0,9766075	0,980423	0,9833551	0,9856585

Observações Finais:

O processo de cálculo dos coeficientes α_{ij} de interação entre espécies, introduzido por Giering III-Kandel é uma primeira tentativa de se usar a subjetividade da teoria fuzzy na modelagem de sistemas ecológicos. A validade do modelo utilizado assim como as dificuldades de ordem práticas não foram testados ainda convenientemente, mesmo porque pressupõe-se que se deva ter em laboratórios condições análogas às existentes nos nichos das espécies que interagem.

Acreditamos que a principal utilidade do processo ou modelo aqui proposto é conceitual. Eles apresentam uma nova relação entre os componentes de distância do nicho e seus efeitos na competição. A distância d entre-fenótipos depende da distribuição dos fenótipos e pode ser modelado por processos estocásticos, enquanto que a distância no nicho inter-fenótipo está associada à escolha feita pelo consumidor e é modelada com as técnicas da estatística fuzzy.

De qualquer forma, seria muito interessante ter-se um processo mais simples para o cálculo dos α_{ij} , e uma interpretação mais clara sobre as diferentes componentes do nicho, e suas "distâncias".

Referências Bibliográficas

- [1] Bassanezi, R.C. e Ferreira, W.C. Jr. – “Equações Diferenciais com Aplicações”, Editora Harbra, São Paulo, S.P., 1988.
- [2] Bassanezi, R.C. “Medidas e Integrais Fuzzy”, Relatório Técnico nº 06/87, UNICAMP, Campinas, SP.
- [3] Bussab, W.C. – “Análise de Variância e Regressão”, Métodos Quantitativos, Editora Atual, 1986.
- [4] Bussab, W.C. e Morettin, P.A. – “Estatística Básica”, Métodos Quantitativos, Editora Atual, 1985.
- [5] Fava, V.L. – “Urbanização e Pobreza no Brasil”, Tese de Doutorado, FEA, USP, São Paulo, 1983.
- [6] Gerônimo, J.R. – “Medidas Fuzzy”, Tese de Mestrado, IMECC-UNICAMP, Campinas, SP, 1988.
- [7] Giering III, E.W. and Kandel, A. – “The Application of Fuzzy Set Theory to the Modeling of Competition in Ecological Systems”, Fuzzy Sets and Systems, 9, 103-127, 1983.
- [8] Greco, G.H. and Bassanezi, R.C. – “On the Continuity of Fuzzy Integrals”, Relatório Técnico nº 11/91, UNICAMP, Campinas, SP. – Submetido a apreciação em 1991 na revista Fuzzy Sets and Systems.
- [9] Gupta, M.M.; Ragade, R.K.; Yager, R.R. – “Advances in fuzzy set theory and applications”, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [10] Honig, C.S. – “A Integral de Lebesgue e suas Aplicações”, 11^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [11] Inoue, H. – “A Strong Law of Large Numbers for Fuzzy Sets”, Fuzzy Sets and Systems, 41, 285-291, 1991.
- [12] James, B.R. – “Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário”, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.
- [13] Kandel, A. – “Fuzzy Mathematical Techniques with Applications”, Addison-Wesley Publishing Company, 1986.

- [14] Lin, C.C. and Segel L.A. – “Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences”, Classics in Applied Mathematics, SIAM, Filadelfia, 1988.
- [15] Murofushi, T. and Sugeno, M. – “An Interpretation of Fuzzy Measures and Choquet’s Integral as an Integral with Respect to a fuzzy measure”, Fuzzy Sets and Systems, 29, 201-227, 1989.
- [16] Prade, H. and Testemale, C. – “Generalizing Database Relational Algebra for the Treatment of Incomplete or Uncertain Information and Vague Queries”, Information Sciences 34, 115-143, 1984.
- [17] Puri, L.M. and Ralescu, D.A. – “Short Communication: A Possibility Measure is not a Fuzzy Measure”, Fuzzy Sets and Systems, 7, 311-313, 1982.
- [18] Puri, L.M. and Ralescu, D.A. – “Fuzzy Random Variables”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 114, 409-422, 1986.
- [19] Ralescu, A.L. and Ralescu, D.A. – “Probability and Fuzziness”, Information Sciences, 34, 85-92, 1984.
- [20] Ralescu, D.A. – “Toward a General Theory of Fuzzy Variables”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 86, 176-193, 1982.
- [21] Ralescu, D.A. and Adams, G. – “The Fuzzy Integral”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 75, 562-570, 1980.
- [22] Rocha, S. – “Indicadores de Pobreza para as Regiões Metropolitanas Anos Oitenta”, Estudos Econômicos de São Paulo, Vol. 20 n^o 3, 439-460, 1990.
- [23] Rudin, W. – “Princípios de Análise Matemática”, Editora Universidade de Brasília e ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1971.
- [24] Rudin, W. – “Real & Complex Analysis”, McGraw-Hill, London, 1970.
- [25] Summers, D.; Wu, Z.Y. and Sabib, G.C.W. – “Disturbed Nonlinear Multispecies Models in Ecology”, Mathematical Biosciences, 104, 159-184, 1991.
- [26] Wang, Z. – “The Autocontinuity of Set Function and the Fuzzy Integral”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 99, 195-218, 1984.
- [27] White, A.J. – “Análise Real: Uma introdução”, Editora da Universidade de São Paulo, 1973.
- [28] Zadeh, L.A. – “Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of possibility”, Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28, 1978

⁰Referência para dados:

(1) DIEESE (1988)

(2) Carvalho-Wood (1977) in [5].