Solucionário do livro “Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática”

Laécio Carvalho de Barros & Rodney Carlos Bassanezi

1 Agradecimentos

Os autores agradecem aos ex-alunos de pós-graduação (hoje a maioria são professores universitários) Germano, Jorge, Carlos Medeiros, Carlos Franklin, Felipe e Ivan pela iniciativa de elaborarem o presente solucionário.

2 Errata

- *Capítulo 7, página 247:*

  A fórmula (7.22) NÃO significa que as variáveis aleatórias φ_A e φ_B são não correlacionadas, como aparece no texto, uma vez que (7.22) não envolve distribuição conjunta bivariada. Veja soluções dos exercícios 7.8 e 7.9.

3 Solucionário

1. Conjunto Fuzzy como Modelador de Incerteza

Exercício 1.1 Suponha que A e B sejam conjuntos clássicos de U.

a) Verifique que $\chi_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A\cap B \\ 0 \text{ se } x \notin A\cap B \end{cases}$.

b) Verifique que $\chi_{A\cap A'}(x) = 0$ $(A\cap A' = \emptyset)$ e que $\chi_{A\cup A'}(x) = 1$ $(A\cup A' = U)$ para todo $x \in U$.

Demonstração. **(a)** Por definição temos:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \\ 0 \text{ se } x \notin A \end{cases} \quad e \quad \chi_B(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in B \\ 0 \text{ se } x \notin B \end{cases}.$$

Também segundo a definição temos $\varphi_{A\cap B}(x) = Min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$. E então:

$$\chi_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \; e \; x \in B \\ 0 \; cc \end{cases}.$$

E portanto

$$\chi_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \cap B \\ 0 \text{ se } x \notin A \cap B \end{cases}.$$

(b) Por definição temos $\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x)$. Logo temos:

$$\chi_{A'}(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \notin A \\ 0 \text{ se } x \in A \end{cases}.$$

E então:

$$\chi_{A\cap A'}(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \text{ e } x \in A' \\ 0 \; cc \end{cases}.$$

Como $x \in A$ e $x \in A'$ é impossível, temos $\chi_{A\cap A'}(x) = 0$, o mesmo que dizer $A \cap A' = \emptyset$.

Pela definição $\varphi_{A\cup B}(x) = Max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$. Então:

$$\chi_{A\cup A'}(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \notin A \; e \; x \notin A' \\ 1 \; cc \end{cases}.$$

Como $x \notin A$ e $x \notin A'$ é impossível, temos $\chi_{A\cup A'}(x) = 1$, o mesmo que dizer $A \cup A' = U$. □

Exercício 1.2 Considere que o conjunto fuzzy dos jovens seja dado por

$$\varphi_J(x) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{x}{120}\right)^2\right]^4, & x \in [10, 120] \\ 0, & x \notin [10, 120] \end{cases}.$$

a) Defina um conjunto fuzzy dos idosos.

b) Determine a idade de um indivíduo de "meia vida", isto é, grau $0,5$ tanto de jovialidade como de velhice, supondo que o conjunto fuzzy dos idosos seja complemento fuzzy dos jovens.

c) Esboce os gráficos dos jovens e idosos do item anterior e compare com o Exemplo 1.6.

Demonstração. **(a)** Considere o mesmo conjunto fuzzy dos jovens agora com a função de pertinência $\varphi_I(x) = 1 - \varphi_J(x)$ ou ainda

$$\varphi_I(x) = 1 - \varphi_J(x) = \begin{cases} 1 - \left[1 - \left(\frac{x}{120}\right)^2\right]^4, & x \in [10, 120] \\ 1, & x \notin [10, 120] \end{cases}.$$

(b) Jovialidade

$\varphi_j(x) = \left(1 - \left(\frac{x}{120}\right)^2\right)^4$, para $\varphi_j(x) = 0,5$ temos:

$$0,5 = \left(1 - \left(\frac{x}{120}\right)^2\right)^4 \Longrightarrow (0,5)^{\frac{1}{4}} = 1 - \left(\frac{x}{120}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{x}{120}\right)^2 = 1 - (0,5)^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow \frac{x}{120} = \left(1 - (0,5)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow$$

$$x = 120\left(1 - (0,5)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow x = 120\left(1 - (0,5)^{0,25}\right)^{0,5} \Longrightarrow$$

$$x = 120\,(1 - 0,8408)^{0,5} \Longrightarrow x = 120\,(0,1592)^{0,5} \Longrightarrow$$

$$x = 120 \times 0,39899,$$

portanto $x \approx 47,8$.

Velhice

$\varphi_I(x) = 0,5$, assim

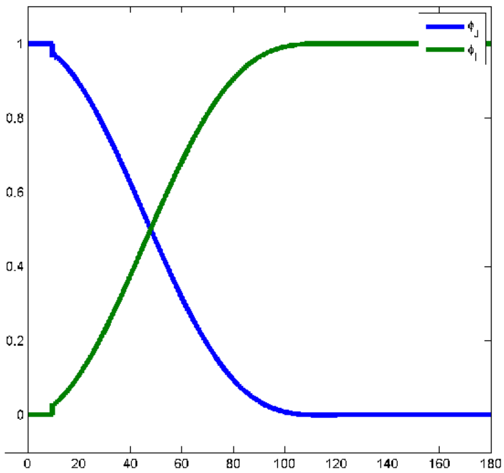
$$0,5 = 1 - \left(1 - \left(\frac{x}{120}\right)^2\right)^4 \Longrightarrow 1 - \left(\frac{x}{120}\right)^2 = (0,5)^{\frac{1}{4}}$$

daí temos que

$$x = 120\left(1 - (0,5)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

portanto $\varphi_I(x) = 0,5 = 1 - \varphi_j(x) \approx 47,8$.

(c) Veja figura a seguir:



□

Exercício 1.3 Considere o subconjunto fuzzy das *pessoas altas* (em metros) do Brasil, definido por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1,4 \\ \frac{1}{0,4}(x - 1,4) & \text{se } 1,4 < x \leq 1,8 \\ 1 & \text{se } x > 1,8 \end{cases}$$

e das pessoas de estatura mediana por

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1,4 \\ \frac{1}{0,2}(x - 1,4) & \text{se } 1,4 < x \leq 1,6 \\ 1 & \text{se } 1,6 < x \leq 1,7 \\ \frac{1}{0,1}(1,8 - x) & \text{se } 1,7 < x \leq 1,8 \\ 0 & \text{se } x > 1,8 \end{cases}$$

onde x é a altura em metros. Obtenha $(A \cup B)'$ e $A' \cup B'$ e dê uma interpretação para estas operações.

Demonstração.

$$\varphi_{A'}(x) = \begin{cases} 1-0 & \text{se } x \leq 1,4 \\ 1-\frac{1}{0,4}(x-1,4) & \text{se } 1,4 < x \leq 1,8 \\ 1-1 & \text{se } x > 1,8 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1,4 \\ \frac{1}{0,4}(1,8-x) & \text{se } 1,4 < x \leq 1,8 \\ 0 & \text{se } x > 1,8 \end{cases}$$

e

$$\varphi_{B'}(x) = \begin{cases} 1-0 & \text{se } x \leq 1,4 \\ 1-\frac{1}{0,2}(x-1,4) & \text{se } 1,4 < x \leq 1,6 \\ 1-1 & \text{se } 1,6 < x \leq 1,7 \\ 1-\frac{1}{0,1}(1,8-x) & \text{se } 1,7 < x \leq 1,8 \\ 1-0 & \text{se } x > 1,8 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1,4 \\ \frac{1}{0,2}(1,6-x) & \text{se } 1,4 < x \leq 1,6 \\ 0 & \text{se } 1,6 < x \leq 1,7 \\ \frac{1}{0,1}(x-1,7) & \text{se } 1,7 < x \leq 1,8 \\ 1 & \text{se } x > 1,8 \end{cases}$$

$(A\cup B)'$ é o conjunto fuzzy dado pela função de pertinência

$$\begin{aligned}
\varphi_{(A\cup B)'}(x) &= \varphi_{(A'\cap B')}(x) \\
&= \begin{cases}
\min\left[1,1\right] & \text{se } x\leq 1,4 \\
\min\left[\frac{1}{0{,}4}(1,8-x), \frac{1}{0{,}2}(1,6-x)\right] & \text{se } 1,4<x\leq 1,6 \\
\min\left[\frac{1}{0{,}4}(1,8-x), 0\right] & \text{se } 1,6<x\leq 1,7 \\
\min\left[\frac{1}{0{,}4}(1,8-x), \frac{1}{0{,}1}(x-1,7)\right] & \text{se } 1,7<x\leq 1,8 \\
\min\left[0,1\right] & \text{se } x>1,8
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
1 & \text{se } x\leq 1,4 \\
\frac{1}{0{,}2}(1,6-x) & \text{se } 1,4<x\leq 1,6 \\
0 & \text{se } 1,6<x\leq 1,7 \\
\frac{1}{0{,}1}(x-1,7) & \text{se } 1,7<x\leq 1,72 \\
\frac{1}{0{,}4}(1,8-x) & \text{se } 1,72<x\leq 1,8 \\
0 & \text{se } x>1,8
\end{cases}
\end{aligned}$$

e $A'\cup B'$ é dado por

$$\begin{aligned}
\varphi_{(A'\cup B')}(x) &= \begin{cases}
\max\left[1,1\right] & \text{se } x\leq 1,4 \\
\max\left[\frac{1}{0{,}4}(1,8-x), \frac{1}{0{,}2}(1,6-x)\right] & \text{se } 1,4<x\leq 1,6 \\
\max\left[\frac{1}{0{,}4}(1,8-x), 0\right] & \text{se } 1,6<x\leq 1,7 \\
\max\left[\frac{1}{0{,}4}(1,8-x), \frac{1}{0{,}1}(x-1,7)\right] & \text{se } 1,7<x\leq 1,8 \\
\max\left[0,1\right] & \text{se } x>1,8
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
1 & \text{se } x\leq 1,4 \\
\frac{1}{0{,}4}(1,8-x) & \text{se } 1,4<x\leq 1,72 \\
\frac{1}{0{,}1}(x-1,7) & \text{se } 1,72<x\leq 1,8 \\
1 & \text{se } x>1,8
\end{cases}
\end{aligned}$$

As operações união e intersecção e o complementar de subconjuntos fuzzy são extensões do caso clássico, assim, $(A\cup B)'$ e $A'\cup B'$ podem ser interpretados como, respectivamente, subconjuntos fuzzy das pessoas baixas (complementar das pessoas altas ou de estatura mediana) e pessoas pessoas baixas ou altas (complementar de pessoas altas ou complementar de pessoas com estatura mediana). $\square$

2. O Princípio de Extensão e Números Fuzzy

Exercício 2.1 Considere o subconjunto fuzzy A de números reais com função de pertinência dada por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}.$$

Considere ainda a função $f(x) = x^2, x \geq 0$. Obtenha $[\hat{f}(A)]^\alpha$ para $\alpha = 0, \alpha = 3/4$ e $\alpha = 1$.

Demonstração. Observe que os $\alpha-$níveis de A são os intervalos

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha})\right].$$

Como f é crescente e contínua, temos

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f\left([A]^\alpha\right) = \left[\frac{1}{4}(1 - \sqrt{1-\alpha})^2, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1-\alpha})^2\right].$$

Em particular, obtemos:

$$\alpha = 0 \Rightarrow [\hat{f}(A)]^\alpha = [0,1]$$

$$\alpha = 3/4 \Rightarrow [\hat{f}(A)]^\alpha = \left[\frac{1}{16}, \frac{9}{16}\right]$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow [\hat{f}(A)]^\alpha = \left\{\frac{1}{4}\right\}.$$

□

Exercício 2.2 Refaça o Exemplo 2.3, ou seja, com

$$A = \frac{0,4}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,5}{6} + \frac{0,2}{7}, B = \frac{0,2}{6} + \frac{0,5}{7} + \frac{1}{8} + \frac{0,5}{9} + \frac{0,2}{10}$$

a) Tomando $f(x,y) = x^2 + y$, determine $\hat{f}(A,B)$ e os graus de pertinência de $z = 10$ e $z = 25$ em $\hat{f}(A,B)$.

b) Agora tomando $f(x,y) = 2x + y$, determine $\hat{f}(A,B)$ e o grau de pertinência de $z = 18$ em $\hat{f}(A,B)$.

Demonstração. a)

$$\hat{f}(A,B) = \sum_{j=1}^{5} \sum_{i=1}^{5} \frac{\varphi_{\hat{f}(A,B)}(z)}{f(x_i, y_i)},$$

onde $z = f(x,y) = x^2 + y$ e,

$$\varphi_{\hat{f}(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & se\ f^{-1}(z) \neq \varnothing \\ 0 & se\ f^{-1}(z) = \varnothing \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} \hat{f}(A,B) & = & \frac{0{,}2}{15} + \frac{0{,}4}{16} + \frac{0{,}4}{17} + \frac{0{,}4}{18} + \frac{0{,}2}{19} + \frac{0{,}2}{22} + \frac{0{,}5}{23} + \frac{0{,}5}{24} + \frac{0{,}5}{25} \\ & + & \frac{0{,}2}{26} + \frac{0{,}2}{31} + \frac{0{,}5}{32} + + \frac{1}{33} + \frac{0{,}5}{34} + \frac{0{,}2}{35} + \frac{0{,}2}{42} + \frac{0{,}5}{43} + \frac{0{,}5}{44} \\ & + & \frac{0{,}5}{45} + \frac{0{,}2}{46} + \frac{0{,}2}{55} + \frac{0{,}2}{56} + \frac{0{,}2}{57} + \frac{0{,}2}{58} + \frac{0{,}2}{59} \end{array}$$

$\varphi_{\hat{f}(A,B)}(10) = 0$ pois $f^{-1}(10) = \varnothing$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{\hat{f}(A,B)}(25) & = & \sup_{f^{-1}(25)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] \\ & = & \max[\min[\varphi_A(4), \varphi_B(9)]] = 0,5 \end{array}.$$

b)

$$\hat{f}(A,B) = \sum_{j=1}^{5} \sum_{i=1}^{5} \frac{\varphi_{\hat{f}(A,B)}(z)}{f(x_i, y_i)},$$

onde $z = f(x,y) = 2x + y$ e

$$\hat{f}(A,B) = \frac{0,2}{12} + \frac{0,4}{13} + \frac{0,5}{14} + \frac{0,5}{15} + \frac{0,5}{16} + \frac{0,5}{17} + \frac{1}{18} + \frac{0,5}{19} + \frac{0,5}{20} + \frac{0,5}{21} + \frac{0,2}{22} + \frac{0,2}{23} + \frac{0,2}{24}$$

$\varphi_{\hat{f}(A,B)}(18) = \sup_{f^{-1}(18)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] = \max[0,2; 1; 0,2] = 1.$

□

Exercício 2.3 Obtenha os resultados das operações definidas acima para os intervalos

$$A = [-1, 2] \quad \text{e} \quad B = [5, 6].$$

Demonstração.
- $[A + B] = [4, 8]$;
- $[A - B] = [-7, -3]$;
- $[A.B] = [-6, 12]$;
- $[A/B] = [-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$.

□

Exercício 2.4 Considere os números fuzzy triangulares A e B que indicam, respectivamente, *aproximadamente* 2 e *aproximadamente* 4, dados por

$$A = (1; 2; 3) \text{ e } B = (3; 4; 5).$$

Calcule o resultado de $A \otimes B$ para cada uma das operações aritméticas entre números fuzzy mostradas a seguir.

a) $[A + B]^\alpha$

b) $[A - B]^\alpha$

c) $[4 \cdot A]^\alpha$

d) $[A \cdot B]^\alpha$

e) $[\frac{A}{B}]^\alpha$

Demonstração. Do princípio de extensão de Zadeh, obtêm-se os seguintes resultados:

a)

$$\varphi_{A+B}(z) = \begin{cases} \sup_{\varphi(z)} \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(y)\}, & \text{se } \varphi(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde $\varphi(z) = \{(x, y); x + y = z\}$.

Analisando os intervalos de variação das variáveis x e y, tem-se:

$$\varphi_{A+B}(z) = \begin{cases} \frac{z}{2} - 2, & \text{se } 4 \leq z < 6 \\ -\frac{z}{2} + 4, & \text{se } 6 \leq z \leq 8 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

ou, simplesmente, $A + B = (4; 6; 8)$.

b)

$$\varphi_{A-B}(z) = \begin{cases} \sup_{\varphi(z)} \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(y)\}, & \text{se } \varphi(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde $\varphi(z) = \{(x, y); x - y = z\}$.

Analogamente, através dos intervalos de variação das variáveis x e y, tem-se:

$$\varphi_{A-B}(z)=\begin{cases}\frac{z}{2}+2, & \text{se } -4\leq z<-2\\ -\frac{z}{2}, & \text{se } -2\leq z\leq 0\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases},$$

ou, equivalentemente, $A-B=(-4;-2;0)$.

c)

$$\varphi_{4A}(z)=\sup_{\{x:4x=z\}}\{\varphi_A(x)\}=\varphi_A\left(\frac{z}{4}\right).$$

Novamente, através dos intervalos de variação de x, tem-se:

$$\varphi_{4A}(z)=\begin{cases}\frac{z}{4}-1, & \text{se } 4\leq z<-8\\ -\frac{z}{4}+3, & \text{se } 8\leq z\leq 12\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases},$$

ou seja, $4A=(4;8;12)$.

d)

$$\varphi_{A+B}(z)=\begin{cases}\sup_{\varphi(z)}\min\{\varphi_A(x),\varphi_B(y)\}, & \text{se } \varphi(z)\neq\emptyset\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases},$$

onde $\varphi(z)=\{(x,y);xy=z\}$.

Analisando os intervalos de variação das variáveis x e y, tem-se:

$$\varphi_{AB}(z)=\begin{cases}-2+\sqrt{z+1}, & \text{se } 3\leq z<8\\ 4-\sqrt{z+1}, & \text{se } 8\leq z\leq 15\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}.$$

e)

$$\varphi_{A/B}(z)=\begin{cases}\sup_{\varphi(z)}\min\{\varphi_A(x),\varphi_B(y)\}, & \text{se } \varphi(z)\neq\emptyset\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases},$$

onde $\varphi(z)=\{(x,y);x/y=z\}$.

Analisando os intervalos de variação das variáveis x e y, tem-se:

$$\varphi_{A/B}(z) = \begin{cases} \frac{5z-1}{z+1}, & \text{se } 1/5 \leq z \leq 1/2 \\ \frac{3-3z}{z+1}, & \text{se } 1/2 \leq z < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Observa-se que nos itens $d)$ e $e)$ as funções de pertinência não correspondem a números fuzzy triangulares.

□

Exercício 2.5 A partir do Teorema 2.1 e das propriedades das operações aritméticas, mostre que a Extensão de Zadeh de uma função linear afim, $f(x) = ax + b$, é a função linear afim $\hat{f}(X) = aX + \hat{b}$ se $X \in F(\mathbb{R})$.

Demonstração. Tomando o número fuzzy A e a função linear afim $f(x) = \lambda x + b$, com $\lambda \neq 0$. Sendo assim, f é uma funçao bijetora e, portanto,

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) = \varphi_A(f^{-1}(z)) = \varphi_A\left(\frac{z-b}{\lambda}\right).$$

Como A é um número fuzzy,

$$\begin{aligned} [\hat{f}(A)]^\alpha &= f([A]^\alpha) \\ &= \lambda[A]^\alpha + b \\ &= [\lambda A]^\alpha + [\hat{b}]^\alpha \\ &= [\lambda A + \hat{b}]^\alpha \end{aligned}$$

Portanto, $\hat{f}(A) = \lambda A + \hat{b}$.

□

3. Relações Fuzzy

Exercício 3.1 Compare o Exemplo 3.1 (página 60) com o exemplo 1.8 (página 26)

Demonstração. Tanto o exemplo 3.1 quanto o exemplo 1.8 possuem mesmos valores de pertinência para todos os pacientes, tanto para Febre quanto para Mialgia. O exemplo 1.8 temo como objetivo ilustrar as operações fuzzy de união, intersecção e complementar, já o exemplo 3.1, tem como objetivo diagnosticar qual paciente está com gripe, que nesse caso, o grau de pertinência de gripe de um paciente é dado pela inteseção fuzzy de Mialgia com Febre. □

Paciente	Febre: A	Mialgia: B	$A \cup B$	$A \cap B$	A'	$A \cap A'$	$A \cup A'$
1	0,7	0,6	0,7	0,6	0,3	0,3	0,7
2	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
3	0,4	0,2	0,4	0,2	0,6	0,4	0,6
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
5	1,0	0,2	1,0	0,2	0,0	0,0	1,0

Tabela 1.1: Ilustração das operações entre subconjuntos fuzzy.

Paciente	Febre: A	Mialgia: B	Coriza: C	A'	B'	C'	$A \cap B \cap C$	$A \cup B \cup C$
1	0,7	0,6	0,8	0,3	0,4	0,2	0,6	0,8
2	1,0	1,0	0,4	0,0	0,0	0,6	0,4	1,0
3	0,4	0,2	0,5	0,6	0,8	0,5	0,2	0,5
4	0,5	0,5	0,3	0,5	0,5	0,7	0,3	0,5
5	1,0	0,2	0,9	0,0	0,8	0,1	0,2	1,0

Paciente	$A \cap A'$	$A' \cup B' \cup C'$	$A' \cap B' \cap C'$	$(A \cup B) \cap C$	$(A \cap B) \cup C$	$(A \cap C) \cup B$
1	0,3	0,4	0,2	0,7	0,8	0,7
2	0,0	0,6	0,0	0,4	1,0	1,0
3	0,4	0,8	0,5	0,4	0,5	0,4
4	0,5	0,7	0,5	0,3	0,5	0,5
5	0,0	0,8	0,0	0,9	0,9	0,9

Exercício 3.2 Investigue mais um sintoma típico de gripe *(coriza, por exemplo)* e inclua-o, como subconjunto fuzzy, na Tabela 1.1 para diagnosticar os pacientes com gripe.

Demonstração. Observação: A coriza pode ser avaliada pela cor da secreção. A secreção nasal *(coriza)* pode ser um destes tipos:

- Transparentes e ralas: resfriado comum, alergia, rinite alérgica ou febre do feno;
- Espessas e amarelas ou marrom ou verde: sinusite, gripe ou tuberculose;
- De cor ferrugem ou verde: infecções bacteriana ou lesão encefálica.

□

Exercício 3.3 Suponha que os conjuntos universos envolvidos U e V sejam finitos, de maneira que A, B e $\mathcal{R}$ tenham representações na forma de matriz. A partir da observação anterior, verifique que

$$B = A \circ \mathcal{R} \quad \text{e} \quad A = B \circ \mathcal{R}^T$$

onde A e B são as formas matriciais em linha dos respectivos conjuntos fuzzy, cujos elementos são obtidos a partir da equação (3.3).

Demonstração. Suponhamos $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ e $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com suas respectivas classes de subconjuntos fuzzy $\mathcal{F}(U)$ e $\mathcal{F}(V)$ e $\mathcal{R}$ uma relação binária sobre $U \times V$. Para cada $A \in \mathcal{F}(U)$, o funcional de $\mathcal{F}(U)$ em $\mathcal{F}(V)$ definido por $\mathcal{R}$ faz correnponder o elemento $B \in \mathcal{F}(V)$ cuja função de pertinência é dada por

$$\begin{aligned} b_i = \varphi_B(v_i) &= \sup_{1 \leq k \leq m} [\min(\varphi_A(u_k), \varphi_R(u_k, v_i))] \\ &= \sup_{x \in U} [\min(\varphi_A(x), \varphi_R(x, v_i))] \\ &= \varphi_{A \circ R}(x, v_i), \end{aligned}$$

portanto, $B = A \circ \mathcal{R}$. Analogamente, para cada $B \in \mathcal{F}(V)$, o funcional de $\mathcal{F}(V)$ em $\mathcal{F}(U)$ definido por $\mathcal{R}$ faz correnponder o elemento $A \in \mathcal{F}(U)$ cuja função de pertinência é dada por

$$\begin{aligned} a_i = \varphi_A(u_i) &= \sup_{1 \leq k \leq n} [\min(\varphi_B(v_k), \varphi_{R^{-1}}(v_k, u_i))] \\ &= \sup_{1 \leq k \leq n} [\min(\varphi_B(v_k), \varphi_R(u_i, v_k))] \\ &= \sup_{y \in V} [\min(\varphi_B(y), \varphi_R(u_i, y))] \\ &= \sup_{y \in V} [\min(\varphi_B(y), \varphi_{R^T}(y, u_i))] \\ &= \varphi_{B \circ R^T}(y, u_i), \end{aligned}$$

logo, $A = B \circ \mathcal{R}^T$.

□

Exercício 3.4 Defina $T \ominus S = \min\{t_{ij}, s_{ij}\}$ e obtenha a diferença a partir do raport determinado pela operação. Use também estas operações com a composição entre sarja e cetim.

Demonstração. Tomando os multiplos de cada padrão adequadamente, temos:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos:

$$T \ominus S = \min\{t_{ij}, s_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para a composição sarja-cetim as matrizes têm dimensão 15 e obtemos:

$$S = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$S \ominus C = \min\{t_{ij}, s_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

□

Exercício 3.5 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 1&0&1&0 \end{bmatrix} \quad e \;\; B = \begin{bmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix},$$

e faça a composição $A \circ B = [max - min]$ para obter um novo raport.

Demonstração.

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 0&1&1&0\\ 1&0&1&1\\ 0&1&1&0\\ 1&0&1&1 \end{bmatrix}.$$

□

4. Noções da Lógica Fuzzy

Exercício 4.1 Verifique que $\Delta_3 \leq \Delta_2 \leq \Delta_1$.

Demonstração. Primeiramente mostremos que $\Delta_3 = \max\{0, x+y-1\} \leq \Delta_2 = xy$.

i. Suponhamos que $\max\{0, x+y-1\} = 0$, logo para qualquer $x, y \in [0,1]$ temos $xy \geq 0$.

ii. Agora, suponhamos que $\max\{0, x+y-1\} = x+y-1 > 0$. Para $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$, faremos $x = 1-a$, $0 < a < 1$ e $y = 1-b$, $0 < b < 1$. Assim, $\Delta_2 = xy = (1-a)(1-b) = (x+y-1) + ab \geq x+y-1 = \Delta_3$. Portanto, $\Delta_3 \leq \Delta_2$.

Portanto, de *i.* e *ii.* temos $\Delta_3 \leq \Delta_2$.

Agora mostremos $\Delta_2 = xy \leq \Delta_1 \min\{x,y\}$.

Suponha sem perda de generalidade que $\min\{x,y\} = x$. Logo, para qualquer $x, y \in [0,1]$ temos $x \geq xy$. Analogamete pra $\min\{x,y\} = y$. Portanto, $\Delta_2 \leq \Delta_1$. □

Exercício 4.2 Prove que para quaisquer t-norma $\triangle$, t-conorma $\bigtriangledown$ e negação η, as leis de De Morgan são equivalentes.

Demonstração. Sejam as leis de De Morgan:

$$\begin{aligned} &i)\ \ \eta(x \triangle y) = \eta(x) \bigtriangledown \eta(y) \\ &ii)\ \eta(x \bigtriangledown y) = \eta(x) \triangle \eta(y) \end{aligned}$$

Assumindo *i*) como hipótese, mostra-se primeiramente que *ii*) também é válida.

Se $\eta(x \triangle y) = \eta(x) \bigtriangledown \eta(y)$ então

$$\eta\,[\eta(x) \triangle \eta(y)] = \eta(\eta(x)) \bigtriangledown \eta(\eta(y)) = x \bigtriangledown y$$

e, portanto,

$$\eta(x) \triangle \eta(y) = \eta\{\eta\,[\eta(x) \triangle \eta(y)]\} = \eta(x \bigtriangledown y),$$

que é a igualdade *ii*).

Assumindo, agora, que *ii*) seja verdadeira, mostra-se que *i*) também será verdadeira.

Analogamente ao primeiro caso, se $\eta(x \bigtriangledown y) = \eta(x) \triangle \eta(y)$, então

$$\eta\,[\eta(x) \bigtriangledown \eta(y)] = \eta(\eta(x)) \triangle \eta(\eta(y)) = x \triangle y$$

e, portanto,

$$\eta(x) \bigtriangledown \eta(y) = \eta\{\eta\,[\eta(x) \bigtriangledown \eta(y)]\} = \eta(x \triangle y),$$

que é a igualdade *i*). Dessa maneira, está provada a equivalência das leis de De Morgan para quaisquer t-norma $\triangle$, t-conorma $\bigtriangledown$ e negação η. □

Exercício 4.3 Deixamos a cargo do leitor.

Exercício 4.4 Verifique em quais dos sistemas dados abaixo, as t-normas e t-conormas são duais em relação à negação $\eta(x) = 1 - x$:

a) $\begin{cases} x \bigtriangleup y = \max\{x + y - 1, 0\} \\ x \bigtriangledown y = \min\{x + y, 1\} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x \bigtriangleup y = xy \\ x \bigtriangledown y = x + y - xy \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x \bigtriangleup y = \max\{x + y - 1, 0\} \\ x \bigtriangledown y = x + y - xy \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x \bigtriangleup_H y = \dfrac{xy}{a + (1 - a)(x + y - xy)} \\ \\ x \bigtriangledown_H y = \dfrac{(a - 2)xy + x + y}{a + (1 - a)xy} \end{cases}$,com $a \geq 0$.

$\bigtriangleup_H$ e $\bigtriangledown_H$ são denominadas t-norma e t-conorma de Hamacher;

e) $\begin{cases} x \bigtriangleup_F y = \log_a \left[1 + \dfrac{(a^x - 1)(a^y - 1)}{a - 1}\right] \\ \\ x \bigtriangledown_F y = 1 - \log_a \left[1 + \dfrac{(a^{1-x} - 1)(a^{1-y} - 1)}{a - 1}\right] \end{cases}$

com $a > 0$ e $a \neq 1$.

$\bigtriangleup_F$ e $\bigtriangledown_F$ são denominadas t-norma e t-conorma de Frank.

Demonstração.

a)

$$\begin{aligned} \eta(x \bigtriangleup y) &= 1 - (x \bigtriangleup y) \\ &= 1 - \max\{x + y - 1, 0\} \\ &= 1 + \min\{1 - x - y, 0\} \\ &= \min\{1 + 1 - x - y, 1\} \\ &= \min\{(1 - x) + (1 - y), 1\} \\ &= \min\{\eta(x) + \eta(y), 1\} = \eta(x) \bigtriangledown \eta(y) \end{aligned}$$

Portanto, a t-norma e a t-conorma dadas são duais pela negação $\eta(x) = 1 - x$.

b)

$$
\begin{aligned}
\eta(x \bigtriangleup y) &= 1 - (x \bigtriangleup y) \\
&= 1 - xy \\
&= 1 - x + 1 - y - 1 + x + y - xy \\
&= (1-x) + (1-y) - (1-x)(1-y) \\
&= \eta(x) + \eta(y) - \eta(x)\eta(y) = \eta(x) \bigtriangledown \eta(y)
\end{aligned}
$$

Portanto, a t-norma e a t-conorma dadas são duais pela negação $\eta(x) = 1 - x$.

c)

$$
\begin{aligned}
\eta(x \bigtriangleup y) &= 1 - (x \bigtriangleup y) \\
&= 1 - \max\{x + y - 1, 0\} \\
&= 1 + \min\{1 - x - y, 0\} \\
&= \min\{2 - x - y, 1\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta(x) \bigtriangledown \eta(y) &= \eta(x) + \eta(y) - \eta(x)\eta(y) \\
&= (1-x) + (1-y) - (1-x)(1-y) \\
&= 1 - xy
\end{aligned}
$$

Como $1 - xy \neq \min\{2 - x - y, 1\}$, a t-norma e a t-conorma dadas NÃO são duais pela negação $\eta(x) = 1 - x$.

d)

$$
\begin{aligned}
\eta(x \bigtriangleup_H y) &= 1 - (x \bigtriangleup_H y) \\
&= 1 - \frac{xy}{a + (1-a)(x + y - xy)} \\
&= \frac{a + (1-a)(x + y - xy) - xy}{a + (1-a)(x + y - xy)} \\
&= \frac{a + (1-a)x + (1-a)y + (a-2)xy}{a + (1-a)(x + y - xy)} \\
&= \frac{a - 2 - ax + 2x - ay + 2y + 2 - x - y + (a-2)xy}{1 - 1 + a + (1-a)(x + y - xy)} \\
&= \frac{(a-2)(1 - x - y + xy) + 2 - x - y}{1 + (1-a)(x + y - xy - 1)} \\
&= \frac{(a-2)(1-x)(1-y) + (1-x) + (1-y)}{1 + (1-a)(1-x)(1-y)} \\
&= \frac{(a-2)\eta(x)\eta(y) + \eta(x) + \eta(y)}{1 + (1-a)\eta(x)\eta(y)} = \eta(x) \bigtriangledown_H \eta(y)
\end{aligned}
$$

Portanto, a t-norma e a t-conorma dadas são duais pela negação $\eta(x) = 1 - x$.

e)

$$\begin{aligned}
\eta(x \triangle_F y) &= 1 - (x \triangle_F y) \\
&= 1 - \log_a \left[1 + \frac{(a^x - 1)(a^y - 1)}{a - 1} \right] \\
&= 1 - \log_a \left[1 + \frac{(a^{1-\eta(x)} - 1)(a^{1-\eta(y)} - 1)}{a - 1} \right] \\
&= \eta(x) \bigtriangledown_F \eta(y)
\end{aligned}$$

Portanto, a t-norma e a t-conorma dadas são duais pela negação $\eta(x) = 1 - x$. □

Exercício 4.5 Verifique que cada uma das operações S e R, da definição 4.4 são de fato implicações fuzzy, quaisquer que sejam as *t-normas, t-conormas e negação.*

Demonstração. Como sabemos uma implicação é dita "implicação fuzzy" quando reproduz a tabela verdade para o caso discreto.

- S-implicação: Por definição $\eta(0) = 1$, $\eta(1) = 0$ e $x \bigtriangledown 0 = x$, com isso temos:

  1. Fronteira:

x	y	$x \Rightarrow y$
1	1	$\eta(1) \bigtriangledown 1 = 1$
1	0	$\eta(1) \bigtriangledown 0 = 0$
0	1	$\eta(0) \bigtriangledown 1 = 1$
0	0	$\eta(0) \bigtriangledown 0 = 1$

  2. Crescente na segunda variável: Se $a \geq b$ então $c \bigtriangledown a \geq c \bigtriangledown b, \forall c$. Daí,
  $$S(x, a) = \eta(x) \bigtriangledown a \geq \eta(x) \bigtriangledown b = S(x, b)$$

  3. Decrescente na primeira variável: Se $a \geq b$ então $\eta(a) \leq \eta(b)$ e daí,
  $$S(a, x) = \eta(a) \bigtriangledown x \leq \eta(b) \bigtriangledown x = S(b, x)$$

- Seja
  $$Q(x, y) = \eta(x) \bigtriangledown (x \triangle y).$$

  Então as condições de fronteira e o crescimento na segunda variável são sempre satisfeitos:

1. Fronteira:

   i) $Q(1,1) = \eta(1) \bigtriangledown (1 \bigtriangleup 1) = 0 \bigtriangledown 1 = 1$

   ii) $Q(1,0) = \eta(1) \bigtriangledown (1 \bigtriangleup 0) = 0 \bigtriangledown 0 = 0$

   iii) $Q(0,1) = \eta(0) \bigtriangledown (0 \bigtriangleup 1) = 1 \bigtriangledown 0 = 1$

   iv) $Q(0,0) = \eta(0) \bigtriangledown (0 \bigtriangleup 0) = 1 \bigtriangledown 0 = 1$, onde usamos que $0 \bigtriangleup 0 = 0$ pois $0 \leq 1 \Rightarrow 0 \bigtriangleup 0 \leq 1 \bigtriangleup 0 = 0 \Rightarrow 0 \bigtriangleup 0 = 0$

2. Crescente na segunda variável:
   Se $a \geq b$ então $x \bigtriangleup a \geq x \bigtriangleup b$, $\forall x$. Daí,

   $$Q(x,a) = \eta(x) \bigtriangledown (x \bigtriangleup a) \geq \eta(x) \bigtriangledown (x \bigtriangleup b) = Q(x,b)$$

   onde usamos a monotonicidade de $\bigtriangledown$.

3. No entanto, o decrescimento na primeira variável não é sempre satisfeito. Por esse motivo essa operação não é uma implicação fuzzy. De fato, vamos considerar o seguinte exemplo: $a = 1, b = 1/2, \eta(x) = 1 - x, \bigtriangleup = \min, \bigtriangledown = \max$. Tome $1/2 < y \leq 1$ arbitrário, daí

   $$Q(a,y) = Q(1,y) = \eta(1) \bigtriangledown (1 \bigtriangleup y) = 0 \bigtriangledown (1 \bigtriangleup y) = 1 \bigtriangleup y = y.$$

   Por outro lado,

   $$\begin{aligned} Q(b,y) &= Q(1/2,y) = \eta(1/2) \bigtriangledown (1/2 \bigtriangleup y) \\ &= 1/2 \bigtriangledown (1/2 \bigtriangleup y) = 1/2 \bigtriangledown 1/2 = 1/2 \end{aligned}$$

   e assim, $a > b$ e $Q(a,y) > Q(b,y), \forall y > 1/2$.
   Observe que tal propriedade não é satisfeita mesmo quando $\bigtriangleup$ e $\bigtriangledown$ são duais em relação a η. Outro exemplo a seguir:
   $a = 1, b = 1/2, \eta(x) = 1 - x, \bigtriangleup = xy, \bigtriangledown = x + y - xy$. Tome $2/3 < y \leq 1$ arbitrário, daí

   $$Q(a,y) = Q(1,y) = \eta(1) \bigtriangledown (1 \bigtriangleup y) = 0 \bigtriangledown (1 \bigtriangleup y) = 0 \bigtriangledown y = y.$$

   Por outro lado,

   $$\begin{aligned} Q(b,y) &= Q(1/2,y) = \eta(1/2) \bigtriangledown (1/2 \bigtriangleup y) \\ &= 1/2 \bigtriangledown y/2 = 1/2 + y/2 - y/4 = 1/2 + y/4. \end{aligned}$$

   Mas, $y > 1/2 + y/4 \Leftrightarrow y - y/4 > 1/2 \Leftrightarrow (3/4)y > 1/2 \Leftrightarrow y > 2/3$ e assim, $a > b$ e $Q(a,y) > Q(b,y), \forall y > 2/3$.

Um contra-exemplo mais “geral”:
Sejam $\triangle$, $\bigtriangledown$ e η quaisquer. Tome $a = 1, a \geq b$ e seja y arbitrário, tal que $1 \geq y > b$. Assim,

$$Q(a, y) = Q(1, y) = 0 \bigtriangledown (1 \triangle y) = 1 \triangle y = y.$$

Por outro lado, como $1 \geq y > b \Rightarrow \eta(b) > \eta(y) \geq \eta(1) = 0$ temos:

$$Q(b, y) = \eta(b) \bigtriangledown (b \triangle y) > 0 \bigtriangledown (b \triangle y) = b \triangle y.$$

Agora, $y = 1 \triangle y > b \triangle y$ e portanto $Q(1, y) > Q(b, y)$, sempre que $1 \geq y > b$.

Observamos que alguns autores costumam chamar essa operação de implicação fuzzy.

- R-implicação: Por definição $x \bigtriangledown 0 = x$, com isso temos:

1. Fronteira:

x	y	$x \Rightarrow y$
1	1	$sup\{z \in [0,1]$ tal que $1 \bigtriangledown z \leq 1\} = 1$
1	0	$sup\{z \in [0,1]$ tal que $1 \bigtriangledown z \leq 0\} = 0$
0	1	$sup\{z \in [0,1]$ tal que $0 \bigtriangledown z \leq 1\} = 1$
0	0	$sup\{z \in [0,1]$ tal que $0 \bigtriangledown z \leq 0\} = 1$

2. Crescente na segunda variável: Se $a \geq b$ então

$$\begin{aligned} R(x, a) &= sup\{z \in [0,1] \text{ tal que } x \bigtriangledown z \leq a\} \\ &\geq sup\{z \in [0,1] \text{ tal que } x \bigtriangledown z \leq b\} \\ &= R(x, b) \end{aligned}$$

já que todo z tal que $x \bigtriangledown z \leq b$ satisfaz $x \bigtriangledown z \leq a$ pois $b \leq a$.

3. Decrescente na primeira variável: Se $a \geq b$ então $a \bigtriangledown z \geq b \bigtriangledown z, \forall z$. Daí,

$$\begin{aligned} R(a, y) &= sup\{z \in [0,1] \text{ tal que } a \bigtriangledown z \leq y\} \\ &\leq sup\{z \in [0,1] \text{ tal que } b \bigtriangledown z \leq y\} \\ &= R(b, y) \end{aligned}$$

já que todo z tal que $a \bigtriangledown z \leq y$ satisfaz $b \bigtriangledown z \leq y$ pois $a \bigtriangledown z \geq b \bigtriangledown z$.

□

Exercício 4.6 Resolva os itens abaixo.

a) Verifique que as implicações de Gödel e de Goguen são R-implicações, supondo $\Delta =$ mínimo para Gödel e $\Delta =$ produto para Goguen.

b) Dentre as impliçaões fuzzy acima, dê exemplo de S-implicações e de R-implicações, supondo $\eta(x) = 1 - x$.

c) Verifique que $g(x,y) \leq g_n(x,y)$ para x e y no intervalo $[0,1]$.

Demonstração. **(a)**Para Gödel temos que

$$g\left(x,y\right) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}.$$

Usando $\Delta = mim$ para R-implicação temos

$$(x \Longrightarrow y) = sup\{z \in [0,1]\,; x\Delta z \leq y\}$$

$a \Longrightarrow_g b = sup\{z \in [0,1]\,; mim\{z,a\} \leq b\}$
$(mim\{1,a\} = a \leq b \Longrightarrow 1 \in \{z | min\{z,a\} \leq b\})$
$(z > b) \Longrightarrow min\{z,a\} > b \Longrightarrow z \notin (z > b)$ com $a > b$
$z \leq b \leq a \Longrightarrow min\{z,a\} = z \leq b$
$\{z \in [0,1]\,; min\{z,a\} \leq b\} = [a,b]\,.$
Para a implicação de Goguen temos que:
Goguen $(x \Longrightarrow y) = g_n = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & sex > y \end{cases}.$
Usando a $\Delta =$ produto temos:
R- implicação $(x \Longrightarrow y) = sup\{z \in [0,1]\,; x\Delta z \leq y\}$
$(x \Longrightarrow y) = sup\{z \in [0,1]\,; x\Delta z \leq y\}$
$(a \Longrightarrow_{g_n} b) = sup\{z \in [0,1]\,; x\Delta z \leq y\}$
temos que $x.z = \leq y$, daí vem que $z \leq \dfrac{y}{x}$ portanto temos que $\dfrac{y}{x}, x > y$.
Agora considere $x.z = \leq y$. Observe que o maior valor de $z \in [0,1]$ que satisfaz a equação é $z = 1$, portanto, daí temos que Goguen $(x \Longrightarrow y) =$
$g_n = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & sex > y \end{cases}$
é uma R-implicação com $\Delta =$ produto.

(b) Exemplo de $S-$ implicação
Implicaçao de Kleene- Dienes $(x \Longrightarrow y) = K_d\left(x,y\right) = max\{\left(1-x\right), y\}$
$(x \Longrightarrow y) = \eta\left(x\right)\Delta y$
tomando $x, y \in [0,1]$
se $x, y > 0,5$, com $x > y \Longrightarrow max\{\left(1-x\right), y\} = y$
se $x < y$ temos $max\{\left(1-x\right), y\} = \left(1-x\right)$
se $x, y < 0,5$ temos que o $max\{\left(1-x\right), y\} = \left(1-x\right).$
R-implicação temos:

$(x \Longrightarrow y) = sup\{z \in [0,1]\,; (1-x)\,\Delta z \leq y\}$
$(a \Longrightarrow_{g_n} b) = sup\{z \in [0,1]\,; (1-x)\,\Delta z \leq y\}$
temos que $(1-x)\,.z \leq y$ daí vem que $z \leq \dfrac{y}{1-x}$, portanto temos que $\dfrac{y}{1-x}, 1-x > y$.
Agora considere $(1-x)\,.z \leq y$ observe que o maior valor de $z \in [0,1]$ que satisfaz a equação é $z = 1$, portanto daí temos que Goguen $(x \Longrightarrow y) = g_n = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \dfrac{y}{1-x}, & sex > y \end{cases}$
é uma R-implicação.

(c) Sendo $g\,(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}$
e a $g_n\,(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \dfrac{y}{x}, & x > y \end{cases}$
No caso em que $x \leq y$ temos que $g\,(x,y) \leq g_n\,(x,y)$ para todo x e $y \in [0,1]$.
Para o caso que $x > y$, temos que $0 < x \leq 1$ então $1 \leq \dfrac{1}{x} \Longrightarrow y \leq \dfrac{y}{x}$.
Portanto vale a desigualdade $g\,(x,y) \leq g_n\,(x,y)$ para x e $y \in [0,1]$. □

Exercício 4.7 (Exemplo 4.3: Implicações fuzzy) As seguintes operações são implicações fuzzy:

a) Implicação de Gödel:

$$(x \Longrightarrow y) = g\,(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ y & \text{se } x > y \end{cases}.$$

b) Implicação de Goguen:

$$(x \Longrightarrow y) = g_n\,(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ \frac{y}{x} & \text{se } x > y \end{cases}.$$

c) Implicação de Lukasiewicz:

$$(x \Longrightarrow y) = \ell\,(x,y) = \min\{(1-x+y)\,, 1\}.$$

d) Implicação de Kleene-Dienes:

$$(x \Longrightarrow y) = k_d\,(x,y) = \max\{(1-x)\,, y\}.$$

e) Implicação de Reichenbach:

$$(x \Longrightarrow y) = r\,(x, y) = (1 - x + xy)\,.$$

f) implicação de Gaines-Rescher:

$$(x \Longrightarrow y) = g_r\,(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{se } x > y \end{cases}.$$

g) Implicação de Wu:

$$(x \Longrightarrow y) = w\,(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ \min\{1 - x, y\} & \text{se } x > y \end{cases}.$$

Esboce os gráficos das implicações do Exemplo 4.3.

Demonstração. As figuras a seguir mostram o esboço dos gráficos. $\square$

Exercício 4.8 Vamos voltar à expressão (4.1) e obter seu valor lógico quando consideramos $\triangle = \wedge, \bigtriangledown = \vee, \eta(x) = 1 - x$ e as implicações:

a) Goguen: $(x \Rightarrow y) = g_n(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{cases}$

b) Lukasiewicz: $(x \Rightarrow y) = l(x, y) = \min\{(1 - x + y), 1\}$

c) Kleene-Dienes: $(x \Rightarrow y) = k_d(x, y) = \max\{(1 - x), y\}$

d) Reichenbach: $(x \Rightarrow y) = r(x, y) = 1 - x + xy$

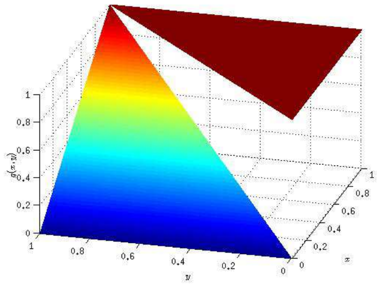
e) Gaines-Rescher: $(x \Rightarrow y) = g_r(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 0, & x > y \end{cases}$

f) Wu: $(x \Rightarrow y) = w(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \min\{1 - x, y\}, & x > y \end{cases}$

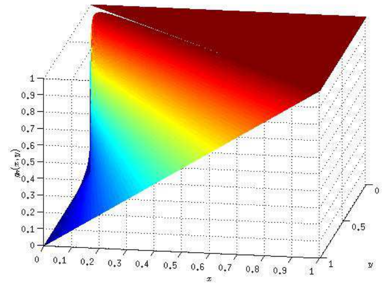
Demonstração. Considerando as pertinências como no Exemplo 4.4,

$$\varphi_A(a) = 0,6; \varphi_B(b) = 0,7; \varphi_C(c) = 0,4; \varphi_D(d) = 0,7;$$

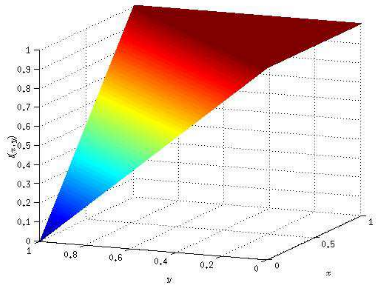
temos:



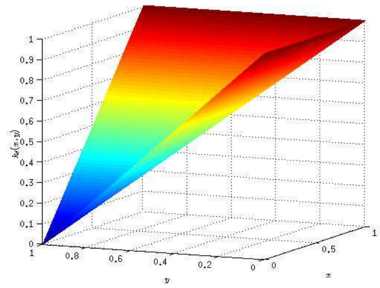
(a) Gödel



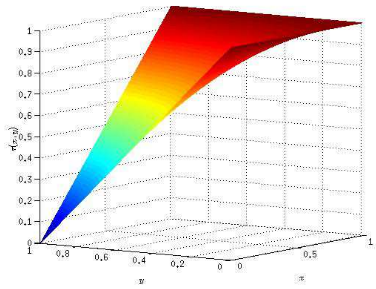
(b) Goguen



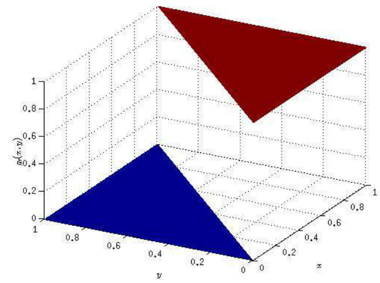
(c) Lukasiewicz



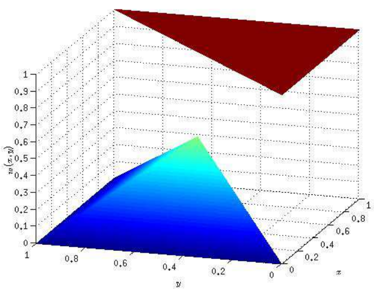
(d) Kleene-Dienes



(e) Reichenbach



(f) Gaines-Rescher



(g) Wu

$p \triangle q$	s	$r \bigtriangledown s$	Implicação	$p \triangle q \Rightarrow r \bigtriangledown s$
0,6	0,3	0,4	Goguen	2/3
0,6	0,3	0,4	Lukasiewicz	0,8
0,6	0,3	0,4	Klenee-Dienes	0,4
0,6	0,3	0,4	Reichenbach	0,64
0,6	0,3	0,4	Gaines-Rescher	0
0,6	0,3	0,4	Wu	0,4

□

Exercício 4.9 Verifique se $R(A) = B$ para a t-norma do mínimo, $x \triangle y = x \wedge y$, considerando:

a) implicação de Reichenbach;

b) implicação Wu.

Demonstração. a) Deixamos a cargo do leitor.

b) Basta tomar A e B do exemplo 4.6, ou seja, $A = \frac{0,4}{x_1} + \frac{1,0}{x_2} + \frac{0,6}{x_3}$ e $B = \frac{0,8}{y_1} + \frac{0,4}{y_2}$.
Lembrando que $\varphi_{R(A)}(y) = \max\{(\varphi_A(x) \Rightarrow \varphi_B(y)) \wedge \varphi_A(x)\}$.
Desta forma, utilizando a implicação Wu, temos:

$$R = \frac{1}{(x_1, y_1)} + \frac{1}{(x_1, y_2)} + \frac{0}{(x_2, y_1)} + \frac{0}{(x_2, y_2)} + \frac{1}{(x_3, y_1)} + \frac{0,4}{(x_3, y_2)}.$$

Daí,
$\varphi_{R(A)}(y_1) = \max\{1 \wedge 0,4; 0 \wedge 1; 1 \wedge 0,6\} = 0,6$
$\varphi_{R(A)}(y_2) = \max\{1 \wedge 0,4; 0 \wedge 1; 0,4 \wedge 0,6\} = 0,4.$
Portanto, temos

$$R(A) = \frac{0,6}{y_1} + \frac{0,4}{y_2} \neq B \Rightarrow R(A) \neq B.$$

□

Exercício 4.10 Dada

Regra: "Se a banana está amarela, então está madura"

Fato: " A banana está amarela"

Conclusão: " A banana está madura"

Reescreva a condicional *"Se a banana está amarela então está madura"* na forma *"Se X é A então Y é B"*, obtendo a relação $\mathcal{R}$, dada por uma implicação fuzzy, cuja função de pertinência é

$$\varphi_{\mathcal{R}}(x,y) = (\varphi_A(x) \Longrightarrow \varphi_B(y)).$$

Se a função de pertinência que define " banana amarela" é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x}{60}, & 0 \le x \le 60 \\ 1, & 60 < x \le 67 \end{cases},$$

e a função de pertinência que define " banana madura" é dada por

$$\varphi_B(y) = \begin{cases} \frac{x}{19}, & 0 \le y \le 19 \\ 1, & 19 < y \le 25 \end{cases}.$$

Modele o termo *"quase amarelo"* por um subconjunto fuzzy A^*, encontre a saída B^* que indica o termo *"quase madura"*, considerando o modificador potência com $s > 1$ e verifique para este caso que $\mathcal{R}(m(A)) = m(\mathcal{R}(A))$. Em seguida, use outras implicações e t-normas para obter novos conjuntos fuzzy de saídas B^*.

Demonstração. Por um lado temos,

$$\begin{aligned}
\varphi_{B^*}(y) = \varphi_{R(A)}(y) &= \sup_x [\varphi_R(x,y) \wedge \varphi_{m(A)}(x)] = \sup_x [(\varphi_A(x) \Rightarrow \varphi_B(y)) \wedge (\varphi_A(x))^s] \\
&= \max\{\sup_{\varphi_A(x) \le \varphi_B(y)} [1 \wedge (\varphi_A(x))^s], \sup_{\varphi_A(x) > \varphi_B(y)} [(1-\varphi_A(x)) \wedge \varphi_B(y) \wedge (\varphi_A(x))^s]\} \\
&= \max\{(\varphi_B(y))^s, \sup_{\varphi_A(x) > \varphi_B(y)} [(1-\varphi_A(x)) \wedge \varphi_B(y)]\} \\
&= \max\{(\varphi_B(y))^s, (1-\varphi_B(y)) \wedge \varphi_B(y)\} \\
&= (\varphi_B(y))^s = \varphi_{B^*}(y).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\varphi_{R(A)}(y) &= \sup_x [\varphi_R(x,y) \wedge \varphi_A(x)] = \sup_x [(\varphi_A(x) \Rightarrow \varphi_B(y)) \wedge \varphi_A(x)] \\
&= \max\{\sup_{\varphi_A(x) \le \varphi_B(y)} [1 \wedge \varphi_A(x)], \sup_{\varphi_A(x) > \varphi_B(y)} [(1-\varphi_A(x)) \wedge \varphi_B(y) \wedge \varphi_A(x)]\} \\
&= \max\{\varphi_B(y), \sup_{\varphi_A(x) > \varphi_B(y)} [(1-\varphi_A(x)) \wedge \varphi_B(y)]\} \\
&= \max\{\varphi_B(y), (1-\varphi_B(y)) \wedge \varphi_B(y)\} \\
&= \varphi_B(y)).
\end{aligned}$$

Assim, $\varphi_{B^*}(y) = \varphi_{m(A)}(y) = (\varphi_B(y))^s$, $s > 1$ e portanto, $\mathcal{R}(m(A)) = m(\mathcal{R}(A))$.

$\square$

Exercício 4.11 Deixamos a cargo do leitor.

Exercício 4.12 Verifique que independência possibilística é equivalente à não-interatividade se a t-norma adotada é a do produto.

Demonstração. Da definição (f2) da Seção 4.6.2, dois conjuntos A e B são não-interativos de acordo com a t-norma do produto se

$$\varphi_{(A,B)}(x,y) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(y).$$

Ainda, de acordo com (f4) da mesma seção, A e B são possibilisticamente independentes se

$$\varphi_{(A|B)}(x|y) = \varphi_A(x) \quad \text{e} \quad \varphi_{(B|A)}(y|x) = \varphi_B(y)$$

para todo par (x, y).

Supondo que A e B são não interativos, então:

$$\varphi_{(A,B)}(x,y) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(y) = \varphi_{(A|B)}(x|y) \cdot \varphi_B(y)$$

e, se $\varphi_B(y) \neq 0$, da última igualdade segue que

$$\varphi_{(A|B)}(x|y) = \varphi_A(x).$$

Analogamente,

$$\varphi_{(B,A)}(y,x) = \varphi_{(B|A)}(y|x) \cdot \varphi_A(x) = \varphi_B(y) \cdot \varphi_A(x),$$

que implica

$$\varphi_{(B|A)}(y|x) = \varphi_B(y).$$

se $\varphi_A(x) \neq 0$. Portanto, A e B são possibilisticamente não-interativos.

Por outro lado, supondo que A e B são possibilisticamente não-interativos, novamente assumindo que $\varphi_A(x)$ e $\varphi_B(y)$ não se anulam, tem-se que

$$\begin{aligned}\varphi_A(x) \cdot \varphi_B(y) &= \varphi_{(A|B)}(x|y) \cdot \varphi_{(B|A)}(y|x) \\ &= \frac{\varphi_{(A,B)}(x,y)}{\varphi_B(y)} \cdot \frac{\varphi_{(A,B)}(x,y)}{\varphi_A(x)}.\end{aligned}$$

A última igualdade implica que

$$\left[\varphi_{(A,B)}(x,y)\right]^2 = [\varphi_A(x)]^2 \cdot [\varphi_B(y)]^2$$

e, portanto,

$$\varphi_{(A,B)}(x,y) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(y),$$

o que prova a não interatividade entre A e B.

Assim, provou-se a equivalência entre independência possibilística e não-interatividade para o caso da t-norma do produto. $\square$

Exercício 4.13 Verifique que se A e B são não-interativos e $\triangle = \wedge$ em (4.9), então

$$\varphi_{B|A}(y|x) = \begin{cases} \varphi_B(y), & se \;\; \varphi_B(y) < \varphi_A(x) \\ \alpha \in [\varphi_A(x), 1], & se \;\; \varphi_B(y) \geq \varphi_A(x) \end{cases}.$$

Demonstração. Como A e B são não-interativos, ou seja, $\triangle = \wedge$, temos

$$\varphi_{(A,B)}(x, y) = \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y),$$

para todo o par (x, y). E como as distribuições de possibilidade condicional de B é dada pela fórmula

$$\varphi_{(A,B)}(x, y) = \varphi_{B|A}(y|x) \wedge \varphi_A(x),$$

temos

$$\varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) = \varphi_{B|A}(y|x) \wedge \varphi_A(x).$$

Logo, se $\varphi_A(x) > \varphi_B(y)$, então $\varphi_{B|A}(y|x) \wedge \varphi_A(x) = \varphi_B(y)$ que, pela desigualdade de hipótese,

$$\varphi_{B|A}(y|x) = \varphi_B(y),$$

contudo, se $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(y)$, então $\varphi_{B|A}(y|x) \wedge \varphi_A(x) = \varphi_A(x)$, portanto $\varphi_{B|A}(y|x) \geq \varphi_A(x)$, ou seja,

$$\varphi_{B|A}(y|x) = \alpha \in [\varphi_A(x), 1].$$

Então,

$$\varphi_{B|A}(y|x) = \begin{cases} \varphi_B(y), & se \;\; \varphi_B(y) < \varphi_A(x) \\ \alpha \in [\varphi_A(x), 1], & se \;\; \varphi_B(y) \geq \varphi_A(x) \end{cases}$$

□

Exercício 4.14

a) Dê exemplos, se possível, de conjuntos fuzzy A e B (discretos e contínuos - números fuzzy) em que B independente possibilisticamente de A, quando $\varphi_{B/A}(y/x)$ é dada pelo modus ponens, isto é quando

$$\varphi_{B/A}(y/x) = (\varphi_A(x) \Rightarrow \varphi_B(y))$$

b) Dê exemplos, se possível, de conjuntos fuzzy A e B não-iterativos, mas que B dependa possibilisticamente de A.

Demonstração. Tomemos $\varphi_A(x) = a$ para $x \in [0,1]$ (onde $a \in [0,1]$) e $B = (0;0;1)$ ou seja, $\varphi_B = x$ para $x \in [0,1]$ e $\varphi_B = 0$ para $x \notin [0,1]$

Usando que $\varphi_{A,B}(x,y) = \varphi_{B/A}(y/x) \bigtriangleup \varphi_A(x)$ e que $\varphi_{A,B}(x,y) = \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y)$ (conjuntos não iterativos) temos

$$\varphi_{A,B}(x,y) = \begin{cases} a \text{ se } a \leq x \\ x \text{ se } x \geq a \end{cases}$$

$$\varphi_{B/A}(y/x) = \frac{\varphi_{A,B}(x,y)}{\varphi_A(x)} = \begin{cases} 1 \text{ se } a \leq x \\ \frac{x}{a} \text{ se } x \geq a \end{cases}$$

Que é a implicação de Goguen ($\varphi_A(x) \Rightarrow \varphi_B(y)$). □

Exercício 4.15 Considere os conjuntos fuzzy do Exemplo 4.6.

a) Se a implicação é a de Gödel e $\Delta = \wedge$, verifique se as distribuições priori e posteriori de B coincidem;

b) Idem para a impicação de Lukasiewicz e $\Delta = \wedge$;

c) Idem para a implicação de Goguen e a t-morma do produto.

Demonstração. **(a)** No exemplo 4.6 temos os conjuntos $A = \dfrac{0,4}{x_1} + \dfrac{1,0}{x_2} + \dfrac{0,6}{x_3}$ e $B = \dfrac{0,8}{y_1} + \dfrac{0,4}{y_2}$.

Usando a implicação de Gödel e $\Delta = \wedge$ temos que:
$\varphi_R(x_i, y_j) = \varphi_A(x_i) \Longrightarrow \varphi_B(y_j)$ para $i = 1,2,3$ e $j = 1,2$.
Usando a implicação temos $(x_i) \Longrightarrow (y_j)$.
Daí temos que:

$$R = \begin{bmatrix} \varphi_R(x_1,y_1) & \varphi_R(x_1,y_2) \\ \varphi_R(x_2,y_1) & \varphi_R(x_2,y_2) \\ \varphi_R(x_3,y_1) & \varphi_R(x_3,y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \Longrightarrow 0,8 & 0,4 \Longrightarrow 0,4 \\ 1,0 \Longrightarrow 0,8 & 1,0 \Longrightarrow 0,4 \\ 0,6 \Longrightarrow 0,8 & 0,6 \Longrightarrow 0,4 \end{bmatrix};$$

pela implicação de Gödel e $\Delta = \wedge$ temos:

$$\begin{bmatrix} 0,4 \Longrightarrow 0,8 & 0,4 \Longrightarrow 0,4 \\ 1,0 \Longrightarrow 0,8 & 1,0 \Longrightarrow 0,4 \\ 0,6 \Longrightarrow 0,8 & 0,6 \Longrightarrow 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 0,4 \\ 1 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Agora vamos ver se $A \otimes^t R = B$

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 1 & 0,6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 0,4 \\ 1 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 \end{bmatrix} = B.$$

Logo as distribuições priori e posteriori de B coincidem.

(b) No exemplo 4.6 temos os conjuntos $A = \frac{0,4}{x_1} + \frac{1,0}{x_2} + \frac{0,6}{x_3}$ e $B = \frac{0,8}{y_1} + \frac{0,4}{y_2}$.

Usando a implicação de Lukasiewicz e $\Delta = \wedge$ temos que:
$\varphi_R(x_i, y_j) = \varphi_A(x_i) \Longrightarrow \varphi_B(y_j)$ para $i = 1,2,3$ e $j = 1,2$. Usando a implicação temos $(x_i) \Longrightarrow (y_j)$.
Daí segue que:

$$R = \begin{bmatrix} \varphi_R(x_1, y_1) & \varphi_R(x_1, y_2) \\ \varphi_R(x_2, y_1) & \varphi_R(x_2, y_2) \\ \varphi_R(x_3, y_1) & \varphi_R(x_3, y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \Longrightarrow 0,8 & 0,4 \Longrightarrow 0,4 \\ 1,0 \Longrightarrow 0,8 & 1,0 \Longrightarrow 0,4 \\ 0,6 \Longrightarrow 0,8 & 0,6 \Longrightarrow 0,4 \end{bmatrix}.$$

Pela implicação de Lukasiewicz e $\Delta = \wedge$ temos:
$(x \Longrightarrow y) = min\{(1 - x + y), 1\}$

$$\begin{bmatrix} 0,4 \Longrightarrow 0,8 & 0,4 \Longrightarrow 0,4 \\ 1,0 \Longrightarrow 0,8 & 1,0 \Longrightarrow 0,4 \\ 0,6 \Longrightarrow 0,8 & 0,6 \Longrightarrow 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 0,4 \\ 1 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Agora vamos ver se a igualdade é verdadeira $A \otimes^t R = B$

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 1 & 0,6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 0,4 \\ 1 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \neq B \text{ Pois } B = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

(c) No exemplo 4.6 temos os conjuntos $A = \frac{0,4}{x_1} + \frac{1,0}{x_2} + \frac{0,6}{x_3}$ e $B = \frac{0,8}{y_1} + \frac{0,4}{y_2}$.

Usando a implicação de Goguen e a t-morma do produto, temos que:
$\varphi_R(x_i, y_j) = \varphi_A(x_i) \Longrightarrow \varphi_B(y_j)$ para $i = 1,2,3$ e $j = 1,2$.
Usando a implicação temos $(x_i) \Longrightarrow (y_j)$.
Daí temos que:

$$R = \begin{bmatrix} \varphi_R(x_1, y_1) & \varphi_R(x_1, y_2) \\ \varphi_R(x_2, y_1) & \varphi_R(x_2, y_2) \\ \varphi_R(x_3, y_1) & \varphi_R(x_3, y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \Longrightarrow 0,8 & 0,4 \Longrightarrow 0,4 \\ 1,0 \Longrightarrow 0,8 & 1,0 \Longrightarrow 0,4 \\ 0,6 \Longrightarrow 0,8 & 0,6 \Longrightarrow 0,4 \end{bmatrix}.$$

Para a implicação de Goguen $(x \Longrightarrow y) = g_n(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{cases}$,

então $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 0,4 \\ 1 & 0,6 \end{bmatrix}$. Daí temos que $\begin{bmatrix} 0,4 & 1 & 0,6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 0,4 \\ 1 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 \end{bmatrix} = B$.

Então para a implicação de Goguen e a t-morma do produto, as distribuições priori e posteriori de B coincidem.

$\square$

5. Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Exercício 5.1 Refaça o Exemplo 5.5, inclusive as representações gráficas, trocando os consequentes por $y_1 = x + 2$ e $y_2 = 4 - x$.

Demonstração. Considere as regras

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad R_1 : \text{“Se } x \text{ é baixo } (A_1) \text{ então } y_1 = x + 2\text{”} \\ \text{ou} \\ \quad R_2 : \text{“Se } x \text{ é alto } (A_2) \text{ então } y_2 = 4 - x\text{”} \end{array}}$$

Suponha que o domínio seja $x \in [0, 4]$,

$$\varphi_{A_1}(x) = 1 - \frac{x}{4} \text{ e } \varphi_{A_2}(x) = \frac{x}{4}.$$

Logo, a saída do sistema pelo método de Takagi-Sugeno é

$$\begin{aligned} y &= \frac{\varphi_{A_1}(x) .y_1 + \varphi_{A_2}(x) .y_2}{\varphi_{A_1}(x) + \varphi_{A_2}(x)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{x}{4}\right)(x + 2) + \frac{x}{4}(4 - x)}{\left(1 - \frac{x}{4}\right) + \frac{x}{4}} \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 2 \end{aligned}$$

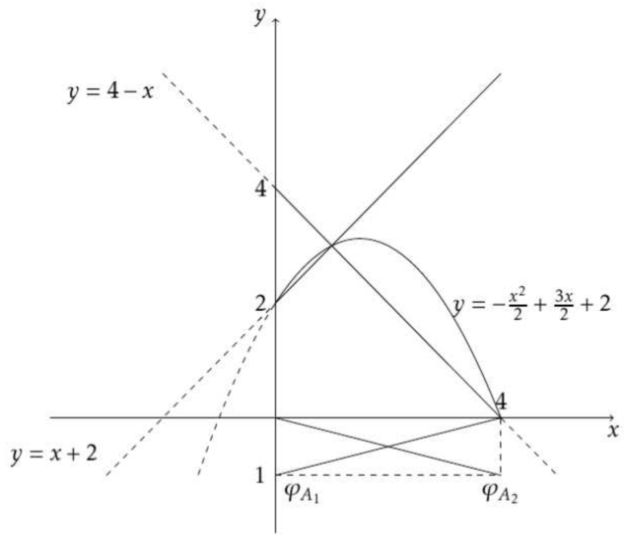
que é uma parábola com concavidade voltada para baixo, cujo vértice é $\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{8}\right)$. A figura a seguir ilustra a saída (y) e a base de regras com as funções de pertinência φ_{A_1} e φ_{A_2}. Observe que tais funções estão representadas abaixo do eixo $\overline{OX}$.

$\square$

Exercício 5.2 Considere as regras

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad R_1\text{: Se } x \text{ é baixo}(A_1) \text{ então } y_1 = x + 2 \\ \text{ou} \\ \quad R_2\text{: Se } x \text{ é alto}(A_2) \text{ então } y_2 = 4 - x \end{array}}$$

O conjunto fuzzy A_1 é dado pelo trapézio com base maior $[0, 3]$ e base menor $[0, 1]$. O conjunto fuzzy A_2 é o trapézio cuja base maior é $[1, 4]$ e base menor $[3, 4]$. Encontre a saída do sistema pelo método de Takagi-Sugeno. A saída geral é uma função contínua?



Demonstração. Temos que

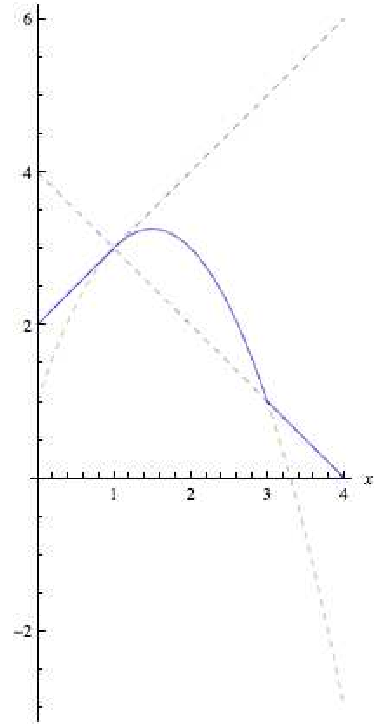
$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1; & x \in [0,1] \\ \frac{3-x}{2}; & x \in [1,3] \\ 0; & x \in [3,4] \end{cases}$$

$$\varphi_{A_2}(x) = \begin{cases} 0; & x \in [0,1] \\ \frac{x-1}{2}; & x \in [1,3] \\ 1; & x \in [3,4] \end{cases}$$

Logo,

$$y = \begin{cases} 1 + 3x - x^2; & x \in [0,1] \\ \frac{3-x}{2}; & x \in [1,3] \\ 4 - x; & x \in [3,4] \end{cases}$$

Veja figura abaixo: $\square$



6. Equações Relacionais Fuzzy e Aproximação

6.1 Considere as formas matriciais das relações fuzzy binárias

$$R = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,5 \end{bmatrix} \; e \; S = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,6 & 1,0 \\ 0,8 & 0,8 & 0,5 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Determine a forma matricial da relação $R \otimes^t S$ para cada t-norma $\triangle$.

a) $\triangle(x, y) = x \wedge y$;

b) $\triangle(x, y) = xy$;

c) $\triangle(x, y) = \max(o, x + y - 1)$;

d) $\triangle(x, y) = \frac{xy}{x+y-xy}$;

e) $\triangle(x, y) = \frac{xy}{2-(x+y-xy)}$;

f) $\triangle(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & se \ \max(x,y) = 1 \\ 0 & cc \end{cases}.$

Demonstração. Lembrando que a relação $R \otimes^t S$ tem função de pertinência

$$\varphi_{R\otimes^t S}(x,y) = \sup_y [\varphi_R(x,y) \triangle \varphi_S(y,z)].$$

Desta forma temos:

a) $R \otimes^t S = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}$

b) $R \otimes^t S = \begin{bmatrix} 0,54 & 0,48 & 0,6 \end{bmatrix}$

c) $R \otimes^t S = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$

d) $R \otimes^t S = \begin{bmatrix} 0,5625 & 0,521739 & 0,6 \end{bmatrix}$

e) $R \otimes^t S = \begin{bmatrix} 0,519231 & 0,4444 & 0,6 \end{bmatrix}$

f) $R \otimes^t S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}$.

$\square$

Exercício 6.2 Para as relações

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,6 & 1,0 \\ 0,8 & 0,8 & 0,5 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix},$$

determine as formas matriciais de $\mathcal{R} \otimes_{\Longrightarrow} \mathcal{S}$ para as implicações de:

a) Gödel:

$$(x \Longrightarrow y) = g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ y & \text{se } x > y \end{cases};$$

b) Goguen:

$$(x \Longrightarrow y) = g_n(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ \frac{y}{x} & \text{se } x > y \end{cases}.$$

Lembre-se que as implicações acima são do tipo R-implicações $(x \Longrightarrow y) = \sup\{w \in [0,1] : x\Delta w \leq y\}$, onde $\Delta = \min$, para o caso (a) e $\Delta =$produto para o caso(b).

Demonstração. Usaremos a Definição (6.3) para resolver os itens abaixo:

a) $\begin{bmatrix} 1,0 & 0,4 & 0,5 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1,0 & 0,8 & \frac{0,5}{0,6} \end{bmatrix}$.

$\square$

Exercício 6.3 Verifique que, para qualquer t-norma, vale a identidade

$$\left(\mathcal{R} \otimes^t \mathcal{S}\right)^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \otimes^t \mathcal{R}^{-1}.$$

Demonstração. Seja $\mathcal{R}$ uma relação fuzzy binária definida em $X \times Y$. De acordo com a Definição 3.4, a relação fuzzy binária inversa $\mathcal{R}^{-1}$, definida em $Y \times X$, tem função de pertinência $\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}$ dada por

$$\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y, x) = \varphi_{\mathcal{R}}(x, y).$$

Por outro lado, da definição 6.1 da composição sup-t, tem-se que

$$\varphi_{\mathcal{R}\otimes^t\mathcal{S}}(x, z) = \sup_{y \in V} \left[\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) \bigtriangleup \varphi_{\mathcal{S}}(y, z)\right]$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \varphi_{(\mathcal{R}\otimes^t\mathcal{S})^{-1}}(z, x) &= \sup_{y \in V} \left[\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) \bigtriangleup \varphi_{\mathcal{S}}(y, z)\right] \\ &= \sup_{y \in V} \left[\varphi_{\mathcal{S}}(y, z) \bigtriangleup \varphi_{\mathcal{R}}(x, y)\right] \\ &= \sup_{y \in V} \left[\varphi_{\mathcal{S}^{-1}}(z, y) \bigtriangleup \varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y, x)\right] \\ &= \varphi_{\mathcal{S}^{-1}\otimes^t\mathcal{R}^{-1}}(z, x). \end{aligned}$$

Poranto,

$$\left(\mathcal{R} \otimes^t \mathcal{S}\right)^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \otimes^t \mathcal{R}^{-1}.$$

$\square$

Exercício 6.4 Resolva a equação relacional

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,8 \\ 0,9 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \\ 0,3 \end{bmatrix}.$$

Verifique se há mais de uma solução. Caso exista, tente determinar a solução maximal.

Demonstração. Da equação relacional dada, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \max\{\min\{0,2;x_1\},\min\{0,9;x_2\},\min\{0,1;x_3\}\}=0,8 \\ \max\{\min\{0,1;x_1\},\min\{0,2;x_2\},\min\{0,8;x_3\}\}=0,2 \\ \max\{\min\{0,9;x_1\},\min\{0,1;x_2\},\min\{0,2;x_3\}\}=0,3 \end{cases}$$

Da primeira equação do sistema, temos que $x_2 = 0,8$, enquanto que da terceira equação obtemos $x_1 = 0,3$. Sendo assim, usando essas informações, obtemos que $x_3 \le 0,2$ da segunda equação. Portanto, existe uma infinidade de soluções, uma vez que para qualquer $x_3 \in [0;0,2]$ a tripla $(0,3;0,8;x_3)$ é solução. E a solução maximal é dada por $(0,3;0,8;0,2)$.

OBS.: Cuidado para não confundir. Aqui utilizamos ";" em algumas situações, ao invés de ",". Precisa-se adaptar a notação.

$\square$

Exercício 6.5 Resolva a equação

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. $Max\{0,7 \wedge x_1; 0,2 \wedge x_2\} = 0,5.$ Obtemos $x_2 \in [0,1]$, $x_1 \le 0,5$ e $x_1 \ge 0,5$ logo $x_1 = 0,5$

$Max\{0,6 \wedge x_1; 0,3 \wedge x_2\} = 0,5.$ Obtemos $x_2 \in [0,1]$, $x_1 \le 0,5$ e $x_1 \ge 0,5$ logo $x_1 = 0,5$.

Logo $x_1 = 0,5$ e $x_2 \in [0,1]$. $\square$

Exercício 6.6 Usando o corolário 6.5, verifique se a equação relacional

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,3 & 1,0 \\ 0,8 & 0,8 & 0,5 \\ 0,6 & 0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \otimes^t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

tem solução. Caso tenha, exiba uma delas para cada t-norma Δ:

a) Δ =mim

b) Δ = produto.

Demonstração. **(a)** Pelo corolário 6.5 temos que, se existir X tal que $R \otimes^t X = T$, então $R \otimes^t D = T$, onde $D = R^{-1} \circ_{\Rightarrow} T$

$$(x \Rightarrow y) = \begin{cases} 1, se & x \le y \\ y, se & x > y \end{cases}$$

$D = R^{-1} \circ_{\Rightarrow} T$

$$D = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,8 & 0,6 \\ 0,3 & 0,8 & 0,4 \\ 1,0 & 0,5 & 0,7 \end{bmatrix} \otimes_g \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

$(0,9 \Rightarrow 0,6) \wedge (0,8 \Rightarrow 0,4) \wedge (0,6 \Rightarrow 0,5) \Rightarrow (0,6 \wedge 0,4 \wedge 0,5) = 0,4$
$(0,3 \Rightarrow 0,6) \wedge (0,8 \Rightarrow 0,4) \wedge (0,4 \Rightarrow 0,5) \Rightarrow (1 \wedge 0,4 \wedge 1) = 0,4$
$(1,0 \Rightarrow 0,6) \wedge (0,5 \Rightarrow 0,4) \wedge (0,7 \Rightarrow 0,5) \Rightarrow (0,6 \wedge 0,4 \wedge 0,5) = 0,4$
$R \circ D = T$? se vale a igualdade a equação relacional tem solução, caso contrário a equação relacional não tem solução. Então o $sup\,(min)$, temos:

$$D = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,3 & 1,0 \\ 0,8 & 0,8 & 0,5 \\ 0,6 & 0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix} \neq T.$$

Portanto pelo corolário pedido a Equação relacional, não tem solução para $\Delta = min$.

(b) Pelo corolário 6.5 temos que, se existir X tal que $R \otimes^t X = T$, então $R \otimes^t D = T$, onde $D = R^{-1} \circ^{\cdot} T$

$(a \Rightarrow b) = \begin{cases} 1, se & a \leq b \\ \frac{b}{a}, se & a > b \end{cases}$

$D = R^{-1} \circ^{\cdot} T$

$$D = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,8 & 0,6 \\ 0,3 & 0,8 & 0,4 \\ 1,0 & 0,5 & 0,7 \end{bmatrix} \otimes_{gn} \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

$(0,9 \Rightarrow 0,6) \wedge (0,8 \Rightarrow 0,4) \wedge (0,6 \Rightarrow 0,5) \Rightarrow \left(\frac{0,6}{0,9} \wedge \frac{0,4}{0,8} \wedge \frac{0,5}{0,6}\right) = \frac{0,4}{0,8}$

$(0,3 \Rightarrow 0,6) \wedge (0,8 \Rightarrow 0,4) \wedge (0,4 \Rightarrow 0,5) \Rightarrow \left(1 \wedge \frac{0,4}{0,8} \wedge 1\right) = \frac{0,4}{0,8}$

$(1,0 \Rightarrow 0,6) \wedge (0,5 \Rightarrow 0,4) \wedge (0,7 \Rightarrow 0,5) \Rightarrow \left(0,6 \wedge \frac{0,4}{0,5} \wedge \frac{0,5}{0,7}\right) = 0,6.$

Então $D = \begin{bmatrix} \frac{0,4}{0,8} \\ \frac{0,4}{0,8} \\ 0,6 \end{bmatrix}$

$R \otimes^{\cdot} D = T$?

$P \backslash s$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
P_1	0,8	0,4	0,5	0,8	0,2	0,1	0,1	0,9	0,1	0,1	0,4
P_2	0,3	0,1	0,4	0,8	0,9	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3
P_3	0,8	0,3	0,5	0,8	0,1	0,2	0,9	0,1	0,6	0,3	0,6
P_4	0,8	0,7	0,7	0,2	0,1	0,9	0,1	0,1	0,1	0,9	0,4

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,3 & 1,0 \\ 0,8 & 0,8 & 0,5 \\ 0,6 & 0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \otimes^{\cdot} \begin{bmatrix} \frac{0,4}{0,8} \\ \frac{0,4}{0,8} \\ 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix} \neq T.$$

Portanto pelo corolário pedido a Equação relacional, não tem solução para $\Delta = produto$. □

Exercício 6.7 Resolva os itens abaixo:

(a) Mostre que, se o modelo matemático para diagnosticar for dado pela equação $\mathcal{S} \otimes^t \mathcal{X} = \mathcal{T}$, onde a t-norma é a do produto, então a matriz de diagnóstico é obtida por $\mathcal{D} = \mathcal{S}^{-1} \otimes_{g_n} \mathcal{T}$, em que g_n é a implicação de Goguen (sugestão: use o Corolário 6.5).

(b) Use o item (a) e refaça a aplicação do diagnóstico médico trocando a t-norma do produto pela t-norma do mínimo.

(c) Compare os resultados do item (b) com aqueles obtidos na aplicação do diagnóstico médico, a partir da operação *max-min*.

Demonstração. (a) $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são as representações matriciais das relações fuzzy dos sintomas e dos pacientes diagnosticados. Para obter uma matriz de diagnóstico $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{S} \otimes^t \mathcal{D} = \mathcal{T}$, fazemos uso do seguinte corolário:

Corolário 6.5. *Se existir solução de*

$$\mathcal{R} \otimes^t \mathcal{X} = \mathcal{T}$$

e a t-norma é a do produto, então a solução maximal é $\mathcal{D} = \mathcal{R}^{-1} \otimes_{g_n} \mathcal{T}$*, onde* g_n *é a implicação de Goguen.* Portanto, se existir solução para $\mathcal{S} \otimes^t \mathcal{X} = \mathcal{T}$, a matriz $\mathcal{D} = \mathcal{S}^{-1} \otimes_{g_n} \mathcal{T}$ será uma matriz de diagnóstico (ou a solução maximal).

(b) A base de conhecimentos é composta pelas relações fuzzy $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$, cujas matrizes são dadas abaixo em forma de tabelas:

$P\backslash d$	d_1	d_2	d_3	d_4
P_1	$0,9$	$0,3$	$0,4$	$0,2$
P_2	$0,3$	$0,9$	$0,1$	$0,1$
P_3	$0,4$	$0,1$	$0,9$	$0,3$
P_4	$0,2$	$0,1$	$0,3$	$0,9$

$s\backslash d$	d_1	d_2	d_3	d_4
s_1	0,25	0,125	0,3333	0,25
s_2	0,2857	0,1429	0,4286	0,5
s_3	0,2857	0,1429	0,25	0,25
s_4	0,375	0,125	0,125	0,125
s_5	0,3333	1,0	0,1111	0,1111
s_6	0,2222	0,1111	0,3333	0,5
s_7	0,4444	0,1111	1,0	0,3333
s_8	1,0	0,3333	0,4444	0,2222
s_9	0,6667	0,1667	1,0	0,5
s_{10}	0,2222	0,1111	0,3333	1,0
s_{11}	0,5	0,1667	0,3333	0,3333

Do item anterior e usando as tabelas apresentadas, obtemos a seguinte matriz de diagnóstico:

A matriz de diagnósticos $\mathcal{D}$ foi obtida através do corolário 6.5, isto é, $\mathcal{D} = \mathcal{S}^{-1} \otimes_{g_n} \mathcal{T}$, assim, a matriz $\mathcal{D}$ resolve a equação relacional $\mathcal{S} \otimes^t \mathcal{X} = \mathcal{T}$, ou seja, $\mathcal{S} \otimes^t \mathcal{D} = \mathcal{T}$.

(c) No exemplo do diagnóstico médico, a equação relacional é $\mathcal{S} \circ \mathcal{X} = \mathcal{T}$, portanto, segundo o corolário 6.4, a matriz de diagnóstico obtida é $\mathcal{D} = \mathcal{S}^{-1} \otimes_g \mathcal{T}$ enquanto que no item anterior, (b), a equação relacional é $\mathcal{S} \otimes^t \mathcal{X} = \mathcal{T}$, então $\mathcal{D} = \mathcal{S}^{-1} \otimes_{g_n} \mathcal{T}$, assim, as matrizes de diagnósticos são diferentes em cada caso, porém, elas resolvem suas respectivas equações relacionais, isto é, para cada um dos modelos, a respectiva matriz $\mathcal{D}$ "recupera" os diagnósticos dos pacientes que compõem a base de conhecimentos. $\square$

7. Medidas, Integrais e Eventos Fuzzy

Exercício 7.1 Prove que para $\lambda = 0$, g_λ é uma medida de Sugenose, e somente se, é uma medida de probabilidade.

Demonstração. Suponha que g_0 é medida de Sugeno, daí

(P1) Para todo $A \in \mathcal{A}$, $0 \leq g_0(A) \leq 1$ pois $g_0 : \mathcal{A} \to [0, 1]$.

(P2) $g_0(\omega) = 1$ pela definição de g_0 (Exemplo 7.2).

(P3) Se $A_1, \ldots, A_i, \ldots \in \mathcal{A}$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$ então $g_0(\cup A_i) = \sum g_0(A_i)$ pela definição de g_0.

(P4) $g_0(\emptyset) = 0$ pois g_0 é medida de Sugeno (Exemplo 7.2).

(P5) Se $A \subset B$ então $g_0(A) \leq g_0(B)$ pois g_0 é medida fuzzy (Exemplo 7.2).

(P6) Para todo $A \in \mathcal{A}$ temos $1 = g_0(A \cup A') = g_0(A) + g_0(A')$ pela definição de g_0. Daí obtemos $g_0(A') = 1 - g_0(A)$.

(P7) Da definicão de g_0 temos $g_0(A)+g_0(B) = g_0(A\cup B) = g_0((A\cup B)\cup(A\cap B)) = g_0(A\cup B)+g_0(A\cap B)$.Assim, $g_0(A\cup B) = g_0(A)+g_0(B)-g_0(A\cap B)$

(P8) Segue do fato de g_0 ser medida de Sugeno (Hipótese).

(P9) Segue do fato de g_0 ser medida de Sugeno (Hipótese).

Portanto é medida de probabilidade.

Reciprocamente, supondo que g_0 é medida de probabilidade, temos:

(S1) $g_0(\emptyset) = 0$ e $g_0(\omega) = 1$ pois valem $(P2)$ e $(P4)$.

(S2) Se $A \subset B$ então $g_0(A) \leq g_0(B)$ pois vale $(P5)$.

(S3) Segue de $(P8)$.

(S4) Segue de $(P9)$.

□

Exercício 7.2 Refaça o exemplo anterior (7.14) supondo que X tem distribuição binomial com $n = 8$ e $p = 0,02$.

Demonstração. a) $P(X \leq 1)$; X tem distribuição binomial com $n = 8$ e $p = 0,02$, assim para $P(X \leq 1)$ temos:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & cc \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(A) &= \textstyle\sum_i \varphi_A(x_i)P(X = x_i) \\ &= \varphi_A(0)P(X = 0) + \varphi_A(1) = 1P(X = 0) + 1P(X = 1) \\ &= \binom{10}{0} 0,98^{10} + \binom{10}{1} 0,98^9 0,02^1 = 0,98. \end{aligned}$$

b) $P(X\, ser\, pequeno)$, em que "pequeno" é o número fuzzy triangular $(0;0;2)$;
Temos:

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 1-\frac{x}{2} & se\ 0 \le x \le 2 \\ 0 & cc \end{cases}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(B) &= \textstyle\sum_i \varphi_B(x_i)P(X=x_i) \\ &= \varphi_B(0)P(X=0)+\varphi_B(1)P(X=1)+\varphi_B(2)P(X=2) \\ &= 1P(X=0)+0,5P(X=1)+0P(X=2) \\ &= \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} 0,98^{10} + 0,5 \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} 0,98^{9} 0,02^{1} = 0,9. \end{aligned}$$

c) $P(A \cap B)$, onde A e B são os eventos dos itens a) e b), respectivamente. Como $\varphi_{A\cap B}(x) = \min[\varphi_A(x), \varphi B(x)]$ temos que:

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= \textstyle\sum_i \varphi_{A\cap B}(x_i)P(X=x_i) \\ &= \varphi_{A\cap B}(0)P(X=0)+\varphi_{A\cap B}(1)P(X=1) \\ &+ \varphi_{A\cap B}(2)P(X=2) = 1P(X=0) \\ &+ 0,5P(X=1)+0P(X=2) = 0,9. \end{aligned}$$

d) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = 0,98+0,9-0,9 = 0,98.$

e)

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \tfrac{P(AB)}{P(B)} \\ &= \tfrac{E(\varphi_A\varphi_B)}{E(\varphi_B)} \\ &= \tfrac{\varphi_A(0)\varphi_B(0)P(X=0)+\varphi_A(1)\varphi_B(1)P(X=1)+\varphi_A(2)\varphi_B(2)P(X=2)}{E(\varphi_B)} \\ &= \tfrac{1P(X=0)+0{,}5P(X=1)+0P(X=2)}{0{,}9} = \tfrac{0{,}9}{0{,}9} = 1 \\ &\neq 0,98 = P(A). \end{aligned}$$

f) De acordo com o item e), $P(A|B) \neq P(A)$, logo A e B não são eventos independentes.

□

Exercício 7.3 Calcule a probabilidade do evento fuzzy dado a seguir

* 1 pessoa ganha por hora $R\$3,00 \longrightarrow \alpha_5 = 0,40$
* 2 pessoas ganham por hora $R\$4,00 \longrightarrow \alpha_4 = 0,50$
* 4 pessoas ganham por hora $R\$4,20 \longrightarrow \alpha_3 = 0,55$
* 2 pessoas ganham por hora $R\$4,50 \longrightarrow \alpha_2 = 0,60$
* 3 pessoas ganham por hora $R\$10,00 \longrightarrow \alpha_1 = 1,00$

onde α_i indica o grau com que cada indivíduo "ganha bem".

Demonstração. Basta calcularmos:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{5} m_i(\alpha_i - \alpha_{i+1})}{12} = \frac{7,8}{12} = 0,65.$$

□

Exercício 7.4 Numa central telefônica, o número N de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com a média $\lambda = 8$ de chamadas por minuto. Sabendo que a lei de probabilidade de uma distribuição de Poisson é dada por

$$P(N = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},$$

determine qual a probabilidade de que num minuto se tenha:

a) dez ou mais chamadas;

b) menos que nove chamadas;

c) um número *baixo* de chamadas, onde *baixo* é o conjunto fuzzy dado pelo número fuzzy triangular $(0; 0; 9)$;

d) um número *médio baixo* de chamadas, onde *médio baixo* é o evento fuzzy dado pelo número fuzzy trapezoidal $(0; 1; 4; 9)$;

e) $P(C|B)$ e $P(D|B)$, onde A, B, C e D são os eventos dos respectivos itens acima.

Demonstração. a) $P(N \geq 10) = 1 - P(N < 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{8^k}{k!}e^{-8} \approx 0,28.$

b) $P(N < 9) = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} \frac{8^k}{k!} e^{-8} \approx 0,59.$

c) Seja φ_C a função de pertinência do número fuzzy triangular $(0; 0; 9)$. Portanto,

$$\varphi_C(n) = \begin{cases} -\frac{1}{9}n + 1, & \text{se } 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{se } n > 9 \end{cases}$$

e, da Definição 7.12, segue que

$$\begin{aligned} P(C) = E(\varphi_C) &= \sum_{k=0}^{9} [\varphi_C(k) P(N = k)] \\ &= \sum_{k=0}^{9} \left[\left(-\frac{1}{9}k + 1 \right) \frac{8^k}{k!} e^{-8} \right] \\ &\approx 0,19. \end{aligned}$$

d) Nesse caso, para o evento D, a resolução é análoga à do item anterior. A função de pertinência φ_D é dada por

$$\varphi_D(n) = \begin{cases} n, & \text{se } 0 \leq n \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < n \leq 4 \\ -\frac{1}{5}(n - 9), & \text{se } 4 < n \leq 9 \\ 0, & \text{se } n > 9 \end{cases}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(D) = E(\varphi_D) &= \sum_{k=0}^{9} [\varphi_D(k) P(N = k)] \\ &= \sum_{k=0}^{9} \left\{ \left[-\frac{1}{5}(k - 9) \right] \frac{8^k}{k!} e^{-8} \right\} \\ &\approx 0,33. \end{aligned}$$

e) Considere os eventos A, B, C e D definidos pelos itens *a*), *b*), *c*) e *d*), respectivamente. Além das funções de pertinência φ_C e φ_D dos itens anteriores, pode-se considerar a função φ_B como sendo

$$\varphi_B(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n < 9 \\ 0, & \text{se } n \geq 9 \end{cases}.$$

Dessa maneira, usando a Definição 7.13, obtém-se:

$$\begin{aligned}
P(C|B) &= \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{E(\varphi_B\varphi_C)}{E(\varphi_B)} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{9}[\varphi_B(k)\varphi_C(k)P(N=k)]}{E(\varphi_B)} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\left[\left(-\frac{1}{9}k+1\right)\frac{8^k}{k!}e^{-8}\right]}{0,59} \\
&\approx 0,32.
\end{aligned}$$

Analogamente, a probabilidade $P(D|B)$ é dada por:

$$\begin{aligned}
P(D|B) &= \frac{P(DB)}{P(B)} = \frac{E(\varphi_D\varphi_B)}{E(\varphi_B)} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{9}[\varphi_D(k)\varphi_B(k)P(N=k)]}{E(\varphi_B)} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\left[\frac{8^k}{k!}e^{-8}\right]+\sum_{k=5}^{8}\left\{\left[-\frac{1}{5}(k-9)\right]\frac{8^k}{k!}e^{-8}\right\}}{0,59} \\
&\approx 0,56.
\end{aligned}$$

Em ambos os casos, o valor de $E(\varphi_B)$ foi extraído do Item *b*).

$\square$

Exercício 7.5 Suponha que o tempo T de duração de certa enfermidade seja uma variável aleatória exponencial ($T \sim exp(\lambda)$) com parâmetro $\lambda = \frac{1}{5}$, ou seja, sua densidade é dada por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}} & se \;\; t \geq 0 \\ 0 \;\; se \;\; t < 0 \end{cases}$$

Pede-se:

a) a esperança de T;

b) $P(M)$ onde M é o evento "médio" dado pelo conjunto fuzzy triangular $(0;5;8)$;

c) $P(M|B)$ onde B é o evento "baixo" dado pelo conjunto fuzzy triangular $(0;0;8)$;

d) M e B são independentes?

Demonstração. a)

$$E(T) = \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{5} e^{-\frac{t}{5}} dt = \frac{1}{5} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{t}{5}} dt = 5.$$

b) Sabemos que

$$P(M) = E(\varphi_M) = E(\varphi_M(X)) = \int_{suppM} \varphi_M(t) f(t) dt,$$

portanto

$$\begin{aligned} P(M) &= \int_0^8 \varphi_M(t) f(t) dt \\ &= \int_0^5 \left(\frac{t}{5}\right) \left(\frac{1}{5} e^{\frac{-t}{5}}\right) dt + \int_5^8 \left(\frac{8-t}{3}\right) \left(\frac{1}{5} e^{\frac{-t}{5}}\right) dt \\ &= 1 + \frac{5}{3e^{8/5}} - \frac{8}{3e}. \end{aligned}$$

c) Pela definição 7.13 temos que, dados dois eventos fuzzy M e B de $\mathbb{R}$, com $P(B) > 0$, a probabilidade condicional de M dado B é definida por

$$P(M|B) = \frac{P(MB)}{P(B)} = \frac{E(\varphi_M \cdot \varphi_B)}{E(\varphi_B)}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} P(MB) &= \int_0^8 \varphi_M(t) \varphi_B f(t) dt \\ &= \int_0^5 \left(\frac{t}{5}\right) \left(\frac{8-t}{8}\right) \left(\frac{1}{5} e^{\frac{-t}{5}}\right) dt + \int_5^8 \left(\frac{8-t}{3}\right) \left(\frac{8-t}{8}\right) \left(\frac{1}{5} e^{\frac{-t}{5}}\right) dt \\ &= \frac{1}{12} \left(-3 - \frac{25}{e^{8/5}} + \frac{28}{e}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(B) &= \int_0^8 \varphi_B f(t) dt \\ &= \int_0^8 \left(\frac{8-t}{8}\right) \left(\frac{1}{5} e^{\frac{-t}{5}}\right) dt \\ &= \frac{3}{8} + \frac{5}{8e^{8/5}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$P(M|B) = \frac{P(MB)}{P(B)} = \frac{-50 + 56e^{3/5} - 6e^{8/5}}{15 + 9e^{8/5}}.$$

d) Como

$$P(M) \cdot P(B) = \frac{3}{8} + \frac{25}{24e^{16/5}} - \frac{5}{3e^{13/5}} + \frac{5}{4e^{8/5}} - \frac{1}{e}$$

e

$$P(MB) = \frac{1}{12}\left(-3 - \frac{25}{e^{8/5}} + \frac{28}{e}\right),$$

temos que M e B não são independentes.

□

Exercício 7.6 Suponha $X \sim esp(1)$, isto é, X é uma variável aleatória com distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 1$

a) Calcule $P(A)$, onde A é o número fuzzy triangular $(0; 1; 1)$.

b) Calcule $P(C)$ em que

$$\varphi_C = \begin{cases} x - x^2 \text{ se } x \in [0,1] \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

c) Refaça o item (a) supondo que $X \sim N(0, 1)$.

Demonstração. **(a)** Sabemos que $f(x) = e^{-x}$ para $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 0$ caso $x \notin [0, 1]$, $\varphi_A(x) = 1 - x$ para $x \in [0, 1]$ e $\varphi_A(x) = 0$ se $x \notin [0, 1]$. Com isso

$$P(A) = E(\varphi_A) = \int_R \varphi_A(x) f(x) dx = \int_0^1 (e^{-x}(1 - x))dx = \frac{1}{e}.$$

(b)

$$P(C) = E(\varphi_C) = \int_R \varphi_C(x) f(x) dx = \int_0^1 (x - x^2)e^{-x} dx = 1 + \frac{1}{e}.$$

(c) Temos agora que $f(x) = 1$ para $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 0$ caso $x \notin [0, 1]$

$$P(A) = E(\varphi_A) = \int_R \varphi_A(x) f(x) dx = \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}.$$

□

Exercício 7.7 Suponha que X tem distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$, que A seja o evento fuzzy com função de pertinência $\varphi_A(x) = a \in [0,1]$, e B o número fuzzy triangular $(0;0;1)$. Pede-se:

a) $P(A)$ e $P(B)$;

b) $P(A \cap B)$ e $P(AB)$;

c) A e B são independentes?

d) Sendo C o evento do Exercício 7.6 b), verifique se A e C são independentes. E A e C?

Demonstração. **(a)** $P(A) = E(\varphi_A)$

$$E(\varphi_A) = \begin{cases} \sum \varphi_A(x_i) P(X = x_i), \text{se} \quad X \quad \text{for discreto} \\ \int_R \varphi_A(x) f(x) dx, \text{caso contrario} \end{cases}$$

X variável com valores em $[0,1]$
$f(x) = c \in [0,1] \, \forall x \in [0,1]$
$\int_0^1 f(x) dx = 1 = \int_0^1 cdx = c \Rightarrow c = 1 \;\; f(x) = 1 \forall x \in [0,1]$
$\varphi_A(x) = a \forall x \in [0,1]$
$E(A) = \int adx = a$
$E(A) = a$
$E(\varphi_A) = a$
Portanto $P(A) = a$.
Para calcular $P(B)$ temos:
$P(B) = \int_0^1 (-x+1) dx$

$P(B) = -\dfrac{x^2}{2} + x|_0^1$
temos que $P(B) = \dfrac{1}{2}$.

(b) $P(A \cap B)$
$\varphi_{A\cap B}(x) = mim[\varphi_A(x), \varphi_B(x)] = mim\{a, x\}$
$P(A \cap B) = \int_0^a xdx + \int_a^1 adx = \dfrac{x^2}{2}|_0^a + a(1-a)|_a^1 = -\dfrac{a^2}{2} + a$

$P(AB)$
$P(AB) = E(\varphi_A \varphi_B) = \int_0^1 \varphi_A(x) \varphi_B(x) f(x) dx = a \int_0^1 xdx = \dfrac{a}{2}$.

(c) A e B sao independentes se $P(AB) = P(A) P(B)$
Do item (a) temos que $P(A) = a$ e que $P(B) = \dfrac{1}{2}$ do item (B) temos

$P(AB) = \frac{a}{2}$ daí temos que $\frac{a}{2} = a\frac{1}{2}$
portanto $P(AB) = P(A)P(B)$.
Logo A e B são independentes.

(d) Seja C tal que

$$\varphi_C(x) = \begin{cases} x - x^2, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \quad \text{c.c} \end{cases}.$$

Então $P(C) = \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx = \int_0^1 -x^2dx + \int_0^1 xdx = -\frac{x^3}{3}|_0^1 + \frac{x^2}{2}|_0^1 = \frac{1}{6}$.
De (a) temos que $P(A) = a$ e $P(B) = \frac{1}{2}$ e agora vimos que $P(C) = \frac{1}{6}$
agora vamos calcular $P(AC)$
$P(AC) = E(\varphi_A\varphi_C) = \int_0^1 \varphi_A(x)\varphi_C(x) f(x)\,dx = \int_0^1 (-x^2a + xa)\,dx = \int_0^1 -x^2adx + \int_0^1 axdx = \left(-a\frac{x^3}{3} + a\frac{x^2}{2}\right)|_0^1$
substituindo os extremos temos que $P(AC) = \frac{a}{6}$
temos que $P(AC) = \frac{a}{6}$ e $P(A) = a$ e $P(C) = \frac{1}{6}$ daí temos que $P(AC) = \frac{a}{6}$
e $P(A) = a$ e $P(C) = \frac{1}{6}$
com isso concluimos que $P(AC) = P(A)P(C)$.
Logo A e C são independentes.
Agora

$$\begin{aligned} P(BC) &= [\varphi_B\varphi_C] = \int_0^1 \varphi_B(x)\varphi_C(x) f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 (-x+1)(-x^2+x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\,dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)|_0^1 \end{aligned}$$

substituindo os extremos temos que $P(BC) = \frac{1}{12}$ visto que $P(B) = \frac{1}{2}$ e $P(C) = \frac{1}{6}$.
Assim $P(BC) = P(B)P(C)$.
Logo B e C sao independentes. $\square$

Exercício 7.8 Mostre que se X e Y assumem apenas os valores 0 ou 1, então X e Y são não correlacionadas se, e somente se, forem independentes.

Demonstração. Sejam X e Y não correlacionadas, isto é,

$$E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

Temos

$$E(X) = \sum_i x_i P[X = x_i] = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) = P(X = 1) \text{ e}$$

$$E(Y) = \sum_i y_i P[Y = y_i] = 0.P(Y = 0) + 1.P(Y = 1) = P(Y = 1).$$

Assim, $E(XY) = 0.P(XY = 0) + 1.P(XY = 1)$, por outro lado, $E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, então
$E(XY) = E(X)E(Y) = P(X = 1)P(Y = 1) = P(XY = 1)$.

Reciprocamente, se X e Y são independentes, $E(XY) = E(X)E(Y)$ e portanto, $E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, isto é, são não correlacionadas. □

Exercício 7.9 Suponha que tanto X como Y assumam os valores $-1, 0, 1$ com probabilidades

$$P_X(-1) = P_Y(-1) = P_X(1) = P_Y(1) = \frac{2}{5} \qquad P_X(0) = P_Y(0) = \frac{1}{5}.$$

Mostre que X e Y são não correlacionados ($\rho = 0$). Porém não são independentes.

Demonstração. Observe inicialmente que $XY = \{-1, 0, 1\}$. Temos assim:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= -1P(XY = -1) + 0P(XY = 0) + 1P(XY = 1) \\
&= P(XY = 1) - P(XY = -1) \\
E(X) &= -1P(X = -1) + 0P(X = 0) + 1P(X = 1) \\
&= P(X = 1) - P(X = -1) = \tfrac{2}{5} - \tfrac{2}{5} = 0 \\
E(Y) &= -1P(Y = -1) + 0P(Y = 0) + 1P(Y = 1) \\
&= P(Y = 1) - P(Y = -1) = \tfrac{2}{5} - \tfrac{2}{5} = 0.
\end{aligned}$$

Assim, para que X e Y sejam não correlacionados, basta que $P(XY = 1) = P(XY = -1)$ (e daí, $E(XY) = 0 = E(X)E(Y)$). Vamos então definir $P_{XY}(-1) = P_{XY}(1) = \frac{2}{5}$ e $P_{XY}(0) = \frac{1}{5}$. Dessa forma temos $P(XY) \neq P(X)P(Y)$ e X, Y não são independentes. □

Exercício 7.10 Verifique que se X e Y tem distribuições normais, então X e Y são não correlacionadas se, e somente se, forem independentes.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como X e Y tem distribuições normais, temos as seguintes funções de distribuição de probabilidades:
Marginais:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right\}$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right\}$$

Conjunta bivariada:

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right\}$$

Se X e Y são não correlacionadas, $cov(X,Y) = 0 \Rightarrow \rho = 0$, então a distribuição conjunta é:

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right\} = F_X(x)F_Y(y).$$

Portanto X e Y são independentes.

($\Leftarrow$) X e Y são independentes, então: $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$. Quero mostrar que

$$\rho_{xy} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y} = 0,$$

então basta mostrar que $cov(X,Y) = 0$.

$$\frac{cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{E(X-\mu_x)(Y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{E(X,Y) - E(X)E(Y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$E(XY) = \iint xy \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right\} dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \frac{x}{\sigma_x} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right\} dx \int \frac{y}{\sigma_y} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right\} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x \frac{1}{\sigma_x} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right\} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int y \frac{1}{\sigma_y} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right\} dy$$

$$= E(X)E(Y)$$

Desta forma, temos $E(XY) = E(X)E(Y)$, ou seja,

$$cov(X,Y) = E(X)E(Y) - E(X,Y) = 0.$$

Portanto X e Y são não correlacionadas. □

Exercício 7.11 Prove que

a) $P(A \cap B) \geq P(AB)$;

b) $P(A|B) = 0$, se A e B forem mutualmente exclusivos, isto é, $A \cup B = \phi$.

Demonstração. a) $P(AB) = E(\varphi_{AB}(x)) = \displaystyle\int \varphi_A(x)\varphi_B(x)f(x)dx$. Notemos que $\varphi_A(x)\varphi_B(x) \leq \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$, sendo

$$0 \leq \varphi_A(x), \varphi_B(x \leq 1).$$

Assim suponhamos $\varphi_A(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$, logo $P(AB) = \displaystyle\int \varphi_A(x)\varphi_B(x)f(x)dx \leq \int \varphi_A(x)f(x)dx = E(\varphi_{A\cap B}(x)) = P(A\cap B)$. Análogo para o outro caso.

b) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\phi)}{P(B)} = \dfrac{0}{P(B)} = 0.$

$\square$

Exercício 7.12 Considere $X \sim U[0,2]$ e o número fuzzy triangular $(0;0;\delta)$, com
$0 < \delta \leq 2$. Pede-se:

a) δ de modo que $P(A)$ seja máxima;

b) $s > 0$ de forma que $P(A^*)$ seja máxima, onde $A^* = A^s$ e A é o conjunto fuzzy encontrado no item a);

c) $Var(\varphi_A)$ e $Var(\varphi_{A^*})$

Demonstração. a) O número fuzzy triangular $A = (0;0;\delta)$ possui função de pertinência

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\delta}x + 1, & \text{se } 0 < x \leq \delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Por sua vez, a função de densidade de probabilidade $f(x)$ associada à distribuiçao Uniforme $U[0,2]$ é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Assim, usando a Definição 7.13, tem-se que

$$\begin{aligned} P(A) = E(\varphi_A) &= \int_0^\delta \varphi_A(x)f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\delta \left(-\frac{1}{\delta}x + 1\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\delta}{4}, \end{aligned}$$

onde usou-se o fato de que $0 < \delta \leq 2$.

Portanto, o δ que maximiza $P(A)$ é dado por

$$\delta_{max} = \underset{0<\delta\leq 2}{\operatorname{argmax}} \left\{ \frac{\delta}{4} \right\} = 2.$$

b) Para $P(A^s)$, onde $A = (0;0;2)$ pelo item anterior, tem-se que

$$\begin{aligned} P(A^s) &= E(\varphi_{A^s}) = E\left[(\varphi_A)^s\right] \\ &= \int_0^2 [\varphi_A(x)]^s f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(-\frac{x}{2}+1\right)^s \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P(A^*)_{max} = \underset{s>0}{\operatorname{argmax}} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = 1.$$

c) Da expressão para a variância de uma função de pertinência, tem-se que

$$\begin{aligned} Var(\varphi_A) &= E(\varphi_A^2) - [E(\varphi_A)]^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(-\frac{x}{2}+1\right)^2 \mathrm{d}x - \left[\frac{1}{2}\int_0^2 \left(-\frac{x}{2}+1\right) \mathrm{d}x\right]^2 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Considerando A^* como um evento obtido por algum modificador fuzzy e, como feito no capítulo 7, assumindo que esse modificador seja do tipo potência, pode-se calcular $Var(\varphi_{A^*})$ de maneira análoga ao que foi feito para $Var(\varphi_A)$:

$$\begin{aligned} Var(\varphi_{A^*}) &= E(\varphi_{A^*}^2) - [E(\varphi_{A^*})]^2 \\ &= E(\varphi_A^{2s}) - [E(\varphi_A^s)]^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(-\frac{x}{2}+1\right)^{2s} \mathrm{d}x - \left[\frac{1}{2}\int_0^2 \left(-\frac{x}{2}+1\right)^s \mathrm{d}x\right]^2 \\ &= \frac{1}{2s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}. \end{aligned}$$

Observa-se que, para $s = 1$, recupera-se o valor calculado anteriormente

$$Var(\varphi_A) = \frac{1}{12}.$$

$\square$

Exercício 7.13 Considere o número fuzzy triangular $(0; 0; 2)$ e X uma variável aleatória triangular cuja densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2}(\theta - |x-1|), & se\ \ x \in [1-\theta, 1+\theta] \\ 0, & se\ \ x \notin [1-\theta, 1+\theta] \end{cases}$$

Pede-se:

a) $\theta > 0$ de modo que $P(A)$ seja máxima;

b) Representar graficamente a densidade encontrada no item anterior.

Demonstração. a) Sabemos que

$$P(A) = E(\varphi_A) = E(\varphi_A(X)) = \int_{suppA} \varphi_A(x) f(x) dx,$$

portanto

$$P(A) = \int_0^2 \varphi_A(x) f(x) dx.$$

Se $\theta \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{\theta^2}\left[\int_{1-\theta}^{1} (\theta - 1 + x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) dx + \int_1^{1+\theta} (\theta + 1 - x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) dx\right] \\ &= \frac{1}{2\theta^2}\left\{4\theta^2 + \frac{7}{3} - 2(1+\theta^2) - \frac{1}{6}[(1+\theta^3) - (1-\theta^3)]\right\} \\ &= \frac{11}{12} - \frac{5}{12\theta^2}. \end{aligned}$$

Se $\theta > 1$

$$P(A) = \frac{1}{\theta^2}\left[\int_0^1 (\theta - 1 + x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) dx + \int_1^2 (\theta + 1 - x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) dx\right] = \frac{-1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta}$$

das duas expressões acima, vimos que o máximo é atingido quando $\theta = 1$.

Portanto o máximo de $P(A)$ é $\frac{1}{2}$.

$\square$