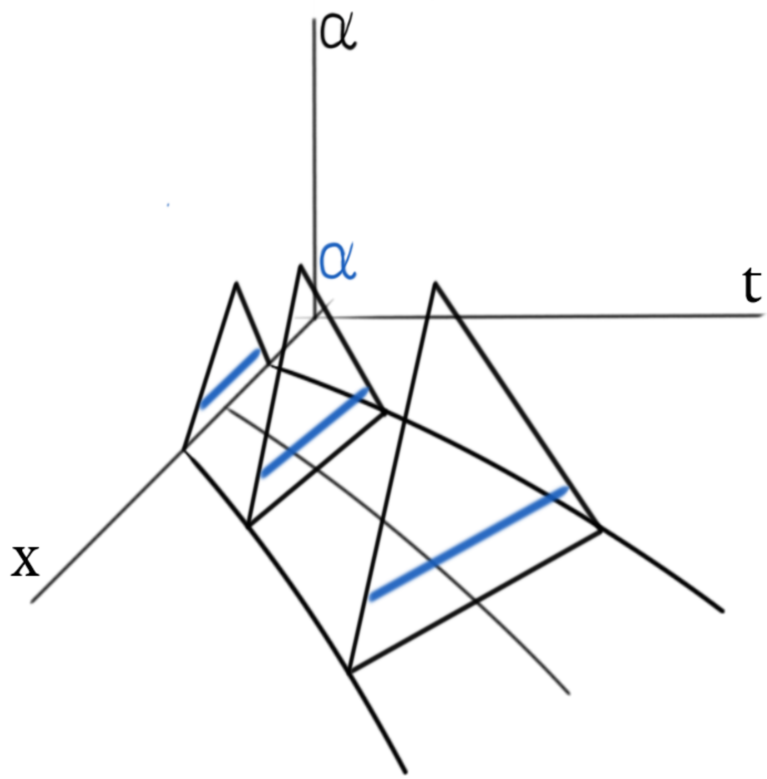
Introdução à Teoria Fuzzy

Notas de Aula

Laécio Carvalho De Barros

&

Vinícius Figueiredo Fernandes



Campinas
Dezembro de 2019

Estas notas foram tomadas durante o curso ms580 no segundo semestre de 2019

Sumário

1 Introdução

A lógica fuzzy, ou por vezes chamada, lógica nebulosa, surge através de sua formulação da teoria dos conjuntos para gerar um certo "afrouxamento"da rigidez numérica da matemática clássica. Esse "afrouxamento"traz praticidade para modelamentos matemáticos.

Por exemplo, quando nos referimos que a altura de uma dada pessoa é de cerca de 1,7 metros, apesar de não termos um dado exato, a dada afirmação ainda contem informação.

Como outro exemplo, imagine que seja marcado um encontro as 17 horas em determinado lugar. Como bem sabemos, encontrar com alguém exatamente as 17 hs tem probabilidade zero, assim, na prática, marcar um encontro exige certa tolerância temporal ou o encontro nunca aconteceria.

Desse modo, também podemos definir que a matemática fuzzy é uma matemática com certa tolerância. A matemática que permite-nos dizer: "Um pouquinho mais de 17 hs, um pouquinho menos de 17 hs".

E a formulação matemática fuzzy também se diferencia da probabilidade, pois, enquanto a estatística lida com incertezas antes dos eventos, e.g., antes do lançamento de uma moeda, a matemática fuzzy possui incertezas mesmo após o lançamento de uma moeda.

A teoria dos conjuntos fuzzy formulada por Zadeh é inspirada um conjunto clássico cuja fronteira é incerta.

Zadeh em sua teoria gradua no intervalo [0,1] a pertinência de certo elemento no conjunto.

Dessa maneira, enquanto no caso clássico temos que dado um conjunto A, então o elemento x pertence ou não a A. No caso fuzzy temos que se A for um conjunto fuzzy, então x pertence a A com certo grau de zero a um.
Para o caso clássico, tem-se:

Definição 1.1(Função característica ou indicadora de subconjunto). Se A é um subconjunto de U, isto é, se todo elemento x de A for também de U, defini-se a função característica de A por: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, se\ x \in A \\ 0, se\ x \notin A \end{cases}$.

Teorema 1.1 Existe uma bijeção entre as funções características e os subconjuntos de um universo.
Um subcojunto fuzzy é caracterizado a partir da extensão do contradominio da função caractreristica.

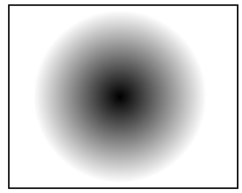


Figura 1: Representação gráfica de um conjunto fuzzy

Definição 1.2(Subconjunto fuzzy). Seja U um conjunto universo. O subconjunto fuzzy A de U é caracterizado por sua função de pertinência $\varphi_A : U \to [0,1]$.

Temos então que $\varphi_A(x) \in [0,1]$ define o grau de pertinência do elemento x no conjunto fuzzy A. Se A for clássico $\varphi_A \equiv \chi_A$.
À luz do Teorema 1.1, poderíamos dizer que um subconjunto fuzzy é dado pela bijeção aplicada em função cujo contra-dominio é o intervalo [0,1].

Exemplo 1.1 (Definindo conjuntos dada uma propriedade). Seja P o subconjunto de $\mathbb{N} = 0, 1, 2, ...$ dado pelos números pares. $P = \{n \in \mathbb{N}|$ n é par$\} = \{n = 2k | k \in \mathbb{N}\}$ Seja Q $= \{n \in \mathbb{N} | n \leq 10\} = \{0, 1, 2, ..., 10\}$.

Exemplo 1.2 (Definindo um subconjunto fuzzy ($\mathcal{F}$) de $U = \mathbb{N}$).

$F = \{n \in \mathbb{N}|$ n é pequeno$\}$, se pequeno for explicitamente definido, F torna-se um conjunto clássico. Então, se n = 10, logo, $F = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 10\}$.

Podemos observar que se $\varphi_A(10) = 1$, certamente teremos que $\varphi_A(9) = \varphi_A(8) = ... = \varphi_A(0) = 1$.

Vemos no último exemplo que se "pequeno"não for traduzido por um número real, chegamos em uma lógica que inclui adjetivos.

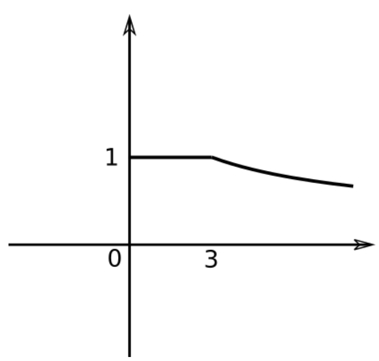


Figura 2: Representação gráfica de uma função de pertinência $\varphi_A(x)$

2 Operações entre Conjuntos Fuzzy

Para o *caso clássico* temos as seguintes operações entre conjuntos:

União: A $\cup$ B $= \{x \in U | x \in A \vee x \in B\}$. Através da indicadora, podemos definir ainda como: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, se\ x \in A\ ou\ x \in B \\ 0, se\ x \notin A\ e\ x \notin B \end{cases}$.

$\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$.

Intersecção: A $\cap$ B $= \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\}$. Através da indicadora, podemos definir ainda como: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, se\ x \in A\ e\ x \in B \\ 0, se\ x \notin A\ ou\ x \notin B \end{cases}$.

$\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$.

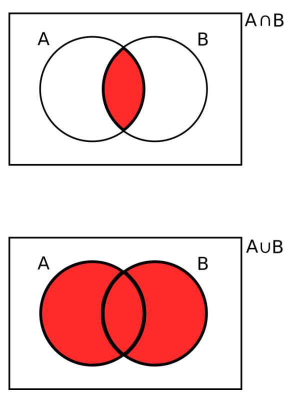


Figura 3: Representação das operações união e intersecção em um conjunto clássico

Complemento(A^c ou A'): A' $= \{x \in U | x \notin A\}$ ou ainda pela indicadora: $\chi_{A'}(x) = \begin{cases} 1, se\ x \notin A \\ 0, se\ x \in A \end{cases}$.

Observações:

Para o conjunto universo U, temos $\chi_U(x) = 1$ e para o conjuto vazio, $\emptyset$, $\chi_\emptyset(x) = 0, \forall x$.

Caso Fuzzy

Supondo que A e B são subconjuntos fuzzy de U, para definir união, interseção e complemento, devemos associar A e a B suas funções de pertinência φ_A e φ_B.

União: $A \cup B$ é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é $\varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$.

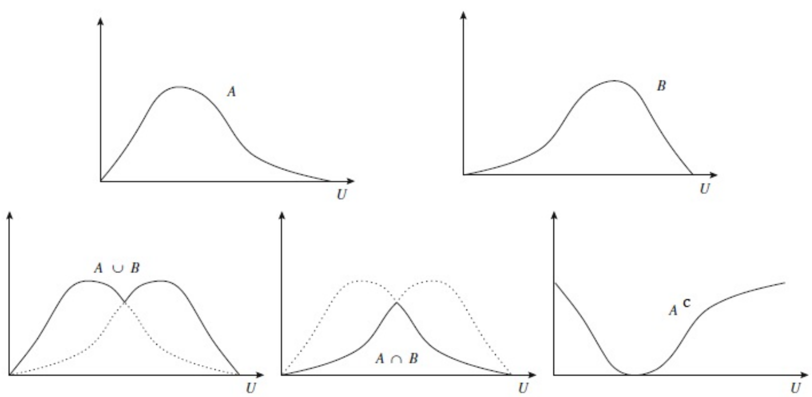
Intersecção: De modo semelhante temos que:
$\varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$.

Complemento: $\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x)$.

Se $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ e A for subconjunto fuzzy de U, podemos denotar A por:
$\varphi_A = \frac{\varphi_A(a_1)}{a_1}$ "+" $\frac{\varphi_A(a_2)}{a_2}$ "+"... "+" $\frac{\varphi_A(a_k)}{a_k}$.

Neste caso, $\varphi_{A'} = \frac{1-\varphi_A(a_1)}{a_1}$ "+" $\frac{1-\varphi_A(a_2)}{a_2}$ "+"... "+" $\frac{1-\varphi_A(a_k)}{a_k}$.

.



Fonte: Barros, Bassanezi e Lodwick, A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics

3 Relações Fuzzy

Definição 3.1 (Relação). Sejam os universos: $U_1, U_2, ..., U_n$. Uma relação R de $U_1, U_2, ..., U_n$ é um subconjunto de U_1 x U_2 x ... x U_n, portanto, $R \subseteq U_1$ x U_2 x ... x $U_n \implies R = \{(u_1, u_2, ..., u_n) : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, ..., u_n \in U_n\}$. Através da função de pertinência, temos ainda:

$$\chi_R((u_1, u_2, ..., u_n)) = \begin{cases} 1 \; se \; (u_1, u_2, ..., u_n) \in R \\ 0 \; c.c \end{cases}.$$

Para o caso fuzzy, R é uma relação fuzzy dada por φ_R: U_1 x U_2 x ... x U_n $\rightarrow [0, 1]$, em que $\varphi_R(u_1, u_2, ..., u_n)$ é o grau com que $u_1, u_2, ..., u_n$ estão relacionadas segundo a relação R.

Exemplo 3.1(Relação fuzzy). Se $A_1 \subset U_1, A_2 \subset U_2, ..., A_n \subset U_n$, A_1 x A_2 x ... x $A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i\}$ é o produto cartesiano de A_1 por A_2 ... por A_n. Isto é, se $A_1, A_2, ..., A_n$ forem fuzzy, então o produto cartesiano fuzzy A_1 x A_2 x ... x A_n tem função de pertinência $\varphi_{A_1 \text{x} A_2 \text{x} ... \text{x} A_n}(u_1, u_2, ..., u_n) = \varphi_{A_1}(u_1) \wedge \varphi_{A_2}(u_2) \wedge ... \wedge \varphi_{A_n}(u_n)$, em que $\wedge$ denota o mínimo.

3.1 Relações Binárias Fuzzy

Dados U e V, uma relação fuzzy R em UxV é dada por uma função de pertinência φ_R : U x V $\rightarrow$ [0,1]. Por exemplo, se A é subconjunto fuzzy de U e B é subconjunto fuzzy de V, o produto cartesiano fuzzy AxB, tem função de pertinência dada por $\varphi_{A\text{x}B} : U\text{x}V \rightarrow$ [0,1] em que $\varphi_{A\text{x}B}(u, v) = \varphi_A(u) \wedge \varphi_B(v) = \min\{\varphi_A(u), \varphi_B(v)\}$.

Para o caso em que U e V são finitos,
$U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ e $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, então $U\text{x}V = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), ..., (u_1, v_n),$ $(u_2, v_1), (u_2, v_2), ..., (u_2, v_n), ..., (u_m, v_1), (u_m, v_2), ..., (u_m, v_n)\}$, podemos representar uma relação fuzzy R=[$\varphi_R(u_i, v_k)$] =[r$_{ik}$] matricialmente:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ r_{m1} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}_{m\text{x}n}$$

3.2 Composição de Relações Fuzzy Binárias

Definição 3.2(Composição de relações fuzzy binárias). Sejam U $= \{u_1, u_2, ..., u_m\}$, V $= \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e W $= \{w_1, w_2, ..., w_p\}$. Seja R uma relação fuzzy de U para V e S uma relação de V para W. A relação $T = R \circ S$ de U por W (U x W) é definida por $\varphi_{R \circ S}(u_i, w_j) = \max\limits_{1 \leq k \leq n}(\min\{\varphi_R(u_i, v_k), \varphi_S(v_k, w_j)\})$.

Podemos obter a composição matricialmente operando as matrizes de maneira conveniente, colocando $r_{ij} = \varphi_R(u_i, v_j)$, $s_{ij} = \varphi_S(v_i, w_j)$ e $t_{ij} = \varphi_{R \circ S}(u_i, w_j)$.

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots \\ \vdots & \ddots & \\ t_{m1} & \dots & t_{mp} \end{bmatrix}_{mxp} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots \\ \vdots & \ddots & \\ r_{m1} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \circ \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots \\ \vdots & \ddots & \\ s_{n1} & \dots & s_{np} \end{bmatrix}_{nxp}, \quad (1)$$

em que $t_{ij} = \max\limits_{1 \leq k \leq m}(\min\{\varphi_R(u_i, v_k), \varphi_S(v_k, w_j)\})$.

Observe que $T = R \circ S$ constitui caso análogo ao produto matricial, onde a multiplicação é trocada por mínimo e soma por máximo.

Exemplo 3.2

$$\begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,7 & 0,9 \\ 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,7 \\ 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

3.3 Composição de Relações Fuzzy Binárias para o Caso Geral e Regra de Composição de Inferênciia

Definição 3.3(Composição de relações fuzzy binárias, caso geral). Sejam U, V e W conjuntos universos, R uma relação fuzzy de U para V e S outra relação de V para W. A relação $T = R \circ S$ de U x W é definida por $\varphi_{R \circ S}(u, w) = \sup\limits_{v \in V}(\min\{\varphi_R(u, v), \varphi_S(v, w)\}$.

Definição 3.4(Composição de Inferência). Esse é o caso paticular em que a composição é formada por um subconjuno fuzzy A de U (um conjunto fuzzy pode ser visto como uma relação "unária") e uma relação fuzzy binária R em UxV, de forma que $A \circ R = B$ é um subconjunto fuzzy B de V. Neste caso, podemos ver

R como uma função R: $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, que associa cada subconuntoo fuzzy A de U a um subconjunto fuzzy B de $\mathcal{F}(V)$. Devido essa interpretação é denomina-se essa composição particular como "regra de inferência".

A função de pertinência do conjunto fuzzy B é dada por:

$\varphi_B(v) = \varphi_{A \circ R}(v) = \sup\limits_u(\min\{\varphi_A(u), \varphi_R(u,v)\}$.

Se U e V forem finitos,

$$[B]^T = [A \circ R]^T = [R]^T \circ \ [A]^T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots \\ \vdots & \ddots & \\ r_{m1} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

supondo que os conjuntos fuzzy finitos são representados matricialmente em linha.

Exemplo 3.3

$$\begin{bmatrix} 0,7 & 0,5 & 0,1 \\ 0,6 & 0,8 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \\ 0,5 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

4 Sistema Baseado em Regras Fuzzy

É formado por 4 módulos:

- Módulo de fuzzificação;
- Regras fuzzy (tabela)

  Constitui uma tabela de regras do tipo: *Se entrada, então saída*. Também nos referimos à entrada como antecedentes e à saída como consequentes. Sendo cada antecedente e consequente traduzido por um conjunto fuzzy;
- Método de inferência fuzzy

  Alguns dos métodos de inferência fuzzy estudados no curso serão o de Mamdani e o de Takagi-Sugeno;
- Defuzzificação

  Constitui em transformar um conjunto fuzzy em um número real.

4.1 O Método de Mamdani

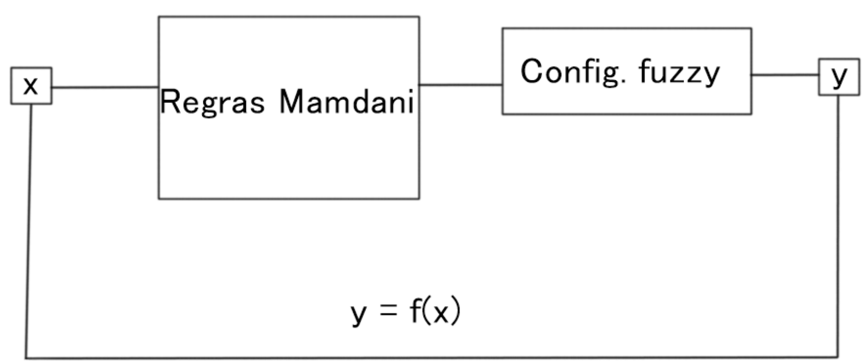


Figura 4: Esquematização do sistema de regras Mamdani

Enunciaremos abaixo um sistema de regras em que R_i constitui uma regra de índice i, x_n é a n-ésima variável de entrada, A_{in} é o n-ésimo conjunto fuzzy de entrada dado para a regra de índice i, y_m é a m-ésima variável de saída e B_{im} é o m-ésimo conjunto fuzzy de saída para a regra de índice i.

R_1: Se x_1 é A_{11} e x_2 é A_{12} e ... e x_n é A_{1n}. Então, y_1 é B_{11} e y_2 é B_{12} e ... e y_m é B_{1m}.

R_2: Se x_1 é A_{21} e x_2 é A_{22} e ... e x_n é A_{2n}. Então, y_1 é B_{21} e y_2 é B_{22} e ... e y_m é B_{2m}.

. . .

R_i: Se x_1 é A_{i1} e x_2 é A_{i2} e ... e x_n é A_{in}. Então, y_1 é B_{i1} e y_2 é B_{i2} e ... e y_m é B_{im}.

Logo, dada a relação M, em que
$\varphi_M(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = \varphi_{R_1}(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$
$\vee\ \varphi_{R_2}(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) \vee ... \vee \varphi_{R_k}(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$. De modo que, $\varphi_{R_i}(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = (\varphi_{A_{i1}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{i2}}(x_2) \wedge ... \wedge \varphi_{A_{in}}(x_n))$
$\wedge\ (\varphi_{B_{i1}}(y_1) \wedge \varphi_{B_{i2}}(y_2) \wedge ... \wedge \varphi_{B_{im}}(y_m))$.

De tal maneira que M é uma relação fuzzy em X_1 x X_2 x ... x X_n em Y_1 x Y_2 x ... x Y_m. $A \circ M = B$. Em que A é uma n-upla e B, uma m-upla.

M: $\mathcal{F}(X_1)$ x $\mathcal{F}(X_2)$ x ... x $\mathcal{F}(X_n) \rightarrow \mathcal{F}(Y_1)$ x ... x $\mathcal{F}(Y_m)$.

$(A_1, A_2, ..., A_n) \xrightarrow{M} M(A_1, A_2, ..., A_n) = B$.

Exemplo 4.1(Mamdani para 2 regras. Cada regra com 2 entradas e 1 saída).

R_1: Se x_1 é A_{11} e x_2 é A_{12}. Então y é B_1.

R_2: Se x_1 é A_{21} e x_2 é A_{22}. Então y é B_2 .

$\varphi_{R_1}(x_1, x_2, y) = \varphi_{A_{11}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{12}}(x_2) \wedge \varphi_{B_1}(y)$.

$\varphi_{R_2}(x_1, x_2, y) = \varphi_{A_{21}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{22}}(x_2) \wedge \varphi_{B_2}(y)$.

$\varphi_M(x_1, x_2, y) = \varphi_{R_1}(x_1, x_2, y) \vee \varphi_{R_2}(x_1, x_2, y)$.

Agora, com M em mãos, dado um conjunto fuzzy A $= A_1$ x A_2 de entradas, veremos como obter M(A) = B $= A \circ M$.

$\varphi_B(y) = \varphi_{R(A)}(y) = \sup\limits_x(\min(\varphi_A(x), \varphi_M(x, y)))$, conhecida como a regra de composição de inferência.

Exemplo 4.2(Mamdani para uma única entrada A).

Para o exemplo 4.2. A $= \{a_1\}$ x $\{a_2\} = (a_1, a_2) \rightarrow \varphi_B \xrightarrow{def.} \overline{y}$,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 \ se \ x = a_1 \\ 0 \ se \ x = a_2 \end{cases}$$

Assim temos, f: $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tal que, f: $(a_1, a_2) \mapsto \overline{y}$.

4.2 O método de Takagi-Sugeno

A diferença do método de Mamdani para o de Takagi-Sugeno são os consequentes nos sistemas de regras.

As regras são do tipo: R: Se x é Alto, então y = ax + b

R_1: Se x_1 é A_{11} e x_2 é A_{12} e ... e x_n é A_{1n}, então $y_1 = g_1(x_1, x_2, ..., x_n)$.

R_2: Se x_1 é A_{21} e x_2 é A_{22} e ... e x_n é A_{2n}, então $y_2 = g_2(x_1, x_2, ..., x_n)$.

...

R_r: Se x_1 é A_{r1} e x_2 é A_{r2} e ... e x_n é A_{rn}, então $y_r = g_r((x_1, x_2, ..., x_n))$.

Saída geral:

$$y = \frac{\sum_i^r w_j . g_j(x_1, x_2, ..., x_n)}{\sum_i^r w_j} \tag{5}$$

, em que $w_j = \varphi_{A_{j1}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{j2}}(x_2) ... \wedge \varphi_{A_{jn}}(x_n)$.

Exemplo 4.3

R_1: Se x é A_1, então $y_1 = x + 2$.

R_2: Se x é A_2, então $y_2 = 2x$.

$x \in [0, 4]$.

$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 \ se \ 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - \frac{1}{2}x \ se \ 2 < x \leq 4 \\ 0 \ se \ x \geq 4 \end{cases} .$$

$$\varphi_{A_2}(x) = \begin{cases} 0 \ se \ x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 \ se \ 2 \leq x \leq 4 \\ 1 \ se \ 4 \leq x \leq 6 \end{cases} .$$

Saída geral:

$y = \frac{w_1 g_1(x) + w_2 g_2(x)}{w_1 + w_2}$, em que $w_1 = \varphi_{A_1}(x)$ e $w_2 = \varphi_{A_2}(x)$, logo, $y = \varphi_{A_1}(x)(x+2) + \varphi_{A_2}(x)(2x) \implies y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 8)$.

5 α-níveis, Números Fuzzy e O Princípio de Extensão

5.1 α-nível de um Conjunto Fuzzy

Definição 5.1(α-nível). Suponha que A é um subconjunto fuzzy de U com função de pertinência φ_A. Considere $\alpha \in [0, 1]$. Então, α-nível de A é um subconjunto clássico $[A]^\alpha = \{u \in U : \varphi_A \geq \alpha\}$; $\alpha > 0$.

Note que $\alpha_1 \leq \alpha_2$, então $[A]^{\alpha_2} \subset [A]^{\alpha_1}$.

$[A]^1$ é o menor α-nível de A.

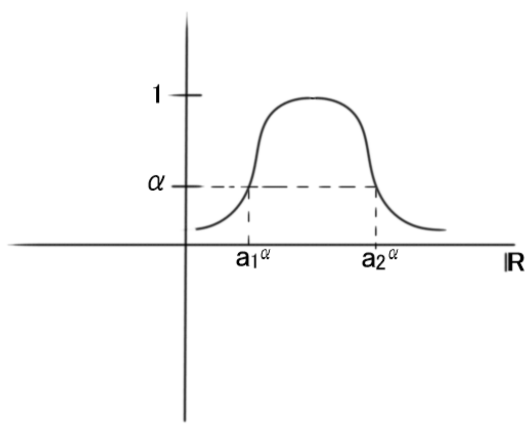


Figura 5: Representação gráfica de um número fuzzy e seu α-nível onde $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$

Definição 5.2(Suporte). Se $\alpha = 0$, definimos $[A]^0 = supp\{u \in U : \varphi_A(u) > 0\}$.

Teorema 5.1(Teorema da Representação). Seja A_α, $\alpha \in [0, 1]$ uma família de subconjuntos clássicos de U. Se

- $A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1}$ sempre que $\alpha_1 \leq \alpha_2$
- $\bigcup A_\alpha \subset A_0$
- $A_\alpha = \bigcap\limits_{k \geq 0} A_{\alpha_k}$ com $\alpha_k \to \alpha$

Então, existe um único subconjunto fuzzy A de U de modo que $[A]^\alpha = A_\alpha$. Isto é, um conjunto fuzzy é uma família de conjuntos clássicos.

5.2 Números Fuzzy

Nesta seção consideraremos a construção dos números fuzzy para U $=\mathbb{R}$.
Definição 5.3(Número fuzzy). A é um número fuzzy se for subconjunto de $\mathbb{R}$ e

(a) $[A]^\alpha$ são intervalos fechados e não vazios: $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$

(b) $[A]^0$ é limitado

Os números fuzzy podem ser classificados em alguns tipos.

- Trapezoidal: A = (a;b;c;d)

  $$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 \ se \ x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} \ se \ a < x \leq b \\ 1 \ se \ b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} \ se \ c \leq x < d \\ 0 \ se \ x \geq d \end{cases} .$$

  Para encontrarmos o conjunto $[A]^\alpha = [{a_1}^\alpha, {a_2}^\alpha]$ para o caso trapezoidal faremos

  a_1:

  $\varphi_A({a_1}^\alpha) = \alpha \implies \frac{{a_1}^\alpha - a}{b-a} = \alpha \implies {a_1}^\alpha = \alpha(b-a)+a.$

  a_2:

  $\varphi_A({a_2}^\alpha) = \alpha \implies \frac{d-{a_2}^\alpha}{d-c} = \alpha \implies {a_2}^\alpha = d-\alpha(d-c).$

  Ou seja $[A]^\alpha = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d]$

- Triangular: A = (a;u;b)

  $$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 \ se \ x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a} \ se \ a < x \leq u \\ 1 \ se \ x = u \\ \frac{b-x}{b-u} \ se \ u \leq x < b \\ 0 \ se \ x \geq b \end{cases} .$$

  Para o caso triangular, teremos que $[A]^\alpha = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b]$ que corresponde a simplesmente trocar as coordenadas b e c por u.

- Sino
$$\varphi_A(x) = \begin{cases} e^{\frac{-(x-u)^2}{a^2}} \; se \; x \in [u-\delta, u+\delta] \\ 0 \; se \; x \notin [u-\delta, u+\delta] \end{cases}.$$
Para encontrarmos o conjunto $[A]^\alpha = [{a_1}^\alpha, {a_2}^\alpha]$ para caso sino faremos $\varphi_A(x) = \alpha \implies \frac{-(x-u)^2}{a^2} = ln(\alpha) \implies$
$$[A]^\alpha = \begin{cases} [u - \sqrt{ln(\frac{1}{\alpha^a})}, u + \sqrt{ln(\frac{1}{\alpha^a})}] \; se \; \alpha \geq \overline{\alpha} \\ [u-\delta, u+\delta] \; se \; \alpha = 0 \end{cases}.$$

5.3 Aritmética de Números Fuzzy

Há na literatura duas maneiras de fazer aritmética entre conjuntos fuzzy.

- Análoga à aritmética para variáveis aleatórias ou seja via função de pertinência e à função de densidade de probabilidade;
- Via aritmética intervalar quando os conjuntos fuzzy forem números fuzzy.

Vamos comentar sobre o segundo caso

Definição 5.4(Operações intervalares). Sejam $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ dois intervalos e $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) I + J = [a,b] + [c,d] = [a+c,b+d].

(ii) I - J = [a-d,b-c].

(iii) $\lambda\text{I} = \begin{cases} [\lambda a, \lambda b] \; se \; \lambda \geq 0 \\ [\lambda b, \lambda a] \; se \; \lambda < 0 \end{cases}.$

(iv) I.J = $[min\{ac, ad, bc, bd\}$,$max\{ac, ad, bc, bd\}]$.

(v) $\frac{I}{J}$ = I.$\frac{1}{J}$ = [a,b].$[\frac{1}{d}, \frac{1}{c}]$ se $0 \notin [c, d]$.

A aritmética de números fuzzy é definida usando a aritmética intervalar acima para os α-níveis de números fuzzy envolvidos. Se A, B forem números fuzzy e $\lambda \in \mathbb{R}$. $[A]^\alpha = [{a_1}^\alpha, {a_2}^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [{b_1}^\alpha, {b_2}^\alpha]$.

(i) $[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [{a_1}^\alpha + {b_1}^\alpha, {a_2}^\alpha + {b_2}^\alpha]$.

(ii) $[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha$.

(iii) $[A.B]^\alpha = [A]^\alpha.[B]^\alpha$.

(iv) $[\lambda A]^\alpha = \lambda[A]^\alpha$.

(v) $[\frac{A}{B}]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha}$ se $0 \notin [b_1{}^\alpha, b_1{}^\alpha]$.

Exemplo 5.1(Aritmética fuzzy). Considere os números fuzzy A = (1;2;3;4) e B = (3;4;5).

$[A]^\alpha = [(2-1)\alpha, (3-4)\alpha+4] = [\alpha+1, 4-\alpha]$

$[B]^\alpha = [(4-3)\alpha+3, (4-5)\alpha+5] = [\alpha+3, -\alpha+5]$

(i) $[A+B]^\alpha = [4+2\alpha, 9-2\alpha]$.

(ii) $[A-B]^\alpha = [2\alpha-4, 1-2\alpha]$.

(iii) $[ZA]^\alpha = Z[A]^\alpha = \begin{cases} [Z(\alpha+1), Z(4-\alpha)] \ se \ z \geq 0 \\ [Z(4-\alpha), Z(\alpha+1)] \ se \ z < 0 \end{cases}$.

(iv) $[\frac{A}{B}]^\alpha = [\alpha+1, 4-\alpha].[\frac{1}{\alpha+3}, \frac{1}{5-\alpha}]$.

(v) $\varphi_{A+B}(5,5) = \alpha \implies 2\alpha+4 = 5,5 \implies \alpha = 0,75$.

5.4 Princípio de Extensão

O objetivo do princípio de extensão é obter a "imagem" de um conjunto fuzzy por meio de uma função. Suponha f: U → V. Se $A \subset U$ (clássico), a imagem de A é B = $f(A) = \{f(U) : u \in A\} \subset V$. Mas B = $f(A)$ se A é fuzzy?

Definição 5.5 (Princípio de extenção de Zadeh). B = $f(A)$ será um subconjunto fuzzy de V cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\hat{f}(A)(z)} = \begin{cases} \sup\limits_{f^{-1}(z)} \{\varphi_A(x)\} \ se \ f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 \ se \ f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}. \tag{6}$$

Exemplo 5.2 Seja $f(x) = x^2$ e A = $\frac{0.1}{-2} + \frac{0.1}{-1} + \frac{0.4}{0} + \frac{0.3}{1} + \frac{0.1}{2}$.

Obter B = $\varphi(A)$.

B = $\frac{?}{\varphi(-2)} + \frac{?}{\varphi(-1)} + \frac{?}{\varphi(0)} + \frac{?}{\varphi(1)} + \frac{?}{\varphi(2)} = \frac{?}{0} + \frac{?}{1} + \frac{?}{4}$

- $\varphi_B(0) = \sup\{\varphi_A(0)\} = 0.4$
- $\varphi_B(1) = \sup\{\varphi_A(-1), \varphi_A(1)\} = \sup\{0.1, 0.3\} = 0.3$
- $\varphi_B(4) = \sup\{\varphi_A(-2), \varphi_A(2)\} = \sup\{0.1, 0.1\} = 0.1$

Portanto, B = $\frac{0.4}{0} + \frac{0.3}{1} + \frac{0.1}{4}$.

O método do princípio de extensão de Zadeh é análogo ao método probabilistico para variável aleatória discreta.

Exemplo 5.3 Seja $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2$ e X uma variável aleatória, X = $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ com distribuição de probabilidade
$\mathbb{P}(\mathrm{x} = -2) = \mathbb{P}(x = -1) = \mathbb{P}(\mathrm{x} = 2) = 0,1$
$\mathbb{P}(\mathrm{x} = 1) = 0.3$
$\mathbb{P}(\mathrm{x} = 0) = 0.4$
Obter a distribuição de probabilidade de $Y = f(\mathrm{x})$
Os valores possíveis de Y são Y = $\{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\} = \{0, 1, 4\}$

- $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(\mathrm{x} = 0) = 0.4$
- $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{x} = -1) + \mathbb{P}(\mathrm{x} = 1) = 0.1 + 0.3 = 0.4$
- $\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(\mathrm{x} = -2) + \mathbb{P}(\mathrm{x} = 2) = 0.1 + 0.1 = 0.2$

Teorema 5.2 Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função contínua. Então vale $[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha)$

Exemplo 5.4 Seja $f(\mathrm{x}) = x^2$ e A = $\frac{0.1}{-2} + \frac{0.1}{-1} + \frac{0.4}{0} + \frac{0.3}{1} + \frac{0.1}{2}$.
$[B]^{0.2} = [f(A)]^{0.2} = f([A]^{0.2}) = f(\{0,\ 1\}) = \{0,\ 1\}$.

5.5 Princípio de extensão de Zadeh para o caso bivariado

Seja $f\colon$ U $\times$ V $\to \mathbb{N}$. Se A e B forem subconjuntos fuzzy de U e de V, respectivamente, então $f(A, B) = C$ é um subconjunto fuzzy W, com função de pertinência

$$\varphi_C(w) = \begin{cases} \sup\limits_{\{f(u,v)=w\}\neq\emptyset} \{\varphi_A(u) \wedge \varphi_B(v)\} \\ 0 \ se\ \{f(u,v) = w\} = \emptyset \end{cases}.$$

Exemplo 5.5 Seja $f(a, b) = AB$. Obter $\varphi_C(w)$ se C = $f(A, B)$

B \ A	1	2	4	$\varphi_B(v)$
2	0.1	0.1	0.1	0.1
3	0.3	0.4	0.3	0.7
4	0.2	0.2	0.2	0.2
$\varphi_A(u)$	0.3	0.4	0.3	

Temos então,

Teorema 5.3 Se $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for contínua, então
$[f(A, B)]^\alpha = f([A]^\alpha, [B]^\alpha) = \{f(a, b) : a \in [A]^\alpha, b \in [B]^\alpha\}$

C	2	3	4	6	8	12	16
$\varphi_C(w)$	0.1	0.3	sup{0.2, 0.1} = 0.2	0.4	sup{0.1, 0.2} = 0.2	0.3	0.2

5.6 Aritmética Entre Números Fuzzy

Se A, B são números fuzzy e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- **Soma** ($f = +$):
$$\varphi_{A+B}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\{\phi(z)\}\neq 0} min\{\varphi_A(x), \varphi_B(y)\} \\ 0 \; c.c \end{cases}$$
onde $\phi(z) = (x, y) : x + y = z$.

- **Multiplicação de λ por A** ($f = .$):
$$\varphi_{\lambda A}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\{x:\lambda x = z\}} \{[\varphi_A(x)]\} \; se \; \lambda \neq 0 \\ \chi\{0\}(z) \; c.c \end{cases}.$$

- **Diferença** ($f = -$):
$$\varphi_{A-B}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\{\phi(z)\}\neq 0} min\{\varphi_A(\mathrm{x}), \varphi_B(y)\} \\ 0 \; c.c \end{cases}$$
onde $\phi(z) = (\mathrm{x}, y) : \mathrm{x} - y = z$.

- **Multiplicação de A por B** ($f = .$):
$$\varphi_{A.B}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\{\phi(z)\}\neq 0} min\{\varphi_A(\mathrm{x}), \varphi_B(y)\} \\ 0 \; c.c \end{cases}$$
onde $\phi(z) = (\mathrm{x}, y) : \mathrm{x}.y = z$.

- **Divisão de A por B** ($f = /$):
$$\varphi_{A/B}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\{\phi(z)\}\neq 0} min\{\varphi_A(\mathrm{x}), \varphi_B(y)\} \\ 0 \; c.c \end{cases}$$
onde $\phi(z) = (\mathrm{x}, y) : \mathrm{x}/y = z$.

6 Lógica Fuzzy

Na literatura o termo "lógica fuzzy"é usado de duas formas diferentes:

- teoria conjuntista a fim de manipular informações inexatas, através de uma teoria de conjunto fuzzy geral;
- lógica no sentido de "cálculo proposicional", de modo a estender a lógica clássica.

Cálculo proposicional trata de verificar se uma proposição é verdadeira (valor da função verdade = 1) ou falsa (valor da função verdade = 0).

6.1 Lógica Clássica

Conectivos básicos: e ($\wedge$), ou ($\vee$), não ($\neg$) e implicação ($\implies$).

- **$\wedge$:** $\{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$
  $(p,q) \to \wedge(p,q)$
- **$\vee$:** $\{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$
  $(p,q) \to \vee(p,q)$
- **$\neg$:** $\{0,1\} \to \{0,1\}$
  $p \to \neg p$
- **$\implies$:** $\{0,1\}$ x $\{0,1\}$ $\to \{0,1\}$
  $(p,q) \to \implies (p,q) = (p \implies q)$

A tabela verdade pode ser escrita sucintamente para os conectivos apresentados da seguinte forma:

p	q	p $\wedge$ q	p $\vee$ q	p $\implies$ q	$\neg$ p
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

Podemos reproduzir a tabela verdade da implicação anterior utilizando pelo menos três fórmulas básicas:

1. $(p \implies q) = (\neg p) \vee q$;

2. $(p \implies q) = (\neg p) \vee (p \wedge q)$;

3. $(p \implies q) = max\{x \in \{0,1\} : p \wedge x \leq q\}$.

6.2 Conectivos Básicos da Lógica Fuzzy

Definição 6.1(t-norma). O operador que estende o operador $\wedge$ $\triangle$: $[0,1]$ x $[0,1]$ $\rightarrow [0,1]$, $\triangle(x,y) = x \triangle y$ é uma t-norma se satisfaz as seguintes condições:

1. Elemento neutro: $\triangle\ (1,x) = 1 \triangle x = x$;

2. Comutatividade: $\triangle(x,y) = x \triangle y = y \triangle x = \triangle(y,x)$;

3. Associatividade: $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$;

4. Monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então
   $x \triangle y \leq u \triangle v$.

Definição 6.2(t-conorma). O operador que estende o operador $\vee$ $\triangledown$: $[0,1]$ x $[0,1] \rightarrow [0,1]$, $\triangledown(x,y) = x \triangledown y$ é uma t-conorma se satisfaz as seguintes condições:

1. Elemento neutro: $\triangledown\ (0,x) = 0 \triangledown x = x$;

2. Comutatividade: $\triangledown(x,y) = x \triangledown y = y \triangledown x = \triangledown(y,x)$;

3. Associatividade: $x \triangledown (y \triangledown z) = (x \triangledown y) \triangledown z$;

4. Monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então
   $x \triangledown y \leq u \triangledown v$.

Definição 6.3(Negação). Uma aplicação η: $[0,1] \rightarrow [0,1]$ é uma negação se satisfaz as seguintes condições:

1. $\eta(0) = 1$ e $\eta(1) = 0$;

2. $\eta(\eta(x)) = x$;

3. η é decrescente.

Podemos observar que $\triangle = \wedge$, $\triangledown = \vee$ e $\eta = 1 - x$, satisfazem as leis de De Morgan, isto é, para todo par (x,y) de $[0,1]$ x $[0,1]$ temos:

1. $\eta(x \wedge y) = \eta(x) \vee \eta(y)$;

2. $\eta(x \vee y) = \eta(x) \wedge \eta(y)$.

Definição 6.4(Implicação fuzzy). O operador que estende a implicação clássica $\Longrightarrow$: $[0,1]$ x $[0,1] \rightarrow [0,1]$ é uma implicação fuzzy se satisfaz as seguintes condições:

1. Reproduz a tabela de implicação clássica.

2. For decrescente na primeira variável, ou seja, para cada $x \in [0,1]$ tem-se $(a \implies x) \leq (b \implies x)$ se $a \geq b$.

3. For crescente na segunda variável, ou seja, para cada $x \in [0,1]$ tem-se $(x \implies a) \geq (x \implies b)$ se $a \geq b$.

As implicações fuzzy podem ser construídas através de quaisquer t-normas, t-conormas e negação e assumem as seguintes formas:

1. S-implicação: $(x \implies y) = \eta(x) \bigtriangledown y$.

2. Q-implicação: $(x \implies y) = \eta(x) \bigtriangledown (x \bigtriangleup y)$.

3. R-implicação: $(x \implies y) = \sup\{z \in [0,1] : x \bigtriangleup z \leq y\}$.

Exemplo 6.1(Implicações fuzzy).

a) Implicação de Gödel: $(\mathrm{x} \implies \mathrm{y}) = \mathrm{g}(\mathrm{x,y}) = \begin{cases} 1 \; se \; \mathrm{x} \leq \mathrm{y} \\ \mathrm{y} \; se \; \mathrm{x} > \mathrm{y} \end{cases}$.

b) Implicação de Goguen: $(\mathrm{x} \implies \mathrm{y}) = \mathrm{g}_n(\mathrm{x,y}) = \begin{cases} 1 \; se \; \mathrm{x} \leq \mathrm{y} \\ \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} \; se \; \mathrm{x} > \mathrm{y} \end{cases}$.

c) Implicação de Lukasiewicz: $(\mathrm{x} \implies \mathrm{y}) = l(\mathrm{x,y}) = min\{(1 - x + y), 1\}$.

d) Implicação de Zadeh: $(\mathrm{x} \implies \mathrm{y}) = z(\mathrm{x,y}) = max\{(1 - x), min(x, y)\}$.

e) Implicação de Wu: $(\mathrm{x} \implies \mathrm{y}) = w(\mathrm{x,y}) = \begin{cases} 1 \; se \; \mathrm{x} \leq \mathrm{y} \\ min\{1 - x, y\} \; se \; \mathrm{x} > \mathrm{y} \end{cases}$.

7 Medidas e Integrais Fuzzy

Para falarmos de medida, antes definiremos o seu domínio, chamado de σ-álgebra ($\mathscr{A}$).

Definição 7.1(σ-álgebra). Uma σ-álgebra de U$\neq \emptyset$ é uma coleção de suconjuntos de U tal que:

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$;
2. Se $A \in \mathscr{A} \implies A' \in \mathscr{A}$;
3. Se $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathscr{A}$,então $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathscr{A}$.

Observação: U $\in \mathscr{A}$.

Uma medida μ em U $= \Omega$ é uma função μ: $\mathscr{A} \to [0,\infty)$, tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}}(A_i)) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Exemplo 7.1(Probabilidade). Medida de probabilidade (espaço amostral Ω)

P:$\mathscr{A} \to [0,1]$

1. P($\emptyset$) = 0;
2. P(Ω) = 1;
3. P$(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}}(A_i)) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}}P(A_i)$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $i \neq j$;
4. P(A') = 1 - P(A);
5. P(A) $\leq$ P(B) se A$\subseteq$ B;
6. P$(\bigcup A_i) = \lim\limits_{i\to\infty}$ se $A_1 \subset A_2 \subset ...$
7. P$(\bigcap A_i) = \lim\limits_{i\to\infty}$ se $A_1 \supset A_2 \supset ...$

7.1 Medida de Sugeno M_S

$M_S : \mathscr{A} \to [0,1]$

1. $M_S(\emptyset) = 0$, $M_S(\Omega) = 1$;

2. $M_S(\bigcup A_i) = \lim_{i \to \infty} M_S(A_i)$, se $A_1 \subset A_2 \subset ...$

3. $M_S(\bigcap A_i) = \lim_{i \to \infty} M_S(A_i)$, se $A_1 \supset A_2 \supset ...$

7.2 Medida Fuzzy

$\mu : \mathscr{A} \to [0, 1]$;

1. $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(\Omega) = 1$;

2. $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subset B$.

7.3 Integral de Lebesgue

Suponha que g: $\Omega \to \mathbb{R}^+$ e g(ω) $= \alpha_1 \chi_{A_1}(\omega) + \alpha_2 \chi_{A_2}(\omega) + ... + \alpha_n \chi_{A_n}(\omega)$. Seja $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty)$ uma medida, então $\int_\Omega g d\mu = \alpha_1 .\mu(A_1) + \alpha_2 .\mu(A_2) + ... + \alpha_n .\mu(A_n)$.
"Área abaixo do gráfico de g"$\equiv$ "Área horizontal"$\equiv$ $\mu(\{\omega \in \Omega : g(\omega) \geq 0\})\alpha_1 + \mu(\{\omega \in \Omega : g(\omega) \geq \alpha_1\})(\alpha_2 - \alpha 1) + \mu(\{\omega \in \Omega : g(\omega) \geq \alpha_2\})(\alpha_3 - \alpha 2) + ...$ $\equiv \int_0^{\alpha_3} h(\alpha) d_\alpha$ em que $h(\alpha) = \mu(\omega : g(\omega) > \alpha$ funções níveis.

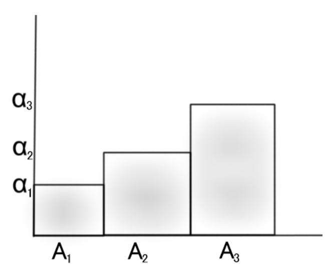


Figura 6: Representação gráfica da integral de Lebesgue

7.4 Integral de Sugeno

f: $\Omega \to [0, 1]$ e $\mu : \Omega \to [0, 1]$.
(S)$\int_\Omega f d\mu = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha \vee H(\alpha))$ em que $H(\alpha) = \mu\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq \alpha\}$.

$H(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha}$ é ponto fixo da função H.
Se μ = P, então f é uma variável aleatória X: $\Omega \to [0,1]$ e (S)$\int_\Omega XdP \equiv$ Esperança Fuzzy (X).
Teorema 7.1|(S)$\int_\Omega gd\mu - \int_\Omega gd\mu| \leq \frac{1}{4}$.
Definição 7.2 Esperança $\equiv$ E(X) = $\int_\Omega Xd\mu$
Corolário 7.1|EF(X) - E(X)| $\leq \frac{1}{4}$
Observação: E(X) = $\int_0^\infty xf(x)dx$, em que f(x) é a função densidade de probabilidade de X.
Se X: $\Omega \to \mathbb{R}^+$, variável aleatória discreta, então E(X) = $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)$
E(X) = $\sum\limits_{i=0}^{\infty} P(X > x_i)$ E(X) = $\int_{i=0}^{\infty}(1 - F(X))dx$
Exemplo 7.2 Se X é uma variável aleatória uniforme em [0,1]. X $\sim$ U[0,1].

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \in [0,1] \\ 0 \; se \; x \notin [0,1] \end{cases}$$

E(X) = $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.
H(X) = P$\{\omega : X(\omega) \geq x\}$ = P($X \geq x$).
H(X) = 1 - F(X).
F(X) = $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x dt$ = x $\implies$ H(X) = 1 - x.
EF(x) = $\bar{x}$ tal que $\bar{x}$ é solução de x = H(x) = 1 - x $\implies$ $\bar{x} = \frac{1}{2}$.
Teorema 7.2 Se X for variável aleatória simétrica, então EF(x) = E(x).

8 Eventos Fuzzy

Definição 8.1 Um evento fuzzy em Ω é um subconjunto fuzzy de Ω cujos α-níveis estão na σ-álgebra de $\mathscr{A}$.

8.1 Probabilidade de Eventos Fuzzy

Envolve dois tipos de incertezas tratadas em matemática.

Seja Ω um espaço amostral, um evento A de Ω é um subconjunto clássico de Ω

$$\chi_A : \Omega \to 0, 1. \tag{7}$$

Um evento fuzzy A é qualquer subconjunto fuzzy de Ω.

$$\varphi_A : \Omega \to [0, 1]. \tag{8}$$

Como para o caso clássico $E(\chi_A) = 0.P(\chi_A = 0) + 1.P(\chi_A = 1) = P(A)$, equivalentemente para o caso fuzzy definiremos $P(A)$.

Definição 8.2 $P(A) = E(\varphi_A)$.

Teorema 8.1 Se X é variável aleatória e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e Y = g(x), então $E(Y) = E(g(x))$:

- Se X for discreta $E(g(x)) = \sum_i g(x_i)P(X = x_i)$.
- Se X for contínua com função de densidade de probabilidade f, então $E(g(x)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx$.

$\Omega \equiv \mathbb{R} \implies$ A é evento fuzzy de $\mathbb{R}$ e portanto $\varphi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Se X for discreta $\varphi_A(x)$ também será e $P(A) = E(\varphi_A(x)) =$
$= \sum_i(\varphi_A(x_i)P(X = x_i)$.
- Se X for contínua com função de densidade de probabilidade f, então $P(A) = E(\varphi_A(x)) = = \int_{\mathbb{R}} \varphi_A(x)f(x)dx$.

Exemplo 8.1 X ∼ U(0,1). Calcular $P(A)$ em que A é o evento:

a) A = $\{x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq \frac{1}{2}\}$.
$P(A) = \int_0^1 \chi_A(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}$.

b) A é baixo dado pelo número fuzzy triangular (0;0;2)

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \ se \ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \ c.c \end{cases} .$$

$P(A) = E(\varphi_A(x)) == \int_0^1 (1 - \frac{1}{2})dx = \frac{3}{4}$.

Probabilidade de evento fuzzy definido por $P(A) = E(\varphi_A)$ obedece de fato as propriedades de probabilidade.

Exemplo 8.2

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $A \cup B \rightarrow \varphi_{A \cup B}(x) = max(\varphi_A(x), \varphi_B(x))$.
- $A \cap B \rightarrow \varphi_{A \cap B}(x) = min(\varphi_A(x), \varphi_B(x))$.

$max(\varphi_A(x), \varphi_B(x)) = \frac{\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|}{2}$.
$min(\varphi_A(x), \varphi_B(x)) = \frac{\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|}{2}$.

8.2 Independência de Eventos Fuzzy

O evento A depende do evento B se a ocorrência de B altera a probabilidade de A. $P(A|B) = P(A)$ se A independe de B.

Caso clássico: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$.

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \begin{cases} \frac{E(\chi_A \cdot \chi_B)}{\chi_B} \\ \frac{E(\chi_A \wedge \chi_B)}{\chi_B} \end{cases} .$$

Para a intersecção de eventos fuzzy: $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A . \chi_B$

Se A e B forem eventos fuzzy a probabilidade de $A \cap B$. $P(A \cap B) = E(\varphi_A . \varphi_B)$. Além disso,

$P(A|B) = \frac{E(\varphi_A . \varphi_B)}{E(\varphi_B)}$.

A é independente de B se $P(A|B) = P(A)$, ou seja, $P(A|B) = E(\varphi_A(x))$.

Exemplo 8.3 Um fabricante produz peças em que 5% são defeituosas. Para uma amostra de 10 peças, considere X o número de peças defeituosas. Pede-se:

a) $P(X \leq 1) = P(A)$

X $\sim$ Bin(10;0,05).

$P(x \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0} \ 0,005^0(0,05)^10 + \binom{10}{1} \ 0,05(0,95)^9 = 0,9139$.

b) $P(X \text{ ser pequeno}) = P(B)$. B = (0;0;2).

$P(B) = \varphi_B(0).P(X=0) + \varphi_B(1).P(X=1) = 1.0,95^10 + 0,5.(0,95)^9 = 0,7562$.

c) $P(A \cap B)$ $P(A \cap B) = \varphi_A(0)\varphi_B(0).P(X=0) + \varphi_A(1)\varphi_B(1).P(X=1) = 0,7562$

d) $P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = 0,9139$

e) $P(A|B)$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1$.

f) A e B são independentes? $P(A) = 0,9139 \neq 1 = P(A|B)$, logo, A e B são dependentes.

9 Otimização Fuzzy

Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e B um número, supondo f uma função crescente e que queremos

$$\max f$$
$$0 < x \leq B$$

Se B = b $\in \mathbb{R}$, solução de f(b).

Se B é fuzzy, qual é max(f(x))? E além do mais, se B é fuzzy o que significa x≤B?

$\Omega = \{x \in \mathbb{R} : x \leq B\}$

$\varphi_\Omega(x) = ?$

$\varphi_\Omega(x)$ é pelo menos $\varphi_\Omega(y)$ se $x \leq y \implies \varphi_\Omega(x) = \sup_{x \leq y} \varphi_B(y)$.

$$\varphi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 \ se \ x \leq c \\ \varphi_B(x) \ se \ c \leq x \leq d \\ 0 \ se \ x \geq d \end{cases}.$$

Se x≤y devemos escolher um $\bar{x}$ em Ω com f($\bar{x}$) o maior possível.

A partir de f, construímos um conjunto fuzzy $\mathcal{F}$, com função de pertinência.

$$\varphi_{\mathcal{F}} = \begin{cases} 1 \ se \ x \geq d \\ \frac{f(x)-f(m)}{f(d)-f(m)} \ m \leq x \leq d \text{ em que } a \leq m \leq c \\ 0 \ se \ x < m \end{cases}$$

O ponto de máximo é $\bar{x}$ com maior pertinência na intersecção de Ω em $\mathcal{F}$.

$\bar{x}$ é dado por $\varphi_\Omega(\bar{x}) = \varphi_{\mathcal{F}}(\bar{x}) \iff \varphi_B(\bar{x}) = \frac{f(x)-f(m)}{f(d)-f(m)}$.

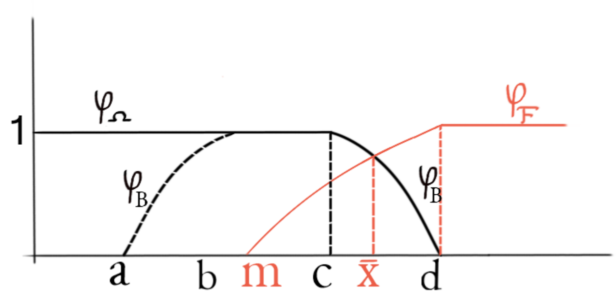


Figura 7: Método de otimização fuzzy

Exemplo 9.1(Otimização) Resolver o problema

$$\max \text{ f(x)}$$
$$x \leq B$$

em que f(x) = x^2 e B = (1;2;3;4).

$\bar{x} \iff \varphi_B(\bar{x}) = \varphi_{\mathcal{F}}(\bar{x})$.

$\varphi_B(x)$ segmento que passa por (3,1) e (4,0). A equação da reta é dada por y = 4 - x.

$\varphi_{\mathcal{F}} = \frac{x^2-2^2}{4^2-2^2} = \frac{x^2-4}{12}$.

4 - x = $\frac{x^2-4}{12} \iff \bar{x} = 3,42$. Portanto, $f(\bar{x}) = 11,7$.

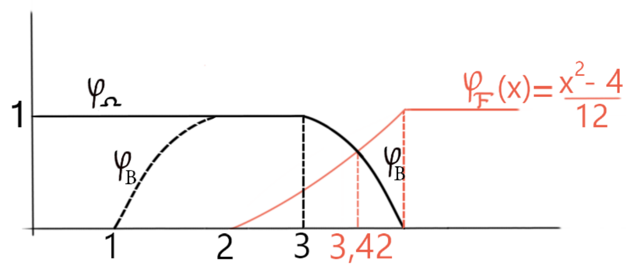


Figura 8: Método de otimização fuzzy exemplo 9.1

10 Equação Diferencial Fuzzy

EDO clássica: x'(t) = f(x(t))

Dada a função f, quem é X:[a,b] $\rightarrow \mathbb{R}$ tal que x'(t) = f(x(t))? A solução de uma equação diferencial é uma função.

Caso clássico:

$\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{x}(t+h)-\mathrm{x}(t)}{h} = f(\mathrm{x}(t))$.

Caso fuzzy:

Existem algumas abordagens para o estudo dos sistemas dinâmicos fuzzy contínuos, dessas, destacaremos a abordagem através da definição da derivada de Hukuhara.

u:[a,b] $\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, a $\geq$ 0.

u'(t) = $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{u}(t+h)-\mathrm{u}(t)}{h}$.

Com $[A-B]_\alpha = [A]_\alpha - [B]_\alpha$. Isto é, o limite alarga e precisamos definir outra diferença.

Definição 10.1(Derivada de Hukuhara). u': [a,b] $\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tal que $[u'(t)]^\alpha = [(u_1^\alpha)'(t), (u_2^\alpha)'(t)]$, $\alpha \in [0,1]$.

$[A -_H B]_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] -_H [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha - b_1^\alpha, a_2^\alpha - b_2^\alpha]$. $\implies$ [u'(t)]$_\alpha$ = $[(u_1^\alpha(t)'), (u_2^\alpha(t)')]_\alpha$, em que [u'(t)]$_\alpha$ representa a derivada fuzzy e $[(u_1^\alpha(t)'), (u_2^\alpha(t)')]_\alpha$ representam as derivadas clássicas.

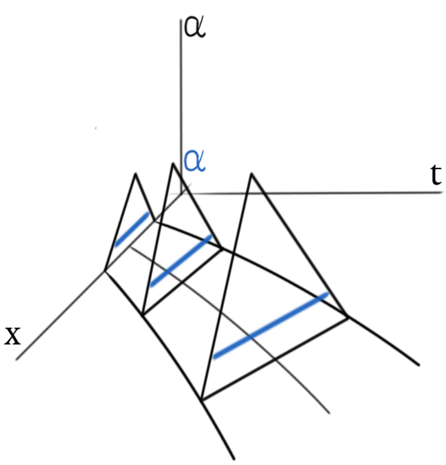


Figura 9: Solução de um modelo fuzzy de população em expansão ($\lambda > 0$)

11 Anexos

11.1 Texto de Abertura

O texto de Geraldo Ávila, percorrendo antigas discussões de teoria dos conjuntos, do século XIX e XX, reaviva uma discussão interrelacionada, da diferenciação das linguagens corrente e formal na fundamentação dos conceitos matemáticos.

Na própria definição de conjunto dada por Cantor, em seu trabalho sobre números transfinitos, encontramos uma definição carregada de termos ambíguos. Nas palavras de Cantor citadas por Ávila: *Por conjunto entenderemos qualquer coleção numa totalidade M de objetos distintos, produtos de nossa intuição ou pensamento.* E como muito bem notado por Ávila, o que consistiria o vocábulo "coleção", além de ser um sinônimo para conjunto?

Ávila, ainda utilizando-se dos estudos de Cantor, define os números transfinitos, se referindo às potências dos conjuntos infinitos. E assim, da infinidade dos conjuntos infinitos e da boa colocação do conjunto das partes, i.e., o conjunto de todos os subconjuntos de M objetos distintos, somos conduzidos, por Àvila, mas também pelos matemáticos antigos, ao paradoxo de Cantor.

O paradoxo de Cantor, assim consiste da má colocação do que seria um conjunto. Uma má colocação, associada por Ávila, ao uso da linguagem corrente. Desse modo, quando definimos um *conjunto universal*, um conjunto de todos os conjuntos, percebemos que por implicação direta, o conjunto universal deve ser elemento de si mesmo. Além disso, se considerarmos o conjunto das partes de U, também concluímos que $P(U) > U$. Contradizendo que U seja o conjunto de potência máxima que assumimos inicialmente.

Muito similarmente, Ávila nos apresenta o paradoxo de Russel, constituindo à imprecisão de definir-se um conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmo.

Ávila, dessa forma, nos alerta que os paradoxos e contradições surgem por conta da grande dimensão do universo do discurso. E daí surge a necessidade de restringir esse universo. Tarefa que foi exercida inicialmente por Zermelo.

Segundo Ávila, Zermelo estudando diversos paradoxos e principalmente os supracitados, percebeu que a consideração livre de conjuntos e a caracterização livre de um conjunto por uma propriedade de seus elementos não poderiam coexistir. Zermelo, então, formula o axioma da especificação: *Dados um conjunto A e uma propriedade P(x), existe um conjunto M cujos elementos são os elementos de A que satisfazem a propriedade P(x).* Com esse axioma, diversos paradoxos são diluídos e conjunto torna-se um *conceito primitivo*. Porém, Ávila nos alerta que mesmo com esse axioma, paradoxos ainda existirão.

Ávila conclui que a única maneira de exorcizar indefinitivamente a existência de paradoxos, é exorcizando a linguagem corrente do universo matemático, exercício proposto por Fraenkel e Skolem em 1922. Contudo Ávila, novamente nos avisa, a linguagem formal não deve fazer parte do dia-a-dia dos matemáticos, mas somente para estudar a consistência de suas teorias.

11.2 Sistemas de regras Mamdani em Matlab

Máquina de lavar roupa (aula do Daniel feito no lab)

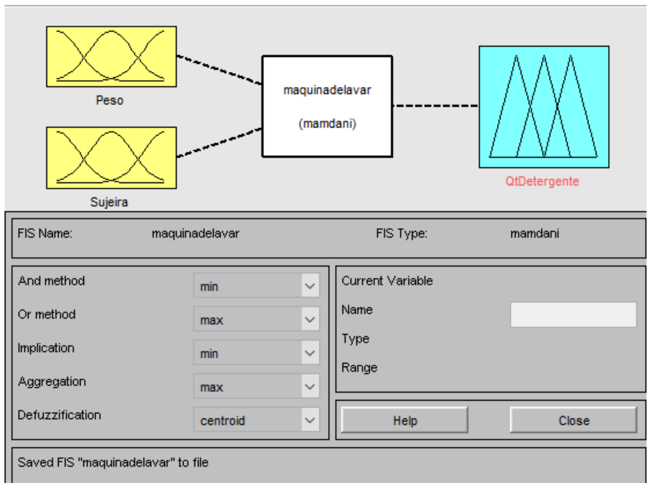


Figura 10: Interface do sistema de regras Mamdani em Matlab para máquina de lavar

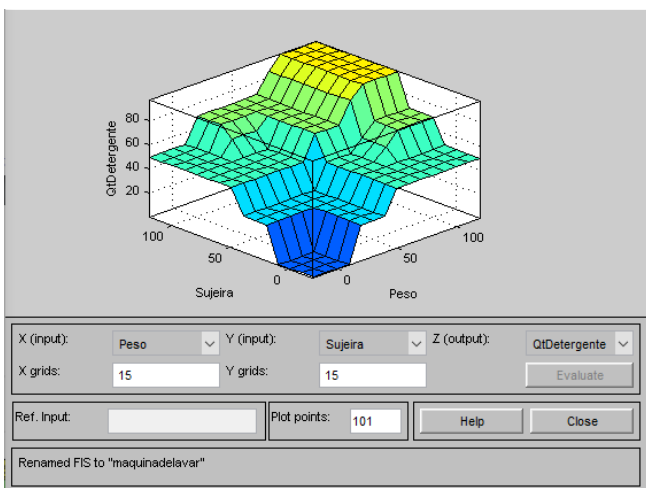


Figura 11: Gráfico da superfície gerada para máquina de lavar

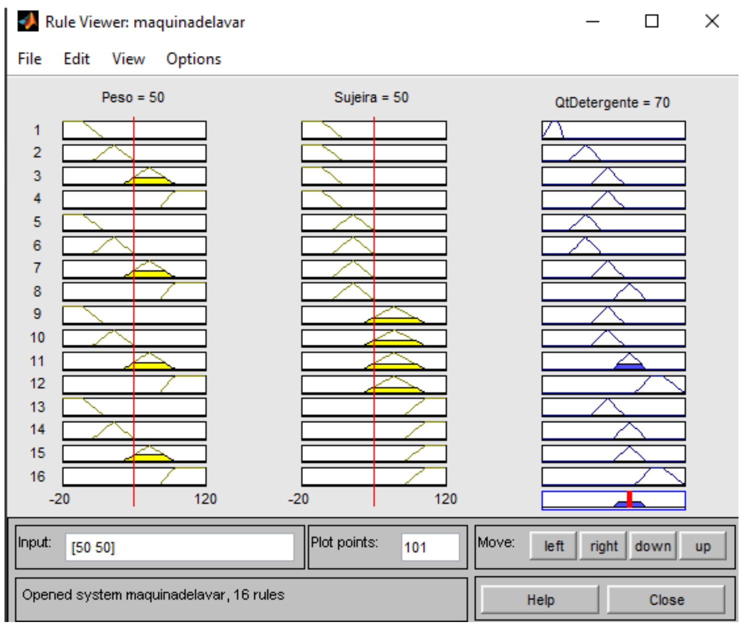


Figura 12: Sistema de regras para a máquina de lavar

Cultivo de violetas (aula do Daniel feito no lab)

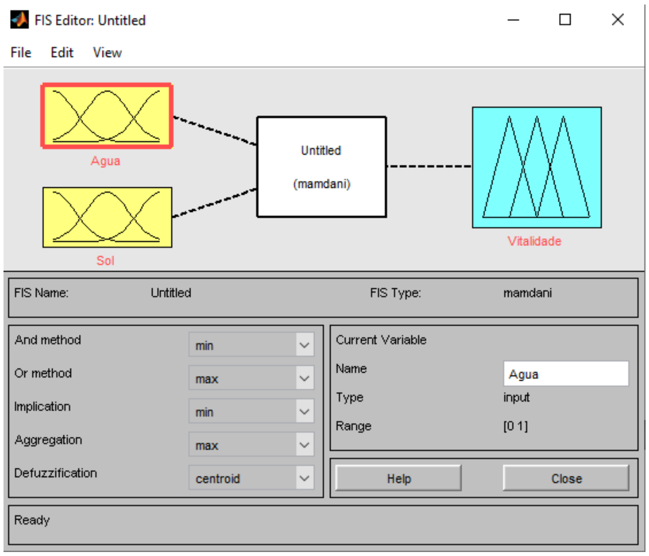


Figura 13: Interface do sistema de regras Mamdani em Matlab para cultivo de violetas

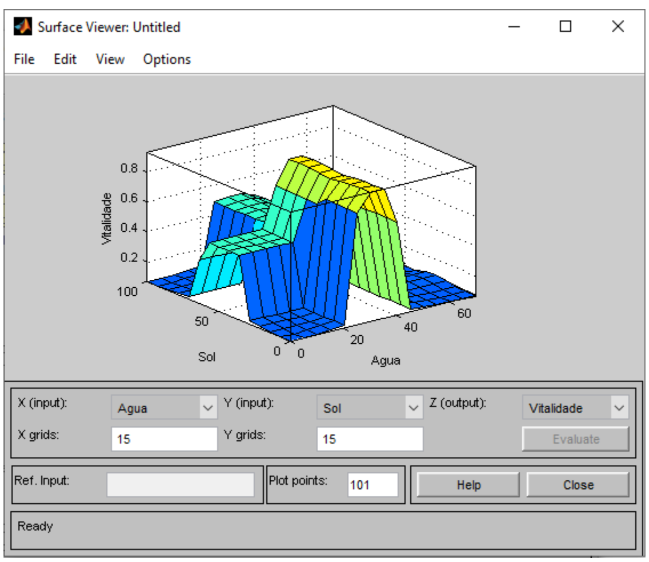


Figura 14: Gráfico da superfície gerada para violetas

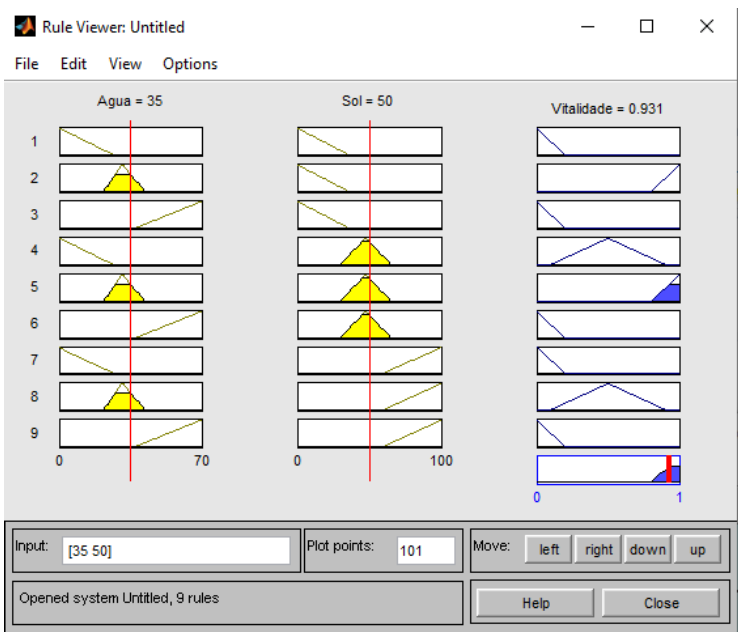


Figura 15: Sistema de regras para violetas

Risco de saúde (aula do Daniel feito no lab)

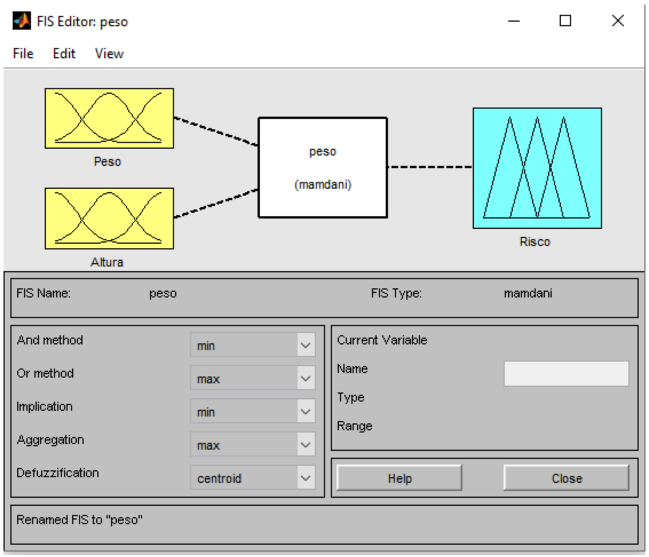


Figura 16: Interface do sistema de regras Mamdani em Matlab para risco de saúde

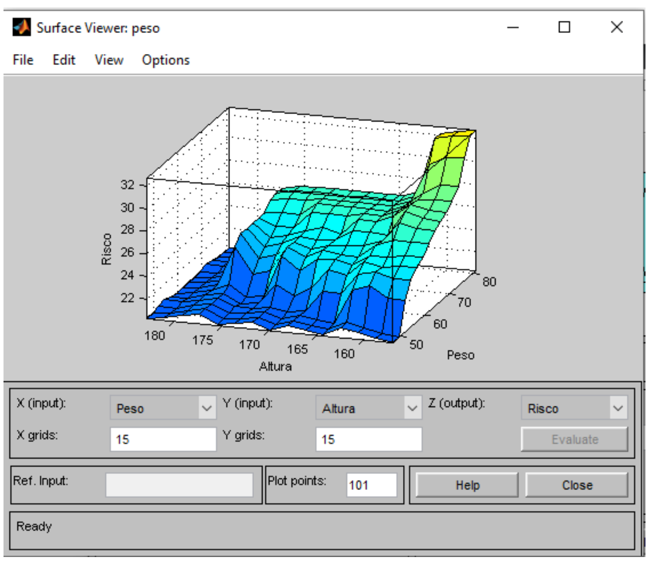


Figura 17: Gráfico da superfície gerada para risco de saúde

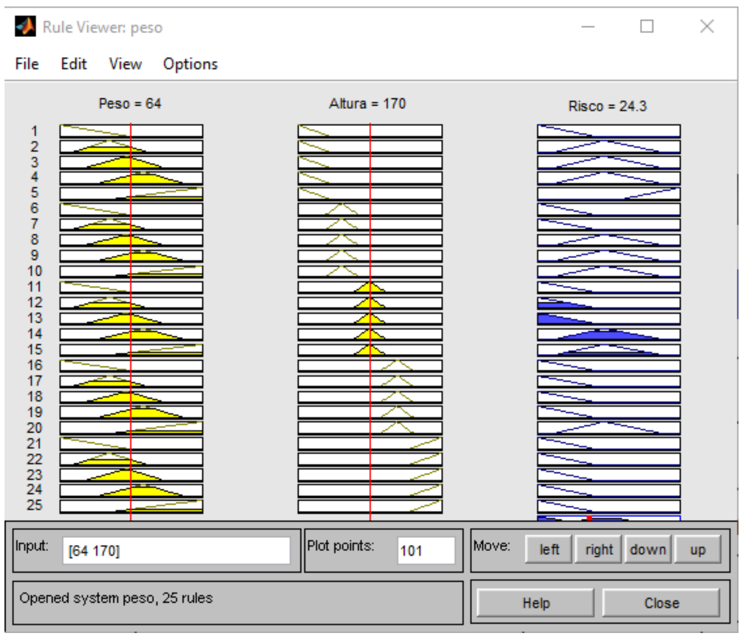


Figura 18: Sistema de regras para risco de saúde

Exercício 1 da lista 1

(a) Represente graficamente as regras fuzzy

R_1: Se x_1 é $A_{11} = (1;2;3)$ e x_2 é $A_{12} = (0;1;3)$, então y é $B_1 = (0;0;5)$

R_2: Se x_1 é $A_{21} = (0;0;3)$ e x_2 é $A_{22} = (1;2;4)$, então y é $B_2 = (1;4;5)$

(b) Determine a saída B $= A \circ M = M(\mathrm{A})$, em que A $= (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

(c) Defuzzifique a saída do item anterior;

(d) Após os itens anteriores, dê o domínio e contra-domínio da função produzida pelo sistema baseado em regras fuzzy.

Exercício 1 feito em Matlab

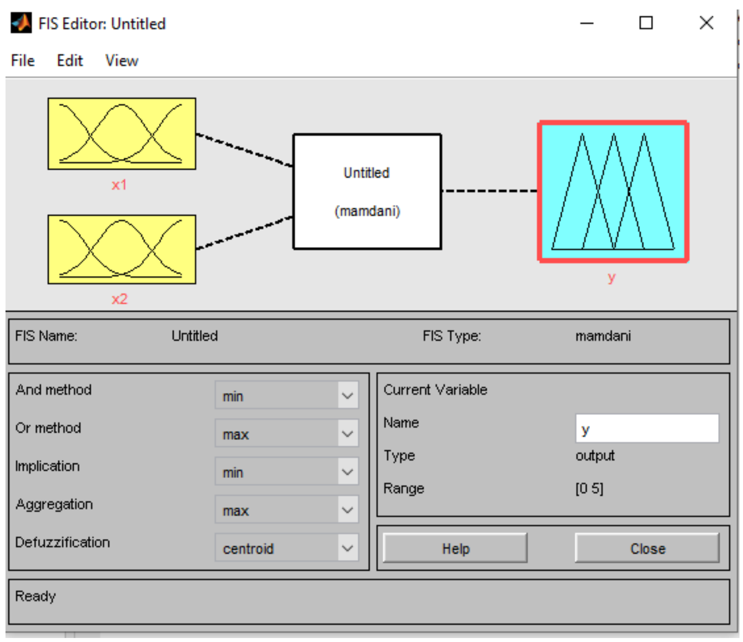


Figura 19: Interface do sistema de regras Mamdani em Matlab para para o exercício 1

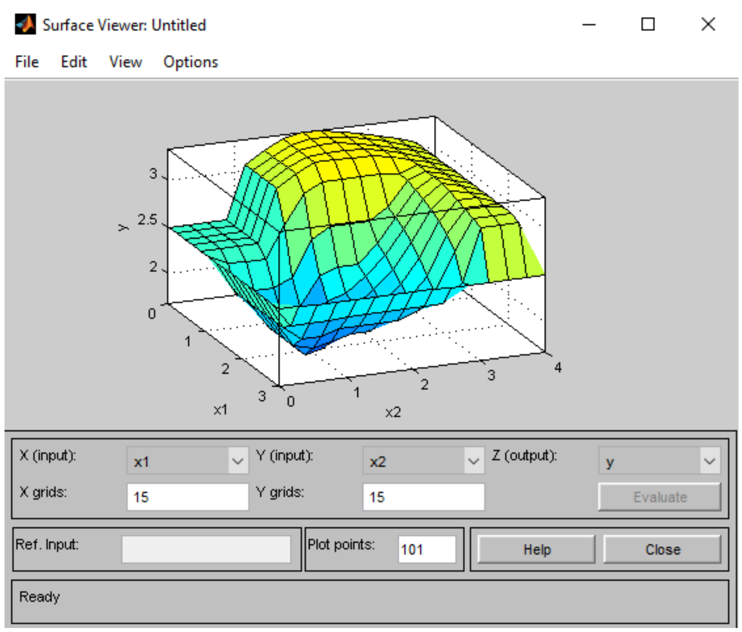


Figura 20: Gráfico da superfície gerada para o exercício 1

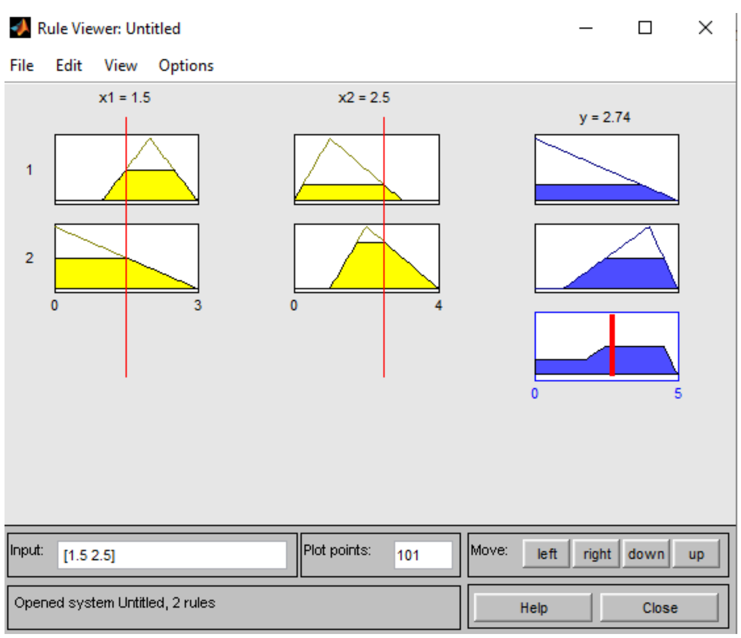


Figura 21: Sistema de regras para o exercício 1

Exercício 2 da lista 1

(a) Represente graficamente as regras fuzzy para uma entrada e uma saída.

R_1: Se x_1 é A_1 = (0;1;2), então y é B_1 = (0;3;3)

R_2: Se x_2 é A_2 = (1;4;5), então y é B_2 = (1;2;3)

(b) Determine a saída B = $A \circ M = M$(A), em que A = {3}.

(c) Defuzzifique a saída.

(d) Após os itens anteriores, dê o domínio e contra-domínio da função produzida pelo sistema baseado em regras fuzzy.

Exercício 2 feito em Matlab

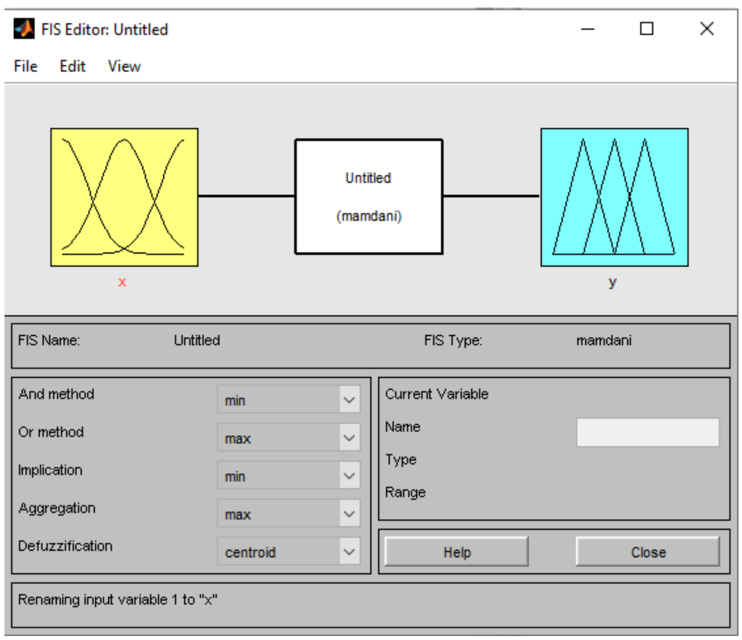


Figura 22: Interface do sistema de regras Mamdani em Matlab para para o exercício 2

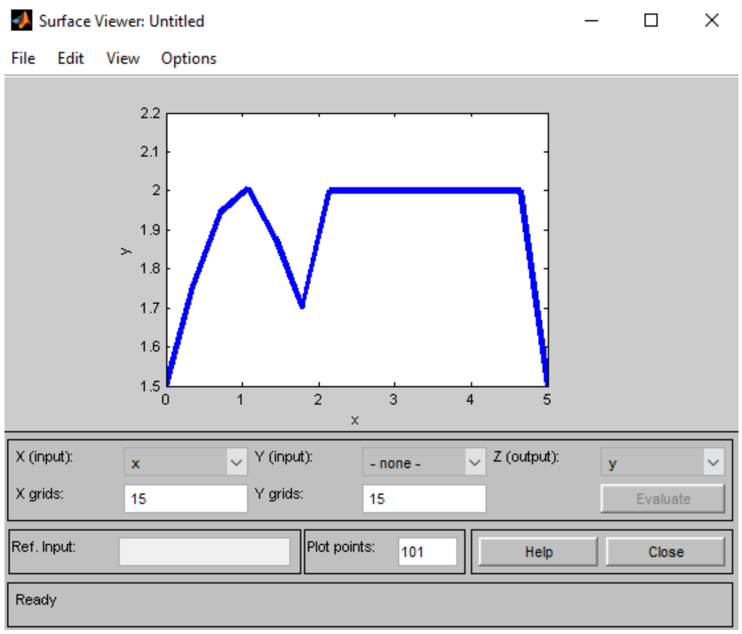


Figura 23: Gráfico da superfície gerada para o exercício 2

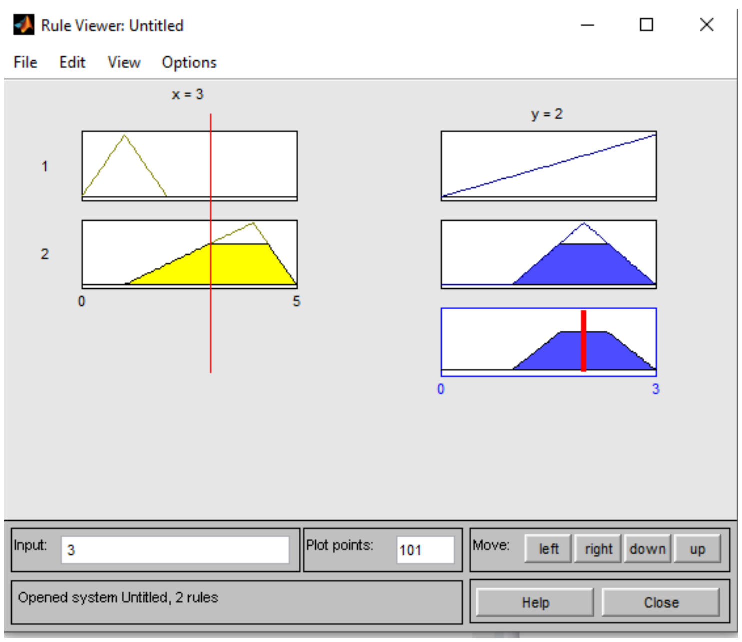


Figura 24: Sistema de regras para o exercício 2

Exercício 3 da lista 1 Considere a seguinte base de regras:
R_1: Se x é baixo, então $y_1 = x + 2$
R_2: Se x é alto, então $y_2 = 4 - x$
$\varphi_{A_1}(x) = 1 - \frac{x}{4}$; $\varphi_{A_2}(x) = \frac{x}{4}$.

(a) Use TS para obter a saída geral.

(b) Determine y para x = 3

(c) Represente graficamente as regras bem como a função obtida pelo método de TS.

Exercício 3 feito em Matlab

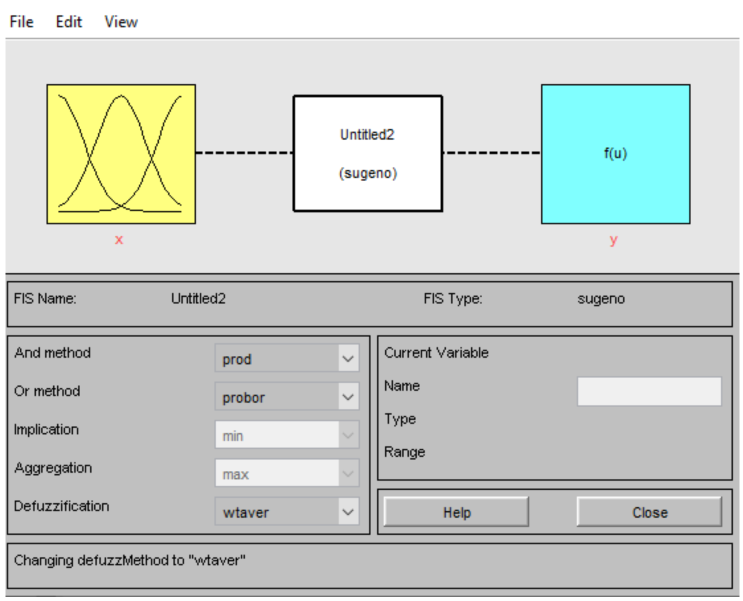


Figura 25: Interface do sistema de regras Mamdani em Matlab para para o exercício 3

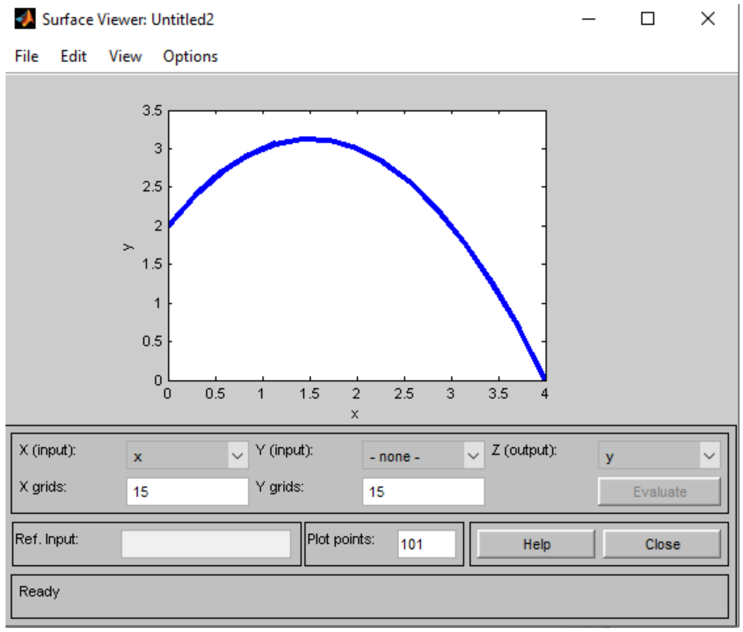


Figura 26: Gráfico da superfície gerada para o exercício 3

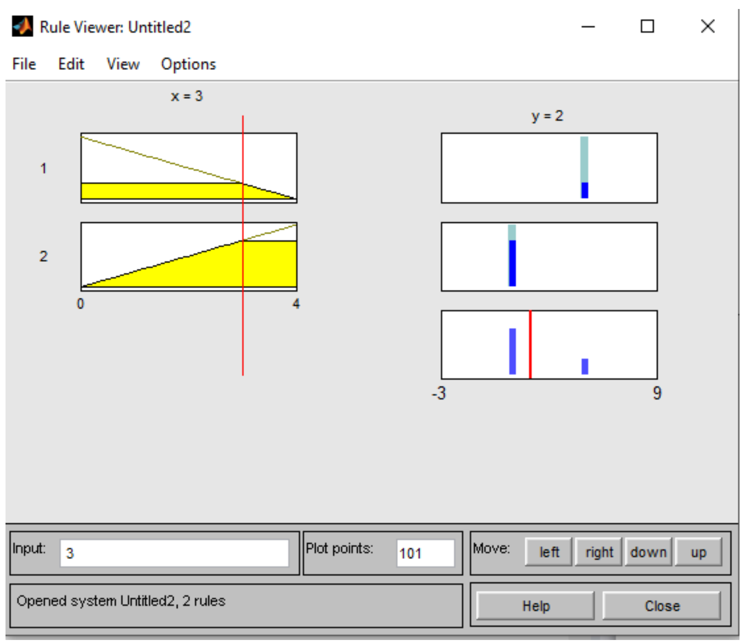


Figura 27: Sistema de regras para o exercício 3

p-fuzzy (aula do Daniel feito no lab)

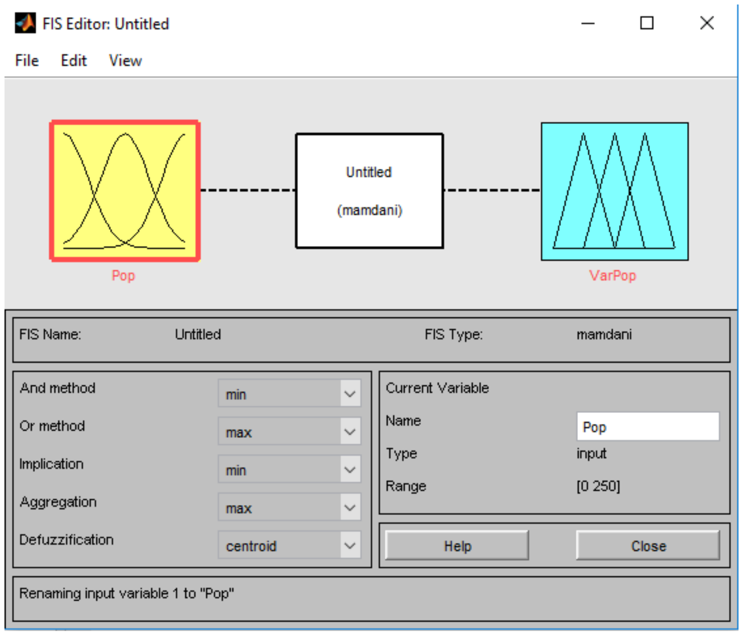


Figura 28: Sistema de regras p-fuzzy para dinâmica de populações

p-fuzzy Malthus (aula do Daniel feito no lab) r = 0.47 e y(0) = 10

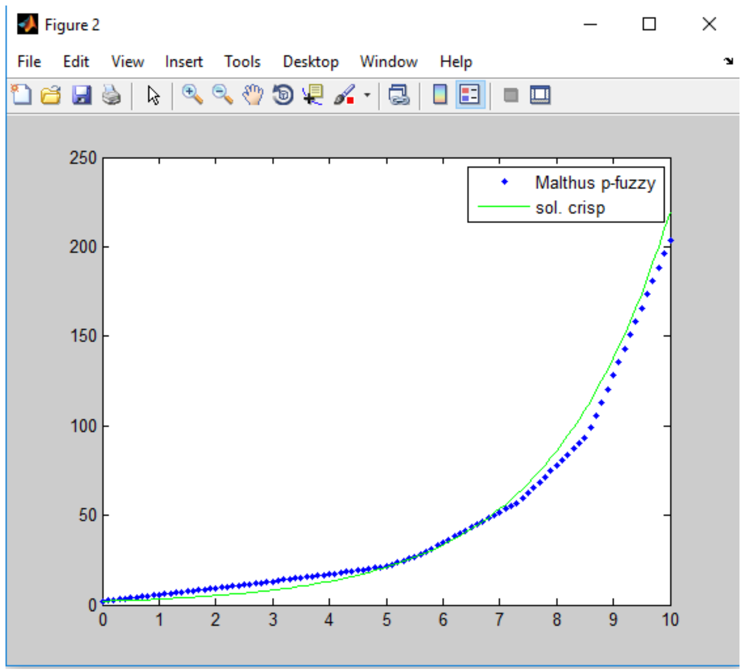


Figura 29: Gráfico comparativo entre p-fuzzy e crisp

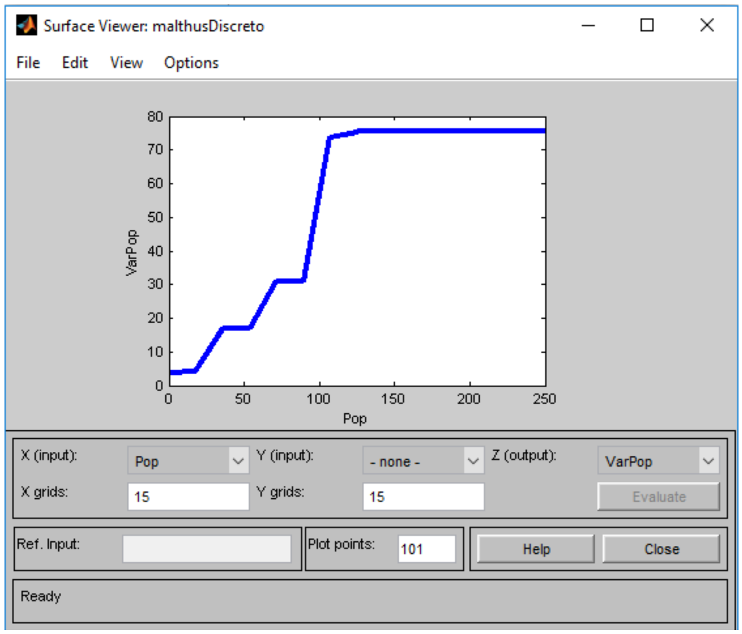


Figura 30: Gráfico da superfície gerada para o p-fuzzy Malthus

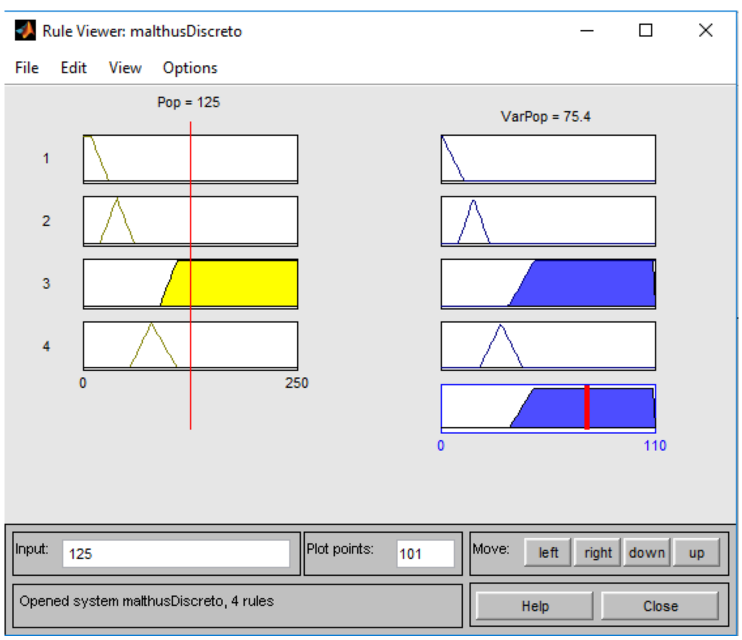


Figura 31: Sistema de regras para o p-fuzzy logístico

p-fuzzy logístico (aula do Daniel feito no lab) r = 0.1, K = 100 e y(0) = 10

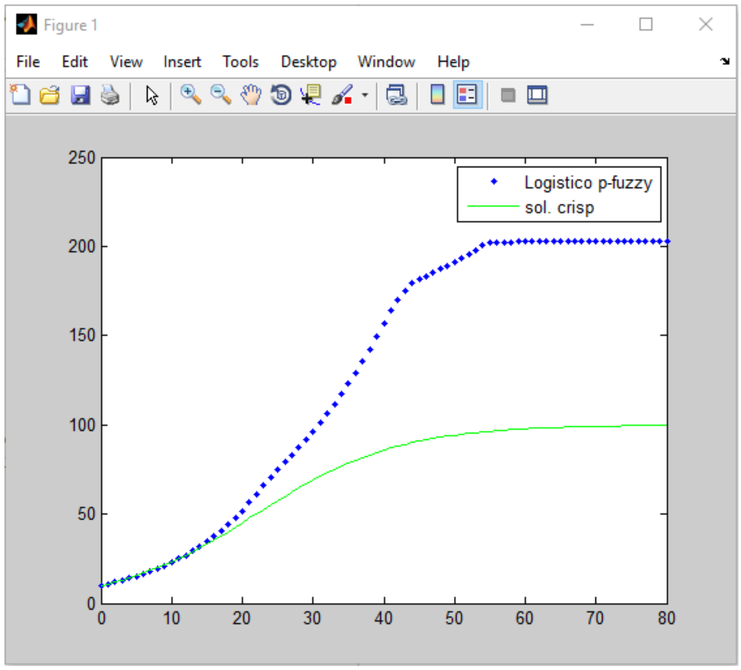


Figura 32: Gráfico comparativo entre p-fuzzy e crisp

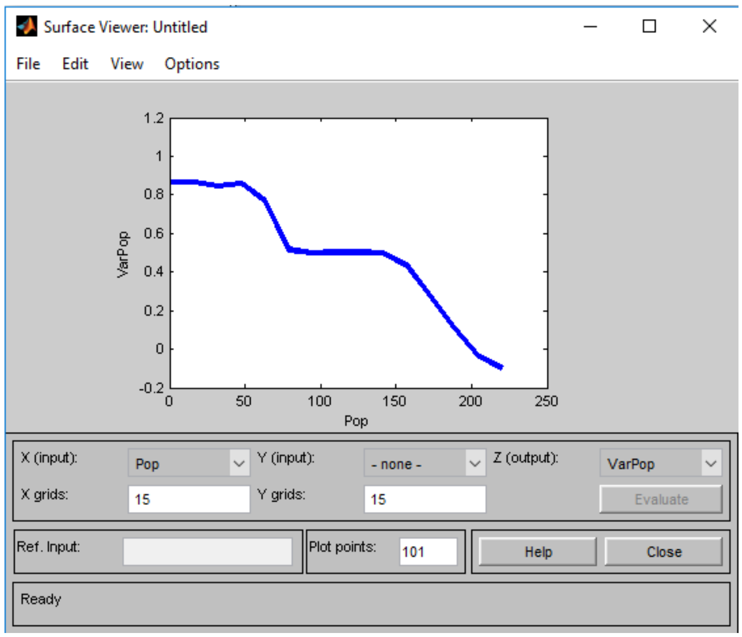


Figura 33: Gráfico da superfície gerada para o p-fuzzy logístico

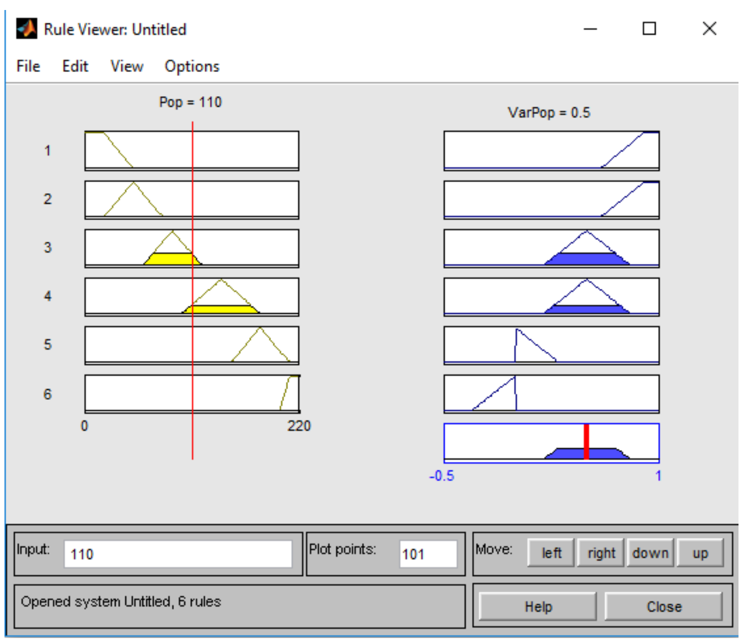


Figura 34: Sistema de regras para o p-fuzzy logístico

p-fuzzy logístico (questão da prova) r = 20, K = 100 e y(0) = 10

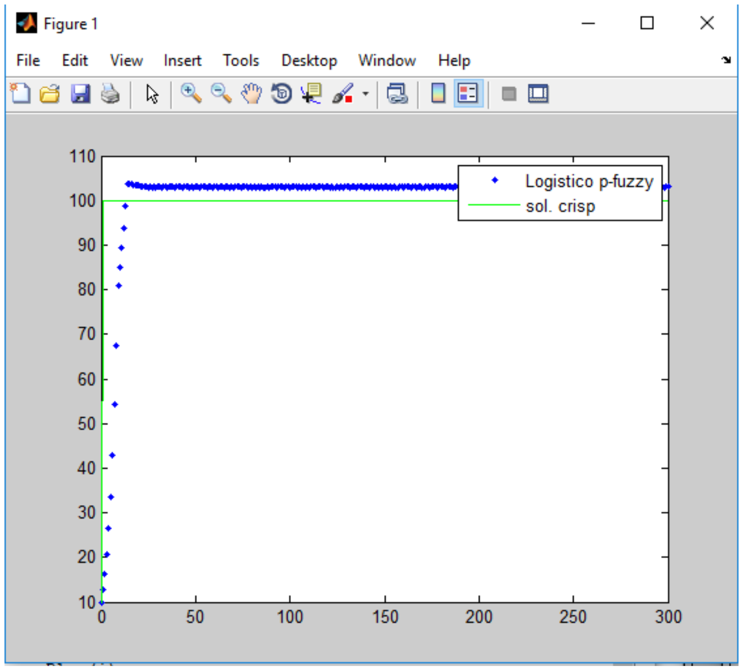


Figura 35: Gráfico comparativo entre p-fuzzy e crisp

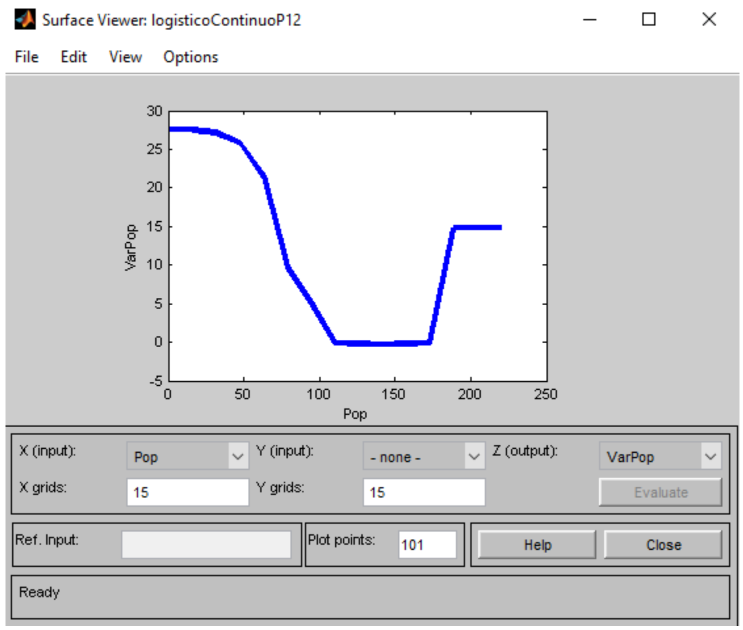


Figura 36: Gráfico da superfície gerada para o p-fuzzy logístico

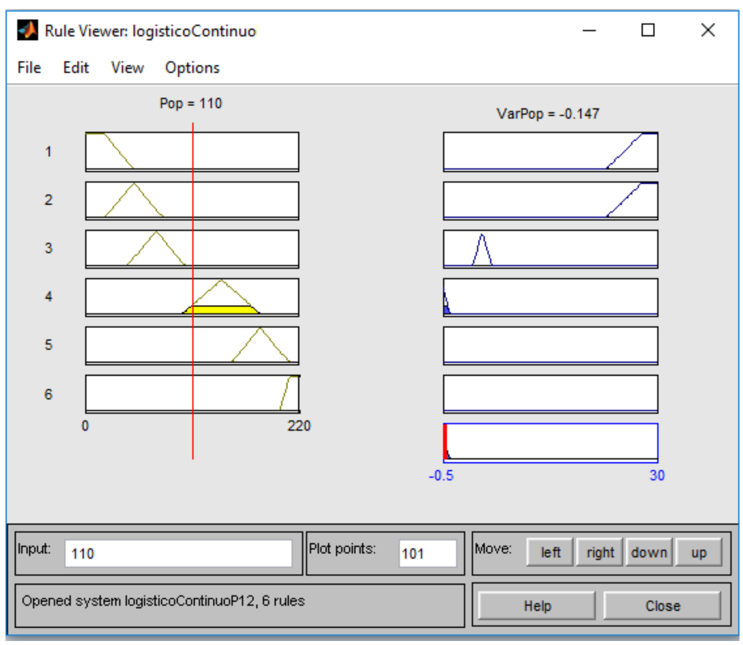


Figura 37: Sistema de regras para o p-fuzzy logístico

p-fuzzy logístico r = 0.2, K = 100 e y(0) = 10

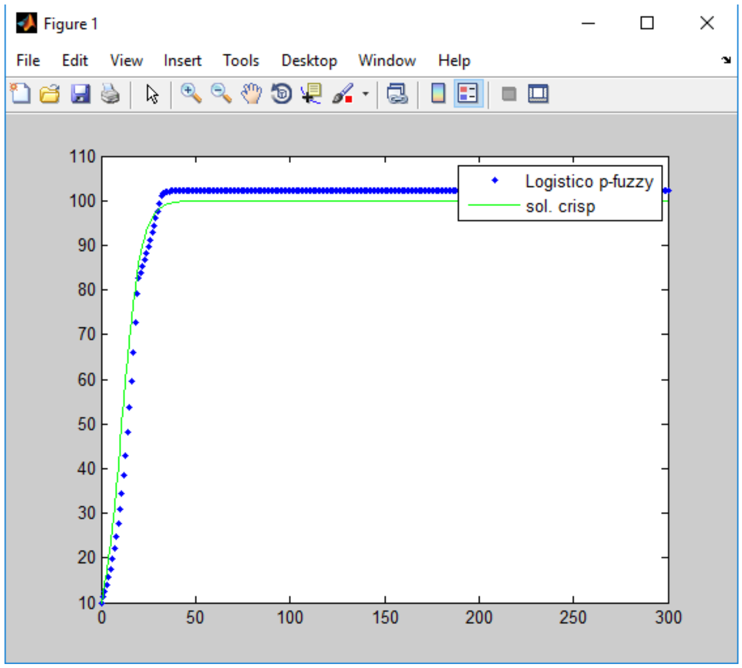


Figura 38: Gráfico comparativo entre p-fuzzy e crisp

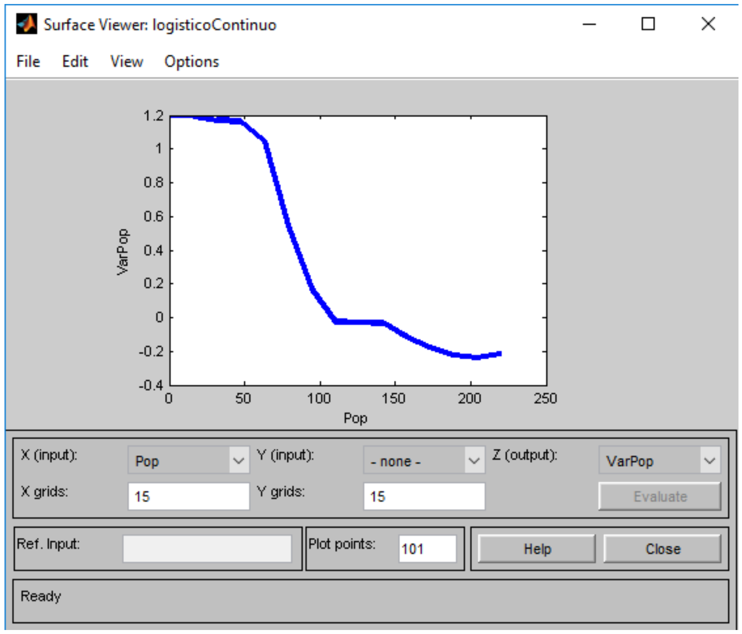


Figura 39: Gráfico da superfície gerada para o p-fuzzy logístico

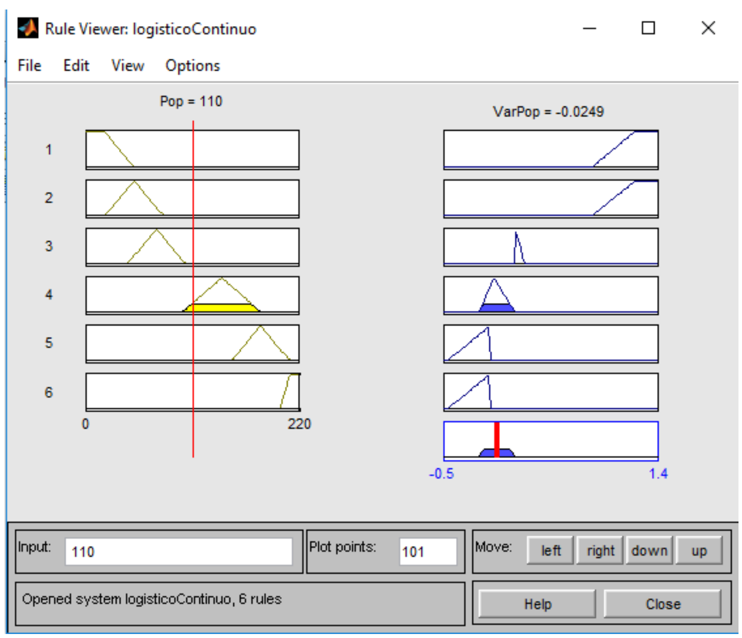


Figura 40: Sistema de regras para o p-fuzzy logístico

Referências

[1] Barros,L. C. Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática, 2006.

[2] Ávila, G. Cantor e a teoria de conjuntos. Revista do professor de matemática 43, Goiânia, 2000.