1ª Prova de Cálculo I, sexta-feira, dia 23 de outubro de 2020

(Prova realizada online por meio de formulário em quatro versões, respostas indicadas para cada versão na cor azul, verde, vermelha e roxa)

1. Resolva a seguinte desigualdade. Indique o conjunto da solução.

$$\left|\frac{2x-3}{3x+4}\right| < 3 \qquad \left|\frac{2x-3}{3x+4}\right| > 3 \qquad \left|\frac{3x-2}{3x+4}\right| < 3 \qquad \left|\frac{3x-2}{3x+4}\right| > 3 \qquad (1.0)$$

Solução:
Os termos com módulo do lado esquerdo da desigualdade tem os seus zeros em $x = 3/2 \;\; 3/2 \;\; 2/3 \;\; 2/3$ e $x = -4/3$. Sendo assim, analisamos os três intervalos $(-\infty, -4/3)$, $(-4/3, 3/2 \;\; 3/2 \;\; 2/3 \;\; 2/3)$, e $[3/2 \;\; 3/2 \;\; 2/3 \;\; 2/3, \infty)$.

- $x \in (-\infty, -4/3)$: Neste caso, numerador e denominador da fração são negativos. Portanto, a fração é positiva, de modo que a desigualdade seja igual a

$$\frac{2x-3}{3x+4} < 3 \qquad \frac{2x-3}{3x+4} > 3 \qquad \frac{3x-2}{3x+4} < 3 \qquad \frac{3x-2}{3x+4} > 3$$

Como $3x + 4 < 0$, após multiplicação por este fator temos

$$2x-3 > 3(3x+4) \qquad 2x-3 < 3(3x+4) \qquad 3x-2 > 3(3x+4) \qquad 3x-2 < 3(3x+4)$$

Simplificando, obtemos

$$-7x > 15 \qquad -7x < 15 \qquad -6x > 14 \qquad -6x < 14$$

ou seja

$$x < -15/7 \qquad x > -15/7 \qquad x < -7/3 \qquad x > -7/3$$

Assim, temos neste intervalo a solução parcial

$$x \in (-\infty, -15/7) \qquad x \in (-15/7, -4/3) \qquad x \in (-\infty, -7/3) \qquad x \in (-7/3, -4/3)$$

- $x \in (-4/3, 3/2 \;\; 3/2 \;\; 2/3 \;\; 2/3)$: Neste caso, o denominador é positivo e o numerador é negativo, de modo que a desigualdade seja igual a

$$-\frac{2x-3}{3x+4} < 3 \qquad -\frac{2x-3}{3x+4} > 3 \qquad -\frac{3x-2}{3x+4} < 3 \qquad -\frac{3x-2}{3x+4} > 3$$

Como $3x + 4 > 0$, após multiplicação por este fator temos

$$-2x+3 < 3(3x+4) \qquad -2x+3 > 3(3x+4) \qquad -3x+2 < 3(3x+4) \qquad -3x+2 > 3(3x+4)$$

Simplificando, obtemos

$$-11x < 9 \qquad -11x > 9 \qquad -12x < 10 \qquad -12x > 10$$

ou seja

$$x > -9/11 \qquad x < -9/11 \qquad x > -5/6 \qquad x < -5/6$$

Assim, temos neste intervalo a solução parcial

$$x \in (-9/11, 3/2) \qquad x \in (-4/3, -9/11) \qquad x \in (-5/6, 2/3) \qquad x \in (-4/3, -5/6)$$

- $x \in [3/2\ \ 3/2\ \ 2/3\ \ 2/3, \infty)$: Neste caso, numerador e denominador são positivos, de modo que a desigualdade seja igual a

$$\frac{2x-3}{3x+4} < 3 \qquad \frac{2x-3}{3x+4} > 3 \qquad \frac{3x-2}{3x+4} < 3 \qquad \frac{3x-2}{3x+4} > 3$$

Como $3x+4>0$, após multiplicação por este fator temos

$$2x-3 < 3(3x+4) \qquad 2x-3 > 3(3x+4) \qquad 3x-2 < 3(3x+4) \qquad 3x-2 > 3(3x+4)$$

Simplificando, obtemos

$$-7x < 15 \qquad -7x > 15 \qquad -6x < 14 \qquad -6x > 14$$

ou seja

$$x > -15/7 \qquad x < -15/7 \qquad x > -7/3 \qquad x < -7/3$$

Assim, temos neste intervalo a solução parcial

$$x \in [3/2, \infty) \qquad x \in \emptyset \qquad x \in [2/3, \infty) \qquad x \in \emptyset$$

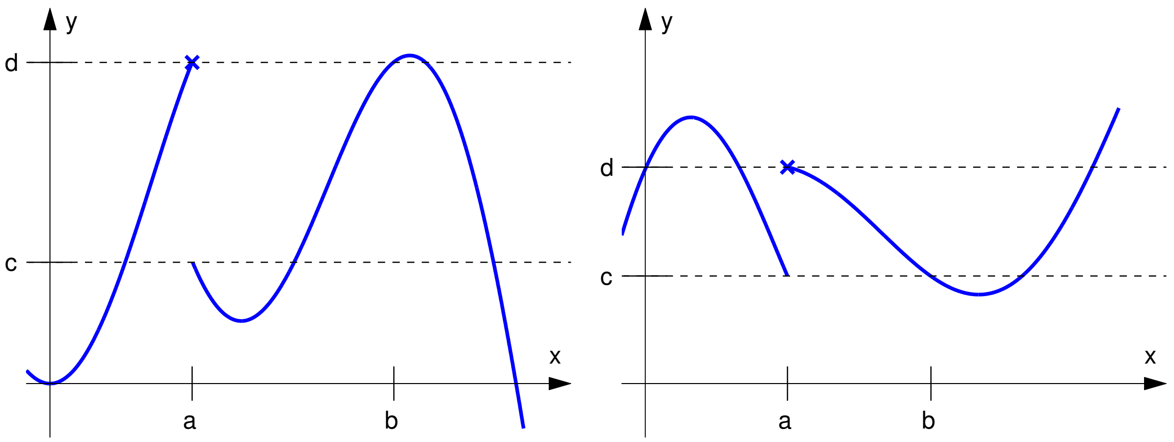
onde $\emptyset$ denota o conjunto vazio.

Unindo as soluções parciais, concluímos que a desigualdade é satisfeita para

$$x \in (-\infty, -15/7) \cup (-9/11, \infty) \qquad x \in (-15/7, -9/11) - \{-4/3\}$$
$$x \in (-\infty, -7/3) \cup (-5/6, \infty) \qquad x \in (-7/3, -5/6) - \{-4/3\}$$

2.
- **Se f for uma função definida em todo número de algum intervalo aberto $\mathbb{I}$, contendo a, exceto possivelmente no ponto a, então __existe o limite de $f(x)$__ quando x se aproxima de a, se para qualquer $\varepsilon > 0$, mesmo pequeno, existir um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-a| < \delta$.**
- **Se f for uma função definida em todo número de algum intervalo aberto $\mathbb{I}$, então __f é contínua__ em um ponto $x = a$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ sempre que $|x-a| < \delta$.**
- **Se f for uma função definida em todo número de algum intervalo aberto $\mathbb{I}$, então __$f(x)$ é crescente__ em $\mathbb{I}$, se $f(x_2) > f(x_1)$ sempre que $x_2 > x_1 \in \mathbb{I}$.**
- **Se f for uma função definida em todo número de algum intervalo aberto $\mathbb{I}$, então __$f(x)$ é decrescente__ em $\mathbb{I}$, se $f(x_2) < f(x_1)$ sempre que $x_2 > x_1 \in \mathbb{I}$.**
- **Se f for uma função definida em todo número de algum intervalo aberto $\mathbb{I}$, então __$f(x)$ é não decrescente__ em $\mathbb{I}$, se $f(x_2) \geq f(x_1)$ sempre que $x_2 > x_1 \in \mathbb{I}$.**

3. Sobre a função nessa figura, assinale todas as afirmações corretas.



☐ A função é contínua em a

☐ A função é contínua pela direita em a

☒ A função é contínua pela esquerda em a

☒ A função é contínua em b

☒ A função é contínua pela esquerda em b

☒ A função é contínua pela direita em b

☐ O limite em a é igual a c

☒ O limite pela direita em a é igual a c

☐ O limite pela esquerda em a é igual a c

☐ O limite em a é igual a d

☐ O limite em b é igual a c

☒ O limite pela direita em b é igual a d

☒ O limite pela esquerda em b é igual a d

☒ O limite em b é igual a d

☐ A função é contínua em a

☒ A função é contínua pela direita em a

☐ A função é contínua pela esquerda em a

☒ A função é contínua em b

☒ A função é contínua pela esquerda em b

☒ A função é contínua pela direita em b

☐ O limite em a é igual a c

☐ O limite pela direita em a é igual a c

☒ O limite pela esquerda em a é igual a c

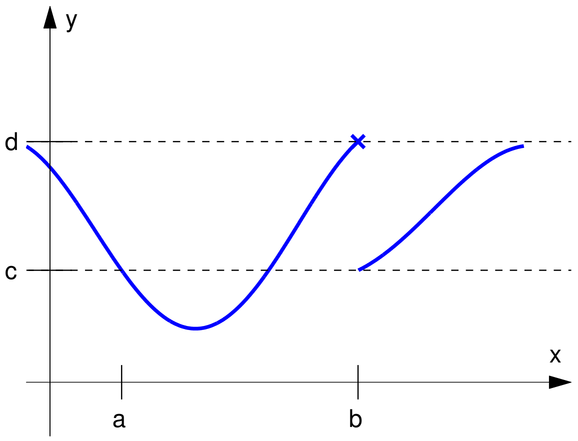
☐ O limite em a é igual a d

☒ O limite em b é igual a c

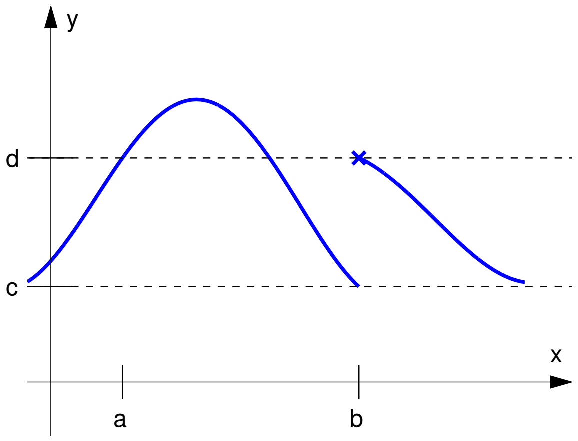
☐ O limite pela direita em b é igual a d

☐ O limite pela esquerda em b é igual a d

☐ O limite em b é igual a d



- ⊠ A função é contínua em a
- ⊠ A função é contínua pela direita em a
- ⊠ A função é contínua pela esquerda em a
- □ A função é contínua em b
- ⊠ A função é contínua pela esquerda em b
- □ A função é contínua pela direita em b
- ⊠ O limite em a é igual a c
- ⊠ O limite pela direita em a é igual a c
- ⊠ O limite pela esquerda em a é igual a c
- □ O limite em a é igual a d
- □ O limite em b é igual a c
- □ O limite pela direita em b é igual a d
- ⊠ O limite pela esquerda em b é igual a d
- □ O limite em b é igual a d



- ⊠ A função é contínua em a
- ⊠ A função é contínua pela direita em a
- ⊠ A função é contínua pela esquerda em a
- □ A função é contínua em b
- □ A função é contínua pela esquerda em b
- ⊠ A função é contínua pela direita em b
- □ O limite em a é igual a c
- □ O limite pela direita em a é igual a c
- □ O limite pela esquerda em a é igual a c
- ⊠ O limite em a é igual a d
- □ O limite em b é igual a c
- ⊠ O limite pela direita em b é igual a d
- □ O limite pela esquerda em b é igual a d
- □ O limite em b é igual a d

Valor da questão: 2.0 (20 pontos).
Chave de correção: 1 erro: 1.5, 2 erros: 1.2, 2 erros: 0.9, 4 erros: 0.5

4. Associe cada limite à resposta correta.

(a)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x+5}{x^2-2x+7} = \frac{9+6+5}{9-6+7} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-1} = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-6}{x^2+2x-3} = \text{“}\frac{9-6-6}{9-6-3}\text{”} = \text{“}\frac{-3}{0}\text{”}$$
não existe.

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x-1} = \frac{-3+3}{-3-1} = \frac{0}{-4} = 0$$

(b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin[2(x-2)]}{2-x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{-t/2} = -2\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}_{=1} = -2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{1-x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{-t} = -\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}_{=1} = -1$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin[2(x-3)]}{x-3} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t/2} = 2\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}_{=1} = 2$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\tan(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x-3}\,\frac{1}{\cos(x-3)} = \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}_{=1}\;\underbrace{\lim_{x\to 3}\frac{1}{\cos(x-3)}}_{=1} = 1$$

(c)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+3}{x^2+5x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-6/x+3/x^2}{1+5/x-1/x^2} = \frac{1-0+0}{1+0-0} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+3}{x^3+5x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x-6/x^2+3/x^3}{1+5/x^2-1/x^3} = \frac{0-0+0}{1+0-0} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+3}{-x^2+5x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-6/x+3/x^2}{-1+5/x-1/x^2} = \frac{1-0+0}{-1+0-0} = -1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-6x+3}{x^2+5x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-6/x+3/x^2}{1+5/x-1/x^2} = \frac{2-0+0}{1+0-0} = 2$$

(d)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \text{“}\frac{-1}{\sqrt{1-1}}\text{”} = \text{“}\frac{-1}{0}\text{”}$$
não existe.

$$\lim_{x\to -1}\ln(x+1) = \text{“}\ln(-1+1)\text{”} = \text{“}\ln(0)\text{”}$$
não existe.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)-x}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} = \frac{\ln(2-1)-2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0-2}{1} = -2$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\ln(x+2)-x}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} = \text{“}\frac{\ln(-1+2)-(-1)}{\sin\left(\frac{\pi}{-1}\right)}\text{”} = \text{“}\frac{0+1}{0}\text{”}$$
não existe.

(e)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x/x}{\sqrt{x^2-1}/x}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1-1/x^2}}\\
&=\frac{1}{-\sqrt{1-0}}\\
&=-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x/x}{\sqrt{x^2+1}/x}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+1/x^2}}\\
&=\frac{2}{-\sqrt{1+0}}\\
&=-2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{2/x}{\sqrt{x^2+1}/x}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{2/x}{-\sqrt{1+1/x^2}}\\
&=\frac{0}{-\sqrt{1+0}}\\
&=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x/x}{\sqrt{x^2+x}/x}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+1/x}}\\
&=\frac{1}{-\sqrt{1+0}}\\
&=-1
\end{aligned}$$

(f)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to\infty}+\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\to\infty}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1-1/x}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)/x}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1})/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{\sqrt{1+2/x}+\sqrt{1-1/x^2}}$$
$$=\frac{2+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x/x}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+2/x}+\sqrt{1-2/x}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=2$$

5. Determine os coeficientes a, b e c para que a função dada seja contínua em $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{3-x}}{x-2} & x < 2 \\ P & x = 2 \\ \dfrac{x^2 - cx + Q}{x^2 - 4x + 5} & x > 2 \end{cases}$$

com $P = 3, Q = 7$ $P = 2, Q = 2$ $P = 1, Q = -3$ $P = 4, Q = 2$.
Temos que ter os limites laterais iguais ao valor da função no ponto $x = 2$, i.e.,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = P$$

- Pela direita, temos

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - cx + Q}{x^2 - 4x + 5} = \frac{4 - 2c + Q}{4 - 8 + 5} = 4 - 2c + Q = P$$

o que fornece $c = \dfrac{P - Q - 4}{-2} = 2 + \dfrac{Q - P}{2} = 4 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 1$.

- Pela esquerda, temos $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{3-x}}{x-2}$
Como o denominador dessa fração tende a zero, o limite só pode existir se o numerador também tende a zero, i.e.,

$$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{ax+b} - \sqrt{3-x} = \sqrt{2a+b} - \sqrt{3-2} = \sqrt{2a+b} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 2a + b = 1$$

Com essa relação entre a e b, o limite pela esquerda fica

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{ax+1-2a} - \sqrt{3-x}}{x-2} \\
&= \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{a(x-2)+1} - \sqrt{3-x}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{a(x-2)+1} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{a(x-2)+1} + \sqrt{3-x}} \\
&= \lim_{x \to 2^-} \frac{[a(x-2)+1] - [3-x]}{(x-2)(\sqrt{a(x-2)+1} + \sqrt{3-x})} \\
&= \lim_{x \to 2^-} \frac{(a+1)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{a(x-2)+1} + \sqrt{3-x})} \\
&= \lim_{x \to 2^-} \frac{a+1}{\sqrt{a(x-2)+1} + \sqrt{3-x}} \\
&= \frac{a+1}{\sqrt{0+1} + \sqrt{3-2}} = \frac{a+1}{2} = P
\end{aligned}$$

o que fornece $a = 2P - 1 = 5 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 7$ e $b = 1 - 2a = -9 \;\; -5 \;\; -1 \;\; -13$.

Valor da questão: 2.4 (24 pontos).
Chave de correção: Cada valor de constante: 0.8 - relação correta entre a e b: 0.4

6. Verifique se a função do exercício anterior tem assíntotas horizontais. Assinale todas as respostas corretas.
   Devemos calcular os limites da função do exercício anterior quando $x \to \pm\infty$.

   - Para x tendendo a infinito, obtemos:

     $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - cx + Q}{x^2 - 4x + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - c/x + Q/x^2}{1 - 4/x + 5/x^2} = \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 1$$

     Portanto, a reta $y = 1$ é assintota horizontal da função quando x cresce ilimitadamente.

   - Para x tendendo a menos infinito, observamos que a expressão $ax + b$ dentro da primeira raíz será negativa, já que $a > 0$. Dessa forma, a função não é definida nos números reais para $x < -b/a$ e, portanto, não possui uma assíntota horizontal quando x decresce ilimitadamente.
     Porém, admitindo aproximação por números complexos, obtemos:

     $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{3-x}}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{ax+b} - \sqrt{3-x})/x}{(x-2)/x}$$
     $$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-(\sqrt{a/x + b/x^2} - \sqrt{3/x^2 - 1/x})}{1 - 2/x} = \frac{-(\sqrt{0+0} - \sqrt{0-0})}{1-0} = 0$$

     Sendo assim, no plano complexo, a reta $y = 0$ é assintota horizontal da função quando x decresce ilimitadamente. Essa resposta também foi aceita.