A origem das equações diferenciais ordinárias em duas variáveis. Interpretação geométrica.

1. O objetivo desta primeira parte é explicar o que se entende por uma equação diferencial ordinária em duas variáveis e mostrar como obter uma equação diferencial a partir de sua *primitiva completa.* Na segunda parte vamos mostrar como equações diferenciais ordinárias em duas variáveis podem ser interpretadas geometricamente. Este texto é uma tradução, livre e adaptada, do capítulo 1 do livro: *Ordinary Differential Equations,an elementary text-book, with an introduction to the Lie´s Theory of the group of one parameter,* escrito por James Morris Page, MacMillan and CO., Limited, 1897, London.

Parte 1.

Primitiva completa. Ordem e grau de uma Equação Diferencial Ordinária

2. Uma equação da forma

$$w\,(x, y) = 0 \qquad 1 \tag{1}$$

é comumente usada para expressar, na linguagem algébrica, o fato que uma das duas variáveis x e y é uma função da outra. Se esta equação ainda contiver uma constante arbitrária c , sua presença é indicada escrevendo a equação na forma

$$w\,(x, y, c) = 0 \qquad 1' \tag{2}$$

Ao diferenciar $(1\ ')$ obtemos

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy = 0 \quad 2 \tag{3}$$

e a constante c pode ter sido removida no processo de diferenciação. Se, entretanto (2) ainda contiver c , ela ainda pode ser eliminada usando a equação $(1\ ')$; de modo que obtemos, ou imediatamente após a diferenciação ou após a eliminação, uma equação envolvendo apenas x , y e $dydx$ na seguinte forma geral

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad 3 \tag{4}$$

Se fizermos uso, como costuma acontecer, das tradicionais abreviações e notações

$$y' \equiv \frac{dy}{dx}, y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2}, ..., y^{(n)} \equiv \frac{d^ny}{dx^n},$$

a última equação pode ser escrita na forma

$$F\left(x,y,y'\right)=0 \qquad 3 \tag{5}$$

e (3) é chamada de *uma equação diferencial ordinária de primeira ordem em duas variáveis.*

3. Se a equação (1) contiver duas constantes arbitrárias independentes, de modo que possa ser escrita na forma

$$w\left(x,y,c,d\right)=0 \qquad (cedconstantes) \quad ;1" \tag{6}$$

duas diferenciações sucessivas de $(1\ '')$ irão dar uma equação contendo y'', da qual, através de $(1\ '')$ e da equação obtida de $(1\ '')$ pela primeira diferenciação, ambas constantes arbitrárias, c e d , se ainda permanecerem presentes, poderão ser eliminadas. Obteremos dessa maneira uma equação na forma geral

$$F\left(x,y,y',y''\right)=0 \qquad 4 \tag{7}$$

que é chamada *uma equação diferencial ordinária de segunda ordem em duas variáveis.*

4. As equações $(1\ ')$ e $(1\ '')$, a partir das quais as equações diferenciais (3) e (4) são obtidas, são chamadas *primitivas completas* de (3) e (4), respectivamente. É claro que se (1) contivesse *três* constantes independentes arbitrárias, ela iria dar origem a uma equação diferencial de *terceira* ordem; e, em geral, vemos que a *ordem* de uma equação diferencial, que é definida como sendo igual à mais alta derivada que aparece na equação, é igual ao número de constantes independentes arbitrárias na primitiva completa.Assim, se a primitiva completa contém n constantes arbitrárias independentes, ela dará origem a uma equação diferencial de ordem n.

O *grau* de uma equação diferencial é o mesmo grau (ou potência) da derivada de mais alta ordem que aparece na equação após ela ter sido colocada na forma de polinômio. dessa forma a equação

$$\left((y')^2+1\right)^4=(y'')^3$$

é de segunda ordem e de grau três.

A partir do que foi dito acima,vê-se que,*para encontrar a equação diferencial de ordem n correspondente à uma primitiva que contém n constantes arbitrárias independentes, é preciso diferenciar essa primitiva sucessivamente n vezes e eliminar, entre as $n+1$ equações assim obtidas, as n constantes arbitrárias.*

A equação resultante será a equação diferencial de ordem n desejada.

5. O processo inverso, usualmente envolvendo uma ou mais integrações, para encontrar a primitiva completa partindo da equação diferencial é chamado de *resolver,* ou *integrar,*a equação diferencial,e as constantes arbitrárias que, no caso acima estavam fadadas ao desaparecimento por diferenciação ou eliminação, agora reaparecem como constantes de integração.Quando a equação assim obtida contiver exatamente n constantes arbitrárias independentes, ela é chamada *a integral geral* , ou *a primitiva completa* ou, em linguagem atual, *a solução geral* da equação diferencial de ordem n. Assim, se

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \qquad 5 \tag{8}$$

for uma equação diferencial de ordem n, sua solução geral será uma equação da forma

$$w\left(x, y, c_1, ..., c_n\right) = 0 \qquad 6 \tag{9}$$

onde c_1, c_2, ..., c_n são constantes arbitrárias independentes.

Nota-se que usualmente nos referimos a (6) como sendo a *integral geral* ou *solução geral* de (5) quando (6) é considerada como sendo obtida de (5); se , entretanto, (5) for considerada como tendo sido obtida de (6), nos referimos a (6) como a primitiva completa, ou solução geral, de (5).

Fica evidente, pelo método descrito acima de como obter a *primitiva geral* a partir de sua equação diferencial ordinária de ordem n correspondente, que a solução geral não pode conter mais do que n constantes arbitrárias independentes, pois a solução geral, sendo considerada como uma primitiva completa, daria origem à uma equação diferencial de ordem maior do que n.

6. Se um valor numérico específico for dado à cada uma das constantes arbitrárias de uma solução geral de uma dada equação diferencial, a equação resultante será chamada de *uma solução particular* ,ou *integral particular*, da equação diferencial dada. Dessa forma a solução particular é livre de todas as constantes arbitrárias de integração.Por exemplo, se a integral geral for da forma

$$y - mx - n = 0$$

então as equações

$$\begin{aligned} y - 2x - 7 &= 0 \\ y - 5x - 17 &= 0, etc... \end{aligned}$$

serão soluções particulares da equação diferencial dada.

7. Vamos agora aplicar a dois exemplos o método de encontrar a equação diferencial correspondente a uma primitiva completa dada.

Exemplo 1. Queremos encontrar a equação diferencial de primeira ordem correspondente à primitiva completa

$$y - cx = 0 \qquad\qquad 7 \tag{10}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Solução: Por diferenciação obtemos

$$dy - cdx = 0$$

ou

$$c = \frac{dy}{dx}$$

Assim, resolvendo a primeira equação em c e substituindo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad 8 \tag{11}$$

Esta é a equaçãodiferencial desejada.Se considerarmos (8) como dada, e (7) como tendo sido obtida de (8) por métodos que veremos mais adiante, (7) será chamada a integral, ou solução,geral de (8). Associando diferentes valores numéricos à constante c em (7), obteremos soluções particulares distintas para a dada equação diferencial.

Exemplo 2. Queremos encontrar a equação diferencial de segunda ordem correspondente à primitiva completa

$$x^2 + 2ax + y^2 + 2by = 0$$

Após duas diferenciações sucessivas obtemos as equações

$$\begin{aligned} x + a + yy' + by' &= 0 \\ 1 + (y')^2 + yy'' + by'' &= 0 \end{aligned}$$

Eliminando a e b dessas três equações, obtemos a equação diferencial desejada

$$\left(x^2 + y^2\right) y'' - 2x(y')^3 + 2y(y')^2 - 2xy' + 2y = 0$$

8. Como acabamos de ver, passar de uma primitiva completa para a equação diferencial correspondente envolve meramente processos de diferenciação e eliminação; mas como as etapas de eliminação não podem ser recuperadas, o grau de dificuldade de se passar da equação diferencial para a primitiva completa ou sua solução, se isso for possível, é muito maior. O objetivo dessas notas será mostrar como, em um número de casos importantes mais simples,podemos, a partir de uma equação diferencial, obter ou deduzir sua solução geral.

Parte 2

Interpretação Geométrica de uma Equação Diferencial Ordinária em Duas Variáveis.

9. Se uma equação diferencial ordinária de primeira ordem em x e y ,

$$F\left(x, y, y'\right) = 09 \tag{12}$$

puder ser escrita na forma resolvida

$$y' = \frac{Y\,(x,y)}{X(x,y)}10 \tag{13}$$

onde supomos X e Y sendo funções a valores reais,é claro que, a cada par de valores atribuidos a x e a y irá corresponder um único valor fixado para y'.

Se considerarmos x e y como sendo as coordenadas retangulares de um ponto no plano, y' irá representar o valor numérico da tangente do ângulo formado por uma reta passando pelo ponto (x, y) com o eixo dos x . Suponha agora que o ponto (x, y) mova uma pequena distância na direção determinada por y' ; na nova posição do ponto, y' irá ter, em geral, um novo valor. Suponha agora que o ponto (x, y) mova uma pequena distância na direção agora determinada pelo novo y' ; nessa terceira posição do ponto, teremos, em geral, um terceiro valor associado a y'; podemos agora supor agora que o ponto (x, y) se mova uma pequena distância na nova direção e assim por diante. Desse modo fica traçada uma figura na qual o limite, quando as distâncias em que o ponto (x, y) é movido são indefinidamente diminuidas,é algum tipo de curva. Em qualquer ponto dessa curva a equação

$$y' = \frac{Y}{X}10 \tag{14}$$

é satisfeita; ou seja, se

$$w\,(x,y) = 011 \tag{15}$$

for a equação dessa curva, a equação $w = 0$ será, necessariamente,uma integral particular da equação (10), ou da equação equivalente (9).

A curva traçada por um ponto se movendo sob as restrições impostas acima é chamada de uma *curva integral* da equação diferencial ordinária (9). Se começarmos em um outro ponto (x, y) que não pertence à curva (11), é evidente pelo processo acima descrito, teremos uma nova curva integral. Poderíamos, por exemplo, tomar como sucessivos pontos de partida, pontos sobre o eixo dos x,(desde que esses pontos não sejam, eles mesmos, curvas integrais) e é evidente que, no total, ∞^1 curvas integrais distintas seriam obtidas. Essas curvas podem ser representadas por uma equação na forma geral

$$w\,(x,y,c) = 012 \tag{16}$$

onde c é uma constante arbitrária, ou *parâmetro*,que assume valores numéricos distintos, de acordo como (12) foi elaborada para representar as diferentes curvas integrais individuais dentre o sistema de curvas integrais pertencendo à equação (9). Resumindo: (12) é a solução geral de (9).

Exemplo: A equação diferencial de primeira ordem

$$xdy - ydx = 0$$

ou, supondo $x \neq 0$,

$$y' = \frac{y}{x}13 \tag{17}$$

representa um sistema de ∞^1 retas passando pela origem, pois yx é o valor numérico da tangente do ângulo formado pelo eixo x e pela reta unindo o ponto (x, y) à origem e como y' fornece a direção na qual o ponto (x, y) deve ser movido, a equação (13) determina que o ponto (x, y) sempre se move sobre a semi-reta unindo o ponto à origem. Como cada ponto do plano move sobre sobre uma semi-reta de um sistema de semi-retas passando pela origem, a equação (13) representa a família de ∞^1semi-retas

$$yx = c14 \tag{18}$$

c sendo o parâmetro arbitrário. Dessa forma (14) é a solução geral de (13); e as soluções particulares são obtidas atribuindo-se diferentes valores numéricos à c.

10. Uma vez que a primitiva completa, ou aintegral geral ou ainda a solução geral, de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem deve conter *duas* constantes arbitrárias, ou parâmetros, independentes,é claro que sua solução geral, ou como se usa dizer, a equação diferencial de segunda ordem, por si, representa, geometricamente, um sistema duplamente infinito, ∞^2, de curvas no plano.De modo análogo, uma equyação diferencial de terceira ordem representa um sistema triplamente infinito, ∞^3, de curvas no plano, etc...

Exemplo. A equação diferencial de segunda ordem ordem

$$y'' = 015 \tag{19}$$

significa que a curvatura do caminho, ou trajetória, ao longo do qual o ponto (x, y) deverá ser movido é, em toda parte, zero.Desse modo o ponto (x, y) deve sempre descrever uma linha reta, isto é, a família duplamente infinita de curvas que satisfazem a equação diferencial acima deve ser as ∞^2 retas do plano

$$y - mx - n = 0.16 \tag{20}$$

Pode-se verificar, imediatamente que (16) é a solução geral de (15).

Exercícios.

Considerando a , b e c constantes arbitrárias independentes, determine as equações diferenciais para as quais as expressões abaixo são as primitivas completas.

$$\begin{aligned}
1.)y &= cx \\
2.)y &= cx + \sqrt{1 + c^2} \\
3.)cx^2 &= (1 + x)^2 (1 + y)^2 \\
4.)y^2 &= cx - c^2 \\
5.)y &= ax^2 + bx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
6.)y &= c\cos(mx+b) \\
7.)y &= cx^3 + \frac{b}{x}
\end{aligned}
$$

8.) Construa a equação diferencial de todas as ∞^1 circunferências tendo seus raios iguais a r:

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$

9.) Construa a equação diferencial de todas as circunferências tendo seus raios iguais a r .