1

a) $x^2 y' - 3y = 2e^{1/x}, \ x > 0 \Rightarrow y' - \frac{3}{x^2} y = \frac{2e^{1/x}}{x^2}$

Fator integrante: $\mu(x) = e^{\int -\frac{3}{x^2} dx} = e^{3/x}$ 0.2

multiplicando por $\mu(x)$ e integrando

$$(e^{3/x} y)' = \frac{2e^{1/x} \cdot e^{3/x}}{x^2} = \frac{2e^{4/x}}{x^2} \quad 0.2$$

$$\Rightarrow e^{3/x} y = 2 \int \frac{e^{4/x}}{x^2} dx \qquad u = \frac{4}{x} \Rightarrow du = -\frac{4}{x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^{4/x} \left(-\frac{4}{x^2}\right) dx \qquad 0.3$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{4/x} + C$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} e^{\frac{4}{x} - \frac{3}{x}} + ce^{-3/x} = -\frac{1}{2} e^{1/x} + ce^{-3/x} \quad 0.3$$

Logo, a solução geral é:

$$y(x) = -\frac{1}{2} e^{1/x} + ce^{-3/x}$$

b) $y(1)=0 \iff 0 = -\frac{1}{2}e + ce^{-3}$

$\iff ce^{-3} = \frac{1}{2}e$.

$\iff c = \frac{e^4}{2}$. $\quad 0.2$

Assim,

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{1/x} + \frac{1}{2}e^{4-\frac{3}{x}}$$

é a solução do PVI.

c) Como temos explicitamente a solução e foi dado inicialmente que $x>0$, o domínio da solução deve ser

$$D = \{x \in \mathbb{R};\ x>0\}.$$ 0.3

<u>OBS</u>: O intervalo $(-\infty, 0)$ não deve ser incluído porque inicialmente foi dado que $x>0$.

Uma outra forma de argumentar é pelo fato de que as funções

$$p(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{2e^{1/x}}{x^2}$$

são contínuas para $x>0$. Sendo a eq. linear, a solução deve existir em todo o intervalo $I=(0,\infty)$.

② solução:

. Note que $N = 2xy^2 + y^3$ e $M = 2y^3 + xy^2$, e

$N_x = 2y^2$ e $M_y = 6y^2 + 2xy$.

Logo $N_x \neq M_y \Rightarrow$ a equação não é exata (0,2)

. Mas

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-4y^2 - 2xy}{2y^3 + xy^2} = \frac{-2}{y}$$ → depende somente de y , (0,2)

de onde segue que existe um fator integrante que depende somente de y tal que

$$\frac{d\mu}{dy} = -\frac{2}{y}\,\mu(y)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(y) = e^{-2\cdot \ln y} = y^{-2}$$ (0,3)

. Multiplicando a equação por $\mu(y)$ obtemos

$$\underbrace{(2y + x)}_{M}dx + \underbrace{(2x + y)}_{N}dy = 0$$

que é exata pois neste caso (0,3)

$$N_x = 2 = M_y.$$

Assim, existe uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{d\psi}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(x,y) = C$$ e

$M = \psi_x$, $N = \psi_y$.

Logo, $$\psi(x,y) = \int M\,dx + g(y)$$ (0,4)

$$= 2xy + \frac{x^2}{2} + g(y)$$

e $\psi_y = N \Rightarrow 2x + g'(y) = 2x + y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + C_1$

Assim, $\psi(x,y) = 2xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C_1$ (0,4)

→

de onde segue que a solução y da eq satisfaz

$$2xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \qquad (0,2).$$

Questão 3 item 1

$x^2y'' + 4xy' + 2y = \operatorname{sen} x$

1º) $y = x^r \Rightarrow y' = r x^{r-1}$; $y'' = r(r-1)x^{r-2}$

$x^2y'' + 4xy' + 2y = x^r\left(r(r-1) + 4r + 2\right) = 0$; $x \neq 0$

$\Rightarrow r^2 + 3r + 2 = 0$, Polinômio Característico Para equação homogênea.

- ou (outra maneira)

$h = \ln x \Rightarrow y_h = y(h(x))$, onde $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ é equivalente a $ay_h'' + (a-b)y_h' + cy_h = 0$

$y_h'' + (4-1)y_h' + 2y_h = 0$, Logo

$y_h'' + 3y_h' + 2y_h = 0 \Rightarrow s^2 + 3s + 2 = 0$

Até aqui 0,5 ponto no item 1

$r = \dfrac{-3 \pm (9-8)^{\frac{1}{2}}}{2} < \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = c_1 x^{-1} \\ y_2 = c_2 x^{-2} \end{matrix} \Rightarrow y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2}$

- ou (outra maneira)

$s = \dfrac{-3 \pm (9-8)^{\frac{1}{2}}}{2} < \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_h^{(1)} = c_1 e^{-h} \\ y_h^{(2)} = c_2 e^{-2h} \end{matrix}$; $h = \ln x \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = c_1 x^{-1} \\ y_2 = c_2 x^{-2} \end{matrix}$

$y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2}$

aqui ganharia os 0,5 restante da questão 1

2°) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = \operatorname{Sen} x$

$x \neq 0$

$$y'' + \frac{4}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = \frac{\operatorname{Sen} x}{x^2} = g(x)$$

$$y_1 = x^{-1}$$

$$y_2 = x^{-2}$$

$$y_p = y_1 u_1 + y_2 u_1$$

e

$$\begin{bmatrix} x^{-1} & x^{-2} \\ -x^{-2} & -2x^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\operatorname{Sen} x}{x^2} \end{bmatrix}$$

até aqui ganhou 0,2 pontos na item 2

$$W = -2x^{-4} + x^{-4} = -x^{-4}$$

CRAMER

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ g(x) & -2x^{-3} \end{vmatrix}}{W} = \frac{-\frac{\operatorname{Sen} x}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^4}} = \operatorname{Sen} x \Rightarrow u_1' = \operatorname{Sen} x$$

$\Rightarrow u_1 = -\cos x$, achou u_1 ganhou 0,5 pontos

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^{-1} & 0 \\ -x^{-2} & g(x) \end{vmatrix}}{W} = \frac{\frac{\operatorname{Sen} x}{x^2} \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^4}} = -x \operatorname{Sen} x \Rightarrow u_2' = -x \operatorname{Sen} x$$

$\Rightarrow u_2 = x \cos x - \operatorname{Sen} x$, achou u_2 ganhou 0,5 ponto

Logo,

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = -\cos x \cdot \frac{1}{x} + (x \cos x - \operatorname{Sen} x)\frac{1}{x^2} = \frac{-\operatorname{Sen} x}{x^2}$$

Escreveu isso ganhou 0,3 pontos.

Questão 4.

Eq. caract. $(r^2+1)^2(r^2-4)=0$

tem raízes

$r=\pm i$ mult 2 $\leftarrow$ (0.1)

$r=\pm 2$ $\leftarrow$ (0.1)

$$y_c = \underbrace{(c_1+c_2x)\cos x}_{(0.2)} + \underbrace{(c_3+c_4x)\operatorname{sen} x}_{(0.2)}$$

$$+ \underbrace{c_5e^{2x}}_{0.2} + \underbrace{c_6e^{-2x}}_{0.2}$$

$$y_p = x^s\left((A+Bx)\cos x + (C+Dx)\operatorname{sen} x\right] \leftarrow (0.2)$$

$$+ x^{\bar{s}}\left[Ee^{2x}\right] \leftarrow (0.2)$$

$s=2$ (0.3)

$\bar{s}=1$ (0.3)

p/ evitar duplicação c/ termos em y_c

Questão 5

$yy'' + (y')^2 = 0$

$v(y(x)) = y'(x) \Rightarrow y''(x) = v'(y(x))\, y'(x) = v'v$] 0.5

$yv'v + v^2 = 0$

$yv' + v = 0$

$v' + \frac{1}{y} v = 0$] 0.5

direto ou

$e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$

$\frac{d}{dy}(yv) = 0 \Rightarrow yv = C$ 05

$\Rightarrow y \frac{dy}{dx} = C \Rightarrow \frac{y^2}{2} = Cx + D.$ 05

---- // ----

OU reconhecer que a eq. é:

$(yy')' = 0.$