

**SOBRE SISTEMAS DINÂMICOS FUZZY**  
**Teoria e Aplicações**

Laécio Carvalho de Barros

MARÇO – 1997

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

B278s Barros, Laécio Carvalho de  
Sobre sistemas dinâmicos fuzzy - teoria e aplicações/Laécio  
Carvalho de Barros. - Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientador: Pedro Aladar Tonelli, Rodney Carlos Bassanezi  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Conjuntos fuzzy. 2. \*Modelagem fuzzy. 3. \*Sistemas fuzzy  
discreto. 4. \*Dinâmica de população. I. Tonelli, Pedro Aladar. II.  
Bassanezi, Rodney Carlos. III. Universidade Estadual de Campinas.  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV.  
Título.

*Para Cristina  
e nossos filhos  
Otávio e Luiza  
que me transmitem  
confiança e alegria.*

*Para meus pais  
Luciano e Raimunda  
que muito me ensinaram.*

# Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli pela orientação e pela dedicação durante o meu programa de doutoramento e elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Rodney Carlos Basanezzi pelo tema da tese, pela orientação e apoio constantes.

A todos que, de alguma maneira, colaboraram para a realização deste trabalho, com destaque:

- À sub-cpg de Matemática Aplicada da UNICAMP,
- À secretaria de Pós-Graduação do IMECC-UNICAMP,
- À Joelma, pela digitação deste trabalho,
- Aos amigos Bia, Diomar e Luiz
- A todos os meus familiares, evidenciando o apoio do Eric na revisão.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Multifunções</b>	<b>4</b>
1.1 Introdução . . . . .	4
1.2 Preliminares . . . . .	4
1.3 Integral e diferencial de multifunções . . . . .	8
<b>2 Conjuntos fuzzy</b>	<b>13</b>
2.1 Introdução . . . . .	13
2.2 Conjuntos fuzzy . . . . .	14
2.3 Os espaços métricos $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$ e $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H)$ . . . . .	18
2.4 Sobre convergência de conjuntos fuzzy. . . . .	22
<b>3 Sobre a extensão de Zadeh</b>	<b>27</b>
3.1 Introdução . . . . .	27
3.2 Definição e propriedades da extensão de Zadeh . . . . .	28
3.3 Continuidade nos espaços métricos $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$ e $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H)$ . . . . .	33
<b>4 Integral e diferencial de uma função fuzzy</b>	<b>39</b>
4.1 Introdução . . . . .	39
4.2 Mensurabilidade . . . . .	40
4.3 Integrabilidade . . . . .	40
4.4 Diferenciabilidade . . . . .	45
<b>5 Equação diferencial fuzzy</b>	<b>51</b>
5.1 Introdução . . . . .	51
5.2 Equação diferencial fuzzy . . . . .	51

5.3	Equação diferencial fuzzy com o campo dado pela extensão de Zadeh . . . . .	55
5.4	Equação diferencial fuzzy em $E^1$ . . . . .	58
5.5	Valor inicial fuzzy em $E^1$ . . . . .	58
5.6	Equação "linear afim" com coeficientes fuzzy em $E^1$ . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Sistemas dinâmicos fuzzy discretos</b>	<b>63</b>
6.1	Introdução . . . . .	63
6.2	Sistemas dinâmicos fuzzy discretos . . . . .	63
6.3	Estabilidade do ponto fixo . . . . .	66
6.4	Estabilidade do ponto fixo da extensão de Zadeh . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Considerações sobre a modelagem fuzzy</b>	<b>81</b>
7.1	Introdução . . . . .	81
7.2	Fuzziness demográfica . . . . .	82
7.3	Fuzziness ambiental . . . . .	93
7.4	Fuzziness demográfica-ambiental . . . . .	101
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>104</b>

# Lista de Figuras

2.1	Conjunto fuzzy dos números bem maiores que 1. . . . .	15
2.2	$u_k$ para diversos valores de $k$ . . . . .	16
2.3	Mesma renda $r^*$ em ambientes distintos. . . . .	17
2.4	Variação do parâmetro $k$ com ambiente agredido. . . . .	18
2.5	$send(u)$ . . . . .	20
2.6	$u_p \xrightarrow{H} u$ , $u_p \xrightarrow{L} u$ e $u_p \xrightarrow{D} u$ . . . . .	25
3.1	Gráfico de $\hat{f}u$ . . . . .	29
5.1	(a) $u$ triangular (b) $u$ trapezoidal. . . . .	54
5.2	$x(t)$ e $u(t)$ : soluções de 5.5 e 5.6 respectivamente. . . . .	57
5.3	Evolução das soluções $u(t, u_0)$ e $x(t, x_0)$ no tempo. . . . .	60
6.1	$f$ do exemplo 6.3 e seus pontos fixos. . . . .	77
7.1	Comportamento das soluções do Exemplo 7.1 para $a \geq 0$ e $a < 0$ . . . . .	84
7.2	Os pontos fixos de $\hat{f}$ do exemplo 7.3. . . . .	88
7.3	Diagrama de bifurcação da função logística $\hat{f}(u)$ . Embora o ramo determinístico apresente pontos fixos e ciclos, no ramo fuzzy apresentamos apenas pontos fixos de $\hat{f}$ . As linhas tracejadas significam instabilidade e as cheias estabilidade. . . . .	93

## Introdução

A partir de 1965, ano em que Lotfi A. Zadeh publicou seu clássico artigo *Fuzzy Sets* [42] sobre a teoria fuzzy, muito tem-se feito na tentativa de modelar, matematicamente, conceitos que se julgam subjetivos. Para isto, muitos autores têm generalizado vários tópicos clássicos de matemática, de engenharia, computação e outras áreas, para incluir os casos fuzzy. Este é o caso de Sugeno [37] que introduz o conceito de *esperança fuzzy*, baseando-se na definição de *medida fuzzy*, onde a  $\sigma$ -aditividade da medida de probabilidade deixa de ser exigida. Ainda em seu trabalho, Sugeno faz um estudo comparativo entre as esperanças clássica e fuzzy, para uma variável aleatória normalizada, concluindo que tais esperanças diferem no máximo em  $\frac{1}{4}$ . Muitos outros conceitos de medida foram introduzidos na teoria fuzzy como, por exemplo, *medida de Sugeno*, *medida de possibilidade*, introduzida por Zadeh [43], etc. Puri e Ralescu [28], provam que uma medida de possibilidade não é uma medida fuzzy e finalmente Wang [40] faz um estudo mais completo sobre os diversos tipos de medidas e integrais fuzzy.

O nosso trabalho tem embasamento teórico, principalmente nos artigos de Puri e Ralescu [29] e [30] onde são dadas, respectivamente, as definições de *diferencial e integral para funções fuzzy*  $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ , onde  $E^n$  é uma certa classe de conjuntos fuzzy com uma estrutura linear, sem ser espaço vetorial [29]. Em [30] também é definida uma métrica,  $D$ , para uma classe de conjuntos fuzzy,  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , que contém  $E^n$ , com a qual o espaço  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$  é completo (mas não separável). Por outro lado, Kloeden [22] define uma métrica,  $H$ , em  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  com a qual  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H)$  é separável (porém não é completo). Pelo fato de  $E^n$  ser fechado em  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  [31], temos que  $(E^n, D)$  é espaço métrico completo e com a estrutura linear, mencionada antes, é que torna-se possível fazer uma teoria de cálculo diferencial e integral para funções com valores em  $E^n$ .

Baseado nos conceitos de diferencial e integral para funções fuzzy, Kaleva [17], dentre outros, desenvolve uma teoria de cálculo diferencial e integral e dá início, paralelamente a Seikkala [36], ao estudo das equações diferenciais fuzzy, principal ferramenta, junto com as equações de diferenças, para o nosso trabalho.

Os modelos de crescimento populacional tais como os de *competição entre espécies* e



o de *presa-predador*, propostos inicialmente por Lotka e Volterra (ver Bassanezi e Ferreira [05]), apresentam graus de subjetividade principalmente no que diz respeito às interpretações dos parâmetros que neles aparecem (ver Modelo 2 no Capítulo 7 deste trabalho). Também a condição inicial de um *problema de Cauchy* pode, muitas vezes, apresentar algum grau de imprecisão quanto ao seu verdadeiro valor e mesmo as próprias variáveis de estado podem apresentar subjetividade. No modelo presa-predador, por exemplo, o que significa ser predador? Quantas presas devem ser abatidas para que o indivíduo passe a ser considerado predador? Mesmo que um grupo de indivíduos seja considerado predador, certamente existem vários graus de predação dentro deste grupo. Se considerarmos estas questões relevantes, então julgamos ser a teoria fuzzy uma ferramenta indicada para tratar tais problemas.

A estratégia básica, neste trabalho, é estudar os modelos da Biomatemática, que utilizam as teorias de equações diferenciais e de diferenças, tratando-os dentro da teoria fuzzy. Para isto, tais teorias são generalizadas (Capítulos 4 a 6) e duas formas de extensão são tratadas: uma quando apenas o parâmetro multiplicativo é fuzzy e outra utilizando o princípio de extensão de Zadeh. Tal princípio é amplamente estudado em nosso trabalho (principalmente no Capítulo 3), possibilitando algumas aplicações (Capítulo 7).

As teorias do cálculo para multifunções, resumidas no Capítulo 1, alicerçam as respectivas teorias do cálculo para funções fuzzy, apresentadas nos Capítulos 3 a 6. O grande elo de ligação é o Teorema 2.3 que relaciona, univocamente, uma família de subconjuntos do  $\mathbb{R}^n$  com um conjunto fuzzy, cuja definição encontra-se no Capítulo 2.

Nos Capítulos 5 e 6, além de teorias de equações diferenciais fuzzy e de equações discretas, apresentamos teoremas que, em certo sentido, nos indicam serem as soluções clássicas preferidas. Questões de estabilidade, ainda polêmicas para equações diferenciais fuzzy, são discutidas e no final do Capítulo 6 apresentamos um pequeno estudo sobre as órbitas periódicas para um sistema dinâmico fuzzy discreto.

O Capítulo 7 é dedicado às aplicações das teorias, estudadas anteriormente, em modelos da *Biomatemática*. Para tanto, são feitas considerações de como deve ser tratado cada modelo e de que forma a subjetividade, que julgamos relevante, deve ser incorporada aos modelos.

A exemplo do que se faz para incorporar a estocasticidade nos modelos da Biomatemática (May [25] e Turelli [39]), entendemos também ser basicamente dois os tipos de subjetividade que aparecem nos modelos da Biomatemática: quando as variáveis de estado são consideradas subjetivas (tratadas aqui por fuzziness demográfica) ou quando os coeficientes de modelos clássicos é que têm interpretações subjetivas (fuzziness ambiental). Estas questões são ilustradas através de exemplos e um diagrama de *bifurcação* para o modelo logístico fuzzy é apresentado, usando o princípio de extensão de Zadeh.

Norteados pelo princípio de extensão de Zadeh, o qual nos permite estender equações diferenciais clássicas em questões diferenciais fuzzy, encerramos o nosso trabalho comentando que qualquer conceito de estabilidade que venha a ser dado a uma solução de equação diferencial fuzzy deve ser compatível com o clássico já existente, isto é, soluções que eram estáveis para as equações clássicas devem assim permanecer para o caso estendido fuzzy.

# Capítulo 1

## Multifunções

### 1.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos relacionados a *multifunções*, isto é, funções que associam pontos a conjuntos. Estes conceitos servirão de base para o estudo de funções com valores em conjuntos fuzzy. Por exemplo, os conceitos de *integral de Aumann*, bem como o de *derivada de Hukuhara* para multifunções, alicerçam os respectivos conceitos de integral e derivada para funções com valores em conjuntos fuzzy.

### 1.2 Preliminares

Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos limitados e não vazios de  $\mathbb{R}^n$ . A *distância de Hausdorff* entre  $A$  e  $B$  é dada por

$$h(A, B) = \max[\rho(A, B), \rho(B, A)]$$

onde  $\rho(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|$  e  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 1.1** (Puri-Ralescu [30]) *Sejam  $A$  e  $B$ , conforme acima, então*

(a)  $\rho(A, B) = 0$ , se e somente se,  $A \subset \bar{B}$ , onde  $\bar{B}$  é o fecho de  $B$ .

(b)  $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$ .

$Q(\mathbb{R}^n)$  denota a família de todos os subconjuntos compactos e não vazios de  $\mathbb{R}^n$  enquanto  $Q_C(\mathbb{R}^n)$  é a família de todos os subconjuntos, compactos não vazios e convexos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.2** (Puri-Ralescu [30]) *O espaço métrico  $(Q(\mathbb{R}^n), h)$  é completo e separável.*

**Proposição 1.3** *Sejam  $A, B, C \in Q(\mathbb{R}^n)$  e  $A \subset B \subset C$ , então*

$$h(B, X) \leq \max(h(A, X), h(C, X))$$

para todo  $X \in Q(\mathbb{R}^n)$ .

**Prova:** Pelo fato de  $A \subset B \subset C$  e  $A, B$  e  $C$  serem compactos, da Proposição 1.1, tem-se:

$$\rho(X, B) \leq \rho(X, A) + \rho(A, B) = \rho(X, A)$$

$$\rho(B, X) \leq \rho(B, C) + \rho(C, X) = \rho(C, X)$$

Portanto,

$$\text{se } h(B, X) \geq h(A, X) \text{ então } h(B, X) = \rho(B, X) \leq \rho(C, X) \leq h(C, X);$$

e

$$\text{se } h(B, X) \geq h(C, X) \text{ então } h(B, X) = \rho(X, B) \leq \rho(X, A) \leq h(A, X);$$

Isto é o que queríamos demonstrar.

Em  $Q(\mathbb{R}^n)$  a métrica  $h$  pode também ser definida por:

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon : B \subset B(A, \varepsilon) \text{ e } A \subset B(B, \varepsilon)\},$$

onde  $B(A, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|a - x\| < \varepsilon \text{ para algum } a \in A\}$ .

Diz-se que a seqüência de subconjuntos  $(A_p)$  de  $\mathbb{R}^n$  converge para  $A \subset \mathbb{R}^n$ , no sentido de Kuratowski, se

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sup A_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \inf A_p = A$$

onde

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sup A_p &= \bigcap_{p=1}^{\infty} \left( \overline{\bigcup_{j=p}^{\infty} A_j} \right) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{j \rightarrow +\infty} x_{p_j} \in A_{p_j}, A_{p_j} \text{ subsequência de } A_p\} \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} \inf A_p &= \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{p \rightarrow +\infty} x_p, x_p \in A_p\} \end{aligned}$$

**Teorema 1.4** *Sejam  $A, A_p \in Q(\mathbb{R}^n)$ , então são equivalentes*

(a)  $\lim_{p \rightarrow +\infty} h(A_p, A) = 0.$

(b) i.  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \inf A_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sup A_p = A.$

e

ii. *todos os  $A_p$  e  $A$  estão contidos em um mesmo compacto.*

**Prova:** (Ver Hausdorff [14] ou Quelho [32]).

Agora, se tivermos  $(A_p)$  uma seqüência não decrescente (não crescente) de compactos de  $\mathbb{R}^n$  e se  $(A_p)$  admitir subseqüência convergindo para um compacto  $A$ , com respeito à métrica de Hausdorff, então  $\lim_{p \rightarrow +\infty} h(A_p, A) = 0$  (Kaleva, [16]).

**Teorema 1.5** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uniformemente contínua. Então a aplicação  $K \mapsto f(K)$ , definida em  $(Q(\mathbb{R}^n), h)$  é uniformemente contínua.*

**Prova:** Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\delta > 0$  tal que

$$\|x - y\| < \delta \text{ então } \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Se  $K, C \in Q(\mathbb{R}^n)$  e  $h(K, C) < \delta$ , então para todo  $x \in K$ ,  $\inf_{y \in C} \|x - y\| < \delta$  se, e somente se,  $\|x - \bar{y}\| < \delta$  para algum  $\bar{y} \in C$  e, assim,  $\|f(x) - f(\bar{y})\| < \varepsilon$ , logo  $\inf_{y \in C} \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$  para todo  $x \in K$ .

Portanto,

$$\sup_{x \in K} \inf_{y \in C} \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

De maneira análoga, temos:

$$\sup_{y \in C} \inf_{x \in K} \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

E portanto,

$$h(f(K), f(C)) < \varepsilon.$$

**Corolário 1.6** *Sejam a seqüência  $(A_p)$  e  $A$  subconjuntos de  $Q(\mathbb{R}^n)$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , contínua.*

$$\text{Se } \lim_{p \rightarrow +\infty} h(A_p, A) = 0 \text{ então } \lim_{p \rightarrow +\infty} h(f(A_p), f(A)) = 0.$$

**Prova:** É uma consequência do Teorema 1.5, já que, pelo Teorema 1.4,  $A_p$  e  $A$  estão contidos em um mesmo compacto  $K$  e  $f|_K$  é uniformemente contínua.

**Teorema 1.7** *A função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua se, e somente se, a aplicação  $K \mapsto f(K)$ , definida em  $(Q(\mathbb{R}^n), h)$  é contínua.*

**Prova:** Suponha que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} h(A_p, A) = 0$ . Pelo Teorema 1.4, existe um compacto  $\mathcal{C}$  com  $A_p \subset \mathcal{C}$  e  $A \subset \mathcal{C}$ . Do Corolário 1.6, segue que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} h(f(A_p), f(A)) = 0$ . Consequentemente, a aplicação  $K \mapsto f(K)$  é contínua. Por outro lado, é claro que  $f$  é contínua já que é restrição de função contínua e  $h(\{x\}, \{y\}) = \|x - y\|$ .

**Corolário 1.8** *Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua e  $\lim_{p \rightarrow +\infty} h(A_p, A) = 0$ , então*

$$(1) \lim_{p \rightarrow +\infty} \inf f(A_p) = f(\lim_{p \rightarrow +\infty} \inf A_p) = f(A)$$

e

$$(2) \lim_{p \rightarrow +\infty} \sup f(A_p) = f(\lim_{p \rightarrow +\infty} \sup A_p) = f(A).$$

**Prova:** É uma consequência imediata dos Teoremas 1.4 e 1.7.

Para encerrar esta secção, vamos fazer um pequeno resumo sobre a função suporte de um conjunto, cuja aplicação tem grande importância no cálculo de integrais com valores em conjuntos. Para maiores informações, ver (Aubin [01], Kisielewicz [21]).

**Definição 1.1** Se  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ,  $A \neq \phi$ , define-se a função *suporte* de  $A$  por

$$S_A(x) = \sup_{a \in A} \langle x, a \rangle$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  é o conjunto das partes de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.9** *Sejam  $A, B \in Q_C(\mathbb{R}^n)$ , então :*

$$(1) S_{A+B} = S_A + S_B$$

$$(2) S_{\lambda A} = \lambda S_A, \lambda \geq 0$$

$$(3) A = B \Leftrightarrow S_A = S_B.$$

**Prova:** Ver (Aubin [01], Kisielewicz [21]). A parte (3) é uma consequência do Teorema 2.4.2 [01] ou da Proposição 1.3 [21].

**Teorema 1.10** *Sejam  $A, B \in Q_C(\mathbb{R}^n)$ , então*

$$h(A, B) = \max\{|S_A(x) - S_B(x)| : \|x\| = 1\}$$

**Prova:** Ver Lema 1.4 [21].

### 1.3 Integral e diferencial de multifunções

A seguir, faremos um resumo dos principais resultados sobre integral e diferencial de multifunções, que servirão para definir a integral e a diferencial de funções com valores em conjuntos fuzzy.

Os resultados, aqui mencionados, encontram-se em Puri e Ralescu ([29], [30]), Kaleva [17] e suas referências.

Seja  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ;

Uma multifunção em  $T$  é uma função  $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $G(t) \neq \phi$  para todo  $t \in T$ .

Seja  $S(G)$  o conjunto de todas as *seleções integráveis* de  $G$ , isto é,

$$S(G) = \{f : T \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ é integrável e } f(t) \in G(t), \forall t \in T\}$$

A *integral de Aumann* de  $G$  em  $T$  é definida por

$$\int_T G = \left\{ \int_T f(t)dt : f \in S(G) \right\}$$

**Teorema 1.11** *Se  $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , então  $\int_T G = \phi$  ou  $\int_T G$  é um subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$ .*

A função  $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  é dita *mensurável* se seu gráfico  $\{(t, x) : x \in G(t)\}$  é mensurável, isto é:

$$\{(t, x) : x \in G(t)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

onde  $\mathcal{A}$  denota a  $\sigma$ -álgebra dos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  Lebesgue mensuráveis e  $\mathcal{B}$  denota os subconjuntos Borel mensuráveis de  $\mathbb{R}^n$ .  $G$  é dita *integravelmente limitada* se existe uma função integrável  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\|x\| \leq g(t)$  para todo  $x \in G(t)$ .

**Teorema 1.12** *Se  $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  é mensurável e integravelmente limitada, então*

$$\int_T G \neq \emptyset$$

**Teorema 1.13** *Seja  $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , com  $G(t)$  fechado para todo  $t \in T$ . Se  $G$  é mensurável e integravelmente limitada, então  $\int_T G$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ .*

Em virtude dos Teoremas 1.11 a 1.13, tem-se o seguinte:

**Corolário 1.14** *Seja  $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , com  $G(t)$  fechado para todo  $t \in T$ . Se  $G$  é integravelmente limitada, então*

$$\int_T G = [c, d]$$

para  $c, d \in \mathbb{R}$  com  $c \leq d$ .

O seguinte teorema relaciona a integral de Aumann com a integral de Lebesgue para funções de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$  através da função suporte, o que nos possibilitará e facilitará em muito o cálculo da integral de Aumann de algumas multifunções:

**Teorema 1.15** *Seja  $G : T \rightarrow \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$  mensurável e integravelmente limitada, então*

$$S_{\int_T G}(x) = \int_T S_{G(t)}(x) dt$$

**Prova:** Ver Teorema 8.6.2 [01] ou Teorema 3.2.1 [21].

**Exemplo 1.1** Se  $G(t) = [a(t), b(t)]$  é mensurável e integravelmente limitada, então  $a(t)$  e  $b(t)$  são mensuráveis (Kaleva [17]) e

$$\int_T G = \left[ \int_T a(t) dt, \int_T b(t) dt \right].$$



De fato, temos que

$$S_{G(t)}(x) = \max\{xa(t), xb(t)\}$$

e

$$\int_T S_{G(t)}(x)dt = \max\left\{x \int_T a(t)dt, x \int_T b(t)dt\right\} = S_{[\int_T a(t)dt, \int_T b(t)dt]}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema 1.15 temos

$$S_{\int_T G} = S_{[\int_T a(t)dt, \int_T b(t)dt]}(x).$$

Como  $\int_T G$  é convexo e compacto, podemos usar a parte (3) do Teorema 1.9 para concluir que

$$\int_T G = \left[ \int_T a(t)dt, \int_T b(t)dt \right].$$

**Exemplo 1.2** Sejam  $T = [0, 1]$  e  $G : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  com  $G(t) = B[0, t]$ ,  $t \in [0, 1]$ , onde  $B[0, t]$  é a bola de centro na origem de raio  $t$  em  $\mathbb{R}^n$ .

$$S_{G(t)}(x) = \langle x, t \frac{x}{\|x\|} \rangle \text{ se } x \neq 0 \text{ e } S_{G(t)}(0) = 0$$

isto é,

$$S_{G(t)}(x) = t\|x\|.$$

Logo

$$\int_T S_G(x)dt = \frac{\|x\|}{2} = S_{B[0, \frac{1}{2}]}(x).$$

Pelos Teoremas 1.9 e 1.15, tem-se

$$\int_T G = B[0, \frac{1}{2}].$$

**Exemplo 1.3** Sejam  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ , integrável e  $A \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$  convexo com  $f(t) \geq 0$ ,  $\forall t \in T$ . Então a função  $G(t) = f(t)A$  é integravelmente limitada e,

$$\int_T G = \left[ \int_T f(t) dt \right] A.$$

Usando a parte (2) do Teorema 1.9, tem-se

$$S_{G(t)}(x) = f(t)S_A \Leftrightarrow \int_T S_G(x) dt = \left[ \int_T f(t) dt \right] S_A = S_{(\int_T f(t) dt)A}(x).$$

Pelos Teoremas 1.15 e 1.9, parte (3), concluímos que

$$\int_T G = \left[ \int_t f(t) dt \right] A.$$

O teorema seguinte é uma generalização do teorema da convergência dominada de Lebesgue:

**Teorema 1.16** (Puri-Ralescu [30]) *Se  $G_k : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  são mensuráveis e se existe  $h : T \rightarrow \mathbb{R}$ , integrável tal que  $\sup_{k \geq 1} \|f_k(t)\| \leq h(t)$  para todo  $f_k \in S(G_k)$  e se  $G_k(t) \rightarrow G(t)$ , no sentido de Kuratowski, então  $\int_T G_k \rightarrow \int_T G$ .*

**Observação:** Segue do Teorema 1.4 que se  $G_k$  e  $G$  tomarem valores em  $Q(\mathbb{R}^n)$  com  $G_k(t)$  e  $G(t)$  dentro de um mesmo compacto, então a convergência acima pode ser trocada pela convergência na métrica de Hausdorff.

Para diferenciabilidade, usaremos a definição segundo Hukuhara [15]:

A função  $G : T \rightarrow Q_C(\mathbb{R}^n)$  é *H-diferenciável* em um ponto  $t_0 \in T$  se existe  $DG(t_0) \in Q_C(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} h\left(\frac{G(t_0 + k) - G(t_0)}{k}, DG(t_0)\right) = 0.$$

e

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} h\left(\frac{G(t_0) - G(t_0 - k)}{k}, DG(t_0)\right) = 0$$

Nos pontos extremos de  $T$ , considera-se apenas um dos limites acima.

$DG(t_0)$  é chamado de *H-diferencial* de  $G$  no ponto  $t_0$ .

**Teorema 1.17** *Se  $G : T \rightarrow Q_C(\mathbb{R}^n)$  é H-diferenciável em  $T$ , então*

$$\frac{d(S_{G(t)}(x))}{dt} = S_{DG(t)}(x)$$

**Prova:** Para  $x = 0$ , é óbvio. Dado  $x \neq 0$ , temos

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \left| S_{(G(t+k)-G(t))/k}(x) - S_{DG(t)}(x) \right| = \|x\| \lim_{k \rightarrow 0^+} h\left(\frac{G(t+k) - G(t)}{k}, DG(t)\right) = 0$$

já que  $G$  é  $H$ -diferenciável.

A primeira igualdade vale pelo Teorema 1.10 que pode ser usado uma vez que  $DG(t) \in Q_C(\mathbb{R}^n)$ .

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{d(S_{G(t)}(x))}{dt} &= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{1}{k} \left[ S_{G(t+k)}(x) - S_{G(t)}(x) \right] = \lim_{k \rightarrow 0^+} S_{(G(t+k)-G(t))/k}(x) \\ &= S \lim_{k \rightarrow 0^+} (G(t+k)-G(t))/k(x) = S_{DG(t)}(x) \end{aligned}$$

Note que  $G(t+k) - G(t) \in Q_C(\mathbb{R}^n)$  para  $k > 0$  suficientemente pequeno já que  $G$  é  $H$ -diferenciável. De modo análogo ao que foi feito para a derivada à direita, faz-se para a derivada à esquerda.

# Capítulo 2

## Conjuntos fuzzy

### 2.1 Introdução

Em se tratando de “conjunto” no sentido clássico, a relação dicotômica de pertinência de um elemento a um conjunto deve estar bastante clara como um conceito primitivo. Mais precisamente, dado um conjunto  $A$  e um elemento  $x$  temos que  $x$  pertence a  $A$  ( $x \in A$ ) ou  $x$  não pertence a  $A$  ( $x \notin A$ ). Por exemplo, sabemos que  $2 \in \mathbb{N}$  (2 é um número inteiro positivo);  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$  ( $\frac{1}{2}$  não é um número inteiro positivo).

A noção de *conjunto fuzzy*, dada por Zadeh [42] em 1965, generaliza a idéia de conjunto quando o conceito de pertinência de um elemento a um conjunto deixa de ser um conceito primitivo como no caso clássico. Por exemplo, seja  $\mathbb{F}$  o “conjunto” dos números inteiros positivos “pequenos”, isto é,

$$\mathbb{F} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é pequeno} \}.$$

Os números 2 e 20 pertencem a  $\mathbb{F}$ ? Intuitivamente poderíamos dizer que se  $20 \in \mathbb{F}$  então  $2 \in \mathbb{F}$ , isto é, 2 teria um *grau de pertinência* maior que 20 em relação ao conjunto  $\mathbb{F}$ . A atribuição de um grau de pertinência de cada elemento a um conjunto passa então a ser uma caracterização do próprio conjunto. No caso de nosso exemplo, se considerarmos a função  $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ , dada por  $u(n) = \frac{1}{n}$  definindo o grau de pertinência a  $\mathbb{F}$ , teremos que  $2 \in \mathbb{F}$  com grau de pertinência 0,5 e  $20 \in \mathbb{F}$  com grau de pertinência  $\frac{1}{20} = 0,05$ , ou  $n \in \mathbb{F}$  com grau

de pertinência  $\frac{1}{n}$ . Observemos que o atributo *pequeno* para  $x \in \mathbb{N}$  é subjetivo no sentido que se poderia ter uma infinidade de funções  $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$  definindo o grau de pertinência de cada elemento de  $\mathbb{F}$ .

Podemos ainda imaginar uma infinidade de conceitos que possuem a característica de não estarem bem definidos em suas fronteiras. Por exemplo, o “conjunto” dos homens altos, das ruas grandes de uma cidade, o diagnóstico médico de um paciente, classificação de bactérias quanto a sua natureza vegetal ou animal, o “conjunto” dos problemas de uma determinada localidade, etc.

## 2.2 Conjuntos fuzzy

Seja  $X$  um conjunto (clássico).

**Definição 2.1** Um *subconjunto fuzzy*  $\mathbb{F}$  em  $X$  é um conjunto de pares ordenados  $\mathbb{F} = \{(x, u_{\mathbb{F}}(x)) : x \in X\}$  onde  $u_{\mathbb{F}} : X \rightarrow [0, 1]$  é uma função chamada *grau de pertinência* de  $x$  em  $\mathbb{F}$ , com os graus 1 e 0 representando, respectivamente, a pertinência completa e a não pertinência do elemento ao conjunto fuzzy.

### Observações:

1. Quando quisermos nos referir a um conjunto clássico  $A$ , iremos apenas dizer conjunto  $A$ , sem usar a palavra “clássico”. Porém se  $\mathbb{F}$  for um conjunto fuzzy, usaremos a palavra fuzzy para diferenciá-lo do conjunto clássico.
2. Veja que fixado o conjunto  $X$ , a função  $u_{\mathbb{F}}$  caracteriza completamente o conjunto fuzzy  $\mathbb{F}$ . Por esse motivo, muitas vezes iremos nos referir ao conjunto fuzzy  $\mathbb{F}$  citando apenas a função que o caracteriza  $u_{\mathbb{F}}$ . Omitiremos também o índice  $\mathbb{F}$ , na notação  $u_{\mathbb{F}}$ , isto é,  $u_{\mathbb{F}}$  será denotada apenas por  $u$ .

**Exemplo 2.1** Seja  $\mathbb{F}$  o subconjunto fuzzy dos números reais bem maiores do que 1. Assim,  $\mathbb{F} = \{(x, u(x)) : x \in X = \mathbb{R}\}$ .

Sempre temos uma infinidade de escolhas para  $u$ :

$$(i) u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Graficamente

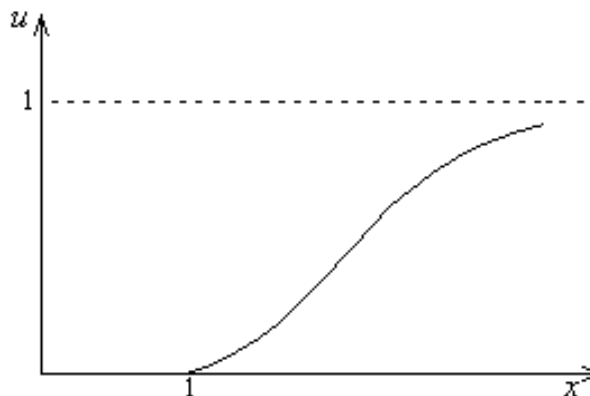


Figura 2.1: Conjunto fuzzy dos números bem maiores que 1.

Observemos que  $u$  é crescente,  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 1$ .

$$(ii) \mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 - e^{-1000(x-1)} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

também caracteriza o conjunto  $\mathbb{F}$ . Observamos que  $\mu(x) \leq u(x)$ ,  $x \in X$ . Neste caso, dizemos que  $\mu_{\mathbb{F}} \subset u_{\mathbb{F}}$ .

A escolha de  $u$  é subjetiva porém não tão arbitrária. Seria totalmente errado escolhermos:

$$(iii) u(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-2} & \text{se } x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

para representar o conjunto  $\mathbb{F}$ , por razões óbvias.

**Exemplo 2.2** (Kandel [19]) O conjunto fuzzy dos *fumantes* dado por  $u(x, t) = \frac{xt}{1 + xt}$  onde  $x$  é proporcional ao número de cigarros fumados por unidade de tempo e  $t$  o tempo em que o indivíduo fumou durante sua vida.

**Exemplo 2.3** (Barros-Bassanezi [04]) Vamos supor que o conjunto dos *pobres* de uma determinada localidade seja dado por:

$$u_k(r) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^k & \text{se } 0 \leq r < r_0 \\ 0 & \text{se } r \geq r_0 \end{cases}$$

onde  $r$  é um parâmetro proporcional à renda,  $r_0$  é um determinado nível de  $r$  que a partir do qual os indivíduos não são mais diferenciados quanto à pobreza e  $k$  é um parâmetro que nos dá uma característica do grupo estudado. O valor  $r_0$  pode eventualmente depender do ambiente onde vive tal grupo.

A seguir nós representamos graficamente alguns conjuntos fuzzy para alguns valores de  $k$  e  $r_0$  fixado.

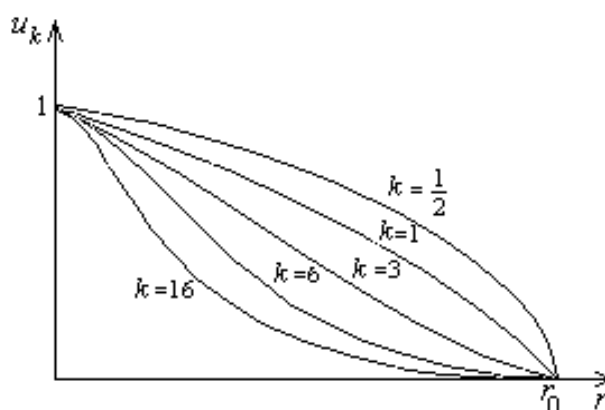


Figura 2.2:  $u_k$  para diversos valores de  $k$ .

Podemos verificar facilmente que se  $k_1 \geq k_2$ , então  $u_{k_1}(r) \leq u_{k_2}(r)$  para todo  $r$ .

Veja Figura 2.3.

O gráfico a seguir mostra que se um indivíduo de  $u_{k_1}$  tem renda  $r^*$  e outro indivíduo de  $u_{k_2}$  também tem a mesma renda  $r^*$ , então o indivíduo de  $u_{k_2}$  tem um grau de pobreza maior que o grau de pobreza do indivíduo de  $u_{k_1}$ .

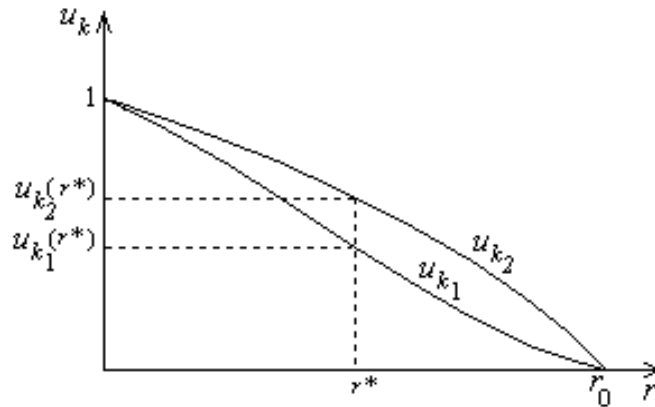


Figura 2.3: Mesma renda  $r^*$  em ambientes distintos.

Assim podemos dizer que, quanto à renda, é mais fácil viver nas localidades onde  $k$  é grande. Portanto,  $k$  nos revela intuitivamente se o ambiente em que o grupo vive é mais ou menos favorável à vida. O parâmetro  $k$  pode nos dar uma idéia do grau de saturação do ambiente e por isso chamaremos  $k$  de *parâmetro ambiental*.

Observamos ainda que

$$\text{se } k \rightarrow +\infty \text{ então } u_k(r) \rightarrow u_\infty(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r > 0 \\ 1 & \text{se } r = 0 \end{cases}$$

Portanto, se por algum motivo, o parâmetro ambiental  $k$  de uma determinada localidade diminuir, então a vida neste local torna-se mais cara. Assim, se houver danos ambientais tais como destruições de rios, poluição do ar, etc., o nível de renda naquela localidade deve ser aumentado de maneira que o grau de pobreza permaneça o mesmo de antes do dano ambiental.

$k_1$  : parâmetro ambiental antes do dano ambiental.

$k_2$  : parâmetro ambiental depois do dano ambiental.

$r_1$  : renda de um indivíduo antes do dano ambiental.

$r_2$  : renda necessária para que um indivíduo que, antes do dano tinha nível de renda  $r_1$ , passe a ter depois do dano ambiental.



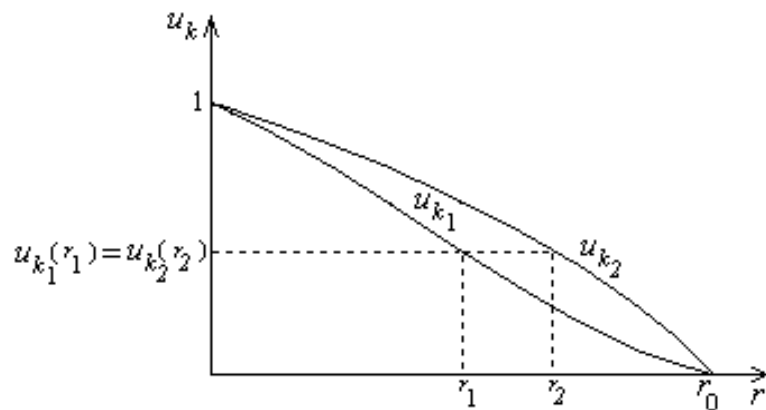


Figura 2.4: Variação do parâmetro  $k$  com ambiente agredido.

É claro que há outras maneiras de compensar tais danos como, por exemplo, construções de hospitais, tornar mais baratos os produtos básicos como alimentação, melhorar o saneamento básico, etc.

Os conjuntos fuzzy que sugerimos para representar o grau de *pobreza*, com a interpretação dada acima para o parâmetro  $k$ , nos parecem razoáveis para pequenas localidades.

## 2.3 Os espaços métricos $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$ e $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H)$

Com a finalidade de se obter propriedades topológicas nas famílias dos conjuntos fuzzy, vamos nos restringir aos conjuntos fuzzy com níveis compactos não vazios:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] / [u]^\alpha \text{ é compacto e não vazio para todo } \alpha \in [0, 1]\},$$

onde

$$[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n / u(x) \geq \alpha\} \text{ se } \alpha \in (0, 1]$$

é o  $\alpha$ -nível de  $u$ , e

$$[u]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / u(x) > 0\}}$$

é o suporte de  $u$ .

**Proposição 2.1** *O conjunto fuzzy  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  se, e somente se,*

(i)  *$u$  é semicontínua superiormente*

(ii)  *$[u]^0$  é compacto e  $[u]^1$  é não vazio.*

**Prova:** Como  $[u]^\alpha \subset [u]^0$ ,  $\forall \alpha \in (0, 1]$  e  $[u]^0$  é compacto, basta provarmos que (i) é equivalente a  $[u]^\alpha$  ser fechado.

Dados  $a \in A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) < \alpha\}$  e  $0 < \varepsilon < \alpha - u(a)$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$u(x) < \varepsilon + u(a) < u(a) + \alpha - u(a) = \alpha$$

para todo  $x$  tal que  $\|x - a\| < \delta$ , isto é  $A_\alpha$  é aberto e portanto,  $[u]^\alpha = \mathbb{R}^n - A_\alpha$  é fechado.

Reciprocamente, dados  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\varepsilon > 0$ , com  $u(a) + \varepsilon < 1$ ,  $a \in A_{u(a)+\varepsilon}$  que é aberto, existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|x - a\| < \delta$ , então  $x \in A_{u(a)+\varepsilon}$ , isto é,  $u(x) < u(a) + \varepsilon$ , logo  $u$  é semicontínua superiormente. Se  $u(a) = 1$ , nada a fazer.

O conjunto  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , munido da métrica

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha)$$

é um espaço métrico completo não separável (Puri-Ralescu [29]).

Kloeden [22] também define uma métrica, do *sendográfico*, em  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ :

$$H(u, v) = h^*(send(u), send(v))$$

onde

$$send(u) = ([u]^0 \times [0, 1]) \cap end(u)$$

$$end(u) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times [0, 1] / u(x) \geq \alpha\}$$

e  $h^*$  é a métrica de Hausdorff no espaço  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$ .

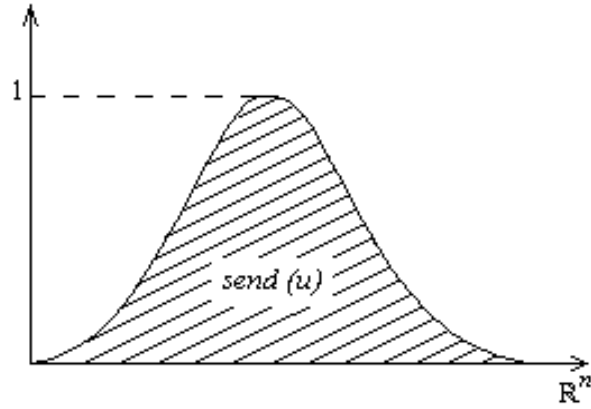


Figura 2.5:  $send(u)$ .

O espaço métrico  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H)$  é separável mas não completo (Kloeden [22]).

Puri e Ralescu [31] definem uma estrutura linear em  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  por:

$$(u + v)(x) = \sup_{y+z=x} \min[u(y), v(z)]$$

e

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u(x/\lambda) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}} & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

onde  $\chi_A$  é a função característica do conjunto  $A$ .

De acordo com o princípio de extensão de Zadeh e devido à continuidade das operações de adição e multiplicação clássicas, podemos usar Nguyen [27] para concluirmos que

$$[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha \quad \text{e} \quad [\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

No que segue denotamos por

$$E^n = \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) / u \text{ é fuzzy convexo; isto é, } u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(u(x), u(y)), \\ \forall \lambda \in [0, 1]\}.$$

Não é difícil provar que  $u$  é fuzzy convexo se, e somente se,  $[u]^\alpha$  é convexo,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

As operações de adição e multiplicação definidas acima estão de acordo com as correspondentes operações de adição e multiplicação por números, para conjuntos compactos do  $\mathbb{R}^n$ .

Sejam  $A, B, C \in Q_C(\mathbb{R}^n)$  e  $\alpha, \beta > 0$ , então  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ ;  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$  e  $h(A + B, A + C) = h(B, C)$ . Da mesma forma, sejam  $u, v, w \in E^n$ , então  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ ;  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ,  $D(u + v, u + w) = D(v, w)$  e  $D(\lambda u, \lambda v) = |\lambda|D(u, v)$  Kaleva [17].

O conjunto  $E^n$  é fechado em  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  ([31]). Conseqüentemente,  $(E^n, D)$  é completo e, embora  $E^n$  tenha uma estrutura linear, o mesmo não é espaço vetorial. Porém, temos o importante teorema:

**Teorema 2.2** (Kaleva [18]) *O espaço métrico completo  $(E^n, D)$  pode ser imerso isometricamente em um espaço real de Banach.*

Uma importante conseqüência deste teorema consiste no fato de que conceitos dados a funções definidas nesse espaço de Banach podem ser naturalmente transportados para o espaço  $(E^n, D)$ . Este poderia ser o caso da diferencial de funções  $F : [a, b] \rightarrow E^n$ , conforme Puri e Ralescu [29]. No entanto, utilizaremos a diferencial de Hukuhara para definir a diferencial de funções  $F : [a, b] \rightarrow E^n$ , como veremos no Capítulo 4.

O próximo resultado terá importância fundamental para nosso trabalho, pois será ele o grande elo de ligação entre conceitos clássicos (como os de mensurabilidade, integrabilidade, diferenciabilidade, etc.) para multifunções, vistos no Capítulo 1, com os respectivos conceitos dados às funções fuzzy.

**Teorema 2.3** (Negoita e Ralescu [26]) *Se  $\{A^\alpha / 0 \leq \alpha \leq 1\}$  é uma família de conjuntos compactos convexos e não vazios de  $\mathbb{R}^n$  tal que*

1.  $\overline{\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} A^\alpha} \subset A^0$ ,
2.  $A^{\alpha_2} \subset A^{\alpha_1}$  para  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ ,

3. se  $\alpha_k$  é uma seqüência não decrescente convergindo para  $\alpha, \alpha > 0$  com

$$A^\alpha = \bigcap_{k \geq 1} A^{\alpha_k},$$

então existe um  $u \in E^n$  tal que

$$[u]^\alpha = A^\alpha \text{ para todo } 0 < \alpha \leq 1$$

e

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} A^\alpha} \subset A^0$$

É claro que se  $u \in E^n$ , então seus  $\alpha$ -níveis satisfazem às condições 1, 2 e 3 acima.

Observamos que se  $u, v \in E^1$  com os  $\alpha$ -níveis dados por:  $[u]^\alpha = [u_1^\alpha, u_2^\alpha]$  e  $[v]^\alpha = [v_1^\alpha, v_2^\alpha]$ , então a *multiplicação fuzzy* de  $u$  por  $v$  é definida através de seus  $\alpha$ -níveis por

$$[u.v]^\alpha = [\min u_i^\alpha v_j^\alpha, \max u_i^\alpha v_j^\alpha] \text{ para } i, j = 1, 2.$$

A unicidade do produto está garantida pelo Teorema 2.3.

Encerramos esta secção observando que, a exemplo da multiplicação entre elementos de  $E^1$ , poderíamos ter usado o Teorema 2.3 para definir as operações de adição e a multiplicação de conjuntos fuzzy por número real, usando estas operações nos seus níveis.

## 2.4 Sobre convergência de conjuntos fuzzy.

Nesta secção vamos enunciar os principais resultados e definições relacionados com tipos de convergências nos espaços de conjuntos fuzzy, que podem ser encontrados em Quelho [31], Kaleva [16] ou Rojas-Román [34], com o propósito de estudarmos a continuidade das funções definidas no espaço  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

Sejam  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  e  $\{u_p\}$  uma seqüência de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definição 2.2** (D-convergência). Diz-se que  $u_p$  *D*-converge para  $u$ ,  $u_p \xrightarrow{D} u$ , se

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} D(u_p, u) = 0$$

**Definição 2.3** (L-convergência). Diz-se que  $u_p$  L-converge para  $u$ ,  $u_p \xrightarrow{L} u$ , se

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} h([u_p]^\alpha, [u]^\alpha) = 0 \text{ para todo } \alpha \in (0, 1].$$

**Definição 2.4** ( $\Gamma$ -convergência). Diz-se que  $u_p$   $\Gamma$ -converge para  $u$ ,  $u_p \xrightarrow{\Gamma} u$ , se

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \text{end}(u_p) = \text{end}(u)$$

no sentido de Kuratowski.

**Definição 2.5** (H-convergência). Diz-se que  $u_p$  H-converge para  $u$ ,  $u_p \xrightarrow{H} u$ , se

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} H(u_p, u) = 0.$$

**Proposição 2.4**  $u_p \xrightarrow{\Gamma} u$  se, e somente se,

$$\{u > \alpha\} \subset \liminf_{p \rightarrow +\infty} \{u_p \geq \alpha\} \subset \limsup_{p \rightarrow +\infty} \{u_p \geq \alpha\} \subset \{u \geq \alpha\}, \forall \alpha \in [0, 1]$$

onde  $\{u \geq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\}$

**Prova:** Ver (Quelho [32]).

**Proposição 2.5**  $u_p \xrightarrow{H} u$  se, e somente se,

$$u_p \xrightarrow{\Gamma} u \text{ e } \lim_{p \rightarrow +\infty} h([u_p]^0, [u]^0) = 0$$

**Prova:** Ver (Quelho [32]).

A fim de se obter equivalências entre as diversas convergências de conjuntos fuzzy, pode-se consultar (Quelho [32], Kaleva [16], Rojas-Román [34]).

Kaleva [16] prova a seguinte:

**Proposição 2.6** Em  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  valem as seguinte implicações:

1. *D-convergência implica L-convergência.*

2. *D-convergência implica H-convergência.*

Kaleva [16], através de alguns exemplos, mostra que as implicações (1) e (2) não podem ser invertidas. Aqui nós também ilustramos este fato com o seguinte exemplo:

**Exemplo 2.4** Sejam

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -|x| + 2 & \text{se } -2 < x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{se } x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \end{cases}$$

e

$$u_p = \begin{cases} -|x| + 2 & \text{se } -2 \leq x < \frac{p}{1-p} \text{ ou } \frac{p}{p-1} < x \leq 2 \\ -\frac{|x|}{p} + 1 & \text{se } \frac{p}{1-p} \leq x \leq \frac{p}{p-1} \\ 0 & \text{se } x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{para } p \geq 2$$

$$u_1 = \begin{cases} -\frac{|x|}{2} + 1 & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x < -2 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$

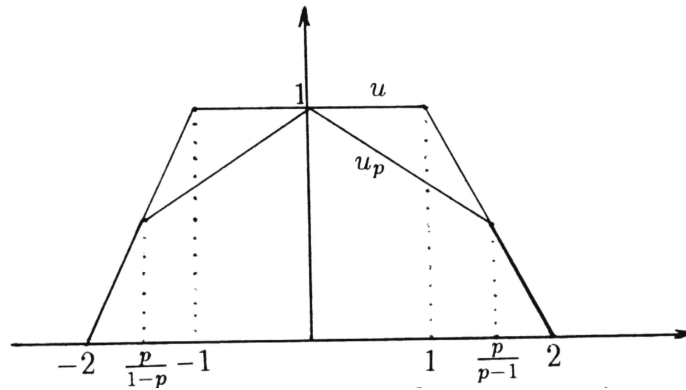


Figura 2.6:  $u_p \xrightarrow{H} u$ ,  $u_p \not\xrightarrow{L} u$  e  $u_p \not\xrightarrow{D} u$ .

É claro que  $u_p \xrightarrow{H} u$ . Porém  $h([u_p]^1, [u]^1) = 1$  para todo  $p \geq 1$  de maneira que  $u_p$  não converge em nível e nem em  $D$  para  $u$ .

Este exemplo mostra que podemos ter uma seqüência de funções contínuas com  $send(u_p)$  convexos convergindo para  $send(u)$  sem que haja  $L$ -convergência. Isto não acontecerá se  $[u_p]^1$  e  $[u]^1$  tiverem apenas um ponto.

Na verdade, Kaleva [16] mostra que a implicação (1) da Proposição 2.6 pode ser invertida se nos restringirmos ao subconjunto  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  dos  $u$  côncavos e fuzzy convexos enquanto que a implicação (2) poderá ser invertida se nos restringirmos ao subconjunto  $\mathcal{G}_1$  de  $\mathcal{G}$  com  $[u]^1$  tendo apenas um elemento.

Com o propósito de se obter as equivalências nas implicações (1) e (2) em outros subconjuntos de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  diferentes de  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}_1$  e que têm propriedades mais adequadas para nossos estudos, daremos a seguinte definição:

**Definição 2.6** Dizemos que  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  não tem pontos de máximos locais próprios se para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $0 < u(x) < 1$ ,  $x$  não é ponto de máximo local da função  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ . Note que para todo  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , dizer que  $u$  não tem pontos de máximos locais próprios é equivalente a

$$\overline{\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > \alpha\}} = [u]^\alpha$$



para todo  $\alpha \in (0, 1)$ .

**Proposição 2.7** *Sejam  $u_p, u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Se  $u$  não tem pontos de máximos locais próprios então são equivalentes.*

(a)  $u_p \xrightarrow{D} u$

(b)  $u_p \xrightarrow{H} u$  e  $[u]^1 = \liminf_{p \rightarrow +\infty} [u_p]^1$

(c)  $u_p \xrightarrow{L} u$ ,  $\bigcup_{p=1}^{\infty} [u_p]^0$  é limitado e  $\limsup_{p \rightarrow +\infty} [u_p]^0 \subset [u]^0$ .

**Prova:** Ver (Quelho [32]).

**Proposição 2.8** *Sejam  $u_p, u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Se  $u$  não tem pontos de máximos locais próprios e  $[u]^1$  contém apenas um elemento, então*

$$u_p \xrightarrow{D} u \text{ se, e somente se, } u_p \xrightarrow{H} u.$$

**Prova:** Ver (Quelho [32] ou Rojas-Román [34])

**Observação:** Rojas e Román [34] mostram que o fato de  $u$  não ter pontos de máximos locais próprios é equivalente a  $u$  ter todos seus  $\alpha$ -níveis contínuos, isto é, a função  $\alpha \mapsto [u]^\alpha$  é de níveis contínuos, ou seja, a função  $\alpha \mapsto [u]^\alpha$  é contínua na métrica de Hausdorff, para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

# Capítulo 3

## Sobre a extensão de Zadeh

### 3.1 Introdução

A extensão de Zadeh é um exemplo concreto de uma aplicação que leva conjunto fuzzy em conjunto fuzzy. Sua importância vai além da subjacente à própria evolução: como ferramenta é indispensável, a nosso ver, para a estruturação matemática quando se modelam fenômenos envoltos em grande grau de incerteza.

As aplicações vão desde modelagem de crescimento populacional Bassanezi e Barros [04] a estudo de construções de imagem Forte e al. [09].

Nossa intenção aqui é estudar as principais propriedades da extensão de Zadeh, bem como provar teoremas de continuidade da mesma, nos espaços métricos  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$  e  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H)$ .

Propriedades sobre a extensão de Zadeh de uma função contínua  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , foram inicialmente estudadas por Nguyen [27] e mais recentemente por Cabrelli e al. [06] para uma família de contrações definidas em um espaço métrico compacto. O fato de estudarmos a extensão de Zadeh nos espaços métricos  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$  e  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H)$  não particulariza as conclusões se substituirmos  $\mathbb{R}^n$  por qualquer outro espaço métrico completo.

## 3.2 Definição e propriedades da extensão de Zadeh

**Definição 3.1** A extensão de Zadeh da função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a função  $\hat{f}$  dada por

$$(\hat{f}(u))(x) = \begin{cases} \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} u(\tau) & \text{se } f^{-1}(x) \neq \phi \\ 0 & \text{se } f^{-1}(x) = \phi \end{cases}$$

para todo conjunto fuzzy  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ .

Segue imediatamente da definição que se  $f(x) = c$ , constante, então  $\hat{f}(u) = \hat{c} = \chi_{\{c\}}$  onde  $\chi_A$  é a função característica do conjunto  $A$ .

A extensão de Zadeh  $\hat{f}$  de fato estende a função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , identificando  $\mathbb{R}^n$  com

$$\{\chi_{\{x\}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : x \in \mathbb{R}^n\},$$

uma vez que

$$\hat{f}(\chi_{\{x\}}) = \chi_{f(x)}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Gostaríamos de ressaltar que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  poderia ser substituída por  $f : X \rightarrow X$ ,  $(X, d)$  espaço métrico ou mesmo escolher  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e usar teoremas de extensões para resultar em  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Nosso interesse em que o domínio de  $f$  seja o espaço inteiro  $\mathbb{R}^n$  é porque o domínio dos conjuntos fuzzy  $u$  é o espaço todo  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $f$  é bijetora, então  $(\hat{f}(u))(x) = u(f^{-1}(x))$  e assim podemos construir o gráfico do conjunto fuzzy  $\hat{f}u$ .

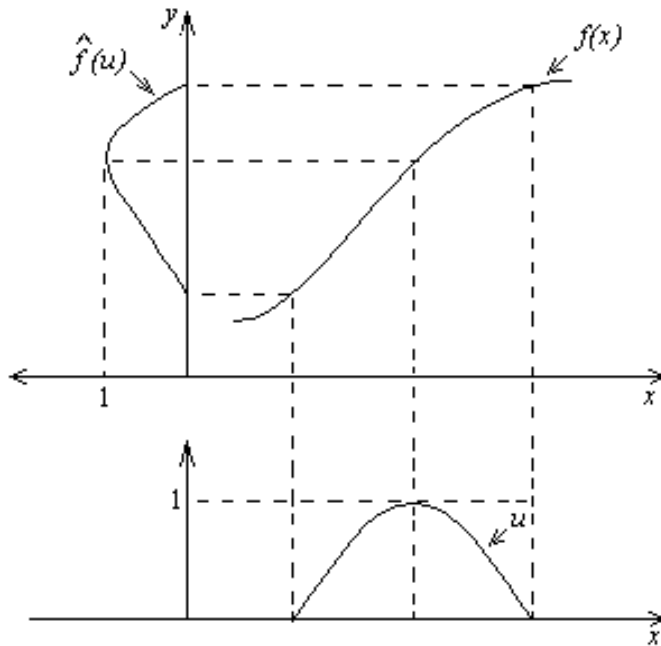


Figura 3.1: Gráfico de  $\hat{f}u$ .

Para o caso em que  $f(x) = Ax + b$ , com  $A$  matriz  $n \times n$  e  $b \in \mathbb{R}^n$ , a extensão é dada por

$$(\hat{f}(u))(x) = \begin{cases} \sup_{A\tau+b=x} u(\tau) & \text{se } A\tau + b = x \text{ tiver solução} \\ 0 & \text{se } A\tau + b = x \text{ não tiver solução} \end{cases}$$

Assim, se existir  $A^{-1}$ , então  $\hat{f}$  se reduz a

$$(\hat{f}(u))(x) = u(A^{-1}(x - b)).$$

É fácil ver que, para o caso em que  $f(x) = ax$  com  $a \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ , tem-se

$$(\hat{f}(u))(x) = \begin{cases} u(a^{-1}x) & \text{se } a \neq 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

ou seja,  $\hat{f}(u) = au$  de acordo com a definição de multiplicação de número por  $u$  (Ralescu, [29]).

A seguir, vamos enunciar e demonstrar um resultado que é central para futuras conclusões neste nosso trabalho. Este resultado foi demonstrado em [27] para o caso em que  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  é sobrejetora, e mais recentemente uma generalização, usando o conceito de  $t$ -norma, foi dada por Fuller e Jereztfalvi [10].

**Teorema 3.1** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sobrejetora. Uma condição necessária e suficiente para que*

$$[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha),$$

*para todo  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , é que  $u$  atinja o máximo em  $f^{-1}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

**Prova:** Suponha  $\sup_{\tau \in f^{-1}(x)} u(\tau) = s$  ou  $(\hat{f}(u))(x) = s$ ,

daí

$$x \in [\hat{f}(u)]^s = f([u]^s).$$

Isto é, existe  $y$  com  $u(y) \geq s$  tal que  $f(y) = x$ . Mas, pela definição de  $s$ , tem-se  $u(y) = s$ .

Por outro lado, se  $x \in [\hat{f}(u)]^\alpha$ , então

$$(\hat{f}(u))(x) \geq \alpha \quad \text{ou} \quad \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} u(\tau) \geq \alpha.$$

Como, por hipótese, existe  $y \in f^{-1}(x)$  tal que  $u(y) = \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} u(\tau) \geq \alpha$ , segue que  $x \in f([u]^\alpha)$ .

Agora, se  $x \in f([u]^\alpha)$ , existe  $x = f(y)$ .

Daí

$$(\hat{f}(u))(x) = \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} u(\tau) \geq u(y) \geq \alpha, \quad \text{isto é} \quad x \in [\hat{f}(u)]^\alpha$$

O teorema seguinte foi inicialmente demonstrado por Nguyen [27] para o caso em que  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e mais recentemente por Cabrelli e al. [06] para o caso de um sistema de conjunto fuzzy iterados, no estudo de construção de imagens.

**Teorema 3.2** Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua, então a extensão de Zadeh  $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  está bem definida e,

$$[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Obs:** Lembremos que para provar que  $\hat{f}(u) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , basta verificar que os conjuntos  $[\hat{f}(u)]^\alpha$  são não vazios e compactos para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Assim, provaremos apenas que  $[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha)$ , já que  $f([u]^\alpha)$  é não vazio e compacto pela continuidade de  $f$ , uma vez que  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

Observemos também que sendo  $f$  contínua,  $f^{-1}(x)$  é fechado e tem-se  $[u]^0 \cap f^{-1}(x)$  compacto por ser fechado dentro do compacto  $[u]^0$ .

**Prova:** Vamos dividir a prova em dois casos  $\alpha > 0$  e  $\alpha = 0$ .

i. Para  $\alpha > 0$

Seja  $x \in [\hat{f}(u)]^\alpha$ , então  $\hat{f}u(x) \geq \alpha$  e assim,  $f^{-1}(x) \neq \emptyset$ , bem como  $[u]^0 \cap f^{-1}(x) \neq \emptyset$ .

Assim,

$$(\hat{f}(u))(x) = \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} u(\tau) = \sup_{\tau \in [u]^0 \cap f^{-1}(x)} u(\tau) = u(y) \geq \alpha$$

para algum  $y \in [u]^0 \cap f^{-1}(x)$ , uma vez que  $u$  é semicontínua superiormente e  $[u]^0 \cap f^{-1}(x)$  é compacto (Ver Rudin [35] pág. 195). Logo  $f(y) = x$  e  $u(y) \geq \alpha$ , isto é,  $x \in f([u]^\alpha)$ .

Por outro lado,  $f([u]^\alpha) \subset [\hat{f}(u)]^\alpha$  vale sempre já que se  $x \in f([u]^\alpha)$ , existe  $y \in [u]^\alpha$  e  $x = f(y)$ .

Daí  $(\hat{f}(u))(x) = \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} u(\tau) \geq u(y) \geq \alpha$  ou  $x \in [\hat{f}(u)]^\alpha$ .

ii. Para  $\alpha = 0$ , tem-se

$$A = \{x : (\hat{f}(u))(x) > 0\} = f\{x : u(x) > 0\} = f(B).$$

Se  $x \in A$ , então

$$\sup_{\tau \in f^{-1}(x)} u(\tau) > 0,$$

daí existe  $y$  com  $f(y) = x$  e  $u(y) > 0$ , isto é,  $x \in f(B)$ .

Se  $x \in f(B)$ , então existe  $y \in B$  com  $x = f(y)$ , logo

$$\sup_{\tau \in f^{-1}(x)} u(\tau) \geq u(y) > 0$$

isto é,  $x \in A$ .

Agora,

$$\overline{A} = \overline{f(B)} \supset f(\overline{B}) \text{ por } f \text{ ser contínua}$$

e

$$\overline{A} = \overline{f(B)} \subset \overline{f(\overline{B})} = f(\overline{B}) \text{ pela compacidade de } \overline{B} \text{ e a continuidade de } f.$$

Portanto

$$[\hat{f}(u)]^0 = f([u]^0).$$

Note que a família  $\{f([u]^\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1\}$  define um único conjunto fuzzy, já que há uma correspondência biunívoca entre um conjunto fuzzy e a família  $\{[u]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1\}$ .

Uma consequência imediata do teorema acima é o seguinte:

**Corolário 3.3** *Se  $f$  é contínua, então  $\hat{f}$  é monótona no seguinte sentido*

$$\hat{f}(u) \leq \hat{f}(v) \text{ se } u \leq v,$$

onde  $u \leq v$  significa  $u(x) \leq v(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Prova:** Basta verificar que  $[\hat{f}(u)]^\alpha \subset [\hat{f}(v)]^\alpha$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Mas, como

$$[u]^\alpha \subset [v]^\alpha \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]$$

e

$$[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha)$$

tem-se o resultado.

### 3.3 Continuidade nos espaços métricos

$(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$  e  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H)$

Nosso objetivo é mostrar a continuidade uniforme de  $\hat{f}$  e que  $\hat{f}$  é  $k$ -lipschitziana em  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$  se  $f$  for uniformemente contínua e  $k$ -lipschitziana respectivamente. Em seguida vamos mostrar a equivalência entre a continuidade de  $\hat{f}$  em  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H)$  e a continuidade de  $f$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Estes teoremas, que constituem uma parte importante de nosso trabalho, serão utilizados nos capítulos seguintes, como por exemplo na secção 5.3 do capítulo de equações diferenciais fuzzy.

**Teorema 3.4** *Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uniformemente contínua, então a extensão de Zadeh,*

$$\hat{f} : (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$$

*é uniformemente contínua.*

**Prova:** Dado  $\varepsilon > 0$ , pelo Teorema 1.5, existe  $\delta > 0$

$$\text{se } h([u]^\alpha, [v]^\alpha) < \delta \text{ então } h(f([u]^\alpha), f([v]^\alpha)) < \varepsilon.$$

Assim

$$\text{se } D(u, v) < \delta \text{ então } h([u]^\alpha, [v]^\alpha) < \delta$$

que implica em

$$h(f[u]^\alpha, f([v]^\alpha)) = h([\hat{f}(u)]^\alpha, [\hat{f}(v)]^\alpha) < \varepsilon \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Logo

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([\hat{f}(u)]^\alpha, [\hat{f}(v)]^\alpha) < \varepsilon.$$

isto é

$$\text{se } D(u, v) < \delta \text{ então } D(\hat{f}(u), \hat{f}(v)) < \varepsilon.$$

Note que se  $\hat{f}$  for contínua, então  $f$  também será já que



$$D(\hat{f}(\chi_{\{x\}}), \hat{f}(\chi_{\{y\}})) = \|f(x) - f(y)\| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Teorema 3.5** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\hat{f} : (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$ , onde  $\hat{f}$  é a extensão de Zadeh. Então  $f$  é lipschitziana com constante  $k$  se, e somente se,  $\hat{f}$  é lipschitziana com constante  $k$ .*

**Prova:** Primeiro observemos que sendo  $f$  lipschitziana, é também contínua e portanto podemos usar o Teorema 3.2.

$$\text{Por definição } D(\hat{f}(u), \hat{f}(v)) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h(f([u]^\alpha), f([v]^\alpha)).$$

Agora,

$$\begin{aligned} h(f([u]^\alpha), f([v]^\alpha)) &= \max\left\{ \sup_{x \in [u]^\alpha} \inf_{y \in [v]^\alpha} \|f(x) - f(y)\|, \sup_{y \in [v]^\alpha} \inf_{x \in [u]^\alpha} \|f(x) - f(y)\| \right\} \\ &\leq \max\left\{ \sup_{x \in [u]^\alpha} \inf_{y \in [v]^\alpha} k\|x - y\|, \sup_{y \in [v]^\alpha} \inf_{x \in [u]^\alpha} k\|x - y\| \right\} \\ &= k \max\left\{ \sup_{x \in [u]^\alpha} \inf_{y \in [v]^\alpha} \|x - y\|, \sup_{y \in [v]^\alpha} \inf_{x \in [u]^\alpha} \|x - y\| \right\} \\ &= kh([u]^\alpha, [v]^\alpha) \end{aligned}$$

Logo,

$$D(\hat{f}(u), \hat{f}(v)) \leq kD(u, v).$$

Por outro lado, como

$$[\hat{f}(\chi_{\{x\}})]^\alpha = f(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , então

$$D(\hat{f}(\chi_{\{x\}}), \hat{f}(\chi_{\{x\}})) = \|f(x) - f(y)\|,$$

donde se conclui o teorema.

**Teorema 3.6** *Suponhamos  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e que  $u_p \xrightarrow{L} u$ . Então  $\hat{f}(u_p) \xrightarrow{L} \hat{f}(u)$ .*

**Prova:** Seja  $\alpha \in (0, 1]$ ; pelo Teorema 1.4  $[u_p]^\alpha$  e  $[u]^\alpha$  estão em um mesmo compacto. Assim, pelo Corolário 1.6, temos a conclusão, já que  $[\hat{f}(u_p)]^\alpha = f([u_p]^\alpha)$ .

**Teorema 3.7**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua se, e somente se,  $\hat{f} : (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H)$ , é contínua.

**Prova:** Suponhamos que  $f$  seja contínua; como  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H)$  é espaço métrico, basta mostrar que se  $u_p \xrightarrow{H} u$  então  $\hat{f}(u_p) \xrightarrow{H} \hat{f}(u)$ , para obtermos a prova do teorema.

De acordo com a Proposição 2.5, precisamos provar que

$$\hat{f}(u_p) \xrightarrow{\Gamma} \hat{f}(u) \text{ e } \lim_{p \rightarrow +\infty} h([\hat{f}(u_p)]^0, [\hat{f}(u)]^0) = 0.$$

Agora, da continuidade de  $f$  e da Proposição 2.4, precisamos provar que

$$(i) \lim_{p \rightarrow +\infty} h(f([u_p]^0), f([u]^0)) = 0$$

e

$$(ii) \{\hat{f}(u) > \alpha\} \subset \liminf_{p \rightarrow +\infty} \{\hat{f}(u_p) \geq \alpha\} \subset \limsup_{p \rightarrow +\infty} \{\hat{f}(u_p) \geq \alpha\} \subset \{\hat{f}(u) \geq \alpha\},$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Para (i), a prova é análoga à do teorema anterior, já que podemos usar o Corolário 1.6 para  $f([u_p]^0)$  e  $f([u]^0)$ .

Para (ii), o caso em que  $\alpha = 0$  é trivialmente verdade. Se  $\alpha \neq 0$ , como no Teorema 3.2, concluímos que

$$\{\hat{f}(u) > \alpha\} = f\{u > \alpha\}.$$

Assim, da hipótese:

$$\{u > \alpha\} \subset \liminf_{p \rightarrow +\infty} [u_p]^\alpha \subset \limsup_{p \rightarrow +\infty} [u_p]^\alpha \subset [u]^\alpha$$

temos

$$\{\hat{f}(u) > \alpha\} = f\{u > \alpha\} \subset f\left(\liminf_{p \rightarrow +\infty} [u_p]^\alpha\right) \subset f\left(\limsup_{p \rightarrow +\infty} [u_p]^\alpha\right) \subset f([u]^\alpha).$$

Vamos finalmente provar (ii) mostrando:

$$(a) f\left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \inf [u_p]^\alpha\right) \subset \lim_{p \rightarrow +\infty} \inf f([u_p]^\alpha).$$

$$(b) f\left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \sup [u_p]^\alpha\right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sup f([u_p]^\alpha).$$

Verificação de (a):

Se  $y \in f\left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \inf [u_p]^\alpha\right)$  então  $y = f(x)$  com  $x = \lim_{p \rightarrow +\infty} x_p$  e  $x_p \in [u_p]^\alpha$ . Como  $f$  é contínua, temos que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} f(x_p) = f(x) = y$ . Portanto  $y \in \lim_{p \rightarrow +\infty} \inf f([u_p]^\alpha)$ .

Verificação de (b):

Suponhamos que  $y \in f\left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \sup [u_p]^\alpha\right)$ , então  $y = f(x)$  com

$$x = \lim_{j \rightarrow +\infty} x_{p_j} \text{ e } x_{p_j} \in [u_{p_j}]^\alpha.$$

Pela continuidade de  $f$ ,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} f(x_{p_j}) = f(x) = y.$$

Logo,

$$y \in \lim_{j \rightarrow +\infty} \sup f([u_{p_j}]^\alpha).$$

Por outro lado, se  $y \in \lim_{j \rightarrow +\infty} \sup f([u_{p_j}]^\alpha)$  então  $y = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(u_{p_j})$  com  $x_{p_j} \in [u_{p_j}]^\alpha$ .

Como  $[u_p]^\alpha \subset [u_p]^0$  e  $[u_p]^0$  está em algum compacto  $K$ , pois  $[u_p]^0 \xrightarrow{h} [u]^0$ , existe uma subsequência  $x_{p_i} \rightarrow x$ . Portanto,

$$x \in \lim_{p \rightarrow +\infty} \sup [u_p]$$

e

$$y \in \lim_{j \rightarrow +\infty} f(x_{p_j}) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f(x_{p_i}) = f(x),$$

pela continuidade de  $f$  e a unicidade do limite. Logo  $y \in f\left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \sup [u_p]^\alpha\right)$ .

Provamos assim que

$$\text{se } u_p \xrightarrow{H} u \text{ então } \hat{f}(u_p) \xrightarrow{H} \hat{f}(u),$$

ou seja,

$$\hat{f} \text{ é contínua em } (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), H).$$

É claro que se  $\hat{f}$  é contínua, então  $f$  é contínua uma vez que  $\hat{f}$  estende  $f$  e  $H(\chi_{\{x\}}, \chi_{\{y\}}) = h(x, y) = \|x - y\|$ .

Agora, para que a continuidade de  $f$  acarrete a continuidade de  $\hat{f}$  na métrica  $D$ , vamos nos restringir ao subconjunto de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  :

$\mathcal{F}^*(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : [u]^1 \text{ contém apenas um elemento e } u \text{ não contém pontos de máximo local próprio}\}$ .

**Corolário 3.8** *Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua, então*

- (1)  $\hat{f}(\mathcal{F}^*(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{F}^*(\mathbb{R}^n)$  e
- (2)  $\hat{f}/_{\mathcal{F}^*(\mathbb{R}^n)}$  é contínua na métrica  $D$ .

**Prova:**

(1) Seja  $u \in \mathcal{F}^*(\mathbb{R}^n)$ , então pela observação feita na Definição 2.6, precisamos provar apenas que

$$\overline{\{\hat{f}(u) > \alpha\}} = [\hat{f}(u)]^\alpha \text{ para } \alpha \in (0, 1)$$

e

$$[\hat{f}(u)]^1 \text{ contém apenas um elemento.}$$

Mas, pela continuidade de  $f$  e  $\alpha \neq 0$ , como no Teorema 3.2, temos

$$\overline{\{\hat{f}(u) > \alpha\}} = \overline{f\{u > \alpha\}} = f\overline{\{u > \alpha\}} = [\hat{f}(u)]^\alpha,$$

onde a segunda igualdade é consequência da continuidade de  $f$  e do fato de  $\mathbb{R}^n$  ser espaço métrico. A última igualdade é consequência do Teorema 3.2, que também nos garante:

$$[\hat{f}(u)]^1 = f([u]^1)$$

e assim  $[\hat{f}(u)]^1$  tem apenas um elemento.

(2) Seja  $u_p, u \in \mathcal{F}^*(\mathbb{R}^n)$ ; de acordo com a Proposição 2.8,

$$u_p \xrightarrow{D} u \text{ é equivalente a } u_p \xrightarrow{H} u$$

que, pelo Teorema 3.7, implica em

$$\hat{f}(u_p) \xrightarrow{H} \hat{f}(u)$$

e de novo, pela Proposição 2.8 e da parte (1), temos

$$\hat{f}(u_p) \xrightarrow{D} \hat{f}(u).$$

# Capítulo 4

## Integral e diferencial de uma função fuzzy

### 4.1 Introdução

Este capítulo tem como principal objetivo apresentar algumas generalizações de certos conceitos e resultados básicos do cálculo diferencial e integral, com o intuito de estudarmos equações diferenciais fuzzy (Capítulo 5). Para isto, o Teorema 2.3 será de extrema importância, pois o mesmo, como já mencionamos na seção 2.3, nos permite olhar uma função com valores em conjuntos fuzzy como uma família de funções com valores em conjuntos clássicos, a saber: os  $\alpha$ -níveis do conjunto fuzzy imagem. Assim, as definições e resultados para multifunções, vistos no Capítulo 1, serão utilizados aqui, possibilitando-nos obter resultados na teoria fuzzy.

Iremos nos restringir, neste capítulo, ao espaço métrico completo  $(E^n, D)$ , pois os  $\alpha$ -níveis de seus elementos são convexos e, como sabemos, há uma teoria bem adiantada para subconjuntos não vazios compactos e convexos, como resumo feito no Capítulo 1.

De um modo geral, os resultados que iremos apresentar aqui encontram-se em Puri Ralescu [29, 30] e Kaleva [17]. Porém, muitas vezes lançaremos mão das propriedades da função suporte, vistas no Capítulo 1, para apresentarmos demonstrações diferentes daquelas que estão em [17], [29] e [30].

## 4.2 Mensurabilidade

**Definição 4.1** (Kaleva [17]). A aplicação  $F : T \rightarrow E^n$  é *fortemente mensurável* se para todo  $\alpha \in [0, 1]$  a função  $F_\alpha : T \rightarrow Q_C(\mathbb{R}^n)$  definida por

$$F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$$

é mensurável.

**Observação:**  $Q_C(\mathbb{R}^n)$  é o subconjunto formado pelos elementos de  $Q(\mathbb{R}^n)$  que são convexos. Estamos usando aqui a mesma notação da Secção 1.3 em que  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ .

Para ver as demonstrações dos lemas abaixo, ver Kaleva [17].

**Lema 4.1** Se  $F : T \rightarrow E^n$  é fortemente mensurável então  $F$  é mensurável com respeito à topologia gerada por  $D$ .

**Lema 4.2** Se  $F : T \rightarrow E^n$  é contínua então  $F$  é fortemente mensurável.

**Lema 4.3** Seja  $F : T \rightarrow E^1$  fortemente mensurável e denote  $[F(t)]^\alpha = [\lambda^\alpha(t), \mu^\alpha(t)]$  para  $\alpha \in [0, 1]$ . Então  $\lambda^\alpha$  e  $\mu^\alpha$  são mensuráveis.

## 4.3 Integrabilidade

A aplicação  $F : T \rightarrow E^n$  é dita *integravelmente limitada* se a função  $F_0$  é integravelmente limitada.

**Definição 4.2** Seja  $F : T \rightarrow E^n$ . A *integral* de  $F$  em  $T$ , denotada por  $\int_T F$  ou  $\int_a^b F$ , é definida através de seus  $\alpha$ -níveis

$$\left[ \int_T F \right]^\alpha = \int_T F_\alpha$$

para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ , sendo  $\int_T F_\alpha$ , a integral de Aumann.  $F$  é *integrável sobre  $T$*  se  $\int_T F \in E^n$

**Teorema 4.4** (Puri e Ralescu [30]). *Se  $F : T \rightarrow E^n$  é fortemente mensurável e integravelmente limitada, então  $F$  é integrável.*

Embora a prova deste teorema encontre-se em [30], vamos repeti-la com mais clareza, a nosso ver.

**Prova:** Precisamos verificar que

1.  $\int_T F_\alpha$  existem, são compactos não vazios e convexos de  $\mathbb{R}^n$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , e, de acordo com o Teorema 2.3, também verificar
2.  $\overline{\bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} \int_T F_\alpha} \subset \int_T F_0$ ,
3.  $\int_T F_{\alpha_2} \subset \int_T F_{\alpha_1}$  se  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ ,
4. se  $\alpha_k \uparrow \alpha > 0$ , então  $\int_T F_\alpha = \bigcap_{k \geq 1} \int_T F_{\alpha_k}$ .

As afirmações feitas em 1 são conseqüências dos Teoremas 1.11 a 1.13, uma vez que  $F_\alpha$  são funções mensuráveis, integravelmente limitadas e com valores em  $Q_C(\mathbb{R}^n)$ , por hipótese.

As inclusões em 2 e 3 seguem do fato de

$$F_{\alpha_2}(t) \subset F_{\alpha_1}(t) \text{ se } 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1.$$

Suponha agora que  $\alpha_k \uparrow \alpha > 0$ , então para todo  $t \in T$ ,  $F(t) \in E^n$  e assim  $F_\alpha(t) = \bigcap_{k \geq 1} F_{\alpha_k}(t)$ . Como a seqüência  $F_{\alpha_k}(t)$  é decrescente e  $F_{\alpha_k}(t)$  são compactos, temos  $F_{\alpha_k}(t) \rightarrow F_\alpha(t)$  no sentido de Kuratowski.

Uma vez que  $F_{\alpha_1}$  é integravelmente limitada e  $F_{\alpha_k}$  forma uma seqüência decrescente de funções mensuráveis, existe uma função integrável  $h : T \rightarrow R_+$  tal que  $\sup_{k \geq 1} \|f_k(t)\| \leq h(t)$  para todo  $f_k \in S(F_{\alpha_k})$ .

Segue do Teorema 1.16 que  $\int_T F_{\alpha_k} \rightarrow \int_T F_\alpha$ , no sentido de Kuratowski. Como  $\int_T F_{\alpha_k}$  é um seqüência decrescente de compactos do  $\mathbb{R}^n$ , ela deve convergir para sua intersecção. Assim, pela unicidade do limite, tem-se



$$\int_T F_\alpha = \bigcap_{k \geq 1} \int_T F_{\alpha_k}.$$

que é a verificação de 4.

**Teorema 4.5** (Kaleva [17]). *Se  $F : T \rightarrow (E^n, D)$  é contínua, então  $F$  é integrável.*

Apresentaremos uma prova ligeiramente diferente daquela apresentada em [17].

**Prova:** Pelo Lema 4.2,  $F$  é fortemente mensurável. Como  $F$  é contínua,  $F_0$  também o é na métrica de Hausdorff  $h$ . Assim a função  $g : T \rightarrow R_+$  definida por  $g(t) = h(\{0\}, F_0(t))$  é contínua em  $T$  já que

$$h(\{0\}, F_0(t_0)) \leq h(\{0\}, F_0(t)) + h(F_0(t), F_0(t_0))$$

ou

$$h(\{0\}, F_0(t_0)) - h(\{0\}, F_0(t)) \leq h(F_0(t), F_0(t_0))$$

isto é

$$|g(t_0) - g(t)| \leq h(F_0(t), F_0(t_0))$$

e a continuidade de  $F_0$  garante a de  $g$ . Logo  $g$  é integrável em  $T$ . Mas para todo  $x \in F_0(t)$ , tem-se  $\|x\| \leq g(t)$ , ou seja,  $F$  é integravelmente limitada. Portanto, pelo Teorema 4.4,  $F$  é integrável.

**Teorema 4.6** (Kaleva [17]). *Seja  $F : T \rightarrow E^n$  integrável e  $c \in T$ . Então*

$$\int_a^b F = \int_a^c F + \int_c^b F.$$

A prova que apresentaremos é uma consequência do Teorema 1.15:

**Prova:** É claro que  $F$  é integrável em qualquer subintervalo de  $[a, b]$ .

Seja  $\alpha \in [0, 1]$ . Do Teorema 1.15, tem-se

$$S_{\int_a^b F_\alpha}(x) = \int_a^b S_{F_\alpha(t)}(x)dt = \int_a^c S_{F_\alpha(t)}(x)dt + \int_c^b S_{F_\alpha(t)}(x)dt = S_{\int_a^c F_\alpha}(x) + S_{\int_c^b F_\alpha}(x).$$

Finalmente, usando o Teorema 1.9, concluimos

$$\int_a^b F_\alpha = \int_a^c F_\alpha + \int_c^b F_\alpha.$$

**Corolário 4.7** (Kaleva [17]). *Se  $F : T \rightarrow (E^n, D)$  é contínua então  $G(t) = \int_a^t F$  é Lipschitziana em  $T$ .*

Nossa prova é uma alternativa à do Kaleva [17].

**Prova:** Sejam  $s, t \in T$  com  $s > t$ . Pelo Teorema 4.6 e do fato de  $D(u + v, u + w) = D(v, w)$ , temos

$$D(G(s), G(t)) = D\left(\int_t^s F, \chi_{\{0\}}\right) = h\left(\int_t^s F_0, \{0\}\right).$$

Como no Teorema 4.5, a função  $g(t) = h(F_0(t), \{0\})$  assume máximo,  $M$ , em  $T$  por ser contínua e  $\|x\| \leq g(t)$  para todo  $x \in F_0(t)$ , isto é,  $F_0(t) \subset B[0, M]$  (bola fechada de centro na origem e raio  $M$ ) donde

$$\int_t^s F_0 \subset \int_t^s B[0, M].$$

Logo,

$$\begin{aligned} h\left(\left(\int_t^s F_0\right), \{0\}\right) &\leq h\left(\left(\int_t^s B[0, M]\right), \{0\}\right) \\ &= h((s - t)B[0, M], \{0\}) = M(s - t) \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é consequência do Exemplo 1.3, Capítulo 1. Assim, concluimos o corolário.

**Teorema 4.8** (Kaleva [17]). *Sejam  $F, G : T \rightarrow E^n$  integráveis e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então*

$$(i) \int_T F + G = \int_T F + \int_T G$$

$$(ii) \int_T \lambda F = \lambda \int_T F$$

(iii)  $D(F, G)$  é integrável

$$(iv) D\left(\int_T F, \int_T G\right) \leq \int_T D(F, G)$$

**Prova:** Ver Kaleva [87]. Notemos que a prova de (i) também poderia ser feita usando a função suporte já que  $(F + G)^\alpha = F_\alpha + G_\alpha$ .

**Teorema 4.9** (Kaleva [17]). *Se  $F : T \rightarrow E^n$  é integrável então a função real*

$$(t, \alpha) \mapsto \text{diâmetro} \left[ \int_a^t F \right]^\alpha, \quad t \in T \text{ e } \alpha \in [0, 1],$$

*é não decrescente em  $t \in T$  e não crescente em  $\alpha \in [0, 1]$ .*

Notemos que a primeira parte é consequência do Teorema 4.6 e a segunda é consequência de  $\int_a^t F \in E^n$ .

**Exemplo 4.1** Seja  $F(t) = f(t)u$  onde  $u \in E^n$  e  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável e positiva. Então

$$\int_0^t F = \left( \int_0^t f(s) ds \right) u.$$

É claro que  $F$  é fortemente mensurável e integravelmente limitada por  $g(s) = af(s)$  onde  $a = \max[u]^0$ .

A conclusão segue do fato de  $[\lambda u]^\alpha = \lambda[u]^\alpha$  e do Exemplo 1.3. Este exemplo generaliza aquele em que  $F(t) = A \in E^n$  dado por Kaleva [17] e ilustra a força do Teorema 1.15, já que foi ele que nos possibilitou concluir o Exemplo 1.3.

**Exemplo 4.2** (Kaleva [17]). Defina  $F : T \rightarrow E^n$  por

$$F_\alpha(t) = \prod_{i=1}^n [a_i^\alpha(t), b_i^\alpha(t)], \quad \alpha \in [0, 1].$$

onde  $a_i^\alpha, b_i^\alpha : T \rightarrow \mathbb{R}$  são integráveis, contínuas à esquerda e  $[a_i^\alpha(t), b_i^\alpha(t)]$  são os  $\alpha$ -níveis de um elemento de  $E^1$ .  $F$  é fortemente mensurável e integravelmente limitada por  $g(t) = n \max_{i \in T} |b_i(t)|$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

De acordo com a demonstração do Teorema 4.4, tem-se

$$\left[ \int_T F \right]^\alpha = \prod_{i=1}^n \left[ \int_T a_i^\alpha(t), \int_T b_i^\alpha(t) \right], \quad \alpha \in [0, 1].$$

## 4.4 Diferenciabilidade

O conceito de diferenciabilidade será baseado na definição de diferenciabilidade para multifunções, dada por Hukuhara [15] como vimos na secção 1.3. De novo, o Teorema 2.3 nos possibilitará a sua extensão para função  $F : T \rightarrow E^n$ .

Se  $x, y \in E^n$  e existe  $z \in E^n$  tal que  $x = y + z$ , então  $z$  será chamado de  $H$ -diferença de  $x$  e  $y$ , denotada por  $x - y$ . A seguinte definição é devido a Puri e Ralescu [29].

**Definição 4.3** A aplicação  $F : T \rightarrow E^n$  é diferenciável em  $t_0 \in T$  se existe  $F'(t_0) \in E^n$  tal que os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0) - F(t_0 - h)}{h}$$

existem e são iguais a  $F'(t_0)$ .

Os limites são tomados no espaço métrico  $(E^n, D)$  e nos ponto extremos de  $T$  consideram-se apenas as derivadas de um dos lados.

Puri e Ralescu [29] também usaram o conceito clássico de diferencial em espaços normados, para dar outra definição de derivada para a função  $F$  acima e provou que esta última é mais fraca que a dada aqui.

Queremos ainda lembrar que, embora  $(E^n, D)$  não seja espaço vetorial, o mesmo pode ser imerso isometricamente em um espaço de Banach (Teorema 2.2) e assim definir a diferencial da função  $F$ , como comentada acima (Ver Puri e Ralescu [29] e Kaleva [18]).

**Proposição 4.10** Se  $F : T \rightarrow E^n$  é diferenciável, então a multifunção  $F_\alpha$  é  $H$ -diferenciável para todo  $\alpha \in [0, 1]$  e  $DF_\alpha(t) = [F'(t)]^\alpha$  onde  $DF_\alpha$  é a  $H$ -diferencial da função  $F_\alpha$ .

**Prova:** conseqüência imediata da definição de  $F'(t)$ .

É claro que a recíproca da Proposição 4.10 não é verdadeira uma vez que a diferença de Hukuhara  $[x]^\alpha - [y]^\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , não implica na  $H$ -diferença  $x - y$ . Contudo, tem-se o seguinte

**Teorema 4.11** (Kaleva [17]). *Seja  $F : T \rightarrow E^n$  satisfazendo as hipóteses:*

- (a) *Para cada  $t \in T$  existe  $\beta > 0$  tal que as  $H$ -diferenças  $F(t+k) - F(t)$  e  $F(t) - F(t-k)$  existam para todo  $0 \leq k \leq \beta$ ;*
- (b) *As funções  $F_\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  são uniformemente  $H$ -diferenciáveis com derivadas  $DF_\alpha$ , isto é, para cada  $t \in T$  e  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que*

$$h((F_\alpha(t+k) - F_\alpha(t))/k, DF_\alpha(t)) < \varepsilon$$

e

$$h((F_\alpha(t) - F_\alpha(t-k))/k, DF_\alpha(t)) < \varepsilon$$

para todo  $0 \leq k < \delta$  e  $\alpha \in [0, 1]$ .

Então  $F$  é diferenciável e a derivada de  $F$  é dada pela Proposição 4.10.

**Teorema 4.12** (Kaleva [17]). *Seja  $F : T \rightarrow E^1$  diferenciável e denote  $[F(t)]^\alpha = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Então  $f_\alpha$  e  $g_\alpha$  são diferenciáveis e*

$$[F'(t)]^\alpha = [f'_\alpha(t), g'_\alpha(t)].$$

**Prova:** Basta ver que

$$\frac{1}{k}[F(t+k) - F(t)]^\alpha = [(f_\alpha(t+k) - f_\alpha(t))/k, (g_\alpha(t+k) - g_\alpha(t))/k]$$

e passar ao limite. Para  $[F(t) - F(t-k)]^\alpha$  faz-se o mesmo.

**Teorema 4.13** (Kaleva [17]). *Se  $F, G : T \rightarrow E^n$  são diferenciáveis e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então*

- (a)  *$F$  e  $G$  são contínuas*
- (b)  *$(F + G)'(t) = F'(t) + G'(t)$*
- (c)  *$(\lambda F)'(t) = \lambda F'(t)$ .*

**Prova:**

(a) Seja  $k > 0$  de modo que a  $H$ -diferença  $F(t+k) - F(t)$  existe, então

$$\begin{aligned} D(F(t+k), F(t)) &= D(F(t+k) - F(t), \chi_{\{0\}}) \\ &\leq kD((F(t+k) - F(t))/k, F'(t)) + kD(F'(t), \chi_{\{0\}}), \end{aligned}$$

e pela diferenciabilidade de  $F$ , o lado direito da desigualdade vai para zero se  $k \rightarrow 0^+$ . De maneira análoga tira-se a continuidade à esquerda de  $F$ .

Para provar (b) e (c), basta usar as propriedades da métrica  $D$ :

$$D(u+v, u+w) = D(v, w) e D(\lambda u, \lambda v) = |\lambda|D(u, v).$$

**Teorema 4.14** (Kaleva [17]). *Seja  $F : T \rightarrow E^n$  contínua. Então para todo  $t \in T$  a função  $G(t) = \int_a^t F$  é diferenciável e  $G'(t) = F(t)$ .*

**Prova:** De acordo com o Teorema 4.5,  $F$  é integrável e para  $k > 0$ , suficientemente pequeno

$$G(t+k) - G(t) = \int_t^{t+k} F.$$

Seja  $\varepsilon > 0$ . Pelo Exemplo 4.1, Teorema 4.8 e pela continuidade de  $F$ , tem-se

$$\begin{aligned} D((G(t+k) - G(t))/k, F(t)) &= \frac{1}{k}D\left(\int_t^{t+k} F(s)ds, \int_t^{t+k} F(t)ds\right) \\ &\leq \frac{1}{k} \int_t^{t+k} D(F(s), F(t))ds < \varepsilon \end{aligned}$$

De modo análogo, conclui-se que  $\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{G(t) - G(t-k)}{k} = F(t)$ .

**Teorema 4.15** (Kaleva [17]). *Seja  $F : T \rightarrow E^n$  diferenciável e suponha que  $F'$  é integrável. Então para todo  $s \in T$  tem-se*

$$F(s) = F(a) + \int_a^s F'$$

Faremos a prova deste teorema para ilustrar, mais uma vez, a importância da função suporte no estudo do cálculo de funções com valores em conjuntos fuzzy.

**Prova:** Como existe  $F'$ , então, de acordo com a Proposição 4.10, devemos apenas mostrar que para todo  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$F_\alpha(s) = F_\alpha(a) + \int_a^s DF_\alpha.$$

Agora, usando os Teoremas 1.15 e 1.17 e os fatos que  $F_\alpha(s) - F_\alpha(a)$ ,  $DF_\alpha$  e  $\int_a^s DF_\alpha$  são subconjuntos não vazios de  $Q_C(\mathbb{R}^n)$ , temos

$$\begin{aligned} S_{\int_a^s DF_\alpha}(x) &= \int_a^s S_{DF_\alpha(t)}(x) dt = \int_a^s \frac{d}{dt} [S_{F_\alpha(t)}(x)] dt \\ &= S_{F_\alpha(s)}(x) - S_{F_\alpha(a)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Logo, de acordo com o Teorema 1.9, tem-se

$$F_\alpha(s) = F_\alpha(a) + \int_a^s DF_\alpha$$

**Teorema 4.16** (Kaleva [17]). *Seja  $F : T \rightarrow E^n$  diferenciável em  $T$ . Se  $t_1, t_2 \in T$  com  $t_1 \leq t_2$  então existe  $C \in E^n$  tal que  $F(t_2) = F(t_1) + C$ .*

**Prova:** Se  $F'$  for integrável, o resultado segue do teorema anterior. Para a demonstração geral ver Kaleva [17].

**Corolário 4.17** *Se  $F : T \rightarrow E^n$  é diferenciável em  $T$  então para cada  $\alpha \in [0, 1]$  a função real  $t \mapsto \dim[F(t)]^\alpha$  é não decrescente em  $T$ , onde  $\dim A$  é o diâmetro do conjunto  $A$ .*

**Teorema 4.18** (Kaleva [17]). *Se  $F : T \rightarrow E^n$  é continuamente diferenciável em  $T$ . Então*

$$D(F(b), F(a)) \leq (b - a) \sup_{t \in T} D(F'(t), \chi_{\{0\}}).$$

**Prova:** Usando os Teoremas 4.8 e 4.15, obtemos

$$D(F(b), F(a)) = D\left(\int_T F', \chi_{\{0\}}\right) \leq (b-a) \sup_{t \in T} D(F'(t), \chi_{\{0\}}).$$

**Teorema 4.19** (de Rolle) (Kaleva [17]). *Seja  $F : T \rightarrow E^1$  diferenciável em  $T$ . Se  $F(a) = F(b)$  então existe  $t_0 \in T$  tal que  $F'(t_0) = \chi_{\{0\}}$ .*

**Prova:** Pelo Teorema 4.16,  $F(t) = F(a) + R(t)$  para algum  $R(t) \in E^1$ . Uma vez que  $F(b) = F(a)$  então pelo Corolário 4.17  $\text{diam } F_\alpha(t)$  é constante em  $T$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Segue que  $\text{diam } R_\alpha(t) = 0$  e conseqüentemente  $R(t) = \chi_{r(t)}$  para alguma função  $r(t) \in \mathbb{R}$  diferenciável já que  $F$  o é. Mais ainda,  $r(a) = r(b) = 0$  e assim existe  $t_0 \in T$  tal que  $r'(t_0) = 0$ . Como existe  $F'(t)$  então, pela Proposição 4.10, basta mostrar que  $DF_\alpha(t_0) = 0$ :

$$S_{DF_\alpha(t)}(x) = \frac{d}{dt} S_{F_\alpha(a+r(t))}(x) = S_{r'(t)}(x) \quad \forall x$$

ou

$$DF_\alpha(t) = r'(t), \quad \forall t \in T \quad \text{e} \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

logo

$$F'(t_0) = \chi_{r'(t_0)} = \chi_{\{0\}}$$

**Exemplo 4.3** Seja  $F(t) = f(t)u$  onde  $u \in E^n$  e  $f : T \rightarrow R_+$  é crescente e de classe  $C^1$ . Então  $F$  é derivável e  $F'(t) = f'(t)u$ .

**Prova:** Vamos mostrar que  $f'(t)u$  é contínua, portanto integrável e, usando o Exemplo 4.1, temos

$$F(t) = F(a) + \left( \int_a^t f'(s) ds \right) u = F(a) + \int_a^t f'(s) u$$

e finalmente, dos Teoremas 4.13 e 4.14 tem-se



$$F'(t) = f'(t)u.$$

A função  $f'(t)u$  é contínua pois, para  $t \in T$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|s - t| < \delta$  então

$$\begin{aligned} D(f'(t)u, f'(s)u) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h(f'(t)[u]^\alpha, f'(s)[u]^\alpha) \\ &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max_{\|x\|=1} \left| S_{f'(t)[u]^\alpha}(x) - S_{f'(s)[u]^\alpha}(x) \right| \\ &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max_{\|x\|=1} \left| (f'(t) - f'(s))S_{[u]^\alpha}(x) \right| \\ &= |f'(t) - f'(s)| \sup_{a \in [u]^0} |a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.4** Sejam  $F(t) = f(t)u$  como no exemplo anterior e  $r : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável. Então a função  $G(t) = \chi_{r(t)} + F(t)$  pode ser interpretada como  $F(t)$  se deslocado ao longo da curva  $r$  no  $\mathbb{R}^n$ .

De acordo com os Teoremas 4.8 e 4.13 temos

$$\int_T G = \chi_{\int_T r(t)dt} + \left( \int_T f(t)dt \right) u$$

e

$$G'(t) = \chi_{r'(t)} + f'(t)u.$$

Fazendo  $f(t) = 1$ , obtemos  $G(t) = \chi_{r(t)} + u$ , exemplo dado por Kaleva [17].

# Capítulo 5

## Equação diferencial fuzzy

### 5.1 Introdução

Com o intuito de modelar fenômenos com algum grau de incerteza, apresentamos aqui os principais resultados sobre equação diferencial fuzzy, ferramenta esta apropriada para tais fenômenos, a exemplo das equações diferenciais clássicas, que modelam fenômenos que admitimos serem determinísticos.

Os resultados aqui apresentados foram basicamente desenvolvidos por Kaleva [17,18] Seikkala [36]. Kaleva [17] desenvolve uma teoria mais abrangente, em  $E^n$ , enquanto Seikkala [36] se restringe ao espaço  $E^1$ . Mais recentemente, Wu e al. [41] demonstram a existência e unicidade do problema de Cauchy para equações diferenciais fuzzy com o campo satisfazendo uma condição de Cauchy generalizada e também estudam a relação entre a solução de uma equação diferencial fuzzy e suas soluções aproximadas.

Considerações sobre parâmetros fuzzy, bem como apenas a condição inicial fuzzy, são feitas e, para este caso, verificamos que, em um certo sentido, a solução determinística é “preferida”.

### 5.2 Equação diferencial fuzzy

Seja  $F : T \times E^n \rightarrow E^n$  e consideremos o problema de valor inicial

$$u'(t) = F(t, u(t)), \quad u(a) = u_0, \quad a > 0 \quad (5.1)$$

**Lema 5.1** *Seja  $F : T \times E^n \rightarrow E^n$  contínua. A função  $u : T \rightarrow E^n$  é solução de (5.1) se e somente se é contínua e satisfaz a equação integral*

$$u(t) = u_0 + \int_a^t F(s, u(s))ds \quad (5.2)$$

para todo  $t \in T$ .

**Prova:** Se  $u(t)$  é solução de (5.1), então de acordo com os Teoremas 4.13 e 4.15,  $u(t)$  é contínua e satisfaz (5.2). Por outro lado, se  $u(t)$  satisfaz (5.2), então  $u(t)$  satisfaz (5.1) pelos Teoremas 4.13 e 4.14.

Notemos que o Lema 5.1 não pode ser estendido para  $t < a$  pois, em vista do Corolário 4.17,  $\text{diam } [u(t)]^\alpha$  é não decrescente já que  $u(t)$  é diferenciável. Porém  $\text{diam } [u(t)]^\alpha \geq \text{diam } [u_0]^\alpha$  por satisfazer (5.2) mesmo para  $t < a$ .

Como para o caso de espaços de dimensão finita, aqui também temos uma condição que nos garante a existência e unicidade do problema de valor inicial (5.1) em  $T$ . Mais ainda, a solução depende continuamente do valor inicial.

**Teorema 5.2** (Kaleva [17]). *Seja  $F : T \times E^n \rightarrow E^n$  contínua e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe  $k > 0$  tal que*

$$D(F(t, u), F(t, v)) \leq kD(u, v)$$

para todo  $t \in T$ ,  $u, v \in E^n$ . Então o problema (5.1) tem solução única em  $T$ .

Apresentaremos aqui a prova dada por Kaleva [17].

**Prova:** Dado  $(t_1, v) \in T \times E^n$  e  $\eta > 0$  tal que  $\eta k < 1$ , então o problema

$$u'(t) = F(t, u(t)), \quad u(t_1) = v \quad (5.3)$$

tem solução única em  $I_1 = [t_1, t_1 + \eta]$ , pois para  $\zeta \in C(I_1, E^n)$ , conjunto das funções contínuas de  $I_1$  em  $E^n$ , defina a função

$$G\zeta(t) = v + \int_{t_1}^t F(s, \zeta(s))ds, \quad t \in I_1$$

e a métrica

$$H(\zeta, \varphi) = \sup_{t \in I_1} D(\zeta(t), \varphi(t))$$

em  $C(I_1, E^n)$ . Pelo fato de  $(E^n, D)$  ser completo,  $C(I_1, E^n)$  também é completo.

Pelo Corolário 4.7,  $G\zeta \in C(I_1, E^n)$ . Mais ainda, pelo Teorema 4.8 e a continuidade de  $F$  bem como o fato de  $F$  ser lipschitziana na segunda variável, temos

$$\begin{aligned} H(G\zeta, G\varphi) &= \sup_{t \in I_1} D\left(\int_{t_1}^t F(s, \zeta(s))ds, \int_{t_1}^t F(s, \varphi(s))ds\right) \\ &\leq \int_{t_1}^{t_1+\eta} D(F(s, \zeta(s)), F(s, \varphi(s)))ds \leq \eta k H(\zeta, \varphi) \end{aligned}$$

para todo  $\zeta, \varphi \in C(I_1, E^n)$ . Portanto, pelo Teorema de Banach para contrações,  $G$  tem ponto fixo que, pelo Lema 5.1, é a solução de (5.3).

Expressando  $T$  como reunião finita de intervalos  $I_k$  com comprimentos menores que  $\eta$  e, unindo cada uma das soluções obtidas em  $I_k$ , obtemos a única solução em  $T$ .

**Corolário 5.3** *Seja  $F$  como no Teorema 5.2. Denote por  $u(t, u_0)$  a solução para o problema (5.1) com valor inicial  $u_0$ . Então existe um número real  $q$  tal que*

$$H(u(\cdot, u_0), u(\cdot, v_0)) \leq qD(u_0, v_0)$$

para quaisquer  $u_0, v_0 \in E^n$ .

**Prova** (dada por Kaleva [17]) Sejam  $I_k, k = 1, \dots, m$  como no Teorema e denote  $\bar{u} = u(t_k, u_0)$  e  $\bar{v} = u(t_k, v_0)$ . Fazendo

$$G_{\bar{u}}\zeta(t) = \bar{u} + \int_{t_k}^t F(s, \zeta(s))ds$$

temos

$$H(G_{\bar{u}}u(\cdot, u_0), G_{\bar{v}}u(\cdot, u_0)) = D(\bar{u}, \bar{v})$$

e usando o Teorema 5.2, vem

$$\begin{aligned} H(G_{\bar{u}}u(\cdot, u_0), G_{\bar{v}}^n u(\cdot, v_0)) &\leq H(G_{\bar{u}}u(\cdot, u_0), G_{\bar{v}}u(\cdot, v_0)) \\ &+ \sum_{i=2}^n H(G_{\bar{v}}^{i-1}u(\cdot, u_0), G_{\bar{v}}^i u(\cdot, u_0)) \\ &\leq (1 + \eta k + \dots + (\eta k)^{n-1})D(\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned}$$

Como  $G_{\bar{v}}^n u(\cdot, u_0)$  converge para o ponto fixo  $u(\cdot, v_0) = G_{\bar{v}}u(\cdot, v_0)$  de  $G_{\bar{v}}$  em  $C(I_k, E^n)$ , temos

$$H(u(\cdot, u_0), u(\cdot, v_0)) = H(G_{\bar{u}}u(\cdot, u_0), G_{\bar{v}}u(\cdot, v_0)) \leq \frac{1}{1 - \eta k} D(\bar{u}, \bar{v})$$

Fazendo indução sobre  $m$ , tem-se o resultado.

Para um caso mais geral, consideremos  $F : T \times U \rightarrow U$  contínua onde  $U$  é um subconjunto fechado de  $(E^n, D)$ . O teorema abaixo nos fornece uma condição necessária e suficiente para existência de solução do problema:

$$u'(t) = F(t, u(t)), \quad u(a) = u_0 \in U \quad (5.4)$$

**Teorema 5.4** (Kaleva [18]). *O problema de valor inicial (5.4) tem uma solução  $u \in C(T, U)$  se, e somente se,  $U$  é localmente compacto.*

Os exemplos abaixo são devidos a Kaleva [18].

**Exemplo 5.1** O conjunto  $U \subset E^n$ , formado pelos conjuntos fuzzy triangulares bem como os trapezoidais, são localmente compactos.

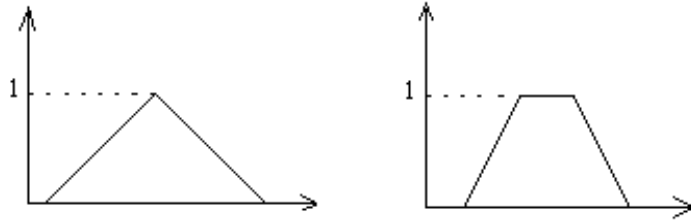


Figura 5.1: (a)  $u$  triangular

(b)  $u$  trapezoidal.

**Exemplo 5.2** O conjunto  $U \subset E^n$  formado pelos conjuntos fuzzy com  $\alpha$ -níveis equi-lipschitzianos, isto é, existe  $M > 0$  tal que  $h([u]^\alpha, [u]^\beta) \leq M|\alpha - \beta|$  para todo  $u \in U$  e  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ , é localmente compacto.

Notemos que de acordo com a observação feita na Proposição 2.8, se  $u \in U$  então  $u$  não tem pontos de máximos locais próprios.

### 5.3 Equação diferencial fuzzy com o campo dado pela extensão de Zadeh

Nesta secção, nosso principal objetivo é comparar as soluções dos problemas de Cauchy clássico e fuzzy. Mais ainda, nossa conclusão, como era de se esperar, é que a solução do problema clássico é, em um certo sentido, a “preferida”.

Antes porém, vamos observar que para  $f : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a extensão de Zadeh,  $\hat{f} : T \times E^n \rightarrow E^n$  é dada por

$$\hat{f}(t, u)(x) = \begin{cases} \sup_{B_t(x) = \{(t, \tau) : f(t, \tau) = x\}} u(\tau) & \text{se } B_t(x) \neq \phi \\ 0 & \text{se } B_t(x) = \phi \end{cases}$$

para todo conjunto fuzzy  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  e continuam valendo os resultados obtidos na Secção 3.2 do Capítulo 3, desde que  $\hat{f}$  esteja bem definida. Queremos salientar que o fato de  $f$  ser contínua não é suficiente para que  $\hat{f}(t, u) \in E^n$  se  $n \geq 2$ , já que  $[\hat{f}(t, u)]^\alpha = f(t, [u]^\alpha)$  para todo  $t \in T$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . Está claro também que se  $f : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  for linear afim, então  $\hat{f}$  está bem definida para todo  $n \geq 1$  e que se  $F : T \times E^n \rightarrow E^n$  for dada por  $F(t, u) = a(t)u$ , onde  $a : T \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então  $F$  é extensão de Zadeh da função  $f : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $f(t, x) = a(t)x$ . Finalmente, se  $f : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada por  $f(t, x) = A(t)x$  com  $A(t)$  matriz de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  inversível para todo  $t$ , então, de acordo com observações feitas na Secção 3.2 do Capítulo 3, a extensão  $\hat{f}(t, u) = u(A^{-1}(t))$  para todo  $t \in T$  e  $u \in E^n$ .

Consideremos agora o problema determinístico

$$x'(t) = f(t, x), \quad x(a) = x_0 \tag{5.5}$$

e o problema fuzzy

$$u'(t) = \hat{f}(t, u), \quad u(a) = u_0 \quad (5.6)$$

onde  $a > 0$  e  $\hat{f}$  é a extensão de Zadeh de  $f$ .

**Teorema 5.5** *Seja  $f : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uniformemente contínua e lipschitziana na segunda variável. Se  $\hat{f} : T \times E^n \rightarrow E^n$  estiver bem definida, isto é,  $f$  leva convexo em convexo para cada  $t$  fixo, então*

(a) *cada um dos problemas (5.5) e (5.6) tem solução única.*

(b) *a solução do problema determinístico (5.5) é preferida, isto é, se  $x(t, x_0)$  e  $u(t, u_0)$  são as soluções de (5.5) e (5.6) respectivamente, então  $u(t, u_0)(x(t, x_0)) = 1$  para todo  $t \in T$ , se  $u_0(x_0) = 1$ .*

**Prova:**

(a) O problema (5.5) é clássico. Quanto ao problema (5.6), uma única solução é garantida pelo Teorema 5.2, pois de acordo com o Teorema 3.5,  $\hat{f}$  é lipschitziana na segunda variável, se  $f$  o for, e é contínua pelo Teorema 3.4.

(b) Precisamos provar que para todo  $t \in T$ ,

$$x(t, x_0) \in [u(t, u_0)]^1 \text{ se } x_0 \in [u_0]^1.$$

Dado  $x_0 \in [u_0]^1$ , seja  $v_0 \in E^n$  cujos níveis são

$$[v_0]^\alpha = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \\ [u_0]^1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Como o problema (5.6), com condição inicial  $v_0$ , tem solução  $v(t)$  única e, lembrando que  $[\hat{f}(t, v(t))]^\alpha = f(t, [v(t)]^\alpha)$ , o nível  $[v(t)]^\alpha$  é a única solução do problema de Cauchy

$$DX(t) = f(t, X(t)), \quad X(0) = [v_0]^\alpha, \quad (5.7)$$

para funções com valores em conjuntos, onde  $D$  indica a derivada de Hukuhara.

Assim, se  $\alpha = 1$  então  $\{x(t, x_0)\}$  e  $[v(t, v_0)]^1$  são soluções do mesmo problema e, pela unicidade, tem-se

$$\{x(t, x_0)\} = [v(t, v_0)]^1$$

para todo  $t \in T$ .

Por outro lado, se  $\alpha = \frac{1}{2}$  então  $[u(t, u_0)]^1$  e  $[v(t, v_0)]^{\frac{1}{2}}$  são soluções do mesmo problema e, de novo pela unicidade, tem-se

$$[u(t, u_0)]^1 = [v(t, v_0)]^{\frac{1}{2}}$$

para todo  $t \in T$  e como  $[v(t, v_0)]^1 \subset [v(t, v_0)]^{\frac{1}{2}}$ , concluímos que

$$x(t, x_0) \in [u(t, u_0)]^1$$

para todo  $t \in T$ .

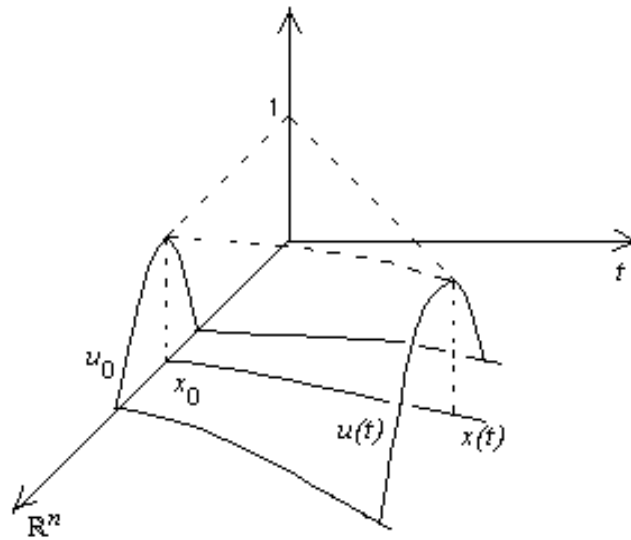


Figura 5.2:  $x(t)$  e  $u(t)$ : soluções de 5.5 e 5.6 respectivamente.

Note que a conclusão obtida no item (b) do teorema acima, continua valendo se as suas hipóteses forem trocadas por outras que garantam a existência e unicidade da solução do problema (5.6). Neste caso, podemos também observar que se  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  em (5.6), então as soluções clássica e fuzzy coincidem. Finalmente, de maneira análoga à que fizemos para concluir que  $x(t, x_0) \in [u(t, u_0)]^1$ , podemos concluir que se  $A, B \in Q_C(\mathbb{R}^n)$  com  $A \subset B$ , então  $X(t, A) \subset X(t, B)$  onde  $X(t, A)$  e  $X(t, B)$  são as soluções de (5.7) e condições iniciais  $A$  e  $B$  respectivamente.



## 5.4 Equação diferencial fuzzy em $E^1$

Nesta secção vamos nos restringir ao estudo do problema de valor inicial (5.1) para o caso em que a função  $F : T \times E^1 \rightarrow E^1$  e  $T = \mathbb{R}_+$ , exceto quando for especificado. Mais ainda, vamos nos restringir aos casos em que o campo  $F$  é “linear afim” ou é obtido via extensão de Zadeh.

Lembramos que se  $u : T \rightarrow E^1$  é diferenciável e  $[u]^\alpha = [u_1^\alpha, u_2^\alpha]$ , então pelo Teorema 4.12,  $u_1^\alpha, u_2^\alpha$  são diferenciáveis e

$$[u'(t)]^\alpha = [(u_1^\alpha)'(t), (u_2^\alpha)'(t)]$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

## 5.5 Valor inicial fuzzy em $E^1$

Consideremos o problema de valor inicial fuzzy

$$u'(t) = \hat{f}(t, u(t)), \quad u(0) = u_0 \tag{5.8}$$

onde  $\hat{f}$  é a extensão de Zadeh da função contínua  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u_0 \in E^1$  com  $\alpha$ -níveis  $[u_0]^\alpha = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha]$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ .

Como sabemos, se  $u \in E^1$  então

$$\begin{aligned} [\hat{f}(t, u)]^\alpha &= f(t, [u]^\alpha) \\ &= [\min\{f(t, x) : x \in [u]^\alpha\}, \max\{f(t, x) : x \in [u]^\alpha\}]. \end{aligned}$$

Notemos que a continuidade de  $f$  é suficiente para que  $\hat{f}$  esteja bem definida já que  $f$  leva intervalo fechado em intervalo fechado para cada  $t$  fixo.

Se denotarmos  $[u]^\alpha = [u_1^\alpha, u_2^\alpha]$  e

$$f_1(t, u_1^\alpha, u_2^\alpha) = \min\{f(t, x) : x \in [u_1^\alpha, u_2^\alpha]\}$$

$$f_2(t, u_1^\alpha, u_2^\alpha) = \max\{f(t, x) : x \in [u_1^\alpha, u_2^\alpha]\},$$

então  $u(t)$  será solução de (5.8) no intervalo  $[0, b)$  se

$$\begin{cases} (u_1^\alpha)'(t) = f_1(t, u_1^\alpha, u_2^\alpha), & u_1^\alpha(0) = u_{01}^\alpha & (5.9a) \\ (u_2^\alpha)'(t) = f_2(t, u_1^\alpha, u_2^\alpha), & u_2^\alpha(0) = u_{02}^\alpha & (5.9b) \end{cases}$$

para  $t \in [0, b)$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . Assim para  $\alpha$  fixado, temos um problema de valor inicial em  $\mathbb{R}^2$ . Se nós o resolvermos de maneira única, teremos apenas que verificar se os intervalos  $[u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t)]$  definem um conjunto fuzzy, isto é, se os intervalos satisfazem ao Teorema 2.3.

**Teorema 5.6** (Seikkala [36]) *Suponha que*

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leq g(t, |x - \bar{x}|), \quad t \geq 0, \quad x, \bar{x} \in \mathbb{R}$$

onde  $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  é contínua tal que  $r \mapsto g(t, r)$  é não decrescente, o problema de valor inicial

$$r'(t) = g(t, r(t)), \quad r(0) = r_0 \quad (5.10)$$

tem uma solução em  $\mathbb{R}_+$  para  $r_0 > 0$  e que  $r(t) \equiv 0$  é a única solução de (5.10) para  $r_0 = 0$ . Então o problema (5.8) tem única solução fuzzy.

**Exemplo 5.3** A função  $f(t, x) = -x$  satisfaz às hipóteses do Teorema 5.6 com  $g(t, r) = r$  e portanto o problema

$$u'(t) = -u(t), \quad u(0) = u_0 \in E^1$$

tem solução única fuzzy  $u$  em  $\mathbb{R}_+$  e seus níveis são dados por

$$\begin{aligned} u_1^\alpha(t) &= \frac{u_{01}^\alpha - u_{02}^\alpha}{2} e^t + \frac{u_{01}^\alpha + u_{02}^\alpha}{2} e^{-t} \\ u_2^\alpha(t) &= \frac{u_{02}^\alpha - u_{01}^\alpha}{2} e^t + \frac{u_{01}^\alpha + u_{02}^\alpha}{2} e^{-t} \end{aligned}$$

que são obtidos através das equações (5.9a) e (5.9b). É fácil ver neste exemplo que se  $x(0) = r_0 \in \mathbb{R}$ , a solução é

$$x(t, r_0) = r_0 e^{-t}$$

e se  $r_0 \in u_0$ , então

$$x(t, r_0) \in [u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t)],$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , isto é,  $x(t, r_0)$  tem grau de pertinência 1 para todo  $t \geq 0$ .

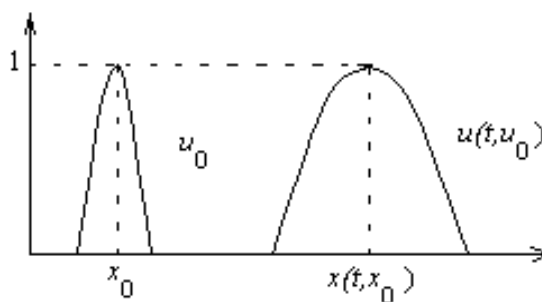


Figura 5.3: Evolução das soluções  $u(t, u_0)$  e  $x(t, x_0)$  no tempo.

Devido ao fato das soluções fuzzy terem  $\alpha$ -níveis crescentes com  $t$ , conceitos tais como *ponto de equilíbrio*, *estabilidade de solução* ou *equilíbrio assintótico* são questões ainda não muito claras em se tratando de equação diferencial fuzzy. Seikkala [36], define

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \zeta \in E^1$$

se

$$[\zeta]^\alpha = \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} u_1^\alpha(t), \lim_{t \rightarrow \infty} u_2^\alpha(t) \right]$$

e  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow E^1$ .

**Teorema 5.7** (Seikkala [36]) *Suponha que*

$$|f(t, x)| \leq g(t, |x|), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde  $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma aplicação contínua tal que  $r \mapsto g(t, r)$  é não decrescente e para cada  $r_0 > 0$ , a solução maximal de (5.10) existe e é limitada em  $\mathbb{R}_+$ . Então o maior intervalo de qualquer solução  $u$  de (5.8) é  $\mathbb{R}_+$  e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \zeta \in E^1$$

**Observação:** Se  $f$  e  $g$  são como no Teorema 5.7 e se para cada  $t_0 \geq 0$  e  $r_0 > 0$  a solução de (5.10) existe e é limitada em  $[t_0, \infty)$ , então qualquer solução fuzzy de (5.8) através de qualquer condição  $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}_+ \times E^1$  existe em  $[t_0, \infty)$  e tem um limite  $\zeta \in E^1$  com  $t$  tendendo a  $\infty$ . Notemos também que o limite  $\zeta \in E^1$  é tal que o diâmetro de qualquer  $\alpha$ -nível deve ser maior ou igual ao diâmetro do  $\alpha$ -nível da solução  $u(t)$  para todo  $t$ , uma vez que o diâmetro de  $[u(t)]^\alpha$  cresce com  $t$ .

## 5.6 Equação “linear afim” com coeficientes fuzzy em $E^1$

Considere o problema de valor inicial fuzzy

$$u'(t) = A(t)u(t) + B(t), \quad u(0) = u_0 \in E^1 \quad (5.11)$$

com  $t \geq 0$  e coeficientes  $A, B : \mathbb{R}_+ \rightarrow E^1$ .

Das definições de soma e multiplicação entre números fuzzy (ver secção 2.3) segue que se  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow E^1$  é solução de (5.11) então seus  $\alpha$ -níveis satisfazem

$$\begin{cases} (u_1^\alpha)'(t) = \min\{A_i^\alpha(t)u_j^\alpha(t) : i, j = 1, 2\} + B_1^\alpha(t), & u_1^\alpha(0) = u_{01}^\alpha \\ (u_2^\alpha)'(t) = \max\{A_i^\alpha(t)u_j^\alpha(t) : i, j = 1, 2\} + B_2^\alpha(t), & u_2^\alpha(0) = u_{02}^\alpha \end{cases} \quad (5.12)$$

**Teorema 5.8** (Seikkala [36]) *Se para cada  $\alpha \in [0, 1]$  as funções  $A_i^\alpha$  são integráveis, então (5.12) tem solução única que são os  $\alpha$ -níveis da única solução de (5.11)*

**Corolário 5.9** *Seja  $T$  um intervalo fechado de  $\mathbb{R}_+$ . Se  $A, B : T \rightarrow E^1$  são contínuas, então o problema (5.11) tem solução única, dada por (5.12).*

**Prova:** De acordo com o Teorema 4.5 e o Exemplo 1.1, as funções  $A_i^\alpha$  são integráveis e assim o Corolário 5.9 vale pelo Teorema 5.8. Um cálculo direto também nos mostra que as hipóteses do Teorema 5.2 estão satisfeitas.

# Capítulo 6

## Sistemas dinâmicos fuzzy discretos

### 6.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentadas as definições clássicas de estabilidade bem como estabilidade assintótica de ponto fixo, para funções  $F : (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$ .

Como mencionado antes, o Teorema 2.3 relaciona univocamente cada elemento  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  com uma família de subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$ , seus  $\alpha$ -níveis. Assim, estudaremos quais propriedades terão os  $\alpha$ -níveis de pontos fixos estáveis bem como assintoticamente estáveis. Para tanto, conceitos como os de conjunto invariante, conjunto atrator,  $\omega$ -limite, etc. serão importantes e podem ser encontrados em Hale [12].

A maior parte de nossas conclusões refere-se ao campo fuzzy obtido via princípio de extensão de Zadeh de uma função contínua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cujas propriedades encontram-se no Capítulo 3. Baseando-se também nesse princípio, Cabrelli e al. [06] e Forte e al. [09] estudam *sistemas iterados fuzzy* onde as funções envolvidas são contrações. Tais sistemas generalizam os clássicos *sistemas de funções iterativos* usados no estudo de construção de imagens. Comparações entre as soluções fuzzy e as determinísticas serão analisadas e, como no Capítulo 5, veremos também que a solução determinística é “preferida”.

### 6.2 Sistemas dinâmicos fuzzy discretos

Um sistema *dinâmico fuzzy discreto* é um sistema iterativo

$$u_{n+1} = F(u_n) \quad (6.1)$$

onde,  $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  é uma função.

Dado  $u_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , a seqüência de iteradas

$$u_0, F(u_0), F(F(u_0)), \dots$$

é chamada de *solução ou órbita positiva de (6.1) por  $u_0$*  e  $F^n(u_0)$  denota a composição de  $F$   $n$ -vezes.

Consideremos  $\hat{f}$  a extensão de Zadeh da função contínua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e (6.1) dado por  $\hat{f}$ , isto é,

$$u_{n+1} = \hat{f}(u_n). \quad (6.2)$$

Dizemos que (6.2) é o sistema fuzzy *associado* ao sistema determinístico

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (6.3)$$

O teorema a seguir nos diz que, como já havíamos observado para equações diferenciais, as soluções determinísticas são preferidas.

**Teorema 6.1** *Suponha que  $u_n$  e  $x_n$  sejam soluções de (6.2) e (6.3) por  $u_0$  e  $x_0$  respectivamente e que  $u_0(x_0) = 1$ . Então  $u_n(x_n) = 1$  para todo  $n \geq 0$ .*

**Prova:**

$$u_{n+1}(x_{n+1}) = \hat{f}(u_n)(x_{n+1}) = \sup_{x_{n+1}=f(\tau)} u_n(\tau) \geq u_n(x_n)$$

já que  $u_n$  e  $x_n$  são soluções. Assim,

$$u_{n+1}(x_{n+1}) \geq u_n(x_n) \geq \dots \geq u_0(x_0) = 1.$$

Notemos que não foi preciso usar a continuidade de  $f$ . Porém, sendo  $f$  contínua, o teorema acima pode também ser provado usando a monotonicidade de  $\hat{f}$  vista no Corolário 3.3. Observe

ainda que a monotonicidade de  $\hat{f}$  implica  $\hat{f}^{n+1}(u_0) \geq \hat{f}^n(u_0)$  para todo  $n \geq m$  fixo, se  $\hat{f}^{m+1}(u_0) \geq \hat{f}^m(u_0)$ .

Para encerrar esta secção, enunciaremos alguns resultados para pontos fixos.

**Definição 6.1** Seja a aplicação  $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Dizemos que  $\bar{u} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  é ponto fixo de  $F$  se  $F(\bar{u}) = \bar{u}$ .

Notemos que  $F(\bar{u}) = \bar{u}$  se, e somente se,

$$[F(\bar{u})]^\alpha = [\bar{u}]^\alpha$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Teorema 6.2** Seja  $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Se  $F$  for contração, então  $F$  tem único ponto fixo.

**Prova:** A demonstração é clássica, já que  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$  é completo.

Vale a pena ressaltar que se  $\bar{u}$  for o ponto fixo, então

$$D(F^n(u), \bar{u}) \leq \frac{k^n}{1-k} D(F(u), \bar{u})$$

nos dá uma cota superior ao se tomar a  $n$ -ésima iterada como valor aproximado para  $\bar{u}$ , onde  $k$  é a constante de contração.

O teorema seguinte é uma consequência do teorema do ponto fixo de Tychonoff, enunciado e demonstrado por Kaleva [16], no caso fuzzy.

**Teorema 6.3** Seja  $K$  um subconjunto compacto e convexo de  $(E^n, D)$ . Toda aplicação contínua de  $K$  em  $K$  tem ponto fixo.

Observe que se  $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  for extensão de alguma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e se  $x$  for ponto fixo de  $f$ , então  $\chi_{\{x\}}$  será ponto fixo de  $F$  já que

$$F(\chi_{\{x\}}) = \chi_{f(x)} = \chi_{\{x\}}.$$



**Teorema 6.4** Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contração, então a extensão de Zadeh

$\hat{f} : (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$  tem único ponto fixo que é a função característica do ponto fixo de  $f$ .

**Prova:** É uma consequência imediata do Teorema 3.5, do Teorema 6.2 e da observação acima. Notemos que se  $F : (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$  for contração e o seu ponto fixo não for a função característica de  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $F$  não é extensão de Zadeh

**Teorema 6.5** Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua e  $A \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto compacto, então  $A$  é invariante para  $f$  (i.é.  $f(A) = A$ ) se, e somente se, a função característica  $\chi_A$  é ponto fixo da extensão de Zadeh,  $\hat{f}$ .

**Prova:** Pelo Teorema 3.2, temos

$$[\hat{f}(\chi_A)]^\alpha = f([\chi_A]^\alpha) = f(A) = A = [\chi_A]^\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Na secção seguinte, vamos estudar algumas propriedades de estabilidade do ponto fixo, levando-se em conta as particularidades do espaço  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$ .

### 6.3 Estabilidade do ponto fixo

**Definição 6.2** Dizemos que um ponto fixo  $\bar{u}$  de  $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  é estável se para todo  $\varepsilon > 0$  existir um  $\delta > 0$  tal que, para todo  $u$  para o qual  $D(\bar{u}, u) < \delta$ , as iteradas por  $u$  satisfazem  $D(F^n(u), \bar{u}) < \varepsilon$  para todo  $n \geq 0$ . Um ponto fixo  $\bar{u}$  é dito *instável* se não for estável. Um ponto fixo  $\bar{u}$  é *assintoticamente estável* se ele for estável e mais, existir  $r > 0$  tal que para todo  $u$  com  $D(\bar{u}, u) < r$ , tem-se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D(F^n(u), \bar{u}) = 0$ .

Observemos que, de acordo com a Proposição 2.6, se  $\bar{u}$  é assintoticamente estável, então  $F^n(u) \xrightarrow{H} \bar{u}$  para todo  $u$  tal que  $D(\bar{u}, u) < r$ .

A seguir, vamos reescrever a definição acima, para os níveis do ponto fixo  $\bar{u}$ .

**Definição 6.3** O ponto fixo  $\bar{u}$  de  $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  é estável se e somente se para todo  $\varepsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que, para todo  $u$  para o qual  $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([u]^\alpha, [\bar{u}]^\alpha) < \delta$ , as iteradas por  $u$

satisfazem  $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([F^n(u)]^\alpha, [\bar{u}]^\alpha) < \varepsilon$ , para todo  $n \geq 0$  e  $\bar{u}$  é assintoticamente estável se for estável e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([F^n(u)]^\alpha, [\bar{u}]^\alpha) = 0$  desde que  $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([u]^\alpha, [\bar{u}]^\alpha) < r$ .

Agora, se  $\bar{u}$  é estável então  $h([F^n(u)]^\alpha, [\bar{u}]^\alpha) < \varepsilon$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$  e  $n \geq 0$ , que é equivalente a

$$\inf\{s : [F^n(u)]^\alpha \subset B([\bar{u}]^\alpha, s) \text{ e } [\bar{u}]^\alpha \subset B([F^n(u)]^\alpha, s)\} < \varepsilon.$$

Conseqüentemente temos

$$[F^n(u)]^\alpha \subset B([\bar{u}]^\alpha, \varepsilon) \text{ e } [\bar{u}]^\alpha \subset B([F^n(u)]^\alpha, \varepsilon) \text{ para todo } \alpha \in [0, 1] \text{ e } n \geq 0.$$

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([F^n(u)]^\alpha, [\bar{u}]^\alpha) = 0$  então para todo  $\alpha \in [0, 1]$  tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h([F^n(u)]^\alpha, [\bar{u}]^\alpha) = 0$$

que implica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf([F^n(u)]^\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup[F^n(u)]^\alpha = [\bar{u}]^\alpha,$$

de acordo com o Teorema 1.4.

Assim, se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D(F^n(u), \bar{u}) = 0$  temos

$$\begin{aligned} [\bar{u}]^\alpha &= \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n, y_n \in [F^n(u)]^\alpha\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lim_{j \rightarrow +\infty} y_{n_j}, y_{n_j} \in [F^{n_j}(u)]^\alpha\} \\ &= \bigcap_{j \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq j} [F^n(u)]^\alpha} \end{aligned}$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Exemplo 6.1** Seja  $u_{n+1} = \max[\hat{a}, u_n]$  onde

$$\hat{a}(t) = \begin{cases} a & \text{se } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } t \notin [0, 1] \end{cases}$$

com  $0 \leq a \leq 1$ . Através de um cálculo direto, podemos verificar que todo ponto inicial  $u_0$  tem órbita com apenas um ou dois elementos e existe uma infinidade de pontos fixos estáveis, porém não assintoticamente estáveis.

**Exemplo 6.2** (Caso “linear”). Seja

$$u_{n+1} = F(u_n)$$

onde  $F : E^1 \rightarrow E^1$  é dada por  $F(u) = \lambda u$ ,  $\lambda \in E^1$ . É claro que  $\hat{0} = \chi_{\{0\}}$  é ponto fixo. Supondo  $[\lambda]^\alpha = [\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha]$ ,  $[u]^\alpha = [u_1^\alpha, u_2^\alpha]$  com  $\lambda_i^\alpha$  e  $u_i^\alpha$  positivos, temos

$$[F(u)]^\alpha = [\lambda_1^\alpha u_1^\alpha, \lambda_2^\alpha u_2^\alpha], \alpha \in [0, 1]$$

de acordo com a definição de multiplicação, dada no final da Secção 2.3.

Dada uma condição inicial  $u_0$  com  $[u_0]^\alpha = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha]$  e  $u_{01}^\alpha$  positivo, é fácil ver que

$$[F^n(u_0)]^\alpha = [\lambda^n u_0]^\alpha = [(\lambda_1^\alpha)^n u_{01}^\alpha, (\lambda_2^\alpha)^n u_{02}^\alpha], \alpha \in [0, 1].$$

Assim,

$$D(F^n(u_0), \hat{0}) = \sup_{x \in [f^n(u_0)]^0} |x| = (\lambda_2^0)^n u_{02}^0 \text{ para todo } u_0 \in E^1.$$

Portanto, como  $D(u_0, \hat{0}) = u_{02}^0$ , tem-se estabilidade assintótica em  $\hat{0}$  se  $[\lambda]^0 \subset [0, 1)$  e instabilidade se  $[\lambda]^0 \not\subset [0, 1]$ .

Notemos que diferentemente da solução de equações diferenciais fuzzy, o diâmetro do  $\alpha$ -nível da solução é

$$(\lambda_2^\alpha)^n u_{02}^\alpha - (\lambda_1^\alpha)^n u_{01}^\alpha$$

que decresce com  $n$  se  $[\lambda]^\alpha \subset [0, 1)$ .

Observemos também que, embora o campo  $F$  acima não tenha sido obtido via extensão de Zadeh, temos que qualquer problema determinístico linear com coeficiente  $a$  e condição inicial  $x_0$  satisfazendo  $\lambda_1^\alpha \leq a \leq \lambda_1^\alpha$ ,  $u_{01}^\alpha \leq x_0 \leq u_{02}^\alpha$  para todo  $x \in [0, 1]$ , tem-se

$$(\lambda_1^\alpha)^n u_{01}^\alpha \leq a^n x_0 \leq (\lambda_2^\alpha)^n u_{02}^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1].$$

Isto é, a solução do problema determinístico

$$x_{n+1} = ax_n, \quad x_0$$

tem grau de pertinência 1 (i.é, é preferida), resultado análogo ao Teorema 6.1.

Como veremos no Capítulo 7, esse é um exemplo que terá utilidade na modelagem de fenômenos onde julgamos apenas os parâmetros multiplicativos serem fuzzy.

A próxima secção será dedicada ao estudo de estabilidade de pontos fixos, apenas para o caso em que o campo é obtido via princípio de extensão de Zadeh.

## 6.4 Estabilidade do ponto fixo da extensão de Zadeh

Nesta secção a função  $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  será a extensão de Zadeh da função contínua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e assim  $\bar{u}$  é ponto fixo de  $\hat{f}$  se, e somente se, seus  $\alpha$ -níveis  $[\bar{u}]^\alpha$  são conjuntos invariantes para  $f$ , uma vez que o Teorema 3.2 nos permite concluir que

$$[\bar{u}]^\alpha = [\hat{f}(\bar{u})]^\alpha = f([\bar{u}]^\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Por outro lado, como  $[\hat{f}^n(u)]^\alpha = f^n([u]^\alpha)$ , então se  $\lim_{n \rightarrow \infty} h([\hat{f}^n(u)]^\alpha, [\bar{u}]^\alpha) = 0$ , temos

$$\begin{aligned} [\bar{u}]^\alpha &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_n), x_n \in [u]^\alpha \right\} \\ &= \left\{ \lim_{j \rightarrow +\infty} f^{n_j}(x_j), x_j \in [u]^\alpha \right\} \\ &= \bigcap_{j \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq j} f^n([u]^\alpha)} \end{aligned}$$

ou seja,  $[\bar{u}]^\alpha = \omega([u]^\alpha)$  onde  $\omega(B)$  é o conjunto  $\omega$ -limite do conjunto  $B$ , cuja definição é

$$\omega(B) = \bigcap_{j \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq j} f^n(B)} \quad (\text{ver Hale [12], pág. 8}).$$

Em particular,  $\omega(x) \subset [\bar{u}]^\alpha$  para todo  $x \in [u]^\alpha$ .

A seguir, enunciaremos um lema que será usado repetidamente neste capítulo.

**Lema 6.6** *Seja  $\hat{X} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  a função característica do conjunto compacto  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Então a bola aberta*

$$\begin{aligned} B(\hat{X}, r) &= \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : D(\hat{X}, u) < r\} \\ &= \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : [u]^0 \subset B(X, r) \text{ e } X \subset B([u]^1, r)\} = F \end{aligned}$$

**Prova:** Se  $u \in B(\hat{X}, r)$ , então  $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h(X, [u]^\alpha) < r$

ou

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \inf\{\varepsilon : [u]^\alpha \subset B(X, \varepsilon) \text{ e } X \subset B([u]^\alpha, \varepsilon)\} < r$$

que implica

$$i(\alpha) = \inf\{\varepsilon : [u]^\alpha \subset B(X, \varepsilon) \text{ e } X \subset B([u]^\alpha, \varepsilon)\} < r$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Portanto  $[u]^\alpha \subset B(X, r)$  e  $X \subset B([u]^\alpha, r)$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Em particular tem-se  $[u]^0 \subset B(X, r)$  e  $X \subset B([u]^1, r)$  e assim  $u \in F$ .

Se  $u \in F$ , então  $[u]^0 \subset B(X, r)$  e  $X \subset B([u]^1, r)$ , logo  $[u]^\alpha \subset [u]^0 \subset B(X, r)$  e  $X \subset B([u]^1, r) \subset B([u]^\alpha, r)$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Assim, como  $X$  e  $[u]^\alpha$  são compactos,  $B(X, r)$  e  $B([u]^\alpha, r)$  são abertos e tem-se  $i(\alpha) < r$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Agora,

$$i(\alpha) \leq \max\{i(0), i(1)\} < r$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , de acordo com a Proposição 1.3, já que

$$i(\alpha) = h([u]^\alpha, X) \text{ e } [u]^1 \subset [u]^\alpha \subset [u]^0.$$

Logo,

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} i(\alpha) < r \text{ isto é, } u \in B(\hat{X}, r).$$

Analogamente, prova-se que a bola fechada

$$B[\hat{X}, r] = \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : [u]^0 \subset B[X, r] \text{ e } X \subset B([u]^1, r)\}$$

Agora, de um modo geral  $\overline{B(u, r)} = B[u, r] \forall u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , pois  $\overline{B(u, r)} \subset B[u, r]$  porque  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, D)$  é espaço métrico. Por outro lado, se  $b \in B[u, r]$ ,  $b \in B(u, r) \subset \overline{B(u, r)}$  ou  $D(u, b) = r$ , então, dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $t > 0$  tal que  $0 < r - t < \varepsilon$  e  $x = \frac{r-t}{r}u + \frac{t}{r}b \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Uma vez que  $\alpha v + \beta v = (\alpha + \beta)v$  e que  $D(\omega_1 + \omega_3, \omega_2 + \omega_3) = D(\omega_1, \omega_2)$ , concluímos que  $x \in B(u, r)$  e  $x \in B(b, \varepsilon)$  logo  $b \in \overline{B(u, r)}$ . Em particular temos

$$\overline{B(\hat{X}, r)} = B[\hat{X}, r].$$

**Corolário 6.7** *Se o conjunto  $X$  for unitário,  $X = \{\bar{x}\}$ , então segue do Lema 6.6 que*

$$B(\hat{X}, r) = \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : [u]^0 \subset B(\bar{x}, r)\}$$

e que, da definição da métrica  $D$ ,

$$D(\chi_{\{\bar{x}\}}, u) = \sup_{x \in [u]^0} \|x - \bar{x}\|.$$

Baseando-se no corolário acima, demonstraremos um resultado que nos permite relacionar a estabilidade do ponto fixo  $\bar{x}$  com a estabilidade do conjunto fuzzy  $\chi_{\{\bar{x}\}}$ . Antes, porém, é interessante notar que o Corolário 6.7 nos garante ainda a continuidade de  $\hat{f}$  em todos os pontos da forma  $\chi_{\{\bar{x}\}}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 6.8** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua com  $f(\bar{x}) = \bar{x}$  e  $\hat{f}$  sua extensão de Zadeh. Então,

a)  $\chi_{\{\bar{x}\}}$  é estável para o sistema (6.2) se, e somente se,  $\bar{x}$  é estável para o sistema (6.3).

b)  $\chi_{\{\bar{x}\}}$  é assintoticamente estável para o sistema (6.2) se, e somente se,  $\bar{x}$  é assintoticamente estável para (6.3).

**Prova:**

a) Por hipótese dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|x - \bar{x}\| < \delta$  então  $\|f^n(x) - \bar{x}\| < \varepsilon$  para todo  $n \geq 0$ . Se  $D(u, \chi_{\{x\}}) < \delta$  então  $\sup_{x \in [u]^0} \|x - \bar{x}\| < \delta$  que implica  $\|f^n(x) - \bar{x}\| < \varepsilon$  para todo  $x \in [u]^0 \subset B(\bar{x}, \delta)$ . Logo  $\sup_{x \in [u]^0} \|f^n(x) - \bar{x}\| < \varepsilon$  ou  $\sup_{y \in f^n([u]^0)} \|y - \bar{x}\| < \varepsilon$  ou ainda  $\sup_{y \in [\hat{f}^n(u)]^0} \|y - \bar{x}\| < \varepsilon$  pois  $f$  é contínua.

Logo, pelo Corolário 6.7,

$$D(\hat{f}^n(u), \chi_{\{\bar{x}\}}) < \varepsilon.$$

Para mostrar a estabilidade de  $\bar{x}$ , a partir da estabilidade de  $\chi_{\{\bar{x}\}}$ , basta observar que

$$\|x - \bar{x}\| = D(\chi_{\{x\}}, \chi_{\{\bar{x}\}})$$

e

$$\hat{f}^n(\chi_{\{x\}}) = \chi_{f^n(x)}.$$

b) Por hipótese, existe  $r > 0$  tal que se  $\|x - \bar{x}\| < r$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n(x) - \bar{x}\| = 0$ . Suponha que  $D(\chi_{\{\bar{x}\}}, u) < r$ .

A partir do Corolário 6.7, devemos provar que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que se  $n > n_0$  então  $f^n([u]^0) \subset B(\bar{x}, \varepsilon)$ .

Pela estabilidade de  $\bar{x}$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|x - \bar{x}\| < \delta$  então  $\|f^n(x) - \bar{x}\| < \varepsilon$  para cada  $n > 0$ .

Agora, para cada  $x \in [u]^0$ , existe um natural  $n_x$  tal que  $f^{n_x}(x) \in B(\bar{x}, \delta)$ , já que o ponto fixo  $\bar{x}$  atrai cada ponto de  $B(\bar{x}, r)$ . Pela continuidade de  $f$  podemos escolher uma vizinhança

aberta  $V_x$  de  $x$  de modo que  $f^{n_x}(V_x) \subset B(\bar{x}, \delta)$ . Variando  $x$  no compacto  $[u]^0$ , obtemos uma cobertura aberta de  $[u]^0 : \mathbf{C} = \{V_x : x \in [u]^0\}$ .

Seja  $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_k}\}$  uma subcobertura finita de  $[u]^0$ , correspondente aos pontos  $x_1, x_2, \dots, x_{n_k}$  e  $n_0 = \max\{n_{x_1}, n_{x_2}, \dots, n_{x_k}\}$ . Para cada  $x \in [u]^0$  e  $n > 0$ ,  $f^{n_0+n}(x) \in B(\bar{x}, \varepsilon)$  já que  $x \in V_{x_i}$ , para algum  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Logo  $f^{n_0+n}([u]^0) \subset B(\bar{x}, \varepsilon)$ .

Assim temos,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [u]^0} \|f^n(x) - \bar{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in f^n([u]^0)} \|y - \bar{x}\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in [\hat{f}^n(u)]^0} \|y - \bar{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{f}^n(u), \chi_{\{\bar{x}\}}) \end{aligned}$$

que é o que queríamos.

O argumento usado no fim da demonstração do item a) serve para provar que  $\chi_{\{\bar{x}\}}$  é assintoticamente estável se  $\bar{x}$  o for.

A estabilidade, tanto num sentido quanto no outro, é garantida pelo item a).

**Corolário 6.9** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$  e  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ . Sendo  $\lambda_i$  os autovalores de  $f'(\bar{x})$ , então*

- a) *Se  $|\lambda_i| < 1$ , para todo  $i$ ,  $\chi_{\{\bar{x}\}}$  é assintoticamente estável para (6.2).*
- b) *Se  $|\lambda_i| > 1$ , para algum  $i$ ,  $\chi_{\{\bar{x}\}}$  é instável para (6.2).*

**Prova:** É uma consequência imediata do teorema anterior já que, nestas condições, o corolário vale para (6.3).

Com o propósito de tornar o Teorema 6.8 mais geral, lançaremos mão do Lema 6.6 e das propriedades da função  $\hat{f}$ , vistas no Capítulo 3, para investigar que relações de estabilidade há entre o conjunto clássico  $A \subset \mathbb{R}^n$  e o conjunto fuzzy  $\chi_A$ . Para isto, iremos precisar de vários conceitos como o de conjunto invariante isolado, conjunto atrator, etc.

A seguir, daremos algumas definições de acordo com Hale [12].

Um conjunto invariante  $J$  é dito *isolado*, se existe uma vizinhança de  $J$  tal que se  $K$  é um conjunto invariante e está nesta vizinhança, então  $K \subseteq J$ .



Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  atrai um conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$  sob a aplicação  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existir um  $n_0 = n_0(\varepsilon, A, B)$  tal que  $T^n(B)$  está contido em  $B(A, \varepsilon)$  para  $n \geq n_0$  onde  $B(A, \varepsilon)$  é a bola aberta de centro  $A$  e raio  $\varepsilon$ .  $A$  é *atrator global* se for compacto maximal invariante (qualquer outro compacto invariante está contido em  $A$ ) e atrai todo conjunto limitado de  $\mathbb{R}^n$ . Diz-se que um conjunto  $A$  é *atrator local* se  $A$  é compacto invariante e há uma vizinhança limitada  $B$  de  $A$  tal que  $A$  atrai  $B$ .

**Corolário 6.10** *Seja  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  e  $\hat{u}^\beta$  a função característica do nível  $[u]^\beta$ . Então  $\hat{u}^\beta \in B(\hat{u}^\alpha, r)$  se, e somente se,  $[u]^\beta \subset B([u]^\alpha, r)$ . Isto é,  $\hat{u}^\alpha$  são isolados se, e somente se, existe  $r = r(\alpha) > 0$  tal que  $[u]^\beta \not\subset B([u]^\alpha, r)$  para  $\beta < \alpha$  e  $[u]^\alpha \neq [u]^\beta$ .*

**Prova:** É uma consequência do Lema 6.6 e do fato que  $[u]^\alpha \subset [u]^\beta$  se  $\alpha > \beta$ .

Observamos que as funções escadas  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  são desse tipo.

**Teorema 6.11** *Seja  $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  a extensão de Zadeh, da função contínua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se  $\bar{u}$  é ponto fixo de  $\hat{f}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{f}^n(u), \bar{u}) = 0$  para  $D(\bar{u}, u) < r$ , então os níveis  $[\bar{u}]^\alpha$  atraem os níveis  $[u]^\alpha$  através de  $f$ .*

**Prova:** Por hipótese, se  $u \in B(\bar{u}, r)$ , vale que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  tal que se  $n \geq n_0$ ,  $D(\hat{f}^n(u), \bar{u}) < \varepsilon$  o que garante  $h(f^n([u]^\alpha), [\bar{u}]^\alpha) < \varepsilon \forall \alpha$

ou

$$h(f^n([u]^\alpha), [\bar{u}]^\alpha) = \inf\{s : f^n([u]^\alpha) \subset B([\bar{u}]^\alpha, s) \text{ e } [\bar{u}]^\alpha \subset B(f^n([u]^\alpha), s)\} < \varepsilon \forall \alpha$$

e daí

$$f^n([u]^\alpha) \subset B([\bar{u}]^\alpha, \varepsilon)$$

que é o que queríamos. E mais, devido à métrica  $D$ , existe uma uniformidade em  $\alpha$  no sentido de que  $n = n(\varepsilon)$  para todo  $\alpha$ .

O fato de  $f^n([u]^\alpha) \subset B([\bar{u}]^\alpha, \varepsilon)$  para  $n \geq n_0$  nos permite concluir também que se  $x \in [u]^\alpha$ , então

$$\{f^n(x)\} \subset B([\bar{u}]^\alpha, \varepsilon) \subset \overline{B([\bar{u}]^\alpha, \varepsilon)}.$$

Como  $\overline{B([\bar{u}]^\alpha, \varepsilon)}$  é compacto, pois  $[\bar{u}]^\alpha$  é compacto, então  $f^n(x)$  possui subsequência convergente. Logo  $\omega(x) \neq \phi$  para todo  $x \in [u]^\alpha$ .

**Corolário 6.12** *Se  $f$  e  $\hat{f}$  são como no Teorema 6.11,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\hat{f}^n(u), \bar{u}) = 0$  para todo  $u \in B(\bar{u}, r), r > 0$ , e  $X \subset \mathbb{R}^n$  é compacto e invariante para  $f$  com  $[\bar{u}]^0 \subset B(X, r)$  e  $X \subset B([\bar{u}]^1, r)$ , então  $\bar{u} = \hat{X}$ .*

**Prova:** Do Lema 6.6 segue que  $D(\bar{u}, \hat{X}) < r$ , logo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\hat{f}^n(\hat{X}), \bar{u}) = 0$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\hat{X}, \bar{u}) = 0$  já que  $\hat{X}$  é fixo para  $\hat{f}$ . Assim

$$D(\hat{X}, \bar{u}) = 0 \text{ ou } \bar{u} = \hat{X}.$$

**Corolário 6.13** *Se  $f, \hat{f}$  e  $\bar{u}$  são como no Corolário 6.12 e  $\bar{u}$  é ponto fixo de  $\hat{f}$  com  $[\bar{u}]^\alpha \subset B([\bar{u}]^1, r)$  e  $[\bar{u}]^0 \subset B([\bar{u}]^\alpha, r)$ , para algum  $\alpha \in [0, 1]$ , então  $[\bar{u}]^0 = [\bar{u}]^1$ .*

**Prova:** consequência imediata do Corolário 6.12 fazendo  $[\bar{u}]^\alpha = X$ .

**Corolário 6.14** *Se  $f, \hat{f}$  e  $\bar{u}$  são como no Corolário 6.13 e  $[\bar{u}]^0 \subset B([\bar{u}]^1, r)$  então  $[\bar{u}]^0 = [\bar{u}]^1$ .*

**Prova:** Consequência do Corolário 6.13.

**Observação:** Dos Corolários 6.12 a 6.14 concluímos que os únicos pontos fixos de  $\hat{f}$ , assintoticamente estáveis, com  $h([u]^0, [u]^1) < r$ , são do tipo função característica de algum subconjunto compacto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  e para este caso temos o

**Corolário 6.15** *Se  $f$  e  $\hat{f}$  são como no Teorema 6.11, então o ponto fixo  $\hat{X}$  de  $\hat{f}$  é estável se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  com  $[u]^0 \subset B(X, \delta)$  e  $X \subset B([u]^1, \delta)$  então  $f^n([u]^0) \subset B(X, \varepsilon)$  e  $X \subset B(f^n([u]^1), \varepsilon)$  para todo  $n \geq 0$ .*

**Demonstração:** Consequência imediata da definição de estabilidade e do Lema 6.6.

**Corolário 6.16** *Se  $f$ ,  $\hat{f}$  e  $\hat{X}$  são como no corolário acima, então  $\omega(x) \subset X$  para todo  $x$  próximo a  $X$ .*

**Prova:** Seja  $[u]^\alpha = B[X, \delta]$  com  $0 < \delta < r$ . Pelo Lema 6.6,  $u \in B(\hat{X}, r)$  e assim  $X = \omega(B[X, \delta])$ , donde  $\omega(x) \subset X$ .

Observe que  $B[X, \delta] \subset \mathbb{R}^n$  é compacto se  $X$  o for.

Como no estudo de dinâmica do ponto fixo, os casos em que os pontos fixos são isolados desempenham um importante papel. O Corolário 6.10 sugere que nossa atenção esteja voltada para pontos fixos  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  com gráficos tipo escada. Mais ainda, os Corolários 6.12 a 6.15 nos informam que o caso em que o ponto fixo  $\hat{X}$  de  $\hat{f}$  é a função característica do conjunto compacto  $X \subset \mathbb{R}^n$  merece atenção especial.

A seguir, enunciaremos alguns resultados para o ponto fixo  $\hat{X}$  de  $\hat{f}$ , que generalizam o Teorema 6.8.

**Teorema 6.17** *Seja  $\hat{X}$  a função característica do conjunto compacto  $X \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\hat{f}(\hat{X}) = \hat{X}$  e  $\hat{X}$  é assintoticamente estável para  $\hat{f}$ . Nestas condições tem-se*

$$X = \bigcap_{n \geq 0} f^n(B[X, \delta]).$$

para todo  $\delta \in [0, r[$  com  $r$  dado pela Definição 6.2.

**Prova:** Seja  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $[u]^\alpha = B[X, \delta]$  onde  $\delta \in [0, r[$ .

Pelo Lema 6.6 é fácil ver que  $u \in B(\hat{X}, r)$ . Logo, pelo Teorema 6.11,  $X$  atrai  $B[X, \delta]$ . Como  $X \subset B[X, \delta]$  e  $w(B[X, \delta]) = X$ , segue do Lema 2.1.1, pág. 9, Hale [12], que

$$X = \bigcap_{n \geq 0} f^n(B[X, \delta]).$$

Notemos que em particular o conjunto  $X$  é atrator local já que  $X$  atrai a vizinhança  $B[X, \delta]$ , como visto no Teorema 6.11. No entanto,  $X$  ser atrator local não é suficiente para que  $\hat{X}$  seja assintoticamente estável para  $\hat{f}$ . Veja exemplo a seguir.

**Exemplo 6.3** Seja  $x_{n+1} = f(x_n)$ , onde

$$f(x) = \sqrt[3]{x-3} + 3 - \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Os pontos fixos de  $f$  são  $x_1 = 3 - \frac{8}{3\sqrt{3}}$  e  $x_2 = 3 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$ , com  $f'(x_2) = 1$ .

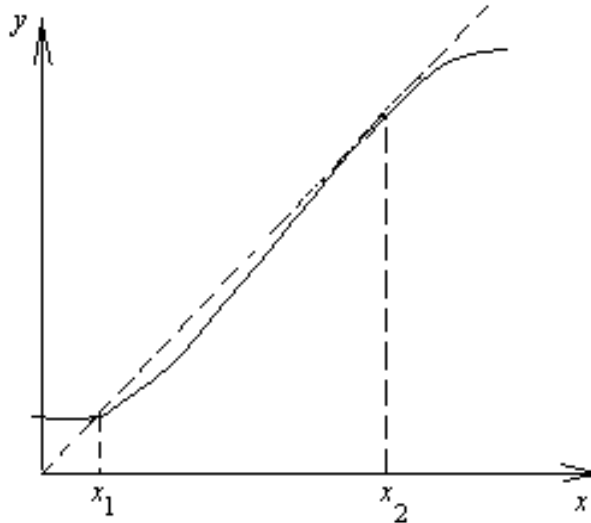


Figura 6.1:  $f$  do exemplo 6.3 e seus pontos fixos.

O conjunto  $X = [x_1, x_2]$  é atrator local para  $f$ . Entretanto, a função característica  $\hat{X}$ , de  $X$ , não é assintoticamente estável para  $\hat{f}$ , já que dado qualquer  $u_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  próximo a  $\hat{X}$ , da forma

$$[u_0]^\alpha = [u_0]^0 = [x_1 + \delta, x_2 - \delta]$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , e  $\delta > 0$ , apropriado, temos

$$[\hat{f}^n(u_0)]^\alpha = f^n([u_0]^0)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(f^n([u_0]^0), \{x_1\}) = 0,$$

que implica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(f^n([u_0]^0), [u_0]^0) \neq 0.$$

Portanto, pela Proposição 2.3,  $\hat{f}^n(u_0) \not\xrightarrow{H} \hat{X}$  e conseqüentemente  $\hat{f}^n(u_0) \not\xrightarrow{D} \hat{X}$ , que é o que queríamos.

Na verdade, o que podemos observar nesse exemplo é que  $X \not\subset B(f^n([u]^1, \varepsilon))$  para infinitos valores de  $n$ , seja qual for o intervalo  $[u]^1$  contido propriamente em  $X$  e, em vista do Lema 6.6,  $\hat{X}$  não é assintoticamente estável.

Os resultados seguintes referem-se às condições necessárias para pontos fixos assintoticamente estáveis da função  $\hat{f}$ .

**Lema 6.18** *Seja  $\hat{f}$  a extensão de Zadeh da função contínua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se*

*$\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\hat{f}^n(\hat{x}), u) = 0$  para algum  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $u$  é a função característica de algum ponto de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Prova:** Em vista do Teorema 3.2 e Corolário 6.7, basta ver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\hat{f}^n(\hat{x}), u) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in [u]^0} \|f^n(x) - y\| = 0$$

e conseqüentemente tem-se o resultado.

**Teorema 6.19** *Se  $f$  e  $\hat{f}$  são como no Lema 6.18 e  $\bar{u}$  é um ponto fixo de  $\hat{f}$ , assintoticamente estável, com  $\text{diam}[\bar{u}]^0 < r$ , com  $r$  dado pela Definição 6.2, então  $\bar{u}$  é a função característica de algum ponto de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Prova:** Se  $\text{diam}[\bar{u}]^0 < r$ , então de acordo com o Lema 6.6, para todo  $x \in [\bar{u}]^0$ , tem-se  $D(\bar{u}, \hat{x}) < r$ . Logo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\hat{f}^n(\hat{x}), \bar{u}) = 0$  e daí, pelo Lema 6.18, tem-se o resultado.

**Teorema 6.20** *Se  $f$  e  $\hat{f}$  são como no Teorema 6.19 e  $\bar{u}$  é globalmente assintoticamente estável, então  $\bar{u}$  é a função característica de algum ponto de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Prova:** É uma conseqüência imediata do Lema 6.18 já que, neste caso,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\hat{f}^n(\hat{x}), \hat{u}) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Notemos que de acordo com o Teorema 6.8, o estudo da dinâmica de pontos fixos  $\bar{u}$ , que estão nas hipóteses dos Teoremas 6.19 ou 6.20, se resume ao estudo da dinâmica dos pontos fixos para a função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Vamos encerrar este capítulo com uma pequena introdução ao estudo de órbitas periódicas.

**Definição 6.4** Um ponto  $u^* \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  é chamado de *ponto periódico de período  $p$*  ou  *$p$ -periódico* da função  $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  se  $p$  é o menor inteiro positivo tal que  $F^p(u^*) = u^*$ , onde  $F^p$  indica composição. O conjunto de todas as iteradas de um ponto  $p$ -periódico é chamado de *órbita  $p$ -periódica* ou  *$p$ -ciclo*.

Um ponto  $p$ -periódico  $u^*$  é um ponto fixo da aplicação  $F^p$ . Conseqüentemente, a noção de estabilidade de  $u^*$  segue aquela de ponto fixo.

**Definição 6.5** Um ponto  $p$ -periódico  $u^*$  é dito ser *estável*, *assintoticamente estável*, ou *instável* se  $u^*$  é, respectivamente, um ponto estável, assintoticamente estável ou instável da aplicação  $F^p$ .

Se  $\hat{f}$  é a extensão de Zadeh da função contínua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , então é fácil ver que  $x^*$  é um ponto  $p$ -periódico de  $f$  se, e somente se, a função característica  $\hat{x}^*$  de  $x^*$  é um ponto  $p$ -periódico de  $\hat{f}$ , uma vez que  $[\hat{f}^n(\hat{x})]^\alpha = f^n(x)$  para todo  $n \geq 0$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , onde  $\hat{x}$  é uma função característica de  $x \in \mathbb{R}^n$ . Lembremos também que  $\hat{f}$  é contínua em  $\hat{x}$ , como vimos na observação do Lema 6.6. Agora, baseando-se no Teorema 6.8, nós temos o seguinte:

**Teorema 6.21** *Se  $\hat{f}$  é a extensão de Zadeh da função contínua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , então  $x^*$  é  $p$ -periódico estável (assintoticamente estável, instável) para  $f$  se, e somente se,  $\hat{x}^*$  é  $p$ -periódico estável (assintoticamente estável, instável) para  $\hat{f}$ .*

**Prova:** é uma conseqüência imediata do Teorema 6.8 aplicado à função  $f^p$ .

**Corolário 6.22** *Seja  $x^*$  um ponto 2-periódico da função de classe  $C^1$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $|f'(f(x^*)) \cdot f'(x^*)| < 1$ , então a órbita por  $\hat{x}^*$  é estável.*

**Prova:** É uma conseqüência do Teorema 6.21 e do fato de  $|f'(f(x^*)) \cdot f'(x^*)| < 1$  implicar a estabilidade da órbita por  $x^*$ . Ver Edelstein [08].

Assim como fizemos com o corolário acima, que relaciona as dinâmicas das órbitas de  $x^*$  e  $\hat{x}^*$ , questões como *bifurcação* e *caos* podem ser transportadas do caso clássico para o caso fuzzy, quando tratamos da extensão de Zadeh. Para o caso mais geral em que  $F : E^n \rightarrow E^n$ , Kloeden [23] nos dá uma condição suficiente para que  $F$  seja *caótica*.

# Capítulo 7

## Considerações sobre a modelagem fuzzy

### 7.1 Introdução

O estudo de problemas e situações reais usando matemática como ferramenta para sua compreensão, simplificação e resolução, visando uma possível tomada de decisão com relação ao objeto estudado, faz parte do processo que se convencionou chamar *Modelagem Matemática*. Quando o problema a ser analisado é das Ciências Biológicas, a modelagem matemática recebe o nome de *Biomatemática*.

Os modelos biomatemáticos são usualmente propostos por meio de equações diferenciais quando se considera as variáveis de estado dependentes do tempo  $t$ , variando continuamente. O uso de equações de diferenças é indicado para modelar fenômenos em que  $t$  assume valores discretos.

Os paradigmas, para os quais as variáveis de estado são discretas, são de natureza estocástica e portanto suas soluções são processos estocásticos, isto é, em cada instante  $t$ , tem-se uma função de densidade de distribuição para as variáveis de estado.

A estocasticidade em um modelo biomatemático pode ser uma imposição ou da própria variável de estado, que tem esta característica, ou devido a alguns parâmetros introduzidos no modelo, inicialmente determinísticos, estarem sujeitos à flutuações aleatórias. Estes dois casos são denominados estocasticidade demográfica e ambiental, respectivamente (May [25], Turelli [39]).



Em se tratando de modelagem matemática, até mesmo os clássicos modelos determinísticos estão sujeitos às imprecisões que podem ser causadas tanto pela natureza das próprias variáveis de estado envolvidas, como pelos parâmetros que são introduzidos nas formas de coeficientes do modelo, condições iniciais, etc. Nestes modelos, a identificação dos parâmetros é normalmente baseada em métodos estatísticos, a partir de dados obtidos experimentalmente e da escolha de algum método adequado para a identificação dos mesmos.

Ráfikov [33] discute e exemplifica algumas metodologias de identificação de parâmetros. De qualquer forma, os dados coletados, bem como o método adotado, quase sempre estão carregados de imprecisão e elementos de incerteza causados tanto pelo próprio processo de medição como por algum tipo de subjetividade na adoção do método.

O que propomos neste capítulo é, de certa forma, generalizar os conceitos de *estocasticidade demográfica e ambiental*, utilizando a subjetividade proveniente do "fuzziness" a que os fenômenos biológicos estão sujeitos.

A teoria de conjuntos fuzzy, formalizada por Zadeh [42], tem o intuito de dar um tratamento matemático às questões subjetivas e pode ser, em muitos casos, uma ferramenta indispensável para a análise e compreensão de certas situações reais, especificamente em *dinâmica de população*.

As idéias de fuzziness demográfica e fuzziness ambiental serão dadas através dos conceitos de equações diferenciais fuzzy, desenvolvido no Capítulo 5, e de equações de diferenças fuzzy (ou sistemas fuzzy discretos) apresentados no Capítulo 6.

## 7.2 Fuzziness demográfica

Em uma mesma espécie a variação comportamental pode ser bastante acentuada quando consideramos seus elementos isoladamente. Entretanto, quando analisamos os grupos destes indivíduos, a diversidade comportamental acontece em grau mais reduzido. Por exemplo, o conceito de *predador* pode estar carregado de subjetividade se olharmos cada indivíduo de uma determinada espécie que pode estar sujeito às mais variadas situações particulares. Pode um predador, com um certo nível de predação, se tornar presa dependendo de circunstâncias intrínsecas da

espécie ou mesmo ambientais. Em casos como estes devemos nos preocupar com o *grau de predação* da espécie. De modo geral, se quisermos quantificar a qualidade subjetiva em estudo, devemos atribuir valores ou graus que traduzam satisfatoriamente esta qualidade e isto nem sempre pode ser conseguido através de medição ou estatísticas.

Os modelos estocásticos são bastante úteis para se investigar as conseqüências das variações sujeitas às distribuições de dados estatísticos como esperança de vida, fertilidade, captura, etc. Porém, para se analisar a dinâmica populacional de uma espécie baseada nos diferentes graus de predação, competição, sobrevivência, etc. acreditamos que a teoria fuzzy possa ser a mais adequada.

Assim como nos casos determinísticos e estocásticos, as ferramentas de modelagem aqui são também as *equações diferenciais fuzzy* e os *sistemas fuzzy discretos*. Em ambos os casos, as estruturas fuzzy podem ser introduzidas devido apenas à condição inicial (imprecisão ou mesmo subjetividade do quanto o indivíduo é inicialmente presa ou predador, por exemplo). Se estivermos modelando um fenômeno desta natureza, isto é, com condição inicial fuzzy, o *princípio de extensão de Zadeh* pode ser a ferramenta ideal para a modelagem.

Vamos em seguida ilustrar o conceito de fuzziness demográfica onde a condição inicial é um conjunto fuzzy em  $E^1$ .

**Exemplo 7.1** (Malthus-contínuo)

$$u'(t) = au(t), \quad u(0) = u_0 \in E^1 \tag{7.1}$$

Para achar a solução de (7.1), façamos  $[u(t)]^\alpha = [u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t)]$  e, pelo que vimos na Seção 5.5, devemos resolver os sistemas

$$\begin{cases} (u_1^\alpha)'(t) = au_1^\alpha(t), & u_1^\alpha(0) = u_{01}^\alpha \\ (u_2^\alpha)'(t) = au_2^\alpha(t), & u_2^\alpha(0) = u_{02}^\alpha \end{cases} \quad a \geq 0 \tag{7.2}$$

$$\begin{cases} (u_1^\alpha)'(t) = au_2^\alpha(t), & u_1^\alpha(0) = u_{01}^\alpha \\ (u_2^\alpha)'(t) = au_1^\alpha(t), & u_2^\alpha(0) = u_{01}^\alpha \end{cases} \quad a < 0 \tag{7.3}$$

para cada  $\alpha \in [0, 1]$ .

As soluções de (7.2) e (7.3) existem, pelo Teorema 5.6, e são dadas respectivamente por:

$$\begin{cases} u_1^\alpha(t) = u_{01}^\alpha e^{at} \\ u_2^\alpha(t) = u_{02}^\alpha e^{at} \end{cases} \quad a \geq 0$$

e

$$\begin{cases} u_1^\alpha(t) = \frac{(u_{01}^\alpha - u_{02}^\alpha)}{2} e^{-at} + \frac{u_{01}^\alpha + u_{02}^\alpha}{2} e^{at} \\ u_2^\alpha(t) = \frac{(u_{02}^\alpha - u_{01}^\alpha)}{2} e^{-at} + \frac{u_{01}^\alpha + u_{02}^\alpha}{2} e^{at} \end{cases} \quad a < 0$$

Notemos que para o caso em que  $a \geq 0$ , o nível  $[u(t)]^1$  se afasta da solução *nula* enquanto que se  $a < 0$ , as soluções tornam-se cada vez mais difusas, porém o nível  $[u(t)]^1$  aproxima-se da solução *nula*, supondo  $[u_0]^1$  com apenas um ponto (Fig 7.1).

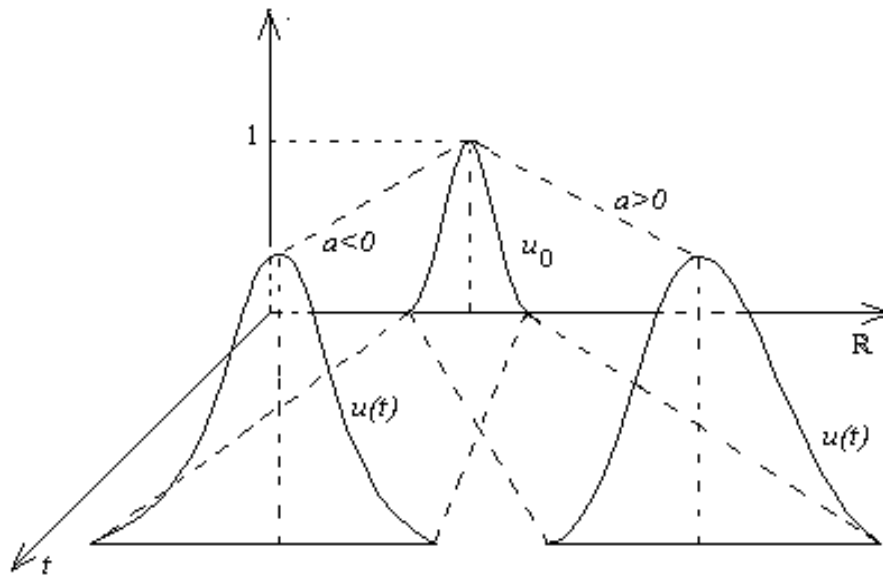


Figura 7.1: Comportamento das soluções do Exemplo 7.1 para  $a \geq 0$  e  $a < 0$ .

**Exemplo 7.2** (Malthus- discreto).

$$u_{n+1} = au_n, \quad u(0) = u_0, \quad a > 0 \quad (7.4)$$

cuja solução é  $u_n = a^n u_0$ , de acordo com a definição de multiplicação de número real por conjunto fuzzy. É fácil ver que o único ponto fixo é  $\hat{0}$  se  $a \neq 1$  e que qualquer ponto  $u \in E^1$  é fixo se  $a = 1$ .

A dinâmica desse sistema é a mesma do sistema determinístico, de acordo com o Teorema 6.8, ou seja,  $\hat{0}$  é assintoticamente estável se  $a < 1$ , estável se  $a = 1$  e instável se  $a > 1$ . Observemos que (7.3) e (7.4) foram obtidos pela extensão de Zadeh da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = ax$ .

Nos exemplos 7.1 e 7.2, podemos notar a grande diferença do ponto de vista qualitativo quanto às suas soluções: enquanto o diâmetro da solução de 7.1 cresce com o tempo  $t$ , tornando-a mais difusa, o mesmo não ocorre com as soluções 7.4 se  $a < 1$ .

O exemplo seguinte tem sido objeto de estudo intensivo nos últimos anos. Por ser não linear, ele exhibe muitos fenômenos importantes que são generalizados em sistemas dinâmicos. May [24] já o explorou interpretando-o como modelo de crescimento populacional. Questões tais como *bifurcação, caos e construção de imagens* são tópicos nos quais o nosso exemplo está presente (Ver Hale [13], Edelstein [08], Devaney [07], Forte [09]).

Aqui não estudaremos as estabilidades das órbitas, a não ser dos pontos fixos e também daquelas que são funções características das órbitas determinísticas.

**Exemplo 7.3** (logístico-discreto).

Seja a função logística normalizada

$$f(x) = ax(1 - x),$$

com  $1 \leq a \leq 4$ , uma vez que queremos  $x \geq 0$ . Vamos investigar os pontos fixos da extensão de Zadeh  $\hat{f}$ , além das funções características  $\hat{0}$  e  $\hat{x}_a, x_a = 1 - \frac{1}{a}$ . De acordo com o que vimos na Secção 6.2, devemos resolver a equação  $f([u]^\alpha) = [u]^\alpha = [u_1^\alpha, u_2^\alpha]$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , isto é

$$\begin{cases} u_1^\alpha = \min_{u_1^\alpha \leq x \leq u_2^\alpha} f(x) \\ u_2^\alpha = \max_{u_1^\alpha \leq x \leq u_2^\alpha} f(x) \end{cases} \quad (7.5)$$

Se  $1 \leq a \leq 2$ , então  $x_a = 1 - \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2}$

Seja  $u \in E^1$  tal que  $\hat{f}(u) = u$ . Então.

$$u_2^0 = \max_{u_1^0 \leq x \leq u_2^0} f(x) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} \leq \frac{1}{2}.$$

Logo,  $u_2^\alpha \leq \frac{1}{2}$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Portanto, como  $f$  é crescente em  $(-\infty, \frac{1}{2}]$ , (7.5) é dado por

$$\begin{cases} u_1^\alpha = f(u_1^\alpha) = au_1^\alpha(1 - u_1^\alpha) \\ u_2^\alpha = f(u_2^\alpha) = au_2^\alpha(1 - u_2^\alpha) \end{cases} \quad (7.6)$$

Assim, a única solução de (7.6), além de  $\hat{0}$  e  $\hat{x}_a$ , é o conjunto fuzzy  $u \in E^1$  tal que  $[u]^\alpha = [0, x_a]$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Se  $a > 2$ , então  $x_a = 1 - \frac{1}{a} > \frac{1}{2}$ . Neste caso, consideremos todas as possibilidades de pontos fixos baseados nos valores de  $u_1^0$  e  $u_2^0$ .

- Para  $u_2^0 \leq \frac{1}{2}$ , as soluções de (7.6), para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , são  $u_1^\alpha = 0$  e  $u_2^\alpha = x_a > \frac{1}{2}$  o que contradiz o fato de  $u_2^\alpha \leq u_2^0 \leq \frac{1}{2}$ . Portanto não existem novos pontos fixos se  $u_2^0 \leq \frac{1}{2}$ .

- Para  $u_2^0 \geq \frac{1}{2}$ , (7.5) é dado por

$$\begin{cases} u_1^\alpha = f(u_2^\alpha) = au_2^\alpha(1 - u_2^\alpha) \\ u_2^\alpha = f(u_1^\alpha) = au_1^\alpha(1 - u_1^\alpha) \end{cases} \quad (7.7)$$

uma vez que  $f$  é decrescente em  $[\frac{1}{2}, +\infty)$ .

Mudando as variáveis a fim de simplificar a notação de (7.7) temos:

$$\begin{cases} x = ay(1 - y) \\ y = ax(1 - x) \end{cases}$$

daí,

$$x = a^2x(1 - x)[1 - ax(1 - x)] = f^2(x),$$

isto é, as coordenadas das soluções do sistema acima são exatamente os pontos fixos de  $f^2(x)$  que são dados por  $x = 0$ ,  $x_a = 1 - \frac{1}{a}$  e  $x_1, x_2 = \frac{a + 1 \pm \sqrt{(a - 3)(a + 1)}}{2a}$ , (Ver Edelstein [08]). Assim, se  $2 < a < 3$ ,  $x_1$  e  $x_2$  não são reais, portanto a única solução de (7.7) é  $u_1^\alpha = u_2^\alpha = x_a$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ . Por outro lado, se  $3 \leq a < 4$ , as soluções de (7.7) são  $u_1^\alpha = u_2^\alpha = x_a$  ou  $u_1^\alpha = x_1$  e  $u_2^\alpha = x_2$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ . Porém, neste último caso, devemos observar que  $u_1^0 = x_1 \geq \frac{1}{2}$  se, e somente se,  $3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}$ . Desta forma, além de  $\hat{0}$  e  $\hat{x}_a$ , temos o novo ponto fixo  $\bar{u}$  definido por  $[\bar{u}]^\alpha = [x_1, x_2] = [x_1, f(x_1)]$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Finalmente, se  $a = 4$ , temos novamente  $u_1^\alpha = u_2^\alpha = x_a$  como única solução de (7.7).

• Agora, se  $u_1^\alpha < \frac{1}{2}$  e  $u_2^\alpha > \frac{1}{2}$  para algum  $\alpha$ , então (7.5) é dado por

$$\begin{cases} u_1^\alpha = \min\{f(u_1^\alpha), f(u_2^\alpha)\} \\ u_2^\alpha = f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4} \end{cases} \quad (7.8)$$

Portanto, se  $u_1^\alpha = f(u_1^\alpha)$  então  $u_1^\alpha = 0$ . Se  $u_1^\alpha = f(u_2^\alpha)$ , então  $u_1^\alpha = f(\frac{a}{4}) = \frac{a^2}{16}(4 - a)$ , neste caso não é difícil ver que  $f(\frac{a}{4}) \leq \frac{1}{2}$ , isto é,

$$\frac{a^2}{16}(4 - a) \leq \frac{1}{2} \quad \text{se, e somente se, } a \geq 1 + \sqrt{5}.$$

Em resumo temos

• Se  $1 \leq a \leq 2$ , os únicos pontos fixos do exemplo 7.3 são os seguintes:  $\hat{0}$ ;  $\hat{x}_a$  e  $\bar{u}_1$  definido por  $[\bar{u}_1]^\alpha = [0, x_a]$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

• Se  $2 < a \leq 3$ , além dos pontos fixos  $\hat{0}$  e  $\hat{x}_a$ , temos o ponto fixo  $\bar{u}_2$  definido por  $[\bar{u}_2]^\alpha = [0, \frac{a}{4}]$ .

• Se  $3 < a \leq 1 + \sqrt{5}$ , além de  $\hat{0}$ ,  $\hat{x}_a$  e  $\bar{u}_2$ , temos também o ponto fixo  $\bar{u}_3$  com  $[\bar{u}_3]^\alpha = [x_1, x_2]$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

• Se  $1 + \sqrt{5} < a < 4$ , os pontos fixos são  $\hat{0}$ ,  $\hat{x}_a$ ,  $\bar{u}_2$ ,  $\bar{u}_4$ , com  $[\bar{u}_4]^\alpha = [f(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]$  e  $\bar{u}_5$  definido por:

$$[\bar{u}_5] = \begin{cases} [0, f(\frac{a}{4})] & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha} \\ [f(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha > \bar{\alpha} \end{cases}$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$  e algum  $\bar{\alpha}$ .

- Se  $a = 4$  os únicos pontos fixos são  $\hat{0}$ ,  $\hat{x}_a$  e  $\bar{u}_6$  com  $[\bar{u}_6]^\alpha = [0, 1]$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ :

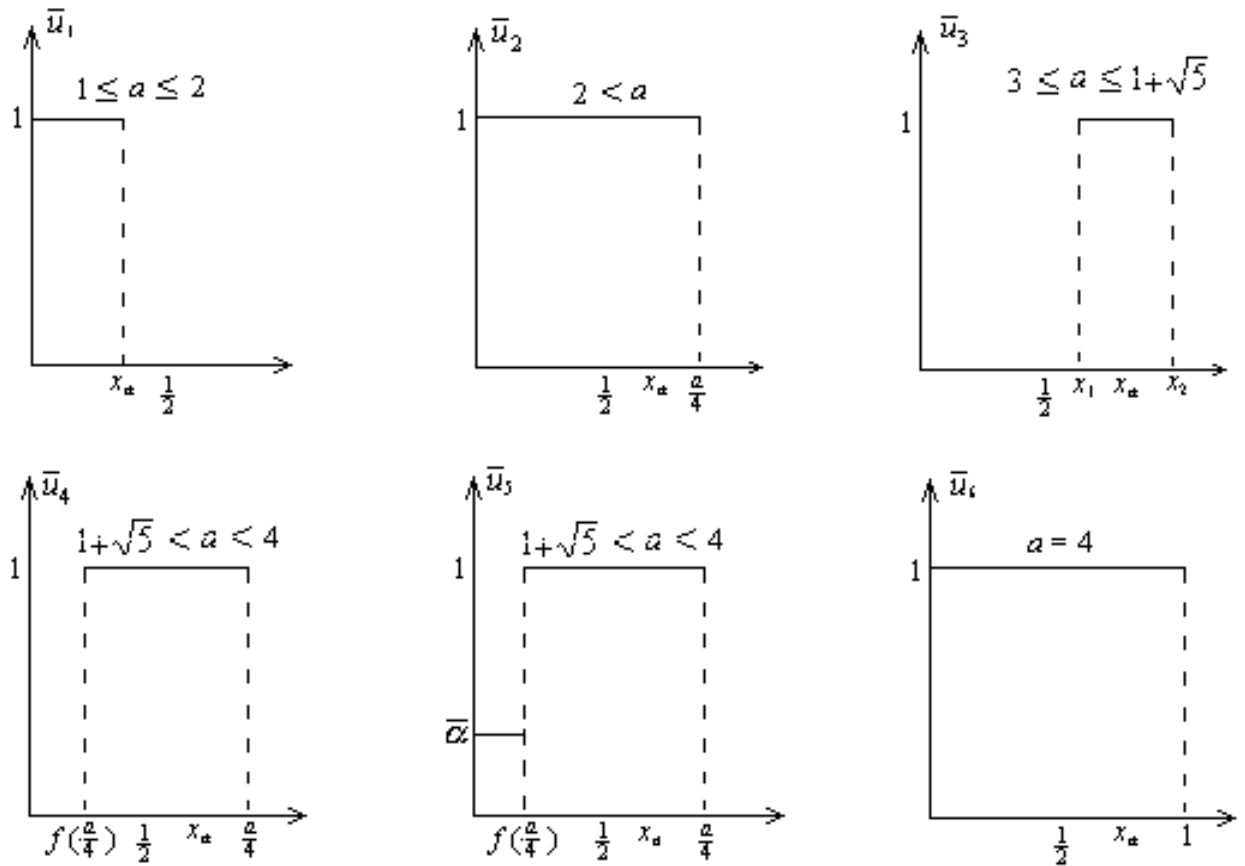


Figura 7.2: Os pontos fixos de  $\hat{f}$  do exemplo 7.3.

Vamos agora estudar a estabilidade dos novos pontos fixos encontrados para a função  $\hat{f}$  já que os antigos pontos fixos têm as mesmas características que no caso determinístico, (Teorema 6.8).

Para  $1 < a \leq 2$ , o ponto fixo  $\bar{u}_1$  é instável (cf. Corolário 6.15) pois  $D(u, \bar{u}_1) < \delta$  se  $[u]^\alpha = [\delta, x_a]$  e  $f^n([\delta, x_a]) = [f^n(\delta), x_a]$  para  $\delta > 0$ , suficientemente pequeno, já que  $f$  é crescente  $[0, \frac{1}{2}]$ . Assim  $[0, x_a] \not\subset B(f^n([u]^1, \varepsilon))$  para infinitos valores de  $n \in \mathbb{N}$ .

Para  $2 < a \leq 4$  temos:

•  $\bar{u}_2$  e  $\bar{u}_6$  não são estáveis de acordo com o Corolário 6.15.

•  $\bar{u}_5$  também não é estável pois dado  $0 < \delta < f(\frac{a}{4})$ , o conjunto fuzzy  $u$  definido por seus níveis

$$[u]^\alpha = \begin{cases} [\frac{\delta}{2}, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha}, \\ [f(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha > \bar{\alpha} \end{cases}$$

é tal que  $D(u, \bar{u}_5) = \frac{\delta}{2} < \delta$  e  $D(\hat{f}^n(u), \bar{u}_5) > \varepsilon$  para infinitos  $n \in \mathbb{N}$  tomando-se  $0 < \varepsilon < \delta$ , já que

$$D(\hat{f}^n(u), \bar{u}_5) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h(f^n([u]^\alpha), [\bar{u}_5]^\alpha) = h(f^n([\frac{\delta}{2}, \frac{a}{4}]), [0, \frac{a}{4}])$$

e  $f^n([\frac{\delta}{2}, \frac{a}{4}]) \subset [\varepsilon, \frac{a}{4}]$  para  $n$  grande, dado que  $f$  é crescente em  $(0, \frac{1}{2}]$ .

•  $\bar{u}_3 = [x_1, x_2]$  é assintoticamente estável:

**I)- Estabilidade:** Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 0$

• Se  $n$  é par, tome  $0 < \delta_1 < \varepsilon$  tal que

$$x_i - \varepsilon < f^n(x) < x_i \text{ se } x_i - \delta_1 < x < x_i, i = 1, 2$$

$$\varepsilon < f^n(x) < x_i + \varepsilon \text{ se } x_i < x < x_i + \delta_1, i = 1, 2$$

• Se  $n$  é ímpar, tome  $0 < \delta_2 < \varepsilon$  tal que

$$x_2 < f^n(x) < x_2 + \varepsilon \text{ se } x_1 - \delta_2 < x < x_1$$

$$x_2 - \varepsilon < f^n(x) < x_2 \text{ se } x_1 < x < x_1 + \delta_2$$

$$x_1 < f^n(x) < x_1 + \varepsilon \text{ se } x_2 - \delta_2 < x < x_2$$

$$x_1 - \varepsilon < f^n(x) < x_1 \text{ se } x_2 < x < x_2 + \delta_2$$

Seja  $0 < \delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Como

$$f^n([x_1 - \delta, x_2 + \delta]) = \begin{cases} [f^n(x_1 - \delta), f^n(x_2 + \delta)] \subset [x_1 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon] & \text{se } n \text{ é par} \\ [f^n(x_2 + \delta), f^n(x_1 - \delta)] \subset [x_1 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon] & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$



segue que

$$f^n([u]^0) \subset B([u_3]^0, \varepsilon) \quad \text{se} \quad [u]^0 \subset B([u_3]^0, \delta). \quad (*)$$

Por outro lado, como

$$\text{Se } n \text{ é par } [x_1, x_2] \subset [f^n(x_1 + \delta) - \varepsilon, f^n(x_2 - \delta) + \varepsilon]$$

$$\text{Se } n \text{ é ímpar } [x_1, x_2] \subset [f^n(x_2 - \delta) - \varepsilon, f^n(x_1 - \delta) + \varepsilon]$$

Isto é,

$$[x_1, x_2] \subset B(f^n[x_1 + \delta, x_2 - \delta], \varepsilon).$$

Assim

$$[u_3]^0 \subset B(f^n([u]^1), \varepsilon) \quad \text{se} \quad [u_3]^0 \subset B([u]^1, \delta). \quad (**)$$

De (\*) e (\*\*) e com a ajuda do Corolário 6.15 segue que  $\bar{u}_3$  é estável.

$$\text{II)- } \lim_{n \rightarrow +\infty} D(\hat{f}^n(u), \bar{u}_3) = 0.$$

- Se  $n$  é par, sabemos que existem  $r_1 > 0$  e  $r_2 > 0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_1 \quad \text{se} \quad \|x - x_1\| < r_1$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_2 \quad \text{se} \quad \|x - x_2\| < r_2$$

- Se  $n$  é ímpar, sabemos que existem  $r_3 > 0$  e  $r_4 > 0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_2 \quad \text{se} \quad \|x - x_1\| < r_3$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_1 \quad \text{se} \quad \|x - x_2\| < r_4$$

Agora, tome  $r = \min \{r_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Com argumentos análogos aos feitos na parte I), podemos concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\hat{f}^n(u), \bar{u}_3) = 0$$

se  $u \in B(\bar{u}_3, r)$ .

De I) e II) temos que  $\bar{u}_3$  é assintoticamente estável.

•  $\bar{u}_4$  é assintoticamente estável:

Vamos primeiro mostrar sua estabilidade:

Pela continuidade de  $f$ , temos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $0 < \delta < \varepsilon$  com  $\frac{a}{4} - \delta > x_a > \frac{1}{2}$  e  $f(\frac{a}{4}) - \delta > 0$  tal que  $f(\frac{a}{4} - \delta) < f(\frac{a}{4}) + \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Portanto, se  $D(u, \bar{u}_4) < \delta$ , ou seja,

$$[u]^0 \subset B([f(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}], \delta) \quad \text{e} \quad [f(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] \subset B([u]^1, \delta),$$

temos, pelo fato de  $x_a > \frac{1}{2}$ , que

$$f([f(\frac{a}{4}) + \delta, \frac{a}{4} - \delta]) = [f(\frac{a}{4} - \delta), \frac{a}{4}]$$

e

$$f^2([f(\frac{a}{4}) + \delta, \frac{a}{4} - \delta]) = [f(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}],$$

donde concluímos que

$$f^n([f(\frac{a}{4}) + \delta, \frac{a}{4} - \delta]) = [f(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] \quad \forall n \geq 2.$$

Assim  $[f(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] \subset B(f^n([f(\frac{a}{4}) + \delta, \frac{a}{4} - \delta]), \varepsilon) \quad \forall n \geq 0$ .

Como por hipótese  $[f(\frac{a}{4}) + \delta, \frac{a}{4} - \delta] \subset [u]^1$ , segue que

$$[f(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] \subset B(f^n([u]^1), \varepsilon) \quad \forall n \geq 0.$$

Fazendo  $[u]^0 = [l, m]$  e supondo  $[u]^0 \not\subset [f(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] = [\bar{u}_4]^0$ , pois neste caso não teríamos nada a fazer, temos

$$f^n([u]^0) = [\min\{f^n(l), f^n(m)\}, \frac{a}{4}]$$

para todo  $n \geq 1$ .

Como  $f^n(l)$  e  $f^n(m)$  são seqüências crescentes com limites iguais a  $f(\frac{a}{4})$ , temos

$$f^n([u]^0) \subset B([f(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}], \varepsilon) \quad \forall n \geq 0.$$

Logo, usando o Corolário 6.15, temos que  $\bar{u}_4$  é estável.

É claro que  $\bar{u}_4$  é assintoticamente estável, pois pelo que fizemos acima,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\hat{f}^n(u), \bar{u}_4) = 0$  para todo  $u \in E^1$  com  $D(u, \bar{u}_4) < r$  onde  $r$  é tal que  $f(\frac{a}{4}) - r > 0$  e  $\frac{a}{4} + r < 1$ .

Como é sabido, no caso clássico  $a = 3$  é um valor de *bifurcação*, isto é, se  $a$  for ligeiramente maior que 3, o ponto fixo  $x_a$  deixa de ser estável e aparece uma órbita estável de período 2. Para valores de  $a$  ligeiramente maiores que  $1 + \sqrt{6}$ , aparece uma órbita estável de período 4. A partir do valor 3,89, aproximadamente, surge um comportamento *caótico* na dinâmica desta equação (Ver Hale [13], Edelstein [08], Devaney [07]). Para o caso fuzzy,  $a = 1$ ,  $a = 2$ ,  $a = 3$ ,  $a = 1 + \sqrt{5}$  são também valores de bifurcação. Ilustraremos abaixo nossos resultados através de um *diagrama de bifurcação*.

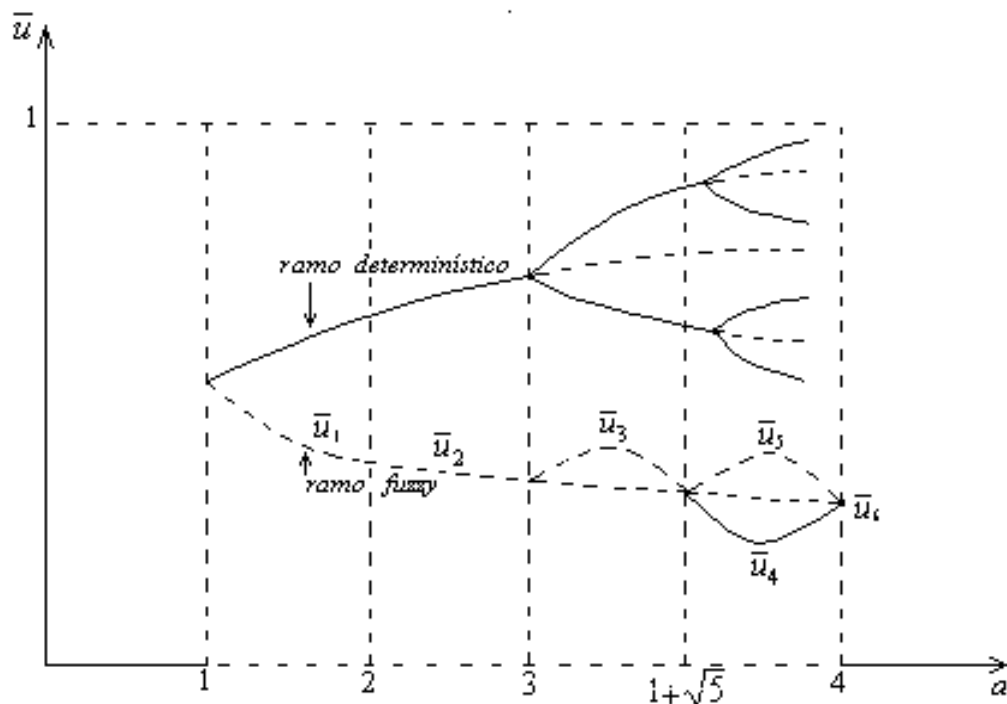


Figura 7.3: Diagrama de bifurcação da função logística  $\hat{f}(u)$ . Embora o ramo determinístico apresente pontos fixos e ciclos, no ramo fuzzy apresentamos apenas pontos fixos de  $\hat{f}$ . As linhas tracejadas significam instabilidade e as cheias estabilidade.

Vamos encerrar esta seção observando que a fuzziness ilustrada nos exemplos acima surge devido à condição inicial ser supostamente fuzzy e não o conceito dado à variável de estado.

### 7.3 Fuzziness ambiental

Variações abióticas ou ambientais podem também influenciar fortemente no processo de interação entre espécies e nas suas dinâmicas populacionais. As consequências, devido às variações no ambiente, podem ser analisadas incorporando-se estocasticidade e, neste caso, as soluções são processos estocásticos. Já no caso em que tais ambientes influenciam subjetivamente, temos novamente a teoria fuzzy como opção.

Aqui, as ferramentas também são as equações diferenciais ou as iteradas, formalmente de-

terminísticas, mas com alguns de seus *coeficientes* modelados por conjuntos fuzzy. Neste caso, as equações podem ser tratadas de maneira clássica ou através do cálculo para teoria fuzzy desenvolvido nos Capítulos 5 e 6, dependendo da modelagem adotada. Aqui o princípio de extensão de Zadeh não é aparentemente, adequado.

Vamos ilustrar o conceito de fuzziness ambiental através de exemplos. Inicialmente no Modelo 1 consideramos a *pobreza* como um fator que supostamente influencia a esperança de vida de um grupo (Veja [02, 04]):

**Modelo 1** (esperança de vida)

Seja  $A$  um conjunto com  $n(t)$  indivíduos no instante  $t$ . Supondo que não haja nascimento de indivíduos neste grupo  $A$  e que a dinâmica do número de indivíduos obedeça ao problema de Cauchy

$$n'(t) = -\lambda n(t), \quad n(0) = n_0, \quad (7.9)$$

surge a questão: *de que maneira o ambiente ou mesmo a forma de vida dos indivíduos influenciam na expectativa de vida do grupo?* Uma possível resposta será dada supondo que o ambiente interfere no grupo como um todo. Isto é, não levaremos em conta características individuais tais como qual é o mais forte, a que raça pertence, qual a cor, etc. Esta é a característica principal para que adotemos a fuzziness apenas nos parâmetros da equação, originalmente determinística, a exemplo de estocasticidade ambiental (Turelli [39], May [25]).

Para incorporar a fuzziness no parâmetro  $\lambda$ , podemos supor que  $\lambda = \lambda_1 + u_k(r)\lambda_2$ , onde  $\lambda_1$  é a *taxa de mortalidade natural* (tomada em um grupo com condições satisfatória de sobrevivência) e  $u_k(r)\lambda_2$  é o coeficiente que representa a influência da pobreza na taxa de mortalidade  $\lambda$  do grupo. A taxa de mortalidade é máxima e igual a  $\lambda_1 + \lambda_2$  quando  $u_k(r) = 1$ . Para nosso modelo, escolhemos como “conjunto dos pobres” o conjunto fuzzy dado no Exemplo 2.3:

$$u_k(r) = \begin{cases} [1 - (\frac{r}{r_0})^2]^k & \text{se } 0 \leq r < r_0 \\ 0 & \text{se } r \geq r_0 \end{cases}$$

cujos comentários e interpretações a respeito dos parâmetros  $k$  e  $r_0$  e da variável  $r$ , encontram-se no Capítulo 2.

Vamos supor agora que  $r$  seja proporcional ao salário  $S$  do grupo estudado:  $r = cS^m$ , com  $c$  e  $m$  duas constantes. Então, temos o conjunto fuzzy

$$v_k(S) = u_k(cS^m) = \begin{cases} [1 - (\frac{S}{S_0})^{2m}]^k & \text{se } 0 < S < S_0 \\ 0 & \text{se } S \geq S_0 \end{cases}$$

onde  $S_0 = (\frac{r_0}{c})^{\frac{1}{m}}$ .

Para obtermos os valores de  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $S_0$ , utilizamos uma tabela de esperanças de vida baseada em faixas salariais distintas (cf. [02]). Os valores encontrados foram:  $\lambda_1 = \frac{1}{54,4}$ ,  $\lambda_2 = 6,618 \times 10^{-3}$  e  $S_0 = 3,2$ .

De acordo com a distribuição salarial de um grupo de trabalhadores da mesma região, para a qual definimos  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $S_0$ , encontramos os valores  $k = 1,51$  e  $m = 0,4435$ , supondo  $c = 1$ .

Assim, o problema (7.9) pode ser resolvido usando a teoria clássica de equações diferenciais ordinárias, cuja solução é conhecidamente dada por

$$n(t) = n_0 e^{-[\lambda_1 + v_k(S)\lambda_2]t}$$

para cada valor de  $S$ . Desta forma, obtemos uma família de realizações (soluções) para o problema (7.9). A análise destas soluções bem como da média entre delas, no sentido clássico e também no sentido fuzzy (cf. Sugeno [37]), podem ser encontradas em [02].

Agora, vamos dar uma solução para (7.9), entendendo que tal problema é o problema de Cauchy fuzzy:

$$n'(t) = -(\lambda_1 + v_k(S)\lambda_2)n(t), \quad n(0) = n_0 \in \mathbb{R}_+ \quad (7.10)$$

cuja solução em cada instante é um conjunto fuzzy como vimos no Capítulo 5.

Temos então que os  $\alpha$ -níveis de  $v_k$  e  $n(t)$  são

$$[v_k]^\alpha = [0, S_0(1 - \alpha^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{2m}}] \quad \text{e} \quad [n]^\alpha = [n_1^\alpha, n_2^\alpha]$$

para cada  $\alpha \in [0, 1]$ .

Logo, em consequência das operações de multiplicação e adição, temos

$$[-(\lambda_1 + v_k(S)\lambda_2)n]^\alpha = [-(\lambda_1 + \lambda_2 S_0(1 - \alpha^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{2m}})n_2^\alpha, -\lambda_1 n_1^\alpha]$$

e, portanto, a solução de (7.10) é obtida do sistema determinístico bidimensional:

$$\begin{cases} \dot{n}_1^\alpha = -(\lambda_1 + \lambda_2 S_0(1 - \alpha^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{2m}})n_2^\alpha = -bn_2^\alpha & , \quad n_0 \\ \dot{n}_2^\alpha = -\lambda_1 n_1^\alpha & , \quad n_0 \end{cases} \quad (7.11)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Acoplando as duas equações de (7.11), vem

$$\ddot{n}_1^\alpha = -b\dot{n}_2^\alpha \quad \text{ou} \quad \ddot{n}_1^\alpha = \lambda_1 b n_1^\alpha$$

obtendo assim as soluções

$$\begin{cases} n_1^\alpha = n_0 \left[ \frac{(1 + \sqrt{\frac{b}{\lambda_1}})}{2} \exp(-\sqrt{\lambda_1 b} t) - \frac{(\sqrt{\frac{b}{\lambda_1}} - 1)}{2} \exp(\sqrt{\lambda_1 b} t) \right] \\ n_2^\alpha = n_0 \left[ \frac{(\sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} + 1)}{2} \exp(-\sqrt{\lambda_1 b} t) + \frac{(1 - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}})}{2} \exp(\sqrt{\lambda_1 b} t) \right] \end{cases} \quad (7.12)$$

Observemos que o problema (7.10) tem solução única com  $\alpha$ -níveis dados por (7.12), de acordo com o Corolário 5.9, e que o diâmetro de cada  $\alpha$ -nível desta solução é dado por:

$$d(\alpha, t) = n_2^\alpha - n_1^\alpha = n_0 \left( \sqrt{\frac{b}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} \right) \sinh(\sqrt{\lambda_1 b} t).$$

## Comentários

O problema de valor inicial tem como solução um subconjunto fuzzy para cada  $t$ , dado por seus  $\alpha$ -níveis. No modelo anterior temos que o parâmetro  $\lambda_1 + v_k \lambda_2$  é um conjunto fuzzy; entretanto, se tivermos informações mais precisas a respeito de tal parâmetro, podemos ter também uma melhor precisão na solução:

a) Quanto menor for o valor de  $S_0$ , ou seja, regiões com menores necessidades de uma renda mínima, para que não haja interferência do fator renda na dinâmica populacional, têm melhor precisão nas suas soluções, já que  $b$  diminui aproximando-se de  $\lambda_1$ , se  $S_0$  aproximar-se de zero. Mais ainda, supondo  $S_0 \cong 0$ , (7.12), vem dada por

$$n_1^\alpha = n_2^\alpha = n_0 e^{-\lambda_1 t}$$

que é a solução do problema determinístico onde não há interferência da renda na taxa de mortalidade.

Conclusões semelhantes seriam tiradas se considerássemos o parâmetro ambiental  $k$  crescente. Isto nos confirma a interpretação de que tal parâmetro revela se o ambiente em que vive o grupo é mais ou menos favorável à vida, como visto no Exemplo 2.3.

b) Se desejamos modelar o mesmo fenômeno utilizando, desde o princípio, uma equação determinística, obtemos

$$n(t) = n_0 e^{-\mu t} \quad (7.13)$$

como solução do problema determinístico

$$\frac{dn}{dt} = -\mu n, \quad n(0) = n_0. \quad (7.14)$$

Neste caso,  $\mu$  é um parâmetro fixo e se  $\lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_1 + \lambda_2$  temos

$$n_1^\alpha(t) \leq n(t) \leq n_2^\alpha(t), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Estas desigualdades indicam que a solução determinística (7.13) é *preferida*, com o sentido dado no Capítulo 5.

Observamos ainda que o modelo (7.10) só tem algum significado "realista" se a solução (7.12) satisfizer a condição

$$n_1^\alpha(t) \geq 0 \implies t \leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1 b}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\frac{b}{\lambda_1}}}{\sqrt{\frac{b}{\lambda_1}} - 1} \right) = t_\alpha.$$

Os casos extremos para  $t$  são:

$$t_0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} t_\alpha = \frac{1}{2[\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 S_0)]} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda_2 S_0}{\lambda_1}}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_2 S_0}{\lambda_1}} - 1} \right)$$

e



$$t_0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} t_\alpha = +\infty.$$

A limitação de  $t_0$ , como sabemos, não aparece no caso determinístico, quando o fenômeno é modelado através de uma equação diferencial linear.

c) Se optássemos por modelar o fenômeno supondo que o tempo fosse discreto, então a equação que daria a dinâmica populacional, se considerada linear, seria

$$n(t+1) = (\lambda_1 + v_k(S)\lambda_2)n(t) \quad (7.15)$$

cuja solução, como visto no Exemplo 6.2, tem  $\alpha$ -níveis:

$$[n_1^\alpha(t), n_2^\alpha(t)] = [\lambda_1^t n_0, (\lambda_1 + \lambda_2 S_0 (1 - \alpha^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{2m}})^t n_0], \quad \alpha \in [0, 1].$$

Ainda, de acordo com o Exemplo 6.2, a solução nula  $\hat{0}$  é assintoticamente estável já que

$$[\lambda_1 + v_k(S)\lambda_2]^0 = [\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2 S_0] \cong [0, 018; 0, 04] \subset [0, 1].$$

Podemos notar também que, como não poderia deixar de ser, a diminuição de  $S_0$ , bem como o aumento do valor de  $k$  (isto é, aumento nos recursos ambientais), torna menos difusa a solução, acarretando maior precisão na previsão do número futuro de indivíduos do grupo que, no limite, é dado por  $\lambda_1^t n_0$ , solução do problema determinístico

$$n(t+1) = \lambda_1 n(t), \quad n_0. \quad (7.16)$$

Esta solução é preferida já que

$$\lambda_1^t n_0 \in [n_1^\alpha(t), n_2^\alpha(t)] \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Para encerrarmos esta seção, comentaremos o modelo de Lotka-Volterra para competição entre espécies, onde os coeficientes de competição são “estabelecidos” através dos recursos “ótimos” para os competidores. Giering III e Kandel [11] sugerem que tais recursos ótimos sejam modelados usando a teoria de conjuntos fuzzy.

**Modelo 2** (competição entre espécies)

Suponhamos que  $n$  espécies estejam competindo em um único nível trófico (alimentos por exemplo) segundo o modelo de competição clássico:

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = N_i(t)[k_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}N_j(t)]. \quad (7.17)$$

Aqui, vamos supor  $k_i > 0$  e que a competição se dê apenas por recursos ótimos que podem ser colocados ao longo de um eixo  $S$  (May [25]).

A cada recurso  $s \in S$  nós associamos um número  $u_{0t}(v_k, s) \in [0, 1]$  que significará o quanto  $s$  é ótimo para o fenótipo  $v_k$ . Iremos supor que para cada  $v_k$  existe  $s$  tal que  $u_{0t}(v_k, s) = 1$ . Giering III e Kandel [11] sugerem que os recursos ótimos, comuns às espécies  $i$  e  $j$ , sejam definidos pela função grau de pertinência:

$$u_{ij}(s) = \sup_{0 \leq T \leq 1} [\min(T, \eta_{ij}(\xi_T))]$$

onde  $\xi_T = \{(v_k, v_l) : \min[u_{0t}(v_k, s), u_{0t}(v_l, s)] \geq T\}$ ,

$$\eta_{ij} = \int \int_{\xi_T} f_{ik} f_{jl} dv_k dv_l$$

e  $f_{ik}$  é a densidade de distribuição do fenótipo  $v_k$  na espécie  $i$ .

Note que o conjunto  $\xi_T$  nos informa quais são os indivíduos que, de acordo com seu fenótipo, julgam o recurso  $s$  superior a  $T$ , para cada  $T \in [0, 1]$  e  $\eta_{ij}$  nos dá uma “medida” de tal conjunto.

Giering III e Kandel [11] definem finalmente os coeficientes

$$\beta_{ij} = \frac{\sup_{s \in S} u_{ij}(s)}{\sup_{s \in S} u_{ii}(s)},$$

isto é,  $\beta_{ij}$  é definido como a *possibilidade relativa de um recursos  $s$ , que é ótimo para a espécie  $i$ , ser também ótimo para a espécie  $j$* . Ver ([02] ou [28]).

A fim de obtermos valores concretos para  $\beta_{ij}$ , vamos supor que existam apenas duas espécies competindo ( $N = 2$ ) e que

$$f_{ik} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(v_k - m_i)^2/2\sigma^2],$$

onde  $m_i$  é o fenótipo médio da espécie  $i$  e  $\sigma$  é o desvio padrão para ambas espécies. Os recursos ótimos para o fenótipo  $v$  é dado pela função da Lorentz:

$$u_{0t}(v, s) = \frac{1}{1 + 4w^{-2}(v - s)^2},$$

onde  $w$  é uma constante que representa a versatilidade de recursos para o fenótipo  $v$ .

Chamando de  $d = |m_2 - m_1|$  a distância entre os fenótipos das duas espécies, obtemos uma fórmula simplificada para  $\beta_{ij}$  (cf. [02]):

$$\beta_{ij} = \beta(d, w) = \frac{\sup_{0 \leq T \leq 1} [\min(T, \eta(\frac{d}{2}, T))]}{\sup_{0 \leq T \leq 1} [\min(T, \eta(0, T))]}.$$

e

$$\eta(d/2, T) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{d/2-g}^{d/2+g} \exp(-v^2/2\sigma^2) dv \right)^2$$

onde  $g = \frac{1}{2}w\sqrt{\frac{1-T}{T}}$ .

É fácil ver que  $\beta_{ii} = \beta(0, w) = 1$ , para todo  $w$  e que  $\beta_{ij} = \beta_{ji} = \beta$ . Assim (7.15) passa a ser

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(t)[k_1 - N_1 - \beta N_2] \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(t)[k_2 - \beta N_1 - N_2] \end{cases}. \quad (7.18)$$

Agora, para cada par  $(d, w)$  fixado, podemos encontrar uma solução do sistema determinístico (7.18). Por exemplo, a solução de equilíbrio, não trivial, é

$$N_1^* = \frac{K_1 - \beta K_2}{1 - \beta^2} \quad \text{e} \quad N_2^* = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \beta^2},$$

e se considerarmos  $K_1 = K_2 = K$ , temos

$$N_1^* = N_2^* = \frac{K}{1 + \beta}. \quad (7.19)$$

A questão da estabilidade das soluções é tratada neste caso de maneira clássica. Pode-se mostrar (cf. [03]) que o ponto de equilíbrio (7.19) é assintoticamente estável se  $1 - \beta > 0$ . Neste caso,

se considerarmos que quanto maior for o valor de  $d$ , tanto maior é a complexidade do sistema, então para  $d = 0$  (menor complexidade possível), tem-se  $\beta = 1$  e a eventual estabilidade do ponto de equilíbrio pode não ser assintótica. Questões de “estabilidade e complexidade”, que têm grande interesse em Ecologia, podem ser encontradas em vários livros clássicos. Ver (May [25], Svirezhev e Logofet [28], Kindlmann [20], etc).

## 7.4 Fuzziness demográfica-ambiental

Em geral, ambos os tipos de fuzziness estão presentes nos fenômenos biológicos. No entanto, as dificuldades na análise das possíveis soluções dos modelos matemáticos para estes casos poderiam tornar o problema intratável. Porém, se nos restringirmos aos modelos lineares (7.10) e (7.15), suas soluções não são afetadas do ponto de vista qualitativo, apresentando apenas algumas complicações matemáticas. Especificamente, temos (7.10) e (7.15) transformados em (7.20) e (7.21) respectivamente:

a) Caso contínuo

$$n'(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 v_k(S))n(t), \quad n_0 \in E^1 \quad (7.20)$$

como solução dada por seus  $\alpha$ -níveis:

$$\begin{cases} n_1^\alpha = \frac{(n_{01}^\alpha + \sqrt{\frac{b}{\lambda_1}} n_{02}^\alpha)}{2} \exp(-\sqrt{\lambda_1 b} t) - \frac{(\sqrt{\frac{b}{\lambda_1}} n_{02}^\alpha - n_{01}^\alpha)}{2} \exp(\sqrt{\lambda_1 b} t) \\ n_2^\alpha = \frac{(\sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} n_{01}^\alpha + n_{02}^\alpha)}{2} \exp(-\sqrt{\lambda_1 b} t) + \frac{(n_{02}^\alpha - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} n_{01}^\alpha)}{2} \exp(\sqrt{\lambda_1 b} t) \end{cases}$$

b) Caso discreto

$$n_{t+1} = (\lambda_1 + \lambda_2 v_k(S))n(t), \quad n_0 \in E^1 \quad (7.21)$$

e portanto os  $\alpha$ -níveis da solução são

$$[n_t]^\alpha = [(\lambda_1)^t n_{01}^\alpha, (\lambda_1 + \lambda_2 S_0 (1 - \alpha^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{2m}})^t n_{02}^\alpha],$$

onde  $[n_0]^\alpha = [n_{01}^\alpha, n_{02}^\alpha]$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

## Comentários finais

A noção de estabilidade, bem como a de pontos críticos para soluções de equações diferenciais fuzzy, ainda não está bem clara já que seus diâmetros são crescentes com o tempo  $t$  (Kaleva [17]). Assim, questões como *similaridade limite* para nichos sobrepostos ou análise de extinção devem ser tratados modelando o fenômeno através de equações discretas onde o conceito de estabilidade está bem definido.

Nos Capítulos 5 e 6 fizemos análise comparativa de sistemas fuzzy com os respectivos sistemas determinísticos associados. Concluimos que as soluções determinísticas são preferidas (têm grau de pertinência 1 conforme Teoremas 5.5 e 6.1). Tais sistemas fuzzy são, em geral, obtidos de sistemas determinísticos usando a extensão de Zadeh (Capítulo 3). Neste caso, funções características das soluções determinísticas são soluções do sistema fuzzy associado (cf. Lema 5.1). Diante disto é de se esperar que qualquer conceito de estabilidade que venha a ser dado para as soluções de equações diferenciais fuzzy deve generalizar o já existente para as soluções determinísticas. Isto é, funções características de soluções estáveis (instáveis ou assintoticamente estáveis) devem ser soluções estáveis (instáveis ou assintoticamente estáveis) para o sistema fuzzy associado. Mais ainda, as soluções dos sistemas fuzzy, que são obtidos usando o princípio de extensão de Zadeh, poderiam ser ditas estáveis (instáveis ou assintoticamente estáveis) se seus níveis  $[u(t)]^1$  contivessem soluções determinísticas estáveis (instáveis ou assintoticamente estáveis) para os sistemas originalmente determinísticos, dado que estas são preferidas.

Vale a pena lembrar que os  $\alpha$ -níveis dos pontos fixos assintoticamente estáveis, para sistemas iterativos fuzzy, obtidos pela extensão de Zadeh, são conjuntos atratores do sistema determinístico original, como vimos no Teorema 6.11.

No Capítulo 7 apresentamos exemplos e técnicas de soluções de equações diferenciais e discretas onde julgamos ser relevantes os diversos graus de subjetividade, tanto nas variáveis de estado como nos parâmetros de equações, originalmente determinísticas. Estes foram os casos do exemplo 7.3 (logístico-discreto), onde surgem pontos fixos diferentes daqueles do caso clássico e novos valores de bifurcação; do Modelo 1 (esperança de vida) em que a taxa de

mortalidade, supostamente, depende da renda dos indivíduos; e do Modelo 2 (competição entre espécies), onde a competição se dá pelos seus recursos ótimos.

Podemos concluir que, a exemplo dos casos estocásticos, é preciso avaliar se tais complicações matemáticas são relevantes para um melhor entendimento do fenômeno estudado. Acreditamos, no entanto, que quando se consideram relevantes os diferentes graus de subjetividade do fenômeno estudado, a melhor forma de olhar o problema é por meio da teoria fuzzy.

## Referências Bibliográficas

- [01] Aubin, J.P. and Cellina, A. - "Differential Inclusion- Springer -Verlag. Berlin (1984).
- [02] Barros, L.C. - "Modelos Determinísticos com Parâmetros Subjetivos- Tese de Mestrado - IMECC - UNICAMP - (1992).
- [03] Barros, L.C. e Tonelli, P.A. - *Notas e Exemplos de Complexidade e Estabilidade em Dinâmica Populacional* - Biomatemática - III - IMECC-UNICAMP (1983).
- [04] Bassanezi, R.C. e Barros, L.C. - *A simples model of life expectancy with subjective parameters* - Kibernetes: Inter. Journal of Systems and Cybernetics 24, vol. 9, 91-98 (1995).
- [05] Bassanezi, R.E. e Ferreira, W.C.Jr. - "Equações Diferenciais com Aplicações- Editora Harba, São Paulo - S.P., 1988.
- [06] Cabrelli, C.A.; Forte, B.; Molter, U.M. and Vrscay, E.R. - *Iterated Fuzzy Set Systems: A New Approach to the Inverse Problem for Fractals and Other Sets* - Jour. of Math. Analysis and Applications 171, 79-100 (1992).
- [07] Devaney, R.L. - "An introduction to chaotic dynamical Systems- Benjamin/Cummings, Menlo Park, California (1989).
- [08] Edelstein-Keshet, L. - "Mathematical Models in Biology", McGraw-Hill, Inc. Mexico (1988).
- [09] Forte, B.; Lo Schiavo, M. and Viscay, E.R. - *Continuity Properties of Attractors for Iterated Fuzzy Set Systems* - Jour. Austral. Math. Soc. Ser. B 36, 175-193 (1994).

- [10] Fullér, R. and Keresztfalvi, T. - *On generalization of Nguyen's theorem* - Fuzzy Sets and Systems 41, 371-374 (1990).
- [11] Giering III, E.W. and Kandel, A. - *The Applications of Fuzzy Set Theory to the Modeling of Competition in Ecological Systems* - Fuzzy Sets and Systems 9, 103-127 (1983).
- [12] Hale, J.K. - "Asymptotic Behavior of Dissipative Systems- Math. Surveys and Monographs, 25 - Ann. Math. Soc. Providence (1988).
- [13] Hale, J.K. and Koçak, H. - "Dynamics and Bifurcations- Springer-Verlog, N.Y. (1991).
- [14] Hausdorff, F. - "Set Theory- Chelsea Press, New York (1957).
- [15] Hukuhara, M. - *Integration des Applications Mesurables dont la Valeur est un compact convexe* - Funkcialaj Ekvacioj 10, 205-223 (1967).
- [16] Kaleva, O. - *On the Converge of Fuzzy Sets* - Fuzzy Sets and Systems 17, 53-65 (1985).
- [17] Kaleva, O. - *Fuzzy Differential Equations* - Fuzzy Sets and Systems 24, 301-317 (1987).
- [18] Kaleva, O. - *The Cauchy Problem for Fuzzy Differential Equations* - Fuzzy Sets and Systems 35, 389-396 (1990).
- [19] Kandel, A. - "Fuzzy Mathematical Techniques with Applications- Addison-Wesley Publishing Company (1986).
- [20] Kindlamnn, P. *Stability vs. Complexity in Model competition Communities* - Lecture Notes in Biomath. 54, 193-207 (1983).
- [21] Kisielewicz, - "Differential Inclusions and Optimal Control- PWN - Polish Publisher in co-edition with Kluwer Acad. Publ. (1991).
- [22] Kloeden, P.E. - *Compact Supported Endographs and Fuzzy Sets* - Fuzzy Sets e Systems, 4, 193-201 (1980).



- [23] Kloeden, P.E. - *Chaotic iterations of fuzzy sets* - Fuzzy Sets and Systems, 42, 37-42 (1991).
- [24] May, R.M. - *Simple mathematical models with very complicated dynamics* - Nature 261, 459-467 (1976).
- [25] May, R.M. - "Stability and Complexity in Model Ecosystems- Princeton University Press- Princeton (1974).
- [26] Negoita C.V. and Ralescu, D.A. - "Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis- Willey, N.Y. (1975).
- [27] Nguyen, H.T. - *A note on the extension principle for fuzzy sets* - Jour. Math. Analysis and Applications 64, 369-380 (1978).
- [28] Puri, L.M. and Ralescu, D.A. - *Short Communication: A Possibility Measure is not a Fuzzy Measure* - Fuzzy Sets and Systems 7, 311-313 (1982).
- [29] Puri, M.L. e Ralescu, D.A. - *Differentials of Fuzzy Functions* - Jour. Math. Analysis and Applications - 91, 552-558 (1983).
- [30] Puri, M.L. e Ralescu, D.A. - *Fuzzy Random Variables* - Journ. Math. Analysis and Applications, 114, 409-422 (1986).
- [31] Puri, L.M. e Ralescu, D.A. - *Convergence Theorem of fuzzy Martingales* - Journ. Math. Analysis and Applications, 160, 107-122 (1991).
- [32] Quelho, E. - "Sobre  $\Gamma$ -convergencia- Tese de Doutorado - IMECC-UNICAMP (1989).
- [33] Ráfiikov, M.M. - *Identificação de Modelos Bionmortemáticos* - Biomatemática, IMECC, vol. V, 70-78 (1995).
- [34] Rojas, M.M. and Román, H.F. - *On the equivalence of convergences of fuzzy sets* - Fuzzy Sets and Systems 80, 217-224 (1996).
- [35] Rudin, W. - "Real and Complex Analysis- Addison Wesley N.Y. (1976).

- [36] Seikkala, S. - *On the fuzzy initial value problem* - Fuzzy Sets and Systems 24, 309-330 (1987).
- [37] Sugeno, M. - "Theory of fuzzy integral and its applications- Ph.D. Thesis, Tokyo Institute of Technology (1974).
- [38] Svirezhev, Y.M. e Logofet, D.O. - "Stability of Biological Communities- Mir Publishers Moscou (1983).
- [39] Turelli, M. - *Stochastic Community Theory: A Partially Guided Tour* - Biomatematics 17, 321-339 (1986).
- [40] Wang, Z. - *The Autocontinuity of Set Function and the fuzzy Integral* - Journ. Math. Analysis and Applications, 91, 195-218 (1984).
- [41] Wu, C.; Song, S. and Lee, E.S. - *Approximate Solutions Existence and Uniqueness of the Cauchy Problem of Fuzzy Differential Equations* - Journ. Math. Analysis and Applications, 202, 629-644 (1996).
- [42] Zadeh, L.A. - *Fuzzy Sets* - Inform. and Control 8, 338-353 (1965).
- [43] Zadeh, L.A. - *Fuzzy Sets as a Basis for Theory of possibility* - Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28, (1978).