Cálculo I

Prof. Jörg Schleicher

26 de abril de 2024

DMA/IMECC/UNICAMP

Sumário

Capítulo 1

Apresentação

Começamos a aula de Cálculo I com uma breve revisão de alguns assuntos. Note que, mesmo conhecidos, pode ser que sejam apresentados alguns aspectos novos dos conceitos envolvidos.

1.1 Conceitos Básicos

1.1.1 Números

Iniciamos com os conjuntos de números a serem considerados nesta disciplina:

Números naturais: $1, 2, 3, 4, \ldots$. Conjunto: $\mathbb{N}$ (naturais)
(Obs: Aqui $\mathbb{N}$ não inclui o 0, $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$.
Notação alternativa presente na literatura: $\mathbb{N}$ inclui o 0, $\mathbb{N} - \{0\} = \mathbb{N}^*$)
Números inteiros: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Conjunto: $\mathbb{Z}$ (Zahlen, alemão: números)
Números racionais: $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \ldots, \frac{p}{q}$ com p e $q \in \mathbb{Z}$. Conjunto: $\mathbb{Q}$ (quociente).

$$\text{Obviamente } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Números reais: Conjunto $\mathbb{R}$ (reais)
Temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
O conjunto dos números reais tem como elementos os números racionais e os números irracionais. Quais são estes?

Observamos que
Decimais finitos: $0{,}2 = \frac{2}{10} \in \mathbb{Q}$, $\quad 0{,}278 = \frac{278}{1000} \in \mathbb{Q}$

$$0{,}234785203495245 = \frac{234785203495245}{1000000000000000}$$

Decimais periódicos: $0{,}6666\ldots = 0{,}\overline{6} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$; $\quad 0{,}2222\ldots = 0{,}\overline{2} = \frac{2}{9} \in \mathbb{Q}$

$$0{,}428571\,428571\,428571\ldots = 0{,}\overline{428571} = \frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$$

Prova: $a = 0{,}\overline{428571}$, portanto $1000000a = 428571{,}\overline{428571}$. Daí, $1000000a - a = 428571$, ou seja, $a = \dfrac{428571}{999999} = \dfrac{47619 \cdot \cancel{9}}{111111 \cdot \cancel{9}} = \dfrac{4329 \cdot \cancel{11}}{10101 \cdot \cancel{11}} = \dfrac{1443 \cdot \cancel{3}}{3367 \cdot \cancel{3}} = \dfrac{111 \cdot \cancel{13}}{259 \cdot \cancel{13}} = \dfrac{3 \cdot \cancel{37}}{7 \cdot \cancel{37}}$.

De modo geral, um número $a = 0{,}\overline{d_1 d_2 d_3 \ldots d_n}$ com período de n dígitos $d_1 d_2 d_3 \ldots d_n$ é racional, pois $10^n a - a = d_1 d_2 d_3 \ldots d_n$, o que implica que $a = \dfrac{d_1 d_2 d_3 \ldots d_n}{10^n - 1}$ que é racional.

Em outras palavras, todos os números com representação decimal finita ou periódica são números racionais. Entretanto, os números com representação decimal infinita e não periódica não são representáveis como $\dfrac{p}{q}$ com p e $q \in \mathbb{Z}$. Eles são os números irracionas que representam os demais números reais.

Exemplos: $\sqrt{3},\ \pi,\ e,\ 0{,}101001000100001\ldots,\ 6\sqrt{6},\ \dfrac{2\pi}{3},\ 5 + \sqrt{7},\ \dfrac{3}{4+e}$, etc.

Prova que $\sqrt{2}$ não é racional: Prova por absurdo: Se $\sqrt{2}$ fosse racional, teriam que existir dois números inteiros m e n tal que $\sqrt{2}$ fosse representado pela razão *irredutível* deles. Mas

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad \text{implica que} \qquad 2 = \frac{m^2}{n^2} \qquad \text{implica que} \qquad 2n^2 = m^2$$

o que implicaria que m^2, e portanto m, seria um número par, i.e., $m = 2k$, ou seja, $m^2 = 4k^2$. Substituindo isso na última relação, teríamos

$$2n^2 = 4k^2 \qquad \text{implica que} \qquad n^2 = 2k^2$$

o que implicaria que n^2, e portanto n, seria um número par. Portanto, a representação de $\sqrt{2}$ pela razão m/n só seria possível se ambos os números fossem pares que é uma contradição com a hipótese de que a razão seja irredutível. Portanto, $\sqrt{2}$ não pode ser racional.

Em Cálculo I, salvo dito expressamente o contrário, consideramos sempre todos os números reais.

1.1.2 Notação "implica"

Usamos o símbolo " $\Rightarrow$ " para denotar "implica"
Exemplo: Acaba de chover $\Rightarrow$ A grama está molhada

Note que a afirmação $A \Rightarrow B$, i.e., a veracidade do fato A implica a veracidade do fato B, tem como consequência $\not B \Rightarrow \not A$, i.e., a falsidade do fato B implica a falsidade do fato A, mas a veracidade de B não garante nada sobre a veracidade de A.

Exemplo: A grama está seca $\Rightarrow$ Não choveu

Mas a observação de que a grama esteja molhada, não implica se choveu ou não (pois pode ter sido molhada de outra forma).

Usamos o símbolo $\iff$ para representar "se e somente se", i.e., $A \iff B$ significa que $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$, i.e., denota uma relação de **equivalência** entre as duas afirmações A e B.

Exemplo: $2x + 4 = 0 \iff x = -2$

Neste caso, a veracidade de qualquer uma das afirmações implica na veracidade da outra, e a falsidade de qualquer uma das afirmações implica na falsidade da outra.

1.1.3 Notação "maior" e "menor"

Usamos a definição dos símbolos "maior (>)" e "menor (<)":
Definição: $a > b \iff a - b$ é positivo (e correspondentemente $a < b \iff b - a$ é positivo)
Definição: $a \geq b \iff a - b$ é não negativo (e $a \leq b \iff b - a$ é não negativo)

1.1.4 Intervalos

Definição: Um *intervalo* é um conjunto de todos os números reais entre dois números reais dados a, b (assumindo $a < b$). Se as pontas a e b do intervalo não fazem parte do mesmo, se chama intervalo aberto e é denotado por

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

Se os pontos a e b fazem parte do mesmo, se chama intervalo fechado e é denotado por

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Correspondentemente existem os intervalos semi-abertos à esquerda e à direita, respectivamente

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\} \quad \text{e} \quad [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

Observação: Alguns livros usam o colchete invertido para denotar uma ponta aberta de um intervalo. Nesse caso, o intervalo aberto seria denotado por $]a, b[$ e o semi-aberto à esquerda por $]a, b]$.

Usamos o eixo x para representar os números reais

Figura 1.1: Eixo x: Números positivos à direita de zero, números negativos à esquerda de zero.

Um dado valor x corresponde a um único lugar no eixo e vice-versa. Então um intervalo entre a e b pode ser desenhado conforme indicado nas Figuras 1.2 a 1.5.

1.1.5 Notação "infinito"

Usamos o símbolo ∞ (infinito) para representar o conceito de 'maior que qualquer número real' (dependendo do contexto, pode ser interessante deixar o sinal explícito e escrever $+\infty$), e $-\infty$ (menos infinito) para representar o conceito de 'menor que qualquer número real'. Deve-se ter o cuidado de não confundir esses símbolos com números reais!

Notação de intervalos envolvendo o símbolo ∞:
$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$ $\qquad$ $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$ $\qquad$ $(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Figura 1.2: Intervalo aberto

Figura 1.3: Intervalo fechado

Figura 1.4: Intervalo semi-aberto à esqueda

Figura 1.5: Intervalo semi-aberto à direita

Observação: Um intervalo é *fechado* do lado que envolve ∞ (porque não há um ponto externo ao intervalo)!

1.2 Valor absoluto ou módulo

1.2.1 Definição

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Portanto,} \quad |x| \geq 0 \quad \forall\, x$$

1.2.2 Propriedades

Algumas propriedades:

- $|x| \geq x$ pois $x = x$ (para $x \geq 0$) e $-x > x$ (para $x < 0$)
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|x|^2 = x^2$
- $|x| < a \iff -a < x < a$
  (grafado em \\\\\\ na Figura 1.6)
  $|x| > a \iff x > a$ ou $x < -a$
  (grafado em \\\\\\ na Figura 1.6)

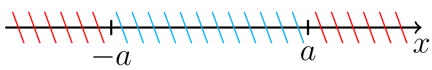


Figura 1.6: Módulo de x maior (\\\\\\) ou menor (\\\\\\) que a.

Observação: Acima, escrevemos "ou", porque x tem que satisfazer (pelo menos) uma das duas condições. Se escrevessemos "e", x teria que satisfazer as duas condições ao mesmo tempo (que, neste caso, seria impossível).

Assim, quando duas condições são conectadas com "ou", i.e., quando é suficiente satisfazer uma delas, o conjunto solução é a união dos conjuntos individuais. Já quando as duas condições são conectadas com "e", i.e., quando é necessário satisfazer as duas condições ao mesmo tempo, o conjunto solução é a interseção dos conjuntos individuais.

1.3 Desigualdades

Para podermos manipular relações de desigualdade, precisamos das seguintes propriedades.

1.3.1 Propriedades

$$
\begin{aligned}
a > b \quad \text{e} \quad b > c \quad &\Rightarrow \quad a > c && \text{(Prop. 1)}\\
a > b \quad &\Rightarrow \quad a + c > b + c \quad \forall\, c && \text{(Prop. 2)}\\
a > b \quad \text{e} \quad c > d \quad &\Rightarrow \quad a + c > b + d && \text{(Prop. 3)}\\
a > b \quad \text{e} \quad c > 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c && \text{(Prop. 4)}\\
a > b \quad \text{e} \quad c < 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c && \text{(Prop. 5)}\\
a > b > 0 \quad \text{e} \quad c > d > 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot d && \text{(Prop. 6)}
\end{aligned}
$$

Observação: Todas as propriedades acima "valem da esquerda para a direita", i.e., não são relações de equivalência. Dessa forma, não podemos usar o fato da direita para concluir sobre o fato da esquerda.

Exemplo 1. *Quais são os valores de x tal que $2 + 3x < 5x + 8$?*

$$
\begin{array}{rrcll}
 & 2 + 3x & < & 5x + 8 & \mid + (-2)\\
\overset{\text{(Prop. 2)}}{\Longrightarrow} & 3x & < & 5x + 6 & \mid + (-5x)\\
\overset{\text{(Prop. 2)}}{\Longrightarrow} & -2x & < & 6 & \mid \cdot (-\frac{1}{2})\\
\overset{\text{(Prop. 5)}}{\Longrightarrow} & x & > & -3 &
\end{array}
$$

Portanto $2 + 3x < 5x + 8 \Rightarrow x > -3$ mas para que todos os $x > -3$ sejam soluções da desigualdade, precisamos que $x > -3$ implique também $2 + 3x < 5x + 8$. Isso é verdade?

$$
\begin{array}{rrcll}
 & x & > & -3 & \mid \cdot (-2)\\
\overset{\text{(Prop. 5)}}{\Longrightarrow} & -2x & < & 6 & \mid + (5x)\\
\overset{\text{(Prop. 2)}}{\Longrightarrow} & 3x & < & 5x + 6 & \mid + (2)\\
\overset{\text{(Prop. 2)}}{\Longrightarrow} & 2 + 3x & < & 5x + 8 &
\end{array}
$$

Sim, porque todos os passos acima são reversíveis!

Portanto $x > -3 \Longleftrightarrow 2 + 3x < 5x + 8$ ou, em outras palavras, $2 + 3x < 5x + 8 \quad \forall\, x > -3$.

Sempre que fazemos contas com desigualdades temos que verificar se todos os passos são reversíveis! A reversibilidade da dedução é uma propriedade fundamental para a solução de desigualdades (e equações), uma vez que necessariamente queremos deduzir a propriedade de x que implica a veracidade da desigualdade, i.e., precisamos que $x \in \mathbb{V}$ (sendo $\mathbb{V}$ o conjunto solução do problema) implique que a relação original seja satisfeita.

As propriedades 2, 4 e 5 são reversíveis, pois para cada c existe outro que desfaz a manipulação.

Uma propriedade que não é reversível é a
Propriedade 3: $a > b$ e $c > d \Longrightarrow a + c > b + d$

Exemplo 2.

$$\begin{array}{rcll} a &=& 6 & \\ b &=& 4 & \\ a &>& b & ok \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcll} c &=& 8 & \\ d &=& 2 & \\ c &>& d & ok \end{array}$$

$$\Rightarrow a + c = 14 > b + d = 6 \quad \textbf{ok}$$

Mas:

Exemplo 3.

$$a + c > b + d \quad \text{e} \quad c > d \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad a > b$$

Vejamos:

$$\begin{array}{lrcll} \text{Seja} & a+c &=& 22 & \\ & b+d &=& 21 & \\ & a+c &>& b+d & ok \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lrcll} \text{Seja} & c &=& 20 & \\ & d &=& 5 & \\ & c &>& d & ok \end{array}$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} a &=& a + c - c = 22 - 20 = 2 \\ b &=& b + d - d = 21 - 5 = 16 \end{array}$$

a é maior que b? Não. Propriedade 3 não é reversível.

Se usarmos esta propriedade para a solução de uma desigualdade, não encontraremos o conjunto de solução correto, mais um conjunto maior: Veja o próximo exemplo:

Exemplo 4. $2 + 3x < 5x + 8$.

Sabemos que $-2 < 2$. Portanto, adicionando -2 ao lado esquerdo e 2 ao lado direito, obtemos

$$\begin{array}{lrcll} \overset{\text{(Prop. 3)}}{\Longrightarrow} & 2 + 3x + (-2) &<& 5x + 8 + 2 & \\ & 3x &<& 5x + 10 & \mid + (-5x) \\ \overset{\text{(Prop. 2)}}{\Longrightarrow} & -2x &<& 10 & \mid \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \overset{\text{(Prop. 5)}}{\Longrightarrow} & x &>& -5 & \end{array}$$

Portanto $2 + 3x < 5x + 8 \;\Rightarrow\; x > -5$.
Verdade? Sim, todos os valores x que satisfazem a desigualdade original (sabemos pela conta no Exemplo 1 que são todos $x > -3$) também satisfazem $x > -5$ (todos os números maiores que –3 obviamente também são maiores que –5). Mas não é a solução do problema, porque $x > -5$ não implica $2 + 3x < 5x + 8$. Por exemplo, para $x = -4$, temos $2 + 3(-4) = -10$

e $5(-4)+8=-12$; mas $-12<-10$. Se queremos exatamente os valores que satisfazem a desigualdade original, precisamos garantir que as contas sejam válidas em ambas as direções. Se necessitarmos um subconjunto de valores que satisfazem a desigualdade, mas não precisam ser todos, podemos aplicar as propriedades de modo que estejam válidas na direção reversa.

Exemplo 5. $x > -2 \;\Rightarrow\; 2+3x < 5x+8$

$$
\begin{array}{rrcll}
 & x & > & -2 & |\cdot(-2) \\
\overset{\text{(Prop. 5)}}{\Longrightarrow} & -2x & < & 4 & |+(5x) \\
\overset{\text{(Prop. 2)}}{\Longrightarrow} & 3x & < & 5x+4 & |+(2<4) \\
\overset{\text{(Prop. 3)}}{\Longrightarrow} & 2+3x & < & 5x+8 &
\end{array}
$$

Portanto, todos os valores maiores que -2 satisfazem a desigualdade $2+3x<5x+8$. Sabemos que é verdade, pois todos os $x>-2$ também satisfazem $x>-3$ que é a solução completa dessa desigualdade, por ser uma desigualdade equivalente.

Observação: Nem sempre precisamos da solução completa de um problema de desigualdade. Quando não conseguirmos avançar com as relações de equivalência, precisamos avaliar o problema para saber se podemos aceitar um conjunto maior ou menor de soluções e, correspondentemente, aplicar as propriedades de modo a valer somente de cima para baixo ou de baixo para cima.

Observação: O fato de determinados passos de um caminho de resolução valem somente em uma direção não é verdade somente para desigualdades, mas também vale para equações.

Encontre o erro na seguinte conta:

Suponha que	x	$=$	0
Então temos	$4x$	$=$	0
Subtraíndo $2x$	$2x$	$=$	$-2x$
Adicionando x^2+1	x^2+2x+1	$=$	x^2-2x+1
Produtos notáveis:	$(x+1)^2$	$=$	$(x-1)^2$
Tirando a raiz	$x+1$	$=$	$x-1$
Subtraindo x	$+1$	$=$	-1

1.3.2 Desigualdades com módulo

A solução de desigualdades que apresentem o valor absoluto de uma ou mais expressões pode apresentar muitos subcasos, pois o caminho de solução geramente depende do sinal destas expressões.

Para facilitar a administração de todos os possíveis casos, sugere-se o seguinte procedimento: Localizar os zeros da expressão em módulo para tratar, em casos separados, os intervalos em que o argumento do módulo fica diferente de zero, mas com sinal definido. Desta forma, é possível simplifcar a expressão, eliminando o módulo, sem criar novos subcasos.

Exemplo 6. *Encontre todos os x que satisfazem* $|3x+2| > 5$
Solução: Caminho básico: Usar a definição da função valor absoluto:
$3x+2 > 5$ ou $3x+2 < -5$ e resolver as duas desigualdades.
A solução final é a união das duas soluções parciais.
Esse caminho pode gerar muitos subcasos quando a expressão é mais complicada.

Caminho recomendado: Determinar os zeros da função dentro do módulo e considerar as partes do eixo em que o sinal não muda: $3x+2=0$ em $x = -\frac{2}{3}$. Assim,

Caso 1: $3x+2 \geq 0 \iff x \geq -\frac{2}{3}$
Portanto, $|3x+2| = 3x+2$.

$$\begin{array}{rcl} 3x+2 & > & 5 \\ 3x & > & 3 \\ x & > & 1 \end{array}$$

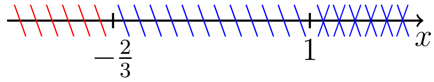


Figura 1.7: Caso 1: Trata do intervalo $[-\frac{2}{3}, \infty)$, grafado em \\\. Solução da desigualdade: $(1, \infty)$, grafado em ///. A solução parcial do caso é a interseção: XXX.

Portanto, o intervalo solução do Caso 1 contém aqueles valores de x que satisfazem as duas condições $x \geq -\frac{2}{3}$ e $x > 1$, representados pela a interseção dos dois intervalos, i.e., trecho grafado nos dois estilos, ou seja, $x > 1$.

Caso 2: $3x+2 < 0 \iff x < -\dfrac{2}{3}$
Portanto, $|3x+2| = -(3x+2)$.

$$\begin{array}{rcl} -(3x+2) & > & 5 \\ 3x+2 & < & -5 \\ 3x & < & -7 \\ x & < & -\dfrac{7}{3} \end{array}$$

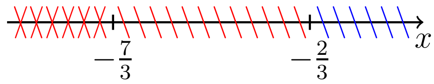


Figura 1.8: Caso 2: Trata do intervalo $(-\infty, -\frac{2}{3})$, grafado em \\\. Solução da desigualdade: $(-\infty, -\frac{7}{3})$, grafado em ///. A solução parcial do caso é a interseção: XXX.

Novamente, o intervalo solução do Caso 2 é a interseção dos dois intervalos, i.e., trecho grafado nos dois estilos, ou seja, $x < -\dfrac{7}{3}$.

Ambas as contas são reversíveis, portanto
$x > 1 \;\Rightarrow\; 3x+2 > 5$ e
$x < -\frac{7}{3} \;\Rightarrow\; 3x+2 < -5$.
Assim, podemos concluir que

$$|3x+2| > 5 \;\forall\, x \in \left\{ x \mid x > 1 \text{ ou } x < -\frac{7}{3} \right\}$$
$$\text{i.e., } \forall\, x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right) \cup (1, \infty)$$

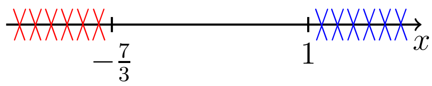


Figura 1.9: Solução: União dos resultados dos Casos 1 e 2.

Exemplo 7. *Encontre todos os x que satisfazem* $\left|\dfrac{2x+2}{3x^2+2x-1}\right| < 1$
Multiplicação pelo denominador:

$$\begin{array}{rcl} \left|\dfrac{2x+2}{3x^2+2x-1}\right| < 1 & & x \neq \dfrac{1}{3},\; x \neq -1 \\ |2x+2| < \left|3x^2+2x-1\right| & & x \neq \dfrac{1}{3},\; x \neq -1 \end{array}$$

Caso 1: Tratamos primeiramente do caso em que numerador e denominador são ambos positivos, i.e.,

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x+2 & \geq & 0 & \text{e} & 3x^2+2x-1 & > & 0 \\ x & \geq & -1 & \text{e} & x > \dfrac{1}{3} & \text{ou} & x < -1 \end{array}$$

Queremos que ambas as condições sejam satisfeitas, i.e., consideramos a interseção destes dois intervalos. Assim, o Caso 1 trata de $x > \dfrac{1}{3}$.

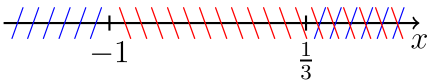


Figura 1.10: Numerador positivo (\\\\\\) e denominador positivo (///).

Usando $|2x+2| = 2x+2$ e $|3x^2+2x-1| = 3x^2+2x-1$ na desigualdade original, temos

$$\begin{array}{rcl} 2x+2 & < & 3x^2+2x-1 \\ 3 & < & 3x^2 \\ 1 & < & x^2 \end{array}$$

que implica

$$x > 1 \quad \text{ou} \quad x < -1$$

Portanto, a solução parcial do Caso 1 é a interseção da condição do caso, $x > \frac{1}{3}$, com esta solução da desigualdade, i.e.,

$$x > 1$$

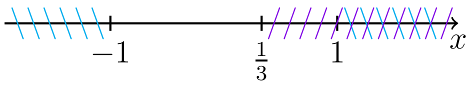


Figura 1.11: Condição do Caso (///) e solução da desigualdade (\\\\\\).

Caso 2: A condição de que ambos, numerador e denominador sejam negativos, traduz nas condições

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x+2 & < & 0 & \text{e} & 3x^2+2x-1 & < & 0 \\ x & < & -1 & \text{e} & -1 < x & < & \dfrac{1}{3} \end{array}$$

Uma vez que queremos que ambas as condições sejam satisfeitas, reconhecemos que isso não é possível. Ou seja, não existem valores de x que façam isso acontecer. Portanto, a solução parcial deste caso é o conjunto vazio.

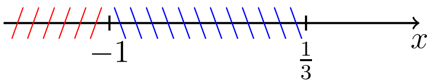


Figura 1.12: Numerador negativo (///) e denominador negativo (\\\\\\).

Caso 3: Para que o numerador seja negativo e o denominador positivo, precisamos ter

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x+2 & < & 0 & \text{e} & 3x^2+2x-1 & > & 0 \\ x & < & -1 & \text{e} & x > \dfrac{1}{3} & \text{ou} & x < -1 \end{array}$$

Portanto, para que ambas as condições sejam satisfeitas, precisamos considerar $x < -1$.

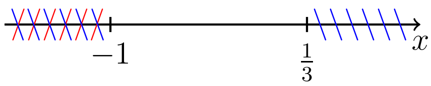


Figura 1.13: Numerador negativo (///) e denominador positivo (\\\\\\).

Usando $|2x+2| = -(2x+2)$ e $|3x^2+2x-1| = 3x^2+2x-1$ na desigualdade original, temos

$$\begin{array}{rcl} -2x-2 & < & 3x^2+2x-1 \\ 0 & < & 3x^2+4x+1 \end{array}$$

que implica

$$x > -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x < -1$$

A interseção desta solução com a condição do caso, $x < -1$, fornece a solução parcial do Caso 3,

$$x < -1$$

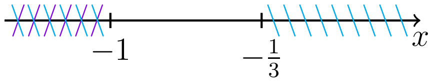


Figura 1.14: Condição do Caso (///) e solução da desigualdade (\\\).

Caso 4: Finalmente, precisamos considerar o caso em que o numerador é positivo e o denominador é negativo, i.e.,

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x+2 & \geq & 0 & \text{e} & 3x^2+2x-1 & < & 0 \\ x & \geq & -1 & \text{e} & -1 < \ x & < & \frac{1}{3} \qquad \text{i.e.,} -1 < x < \frac{1}{3} \end{array}$$

A interseção dos intervalos correspondentes a estas duas condições fornece os valores de x no intervalo $-1 < x < \frac{1}{3}$.

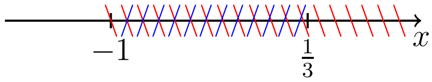


Figura 1.15: Numerador positivo (\\\) e denominador negativo (///).

Usando $|2x+2| = 2x+2$ e $|3x^2+2x-1| = -(3x^2+2x-1)$ na desigualdade original, temos

$$\begin{array}{rcl} 2x+2 & < & -3x^2-2x+1 \\ 0 & > & 3x^2+4x+1 \end{array}$$

que implica

$$-1 < x < -\frac{1}{3}$$

Portanto, a solução parcial do Caso 4 é obtida pela interseção desta solução com a condição do caso, $-1 < x < \frac{1}{3}$, o que fornece

$$-1 < x < -\frac{1}{3}$$

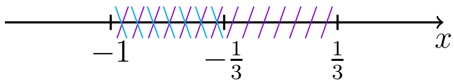


Figura 1.16: Condição do Caso (///) e solução da desigualdade (\\\).

Solução: União das respostas dos quatro casos (veja Figura 1.17):

$$\left|\frac{2x+2}{3x^2+2x-1}\right| < 1 \qquad \forall \quad x > 1 \quad \text{ou} \quad x < -1 \quad \text{ou} \quad -1 < x < -\frac{1}{3}$$

ou seja,

$$\mathbb{V} = \{x | x < -1 \text{ ou } -1 < x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$$

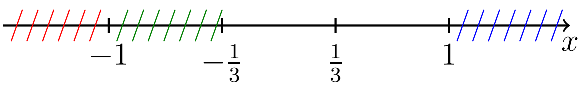


Figura 1.17: Solução do Exemplo 7: União das soluções parciais dos Casos 1 (///), 3 (///) e 4 (///). (Caso 2 não tem solução.)

Simplificação do Exemplo 7

Notamos que o Caso 2 no caminho acima resultou no conjunto vazio, pois x não tinha como

satisfazer as duas condições ao mesmo tempo. Isso ocorre com frequência. Sendo assim, os demais casos acima podem ser tratados mais facilmente se analisarmos primeiramente em que pontos o numerador e o denominador da expressão dentro do valor absoluto fica nulo. Temos $2x+2=0$ em $x=-1$ e $3x^2+2x-1=0$ em $x=-1$ e $x=\frac{1}{3}$. Podemos então dividir o eixo x nestes pontos, obtendo três casos:
Caso 1 $x>\frac{1}{3}$: Caso 1 acima,
Caso 2 $-1<x<\frac{1}{3}$: Caso 4 acima,
Caso 3 $x<-1$: Caso 3 acima.
Este procedimento, divisão do eixo em subintervalos nos pontos onde a expressão dentro do valor absoluto pode trocar de sinal, fornece o menor número de casos possível.

Alternativa Exemplo 7
No caso específico deste exemplo, notamos que numerador e denominador tem o zero em $x=-1$ em comum. Isso siginifica que a expressão pode ser algebricamente simplificada:

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{2x+2}{3x^2+2x-1} & = \dfrac{2(x+1)}{(x+1)(3x-1)} & = \dfrac{2}{3x-1} & x\neq -1,\, x\neq -\dfrac{1}{3} \\
\textbf{Desigualdade:} & \left|\dfrac{2}{3x-1}\right| & < \; 1 & x\neq -1,\, x\neq -\dfrac{1}{3} \\
\textbf{Caso 1:} & 3x-1>0 & \Rightarrow \; x>\dfrac{1}{3} & \\
 & 2 & < \; 3x-1 & \\
 & 1 & < \; x & \\
 & x & > \; 1 & \\
\textbf{Caso 2:} & 3x-1<0 & \Rightarrow \; x<\dfrac{1}{3} & x\neq -1, \\
 & 2 & < \; -3x+1 & \\
 & 3x & < \; -1 & \\
 & x & < \; -\dfrac{1}{3} &
\end{array}$$

Portanto, $\mathbb{V}=\Big\{x|x>1 \quad \text{ou} \quad x<-\frac{1}{3}; x\neq -1\Big\}$

Exemplo 8. *Encontre todos os x que satisfazem* $\left|\dfrac{5}{2x-1}\right|<\left|\dfrac{1}{x-2}\right|$

$$\begin{array}{rcll}
\left|\dfrac{5}{2x-1}\right| & < & \left|\dfrac{1}{x-2}\right| & x\neq 2, x\neq \dfrac{1}{2} \\
|5(x-2)| & < & |2x-1| &
\end{array}$$

Observamos que as duas expressões dentro do valor absoluto têm os seus zeros em $x=\frac{1}{2}$ e $x=2$. Dividindo o eixo nesses pontos, obtemos os seguintes casos:

Caso 1: $x>2$.
Neste caso $5(x-2)>0$ e $2x-1>0$. Portanto, a desigualdade assume a forma

$$\begin{array}{rcl}
5x-10 & < & 2x-1 \\
3x & < & 9 \\
x & < & 3
\end{array}$$

Assim, encontramos a solução parcial $2<x<3$.

Caso 2: $\frac{1}{2} < x < 2$
Neste caso $5(x-2) < 0$ e $2x - 1 > 0$. Portanto, a desigualdade assume a forma

$$\begin{array}{rcl} -5x+10 & < & 2x-1 \\ 11 & < & 7x \\ x & > & \frac{11}{7} \end{array}$$

Assim, encontramos a solução parcial $\frac{11}{7} < x < 2$.

Caso 3: $x < \frac{1}{2}$
Neste caso $5(x-2) < 0$ e $2x - 1 < 0$. Portanto, a desigualdade assume a forma

$$\begin{array}{rcl} -5x+10 & < & -2x+1 \\ 9 & < & 3x \\ 3 & < & x \end{array}$$

Como nenhum número pode ser menor que $\frac{1}{2}$ e maior que 3 ao mesmo tempo, a solução parcial deste caso é o conjunto vazio.

A solução completa do problema é a união das soluções parciais, i.e., $x \in \left(\frac{11}{7}, 2\right) \cup (2, 3)$

1.3.3 Desigualdade Triangular

A relação $\quad |x+y| \leq |x| + |y| \quad$ é conhecida como *desigualdade triangular.*
Demonstração:
Temos, a partir das propriedades do módulo e usando as propriedades de manipulação de desigualdades,

$$\begin{aligned} |x| \cdot |y| = |x \cdot y| &\geq xy \\ 2|x| \cdot |y| &\geq 2xy \\ x^2 + 2|x| \cdot |y| + y^2 &\geq x^2 + 2xy + y^2 \\ |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 &\geq x^2 + 2xy + y^2 \\ (|x| + |y|)^2 &\geq (x+y)^2 \\ |x| + |y| &\geq |x+y| \end{aligned}$$

onde usamos que $\sqrt{a^2} = |a|$ e $\Big||x| + |y|\Big| = |x| + |y|$.

1.4 Relações envolvendo duas variáveis

1.4.1 Equações com duas variáveis

Uma equações de duas variáveis estabelece uma relação entre dois valores. A forma geral de uma relação é dada por

$$F(x, y) = 0 \tag{A}$$

A relação (A) é satisfeita por um conjunto de pares (x, y).
Exemplos:

$$x^2 + y^2 = 16 \,, \tag{B}$$
$$2x + y = 1 \,. \tag{C}$$

Alguns dos conjuntos de pares (x, y) que satisfazem a relação (B) são:
$(0, 4)$, $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$
(Todos os pontos que tem distância 4 até a origem.)

1.4.1.1 Representação gráfica

Usando um Gráfico de dois eixos perpendiculares, podemos representar um par de coordenadas como um ponto no plano (veja Figura 1.18).

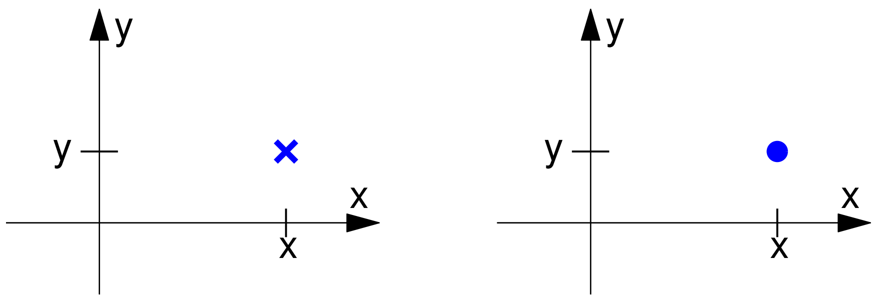


Figura 1.18: Representação gráfica de um par de valores (x, y) como ponto no plano. Pontos isolados podem ser indicados um $\times$ ou uma bola fechada. Pontos ausente são indicados com uma bola aberta.

Como uma equação como as acima é satisfeita por um conjunto de pontos, em geral, esse conjunto forma uma curva no plano (x, y). Para os dois exemplos (B) e (C), temos as duas representações gráficas da Figura 1.19.

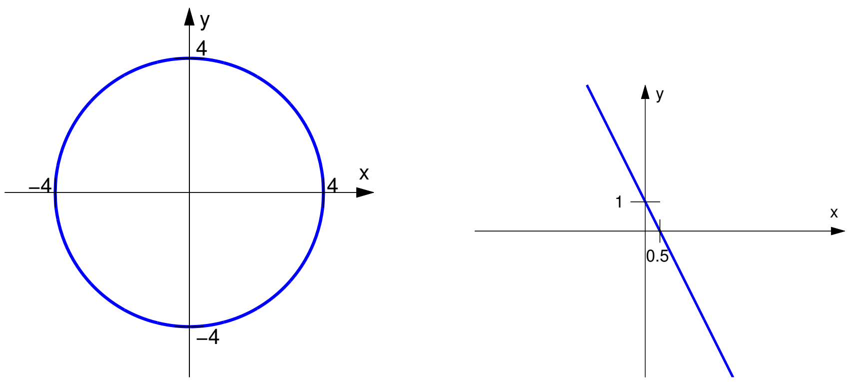


Figura 1.19: Gráficos das relações (B) e (C).

1.4.2 Desigualdades com duas variáveis

Forma geral: $F(x, y) < 0$ (ou $F(x, y) > 0$).

Exemplo 1. *Quais valores de x e y satisfazem $2x + y > 1$?*

Para cada x dado, temos um intervalo de valores de y que satisfazem a desigualdade (Figura 1.20):

$y > 1 - 2x \Rightarrow$

x	0	1	-1	...
y	> 1	> -1	> 3	...

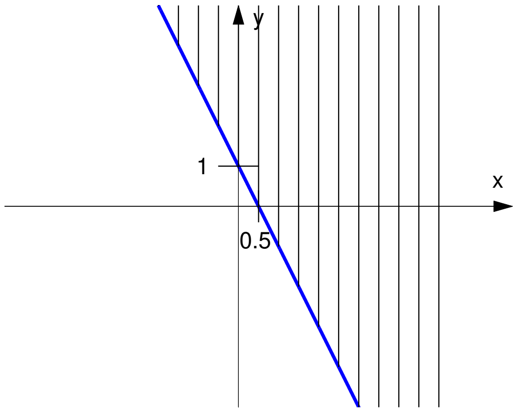


Figura 1.20: Pontos que satisfazem $y = 1 - 2x$ (linha azul) e $y > 1 - 2x$ (grafado em preto).

Ou seja, a desigualdade denota, para cada x, todos os valores de y que se encontram acima da reta $y = -2 + 1$. Dessa forma, a desigualdade descreve a área do plano acima dessa reta (veja Figura 1.20).

Exemplo 2. *Quais valores de x e y satisfazem $x^2 + y^2 < 16$?*
Novamente, temos para cada x dado, um intervalo de valores de y que satisfazem a relação:
$y^2 < 16 - x^2$
ou seja,
$-\sqrt{16 - x^2} < y < \sqrt{16 - x^2}$

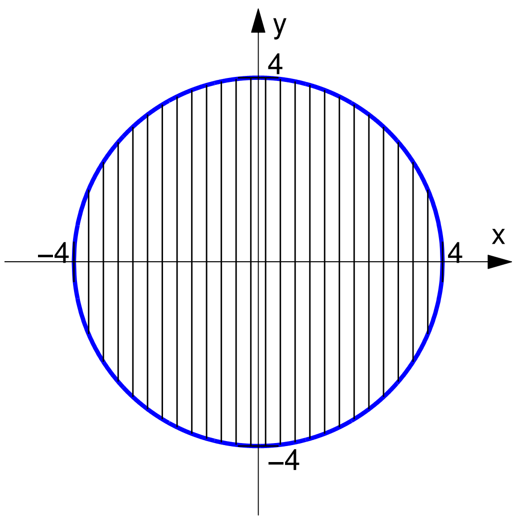


Figura 1.21: Pontos satisfazendo $x^2 + y^2 = 16$ (linha azul) e $x^2 + y^2 < 16$ (grafado em preto).

Resposta: São os pontos (x, y) com distância menor que 4 até a origem.

Observação: Notamos que desigualdades com duas variáveis não são satisfeitas por um único y para cada x. Portanto, não são representadas por *curvas* no plano (x, y), mas definem pedaços de *áreas*.

1.4.3 Relação explícita

Se para cada x dado, existe um y único que satisfaz a equação, podemos escrever

$$y = f(x) \ . \tag{D}$$

Chamamos a forma (A) de **equação implícita** e a forma (D) de **equação explícita** da relação entre x e y.

Para o caso do exemplo da equação (B), não é possível excrevê-la de forma explícita, pois não há unicidade do y para um valor fixo de x, mas para a a equação (C), podemos escrever

$$y = 1 - 2x \ ,$$

que falicita determinar os pares (x, y), pois podemos calcular, para cada x dado, o respectivo valor de y. Dizemos neste caso que y pode ser expressada como uma função de x.

Capítulo 2

Funções

Vimos no final do capítulo anterior que existem relações entre duas variáveis que podem ser formulados como uma regra de cálculo que determina o valor de uma das variáveis a partir da outra. Neste caso, chamamos a relação entre as duas variáveis de função.

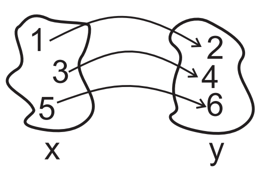
2.1 Definição

Definição: Uma **função** é um conjunto de pares ordenados (x, y) no qual dois pares ordenados distintos não tem o primeiro elemento x do par em comum. O conjunto $\mathbb{D}$ de todos os valores possíveis de x é chamado ***domínio*** da função, e o conjunto $\mathbb{V}$ de todos os valores possíveis de y é chamado a ***imagem*** da função.

Nesta definição, a restrição de que dois pares ordenados distintos não podem ter o primeiro elemento x do par em comum nos assegura que existe um único valor de y para um valor específico de x. Existe portanto uma regra que determina o valor único de y a partir do valor escolhido de x. Desta forma, o valor da variável y depende do valor da variável x. Chamamos então x de **variável independente** e y de **variável dependente**.

Exemplo 1. *Função dada pelo conjunto de pares ordenados* $\{$*(1,2)* *(3,4)* *(5,6)*$\}$
Notamos a partir do conjunto dado acima que a função possui o domínio $\mathbb{D} = \{1, 3, 5\}$ e a imagem $\mathbb{V} = \{2, 4, 6\}$.
Essa função pode ser representada das seguintes formas:

Diagrama de Venn:



Representação em forma de tabela:

x	1	3	5
y	2	4	6

Representação cartesiana:

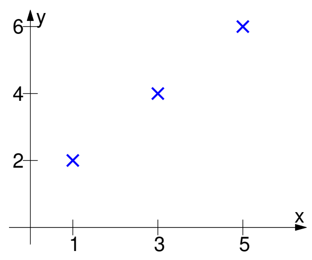


Figura 2.1: Representações funcionais.

Uma função não é necessariamente numérica.

Exemplo 2. *Função dada pelo gráfico de Venn*

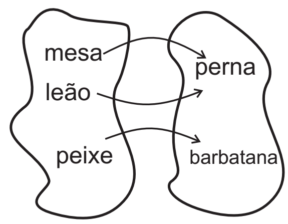


Figura 2.2: Domínio $\mathbb{D}$ do lado esquerdo e a imagem $\mathbb{V}$ do lado direito.

Em Cálculo I, vamos considerar somente funções onde os dois elementos x e y de todos os pares ordenados são números reais. Chamamos uma função assim de *função real.*

Em geral, a regra que relaciona x e y é dada por uma equação determinando o valor da variável dependente, y, a partir do valor da variável independente, x. Esta equação pode ter a forma implícita $F(x, y) = 0$ ou explícita $y = f(x)$.

Observação: Note que uma equação que relaciona x e y sozinha não define uma função. Uma função é definida por uma tal regra de cálculo somente junto com a especificação do domínio $\mathbb{D}$.

A função do Exemplo 1 pode ser escrita como $y = x + 1$, mas só é aplicada aos números $x = 1$, 3 e 5. Portanto esta função é diferente da função $y = x + 1$ com $x \in \mathbb{R}$ (para a qual $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{V} = \mathbb{R}$).

Quando não explicitamos o domínio de uma função em Cálculo I, supomos que seja o *domínio máximo*, i.e., o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ cujos elementos permitem a aplicação da regra, de forma que todos os valores de y estejam também em $\mathbb{R}$.

Definição: O **contra-domínio** define o conjunto de valores permitidos de y.

Em geral, em Cálculo I, o contra-domínio é $\mathbb{R}$.

Notação: Dizemos que uma função f é real, se ela admite somente valores reais e se o seu contra-domínio (e, portanto, a sua imagem) é real também, i.e., $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}$. Escrevemos:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Exemplo 3. *Determine o domínio (máximo) e a imagem da função (real):*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \ \textit{definida por} \ \ y = f(x) = \sqrt{5 - x}$$

Domínio: Quais números reais x podem ser usados nesta função, tal que o resultado da conta também seja um número real?

$$5 - x \geq 0 \quad \text{ou seja,} \quad 5 \geq x$$

Portanto, $\mathbb{D} = (-\infty, 5]$
Imagem: Quais número y podem ser resultado desta função? Uma raiz é por definição não negativa, mas todos os valores não negativos podem ser obtidas pela conta representada pela função. Portanto $\mathbb{V} = [0, \infty)$

Exemplo 4. *Determine o domínio e a imagem da função:*

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| > 2 \\ x^2 - 1 & |x| < 2 \end{cases}$$

Domínio:
A função não esta definida em $x = 2$ e $x = -2$. As regras de cálculo resultam em valores reais para todos os demais valores reais de x.

$$\Rightarrow \mathbb{D} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Imagem (veja Figura 2.3):
$\mathbb{V} = [-1, 3) \cup (4, \infty) = [-1, \infty) - [3, 4]$

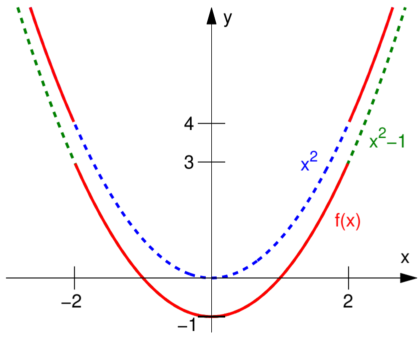


Figura 2.3: Gráfico da função $f(x)$ (linha vermelha).

2.2 Conceitos básicos

2.2.1 Notação funcional

Seja f a função que tem como domínio valores de x e como imagem valores de y. Então usaremos o símbolo $y = f(x)$ (leia-se f de x) para representar a regra de cálculo que determina o valor de y a partir do valor de x.

Exemplo 1. *Se* $f(x) = \sqrt{5 - x}$
Então:

$$\begin{array}{lclcll} f(1) & = & \sqrt{5-1} & = & \sqrt{4} & = 2 \\ f(-4) & = & \sqrt{5-(-4)} & = & \sqrt{9} & = 3 \\ f(\pi) & = & \sqrt{5-\pi} & & & \\ f(2x^2+1) & = & \sqrt{5-(2x^2+1)} & = & \sqrt{4-2x^2} & \\ f(x+h) & = & \sqrt{5-(x+h)} & = & \sqrt{5-x-h} & \end{array}$$

Usaremos mais tarde:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{5-x-h} - \sqrt{5-x}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{5-x-h} - \sqrt{5-x})(\sqrt{5-x-h} + \sqrt{5-x})}{h(\sqrt{5-x-h} + \sqrt{5-x})} \\ &= \frac{5-x-h-(5-x)}{h(\sqrt{5-x-h} + \sqrt{5-x})} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5-x-h} + \sqrt{5-x}} \end{aligned}$$

2.2.2 Operações com funções

Definidas duas funções f com domínio $\mathbb{D}_f$ e g com domínio $\mathbb{D}_g$, podemos executar as seguintes operações:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) && \text{(Op. 1)}\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x) && \text{(Op. 2)}\\
(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x) && \text{(Op. 3)}\\
(f/g)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} && \text{(Op. 4)}\\
(f\circ g)(x) &= f(g(x)) \quad \text{(função composta)} && \text{(Op. 5)}
\end{aligned}$$

Domínios:
(Op. 1) até (Op. 3): Domínio é a interseção dos domínios de f e g: $\mathbb{D} = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$
(Op. 4): Domínio é a interseção dos domínios de f e g sem os pontos x onde $g(x) = 0$:
$\mathbb{D} = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g - \{x|g(x) = 0\}$
(Op. 5): Domínio é o conjunto dos pontos x no domínio de g tais que
$g(x)$ está dentro do domínio de f: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{D}_g|g(x) \in \mathbb{D}_f\}$.

Exemplos: $f(x) = 3x$ $\qquad g(x) = 5x + 8$

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) &&= 3x+5x+8 &&= 8x+8\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x) &&= 3x-(5x+8) &&= -2x-8\\
(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x) &&= 3x(5x+8) &&= 15x^2+24x\\
(f/g)(x) &= f(x)/g(x) &&= \frac{3x}{5x+8} &&\\
(f\circ g)(x) &= f(g(x)) &&= 3(5x+8) &&= 15x+24\\
(g\circ f)(x) &= g(f(x)) &&= 5(3x)+8 &&= 15x+8\\
(f\circ f)(x) &= f(f(x)) &&= 3(3x) &&= 9x
\end{aligned}$$

2.3 Propriedades de funções

Para entendermos o comportamento (e o gráfico) de uma função, é de ajuda verificar algumas propriedades.

2.3.1 Funções simétricas (pares ou ímpares)

As simetrias pares e ímpares de funções são:

$$\begin{aligned}
f(x) \quad &\text{é } \textit{par} \text{ se} & f(-x) &= f(x)\\
f(x) \quad &\text{é } \textit{ímpar} \text{ se} & f(-x) &= -f(x)
\end{aligned}$$

Exemplo 1. *$f(x) = x^2 + 2$ é par porque:*

$$f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$$

Observação: Uma função par é simétrica pelo eixo vertical (veja Figura 2.4a).

Exemplo 2. *$f(x) = x^3 + 2x$ é ímpar porque:*

$$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -x^3 - 2x = -(x^3 + 2x) = -f(x)$$

Observação: Uma função ímpar é simétrica pela origem (veja Figura 2.4b).

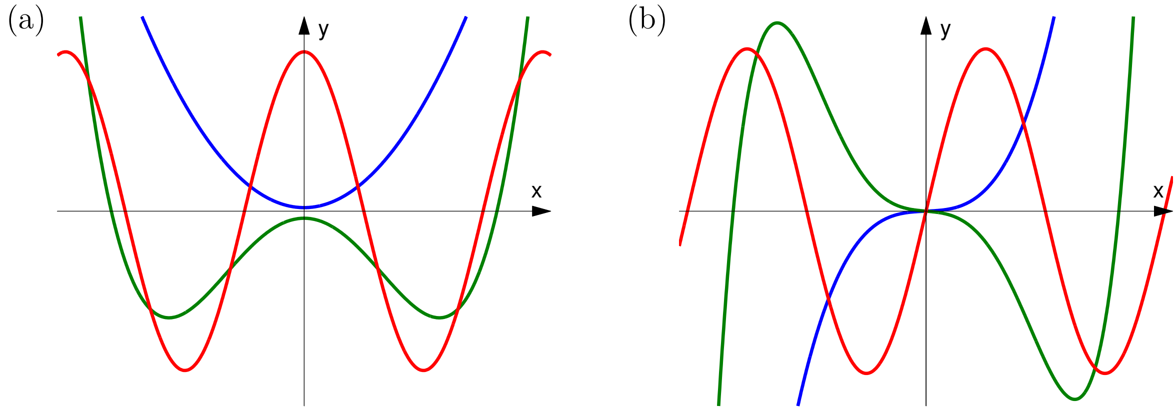


Figura 2.4: (a) Alguns exemplos de funções pares. (b) Alguns exemplos de funções ímpares.

Exemplo 3. *$f(x) = x^2 + 2x + 1$ não é par nem ímpar porque:*

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 1 = x^2 - 2x + 1 \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$$

Toda função nem par nem ímpar (que tenha domínio simétrico) pode ser escrita como a soma de uma função par e uma função ímpar:

$$f(x) = f_p(x) + f_i(x)$$

onde

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{e} \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
f_p(-x) &= \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_p(x) \\
f_i(-x) &= \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -f_i(x) \\
f_p + f_i &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\
&= \frac{2f(x) + f(-x) - f(-x)}{2} = f(x)
\end{aligned}$$

Exemplo 4. *Encontre as partes par e ímpar de* $f(x) = x^2 + 3x + 4$

$$f(-x) = (-x)^2 + 3(-x) + 4 = x^2 - 3x + 4 \qquad \text{nem par nem ímpar}$$

$$\begin{aligned}
f_p &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{x^2 + 3x + 4 + x^2 - 3x + 4}{2} = x^2 + 4 \\
f_i &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{x^2 + 3x + 4 - (x^2 - 3x + 4)}{2} = 3x
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llcccccc}
f_p & \textit{é par pois} & f_p(-x) & = & (-x)^2 + 4 & = & x^2 + 4 & = & f_p \\
f_i & \textit{é ímpar pois} & f_i(-x) & = & 3(-x) & = & -3x & = & -f_i(x)
\end{array}$$

Observação: A denominação "par" e "ímpar" para essas simetrias se deve ao fato que um polinômio que apresente somente termos de potências pares é uma função par, enquanto um polinômio que apresente somente termos de potências ímpares é uma função ímpar.

2.3.2 Função monótona

Uma função é monótona se for crescente ou decrescente.

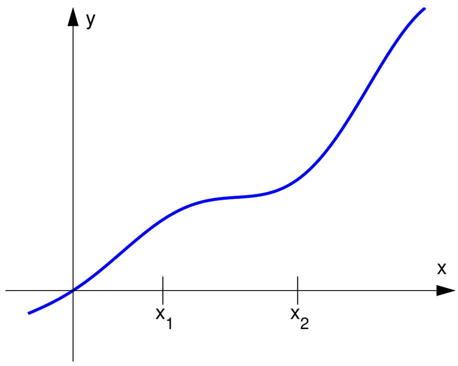


Figura 2.5: Função crescente no intervalo do gráfico.

Definição:
Função crescente em $\mathbb{I} = (a, b)$:
$f(x_2) > f(x_1) \quad \forall \quad x_2 > x_1 \in \mathbb{I}$
Função decrescente em $\mathbb{I} = (a, b)$:
$f(x_2) < f(x_1) \quad \forall \quad x_2 > x_1 \in \mathbb{I}$
Função não decrescente em $\mathbb{I} = (a, b)$
$f(x_2) \geq f(x_1) \quad \forall \quad x_2 > x_1 \in \mathbb{I}$
Função não crescente em $\mathbb{I} = (a, b)$
$f(x_2) \leq f(x_1) \quad \forall \quad x_1 > x_2 \in \mathbb{I}$

Observação: Em alguns livros usa-se "crescente/de-crescente" para incluir o igual, e para o caso sem igual usa-se então a denominação "estritamente crescente/decrescente".

Observação: Quando se diz que a função é crescente ou decrescente (sem especificar o intervalo), refere-se ao **domínio** todo.

Exemplo 1:

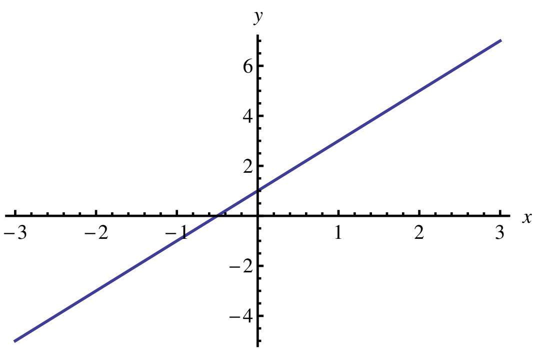


Figura 2.6: A função $f(x) = 2x+1$ é crescente.

Exemplo 2:

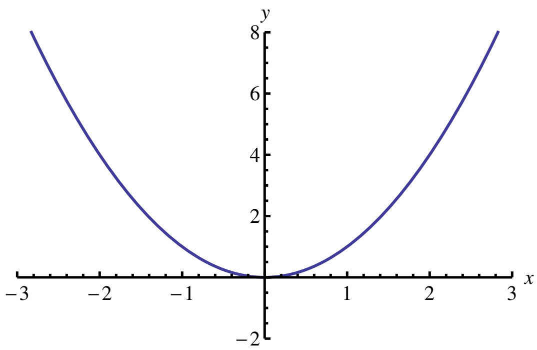


Figura 2.7: A função $f(x) = x^2$ é decrescente em $(-\infty, 0]$ e crescente em $[0, \infty)$.

2.4 Tipos de funções

2.4.1 Funções elementares

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 & \text{Função polinomial,} \\ & & (a_0 \cdots a_n \text{ constantes reais, } n \in \mathbb{N}) & \quad \text{ou polinômio, de grau } n \end{array}$$

Especialmente:

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & 0 & \text{Função nula} \\ f(x) & = & c & \text{Função constante} \\ f(x) & = & x & \text{função identidade} \\ f(x) & = & x^n \qquad (n \in \mathbb{N}) & \text{Função potência} \\ f(x) & = & ax & \text{Função linear} \\ f(x) & = & ax + b & \text{Função afim} \\ f(x) & = & ax^2 + bx + c & \text{Função quadrática} \\ f(x) & = & ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{Função cúbica} \\ & & (a, b, c, d \text{ constantes reais}) & \end{array}$$

Além disso, temos

$$f(x) = \frac{\tilde{P}_n(x)}{P_m(x)} \quad \text{com } \tilde{P}_n, P_m \text{ polinômios de grau } n, m \qquad \text{Função racional}$$

$$\text{Exemplos: } f(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + dx + e} \qquad f(x) = \frac{(x^2+1)/(2x+1)+7}{[x^7 - x^2 + 1]/(x^5+2)}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{(envolve raízes)} \qquad \text{Função algébrica}$$

$$\text{Exemplos: } f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^2+2}}{x+2} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}/(2x+1)+7}{[\sqrt[3]{x^7 - x^2} + 1]/(x^5+2)}$$

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & \operatorname{sen} x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x & \text{Função trigonométrica} \\ f(x) & = & x^a \qquad (a \in \mathbb{R}) & \text{Função potência} \\ f(x) & = & a^x \qquad (a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1) & \text{Função exponencial} \\ f(x) & = & \log_a x \qquad (a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1) & \text{Função logarítimica} \\ f(x) & = & \operatorname{senh} x, \cosh x, \tanh x, \coth x, \operatorname{sech} x, \operatorname{csch} x & \text{Função hiperbólica} \end{array}$$

2.4.2 A função exponencial

A função exponencial é dada por

$$f(x) = a^x \,, \qquad a > 0 \quad (a \neq 1), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Consideramos a base a diferente de 1, pois $f(x) = 1^x = 1$ é uma função constante.

2.4.2.1 Expoente natural

Definição: se $x = n \in \mathbb{N}, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}}$.
(A função exponencial nasceu simplesmente como notação abreviada para n fatores iguais.)
A base da definição, concluímos que $a^1 = a$ e:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \qquad (n > m) \end{aligned}$$

Além disso, $(a^n)^2 = a^n \cdot a^n = \overbrace{a \cdots a}^{n} \cdot \overbrace{a \cdots a}^{n} = \underbrace{a \cdots a}_{2n} = a^{2n}$.
Geral: $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ vezes}} = a^{n \cdot m}$.

2.4.2.2 Expoente inteiro

Para que essas regras continuem valendo quando os resultados das operações no expoente não são naturais, fazem-se necessárias as definições:

Definição: $a^0 = 1$, para que $a^0 = a^{n-n} = \dfrac{a^n}{a^n} = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

Definição: $a^{-l} = \dfrac{1}{a^l}$, para que $a^{-l} = a^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$ com $n < m \qquad (l, m, n \in \mathbb{N})$
Com isso, todas as operações acima são definidas para expoentes inteiros.

2.4.2.3 Expoente racional

Queremos agora estender a definição para números x racionais no expoente.

Primeiramente, vamos procurar uma definição consistente de um valor q tal que $a^q = \sqrt{a}$. Temos $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ e queremos expressar isso da forma $a^q \cdot a^q = a^{2q}$. Portanto, precisamos que $2q = 1$, ou seja $q = 1/2$.

Definição: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad (a \geq 0)$.

Generalizando mais ainda, permitimos que o expoente seja um número da forma $\dfrac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{Z}$ e definimos:
Definição: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, porque $\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdots a^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ vezes}} = a^{n\frac{1}{n}} = a$. Consequentemente

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} &= (\sqrt[n]{a})^2 \\ = \quad & a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} &= (a^{\frac{1}{n}})^2 \\ = \quad & a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}} &= a^{\frac{2}{n}} \end{aligned}$$

De forma geral, definimos então $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$. Juntamente com $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$, $q \in \mathbb{Q}$, isso define a função exponencial para todos os números racionais no expoente.

2.4.2.4 Expoente irracional

E se o número x no expoente de a^x não for racional? Neste caso não é mais possível escrever a função $f(x) = a^x$ em termos de simples potências e raízes. Mesmo assim, faz sentido permitir, por exemplo, a expressão $2^{\sqrt{3}}$.

Uma vez que 2^x, $x \in \mathbb{Q}$, é uma função crescente, queremos que o mesmo seja verdade para 2^x, $x \in \mathbb{R}$, ver Figura 2.8. Assim, como $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, precisamos que $2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}$ e como $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$, devemos ter $2^{1,73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74}$. O mesmo vale para números racionais cada vez mais próximos a $\sqrt{3}$:

$$1,73205 < \sqrt{3} < 1,73206 \therefore 2^{1,73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,73206}.$$

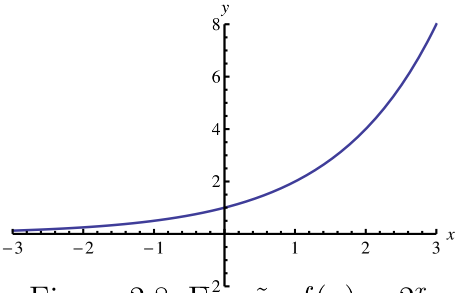


Figura 2.8: Função $f(x) = 2^x$

Esta sequência de aproximações decimais de $\sqrt{3}$ realmente permite uma definição única do valor de $2^{\sqrt{3}}$, e da mesma forma, podemos definir todos os valores a^x ($a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$) tal que $a^p < a^x < a^q$ sempre que $p < x < q$ ($p, q \in \mathbb{Q}$). Notamos que, enquanto essa definição não permita o cálculo exato do valor de $2^{\sqrt{3}}$, permite a sua aproximação com qualquer precisão desejada.

2.4.3 Regras de cálculo para a função exponencial

As leis dos expoentes ficam iguais aos que já conhecemos para expoentes inteiros, i.e,

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \\ (ab)^x &= a^x b^x \end{aligned}$$

onde $a^{-r} = 1/a^r$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

2.4.4 Gráfico da função exponencial

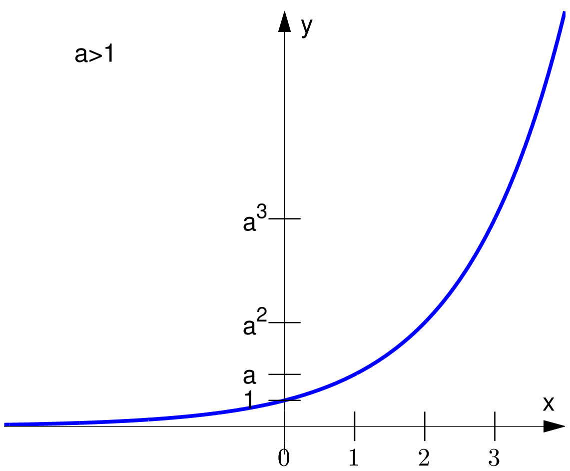


Figura 2.9: Gráfico da função $f(x) = a^x$ para $a > 1$.

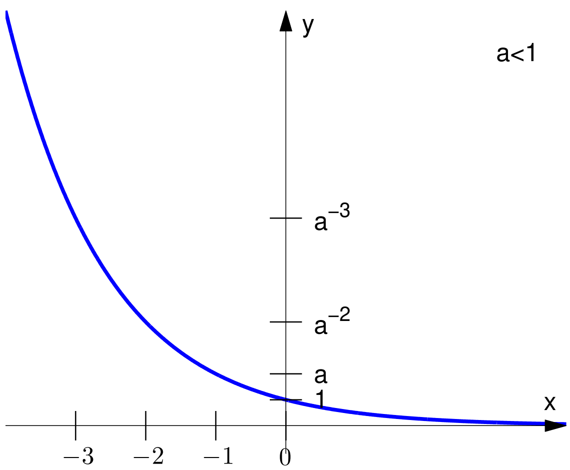


Figura 2.10: Gráfico da função $f(x) = a^x$ para $a < 1$.

2.4.5 Aplicações

Exemplo 1. *O crescimento de uma cultura de bactérias seja tal que dobre a cada hora.*
Se no momento inicial, existiam 1000 bactérias, então depois de uma hora, existem $2 \cdot 1000 = 2000$, depois de duas horas $2 \cdot 2000 = 4000 = 2^2 \cdot 1000$, três horas depois: $2 \cdot 4000 = 8000 = 2^3 \cdot 1000$. Depois de x horas: $2^x \cdot 1000$. Assim temos um multiplo da função 2^x. O resultado descreve o crescimento da cultura mesmo que x não seja um número inteiro.

Exemplo 2. *Dinheiro na caderneta a* 0,5% *de juros ao mês.*
Significa que depois de um mês temos $D_1 = 1{,}005 \cdot k$, onde k é o capital aplicado. Nos meses seguintes temos: 2) $D_2 = 1{,}005 \cdot (1{,}005 \cdot k) = (1{,}005)^2 \cdot k$;
3) $D_3 = 1,005 \cdot (1{,}005)^2 \cdot k = (1{,}005)^3 \cdot k$; $\quad \ldots \quad$ t) $D_t = (1{,}005)^t \cdot k$.
O dinheiro aplicado cresce proporcional a $(1,005)^t$ onde t é o tempo em meses. Note que, devido à característica da poupança de aplicar os juros somente após meses inteiros, neste caso o resultado só vale para números inteiros t.

Para outro valor p dos juros, temos $D(t) = k\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^t$

Exemplo 3. *Propagação de um vírus.*
O número importante é o número de pessoas que cada um portador do vírus infecta em um determinado período. Se cada portador infectar, dentro de uma semana, (em média) três pessoas, então 10 infectam 30 e na próxima semana, esses 30 infectam 90 e assim por adiante. Em consequência, temos a seguinte tabela:

No. de semanas:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	n
No. de infectados:	10	30	90	270	810	2430	7290	21870	65610	196830	...	$10 \cdot 3^n$

Ou seja, o número de pessoas que cada um portador do vírus infecta se torna a base da função exponencial, i.e., $I(t) = I_0 3^t$, onde t é o tempo em semanas, mas não precisa ser um número inteiro. Observamos que, nas primeiras 6 semanas, 10 infectados se tornam 7290. Nas próximas 6 semanas, se tornariam 5,3 milhões!

Exemplo 4. *Grãos de trigo (ou de arroz) em uma tábua de xadrez.*
Segundo o autor árabe Al-Sephadi, um príncipe indiano chamado Shihram (outras fontes falam do rei persa Ardshir) tiranizou seus súditos e mergulhou seu país na miséria. Para chamar a atenção do príncipe para seus erros sem despertar sua raiva, o matemático e sábio Sessa ibn Daher criou um jogo em que o rei, como peça mais importante, não pode fazer nada sem a ajuda de outras peças e peões, o xadrez. O príncipe ficou tão encantado com o jogo que disse ao matemático que poderia pedir o que quisesse e que se fosse apropriado, que ele receberia. O matemático pediu apenas um grão de trigo (outras fontes falam em arroz) na primeira casa do tabuleiro, duas para a segunda casa, quatro para a terceira, e assim por diante, dobrando a quantidade até chegar na sexagésima quarta casa. O príncipe, inicialmente, se sentiu ofendido com o pedido, achando que estava muito aquém das suas capacidades, e encarregou seu vizir de arrumar o trigo, porém este, assim que calculou quanto precisava, verificou que era muito mais do que havia no reino, ou mesmo em toda a Ásia. O vizir ajudou o governante a sair de seu constrangimento, recomendando que ele simplesmente

mandasse Sessa ibn Daher a contar o trigo grão por grão.
(Recontado a partir da Wikipedia em português e alemão.)
Notamos que nas casas da táboa ficam as seguintes quantidades de grãos:

Casa No.	1	2	3	4	5	...	n	...	64
No. de grãos	1	2	4	8	16	...	2^{n-1}	...	2^{63}

Assim, a soma de grãos cresce conforme

Casa No.	1	2	3	4	5	...	n	...	64
Total de grãos	1	3	7	15	31	...	$2^n - 1$	...	$2^{64} - 1$

Esse valor corresponde a 18 446 744 073 709 551 615 grãos.

Se usarmos que cada grão tem aproximada 40 mg, chegamos a uma quantidade total de ca. de 730 bilhões de toneladas de trigo, mil vezes a safra global de trigo de 2014/2015. E se contarmos um grão por segundo, a contagem total leva quase 585 bilhões de anos.

2.4.6 O número de Euler

Observamos que temos muitos valores podem representar a base em diversos problemas nos quais funções exponenciais são envolvidas. Tem uma base especial que aparece muito nas contas, porque ajuda a facilitá-las (apesar de no início parecer um pouco estranho!). Esta base é o chamado número de Euler (pronunciado “Oiler”), denotado pela letra e. A função exponencial com esta base é então a função $f(x) = e^x$. De onde vem esta base?

Primeiramente, notamos que os gráficos das funções exponenciais com todas as bases são muito parecidas, só se distinguem pela escala do eixo vertical. Dessa observação surgiu a pergunta: qual é a base tal que a reta tangente ao gráfico da função exponencial correspondente no ponto $x = 0$ tem a inclinação $m = 1$? A resposta define o número de Euler e.

Começamos estudando os gráficos das funções exponenciais 2^x e 3^x (veja Figuras 2.11 e 2.12).

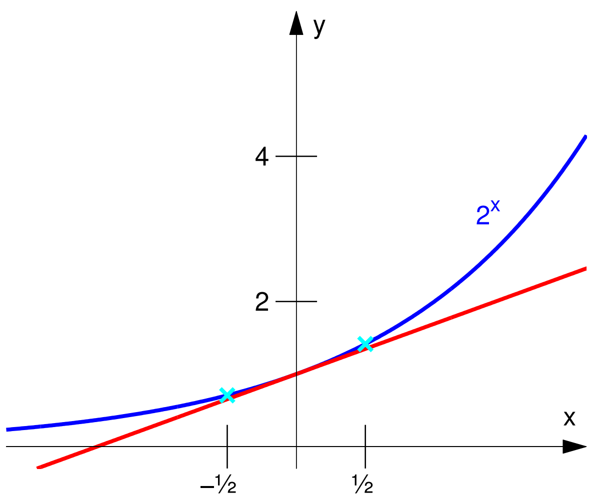


Figura 2.11: Gráfico de 2^x (azul) e sua reta tangente no ponto $(0, 1)$ (vermelho). Podemos estimar a inclinação usando os dois pontos em $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.

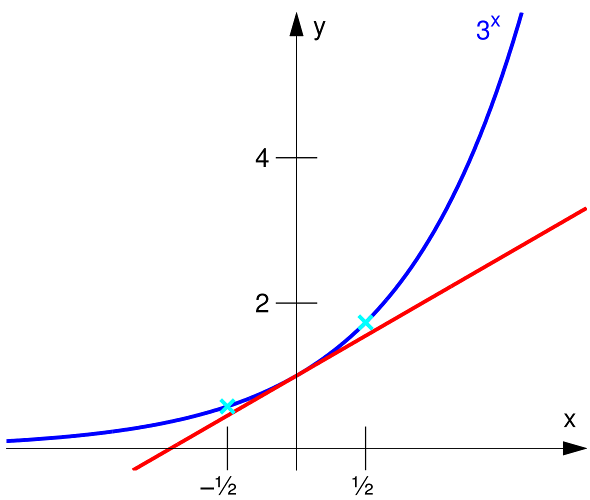


Figura 2.12: Gráfico de 3^x (azul) e sua reta tangente no ponto $(0, 1)$ (vermelho). Podemos estimar a inclinação usando os dois pontos em $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.

Analisando essas figuras, podemos notar que a inclinação em $x = 0$ do gráfico de 2^x é aproximadamente

$$m \approx \frac{2^{\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}7$$

o que é menor que 1, enquanto a inclinação em $x = 0$ do gráfico de 3^x é aproximadamente

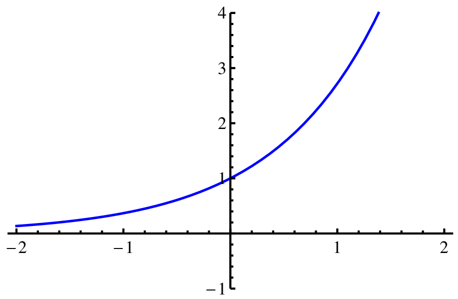
$$m \approx \frac{3^{\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}15$$

o que é maior que 1. Concluimos que, para que a inclinação seja igual a 1, precisamos uma base entre 2 e 3, ou seja, $2 < e < 3$. Agora, podemos fazer as contas e reduzir este intervalo, correspondente ao que fizemos para definirmos $2^{\sqrt{3}}$. Se fizermos a mesma análise para a base $a = 2.5$, encontramos $m \approx 0.95$, o que implica que $2.5 < e < 3$. Ao fazermos isso com números intermediários (com um intervalo menor para estimar a inclinação, para garantir a precisão necessária), veremos que:

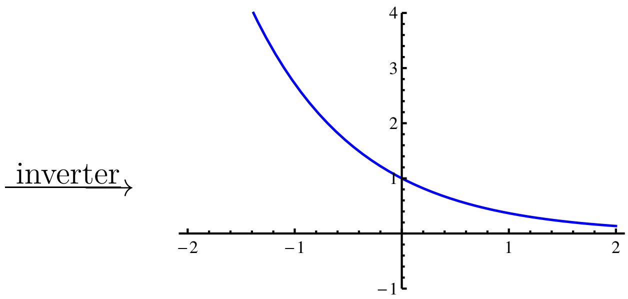
$$\begin{array}{rcccl} 2,7 & < & e & < & 2,8 \\ 2,71 & < & e & < & 2,72 \end{array}$$

Reduzindo cada vez mais o tamanho do intervalo, podemos encontrar o valor do número de Euler com a precisão que desejarmos. Dessa forma, é possível determinar que e é dado por $e \approx 2{,}71828182845905\ldots$.

Exemplo 5. *Esboce o gráfico de* $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x} - 1$ *e determine* $\mathbb{D}$ *e* $\mathbb{V}$.
Solução: Começamos com o gráfico de e^x, o invertemos, dividimos por 2 e subtraímos 1. Veja Figura 2.13.

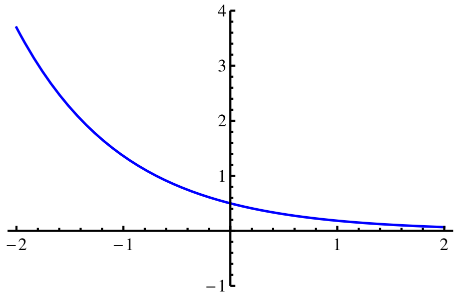


(a) Gráfico de e^x

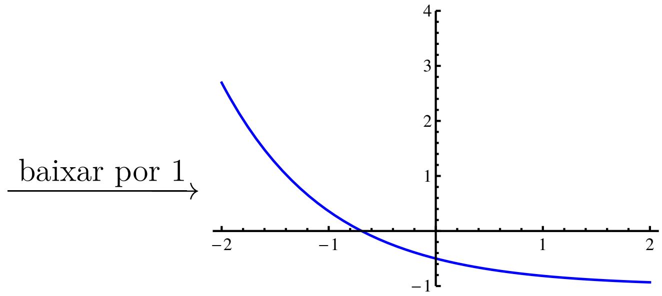


(b) Gráfico de e^{-x}

Dividir por 2:



(c) Gráfico de $\frac{1}{2}e^{-x}$



(d) Gráfico de $\frac{1}{2}e^{-x} - 1$

Figura 2.13: Construção do esboço do gráfico de $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$. Observamos que $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{V} = (-1, \infty)$.

2.5 Função inversa

2.5.1 A inversa de uma função

Vimos que a relação $2x + y = 1$ pode servir para explicitar a variável y,

$$y = 1 - 2x \ .$$

Do mesmo modo, poderíamos ter explicitado também a variável x,

$$x = \frac{1-y}{2} \ .$$

Essas duas funções são chamadas inversas uma da outra, ou seja, se

$$f(x) = 1 - 2x \ ,$$

então a sua função inversa, denotada por $f^{-1}(x)$, é dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2}$$

Observação: Geralmente, denotamos a variável independente por x!
Acima, o valor de x é obtida ao aplicar essa última regra de cálulo ao valor de y, i.e.

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$$

Exemplo 1. *Função inversa de uma função tabelada*

Função

x	y
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11

Relação invertida

y	x
3	1
5	2
7	3
9	4
11	5

Função inversa

x	y
3	1
5	2
7	3
9	4
11	5

2.5.2 Função inversível

Nem sempre, porém, é possível estabelecer uma função inversa para uma função dada. Lembramos da definição de "função":

> "... pares ordenados (x, y) tal que pares distintos não tem o primeiro elemento x em comum."

Pois bem, para então a relação invertida constituir uma função, é preciso que os pares ordenados invertidos também não tenham primeiros elementos em comum, ou seja pares distintos da função original não podem ter o segundo elemento em comum.

Se cada y também só aparece uma única vez, dizemos que a função é *injetora*. Neste caso, é possível reorganizar os pares ordenados de forma (y, x) tal que esse conjunto também é uma função. Esta é chamada de função inversa.

Em símbolos, a função inversa existe se:

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ sempre que } x_1 \neq x_2, \text{ ou seja, } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Observação: Notamos que uma função monótona sempre é injetora, mas não é necessário que a função seja monótono para ser injetora.

Exemplo 2. *Determine a inversa da função* $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Notamos que a função $y = \dfrac{1}{x}$ resulta de isolar y na expressão implícita $xy - 1 = 0$. Por outro lado, isolando x, obtemos $x = \dfrac{1}{y}$. Em outras palavras, a função inversa de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$. Essa inversa existe para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Note que o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é descrescente em $(-\infty,)$ e em $(0, \infty)$, mas f não é decrescente (ver Figura 2.14).

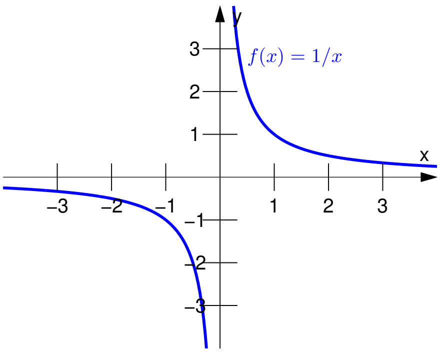


Figura 2.14: Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2.5.2.1 Teste da reta horizontal

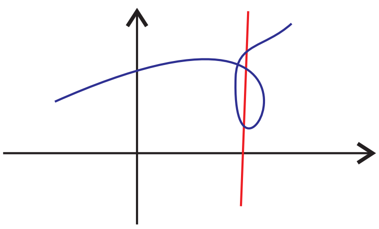


Figura 2.15: Não é função pois uma reta vertical (vermelha) corta o gráfico (curva azul) mais do que uma única vez.

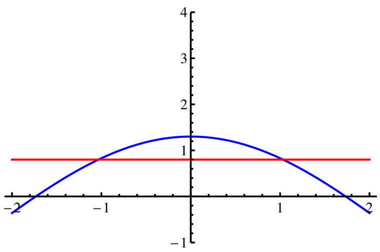


Figura 2.16: É função mas não é inversível pois uma reta horizontal (vermelha) corta o gráfico (curva azul) mais do que uma única vez.

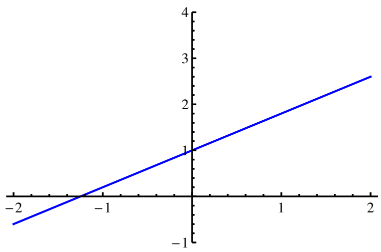


Figura 2.17: É função e é inversível. Não é possível desenhar qualquer reta (horizontal ou vertical) que passe por dois pontos distintos do gráfico.

Se no gráfico da função $f(x)$ pudermos desenhar uma reta horizontal de forma que corte o gráfico em dois pontos distintos, a função $f(x)$ não é injetora (já que temos dois valores de x associados ao mesmo valor de y) e, portanto, não é inversível.

Observação: Se pudermos desenhar uma reta vertical de forma que corte um gráfico em dois pontos distintos, então esse gráfico não representa uma função (veja Figuras 2.15, 2.16, 2.17).

2.5.3 Ramos de uma função

Como podemos proceder quando precisamos da inversa de uma função que não é inversível por não ser injetora?

Exemplo 3. *A função $f(x) = x^2$ é inversível?*
Não se admitirmos $x \in \mathbb{R}$, pois, por exemplo, para $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ temos $x_1 \neq x_2$, mas $f(x_1) = f(x_2) = 1$ (veja Figura 2.18).

E a função $g(x) = \sqrt{x}$? Não é inversa de $f(x) = x^2$?
Sim, é, mas não com $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ e, sim, com $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ (veja Figuras 2.19 e 2.20).
Observação: A função inversa de $f(x) = x^2$ com $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^-$ (veja Figura 2.21) é $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ (veja Figura 2.22).

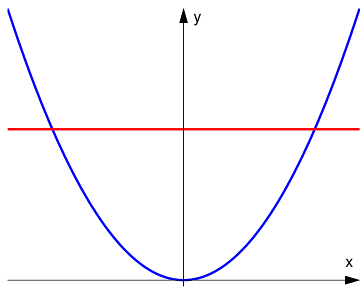


Figura 2.18: $f(x) = x^2$ com $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ não é inversível.

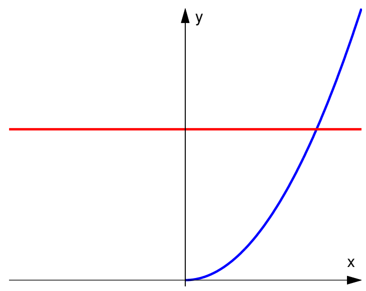


Figura 2.19: $f(x) = x^2$ com $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ é inversível.

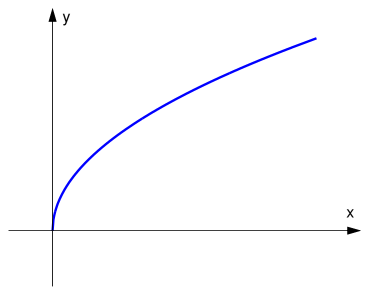


Figura 2.20: Função inversa de $f(x) = x^2$ com $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$.

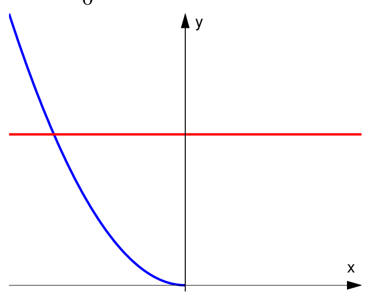


Figura 2.21: $f(x) = x^2$ com $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^-$ é inversível.

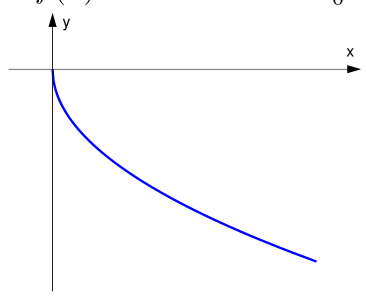


Figura 2.22: Função inversa de $f(x) = x^2$ com $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^-$.

Às vezes, precisamos inversas de funções não inversíveis. Neste caso, temos que subdividir a função em **ramos**, i.e., trechos da função onde ela é injetora, de modo que a inversa exista neste trecho.

Exemplo 4. *Determine uma função inversa para $f(x) = \operatorname{sen} x$.*

Qual x pertence a um valor y dado da função $f(x)$? Não podemos responder esta pergunta unicamente, porque a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é uma função periódica e, portanto, não é injetora (ver Figura 2.23). Portanto, a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ não tem inversa (não passa pelo teste da reta horizontal).

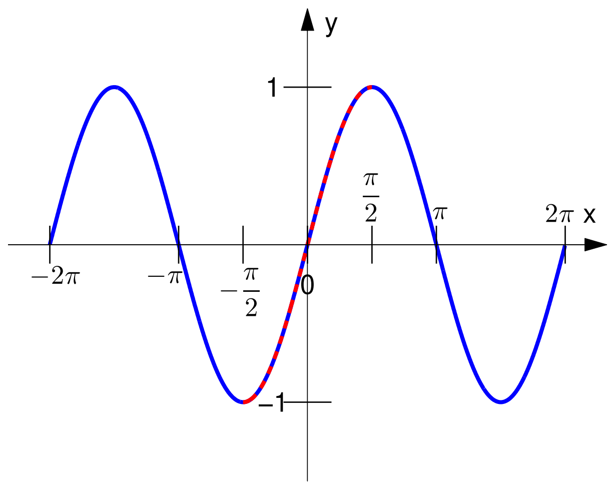


Figura 2.23: Gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ (linha contínua azul) e seu ramo principal (linha tracejada vermelha) que é uma função injetora e, portanto, inversível.

Porém, restringindo o domínio para $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, i.e, considerando a função

$$F(x) = \operatorname{sen} x \quad , \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(chamado de *ramo principal*, veja o trecho tracejado em vermelho na Figura 2.23), podemos responder a pergunta, pois assim, para um y dado em $[-1, 1]$, podemos achar um único valor x em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo valor de F é y.

Definimos então a função inversa do seno, denominada de *arco-seno*, com esta restrição:

$$x = F^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y \quad \Longleftrightarrow \quad y = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Como a imagem da função $F(x)$ nesse domínio $\mathbb{D} = [-\pi/2, \pi/2]$ é $\mathbb{V} = [-1, 1]$, concluímos que o domínio do acro-seno é $\mathbb{D} = [-1, 1]$ e a sua imagem é $\mathbb{V} = [-\pi/2, \pi/2]$ (no ramo principal).

Observação: Em problemas em que precisamos inverter a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, precisamos verificar a possibilidade dos valores de x estarem em outra parte do eixo, i.e., pode ser necessário considerar ramos laterais com $x \in \left[\frac{2n-1}{2}\pi, \frac{2n+1}{2}\pi\right] \quad (n \in \mathbb{Z})$.

Considerações correspondentes podem ser feitas para definir funções inversas de ramos das outas funções trigonométricas. Veremos isso em detalhe na Seção 4.12.1.

2.5.4 Domínio e imagem da função inversa

Notamos que domínio e imagem trocam de papel de função para função inversa, i.e., se $f(x)$ tem domínio $\mathbb{D}_f = \mathbb{A}$ e imagem $\mathbb{V}_f = \mathbb{B}$, então a sua inversa $y = f^{-1}(x)$ tem domínio $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{B}$ e imagem $\mathbb{V}_{f^{-1}} = \mathbb{A}$.

Exemplo 5. *Encontre domínio e imagem de* $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ *e de sua função inversa.*
Observamos que o domínio de f é $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{2\}$ e sua imagem é $\mathbb{V} = \mathbb{R} - \{1\}$. Fazendo $y = f(x)$ temos:

$$y = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow y(x-2) = x+2 \Rightarrow xy - x = 2y + 2 \Rightarrow x = \frac{2y+2}{y-1}$$

Substituindo y por x e x por f^{-1} temos:

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+2}{x-1}$$

Notamos que o domínio de f^{-1} é $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{1\}$ e sua imagem é $\mathbb{V} = \mathbb{R} - \{2\}$.

2.5.5 Gráfico da função inversa

O gráfico da função inversa pode ser obtido a partir do gráfico da função por espelhamento na primeira diagonal, i.e., na bissetriz dos quadrantes ímpares (veja Figura 2.24).

Um modo fácil de visualizar o gráfico da função inversa quando se tem o gráfico da função é inclinar a cabeça 90° para a direita, de modo que o eixo horizontal (que representa a variável independente) se torne o eixo vertical (que representa a variável dependente, e imaginar o outro eixo com a orientação contrária.

Observação: Pela Figura 2.24, notamos que a inversa da função inversa é a função original (Observação 1 abaixo).

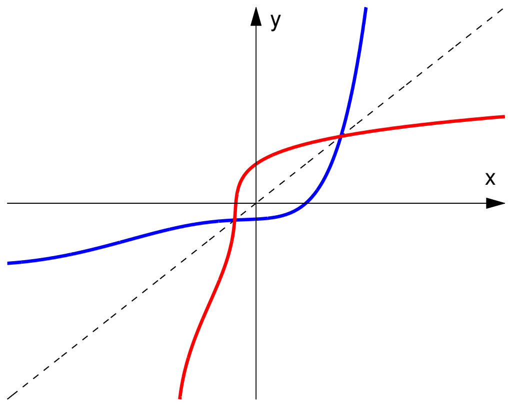


Figura 2.24: Espelhamento do gráfico de uma função (linha azul) na primeira diagonal (linha preta traçejada) resulta no gráfico da função inversa (linha vermelha).

Observações:

$$\begin{array}{rrcl} 1. & (f^{-1}(x))^{-1} & = & f(x) \\ 2. & f^{-1}(f(x)) & = & x \\ 3. & f(f^{-1}(x)) & = & x \end{array}$$

2.5.6 O logaritmo: a função inversa da função exponencial

Notamos que a função exponencial é uma função monótona (crescente para $a > 1$, decrescente para $a < 1$) e, portanto, injetora. Assim sendo, ela possui inversa.

$$f(x) = a^x \qquad f^{-1}(x) = ?$$

Definição: $$a^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y$$
(Leia-se: x é o logaritmo com base a de y)

Ou seja, o logaritmo responde a pergunta: qual é o valor x que tenho que colocar no expoente da base a para obter o valor do argumento y?

Observação:

$$\begin{aligned} \log_a a &= \log_a a^1 &= 1 \\ \log_a 1 &= \log_a a^0 &= 0 \end{aligned}$$

Exemplos:

$$\begin{aligned} \log_2 64 &= \log_2 2^6 = 6 \\ \log_{10} 10\,000 &= \log_{10} 10^4 = 4 \end{aligned}$$

2.5.6.1 Domínio e imagem

Domínio de $f(x) = a^x$: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, imagem: $\mathbb{V} = (0, \infty)$.
Portanto, domínio e imagem do logaritmo são:

$$\mathbb{D} = (0, \infty) \qquad \mathbb{V} = \mathbb{R}$$

2.5.6.2 Gráfico

O gráfico de uma função logarítmica é obtido ao espelhar o gráfico da função exponencial correspondente pela diagonal principal. Por exemplo,

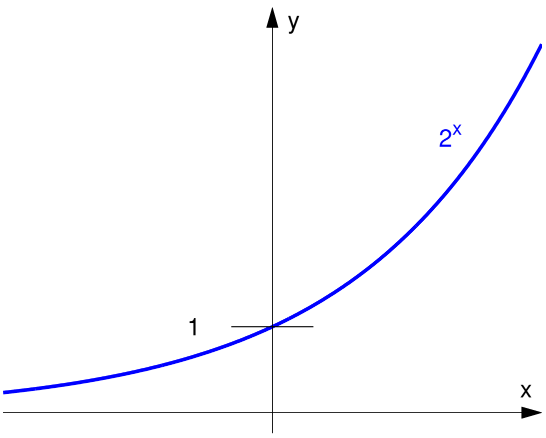


Figura 2.25: Função 2^x.

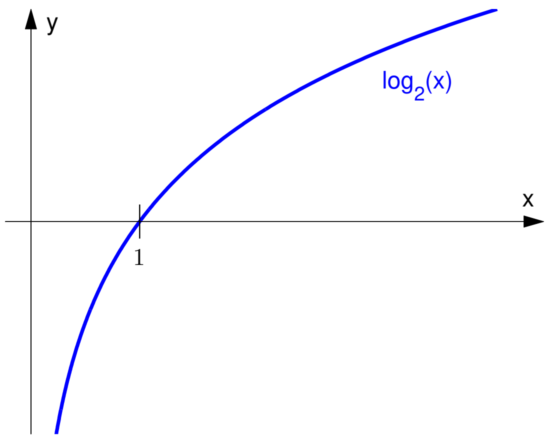


Figura 2.26: Função $\log_2(x)$.

2.5.6.3 Leis dos logaritmos

1) A partir de

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

temos pela unicidade do logaritmo:

$$\log_a (a^x \cdot a^y) = \log_a a^{x+y} = x + y$$

Portanto, definindo $A \equiv a^x$ e $B \equiv a^y$ e observando

$$A = a^x \Leftrightarrow x = \log_a A \quad \text{e} \quad B = a^y \Leftrightarrow y = \log_a B$$

segue que

$$\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$$

2) De forma análoga:

$$\begin{aligned} \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\ \Rightarrow \log_a \left(\frac{A}{B}\right) &= \log_a A - \log_a B \end{aligned}$$

3) Ainda:

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= a^{x \cdot y} \\ \log_a (a^x)^y &= \log_a a^{x \cdot y} = x \cdot y \\ \Rightarrow \log_a A^y &= y \cdot \log_a A \end{aligned}$$

4) Seja $(a^x)^y = A^y \equiv C$. Então

$$\begin{aligned} \log_A C &= y \\ \log_a C &= x \cdot y = \log_A C \cdot \log_a A \\ \Rightarrow \log_A C &= \frac{\log_a C}{\log_a A} \end{aligned}$$

Esta última equação permite calcular o logaritmo a qualquer base usando logaritmos a outra base.

Observação: Usando nesta propriedade a nova base $a = C$, obtemos
$\log_A C = \dfrac{\log_C C}{\log_C A} = \dfrac{1}{\log_C A}$

Exemplo: $\log_{16} 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 16} = \dfrac{1}{\log_2 2^4} = \dfrac{1}{4}$

Observação: Os argumentos usados aqui para deduzir as regras de cálculo para funções logarítmicas a partir das regras de cálculo da função exponencial são de equivalência, i.e., podem ser utilizadas para deduzir as regras de cálculo da função exponencial a partir as regras das funções logarítmicas.

2.5.6.4 Logaritmo natural (ou neperiano)

Logaritmo com base e:

$$y = e^x \Longleftrightarrow x = \log_e y$$

Notação:

$$\log_e x \equiv \ln x$$

Observação:

$$\begin{aligned} \ln e &= 1 \\ \ln 1 &= 0 \end{aligned}$$

2.5.6.5 Alguns exemplos

$$\begin{aligned}
\log_7 5 &= \frac{\ln 5}{\ln 7} \\
& \text{(É assim que se calcula logaritmos com bases diferentes na calculadora!)} \\
\log_3 54 &= \log_3(27 \cdot 2) = \log_3 3^3 + \log_3 2 = 3 + \log_3 2 = 3 + \frac{\ln 2}{\ln 3} \\
\ln(5e^{3x}) &= \ln 5 + \ln(e^{3x}) = \ln 5 + 3x
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Limites

3.1 Limites de sequências

Quando se tem uma sequência de números, as vezes se percebe uma tendência desta sequência de se aproximar a um certo valor.

Exemplos:

1) $$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \cdots \ \to\ 0$$

2) $$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \cdots \ \to\ 1$$

3) $$3,\ 3{,}3,\ 3{,}33,\ 3{,}333,\ \cdots \ \to\ \frac{10}{3}$$

4) $$1,\ -\frac{1}{2},\ +\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ +\frac{1}{16},\ -\frac{1}{32},\ \cdots \ \to\ 0$$

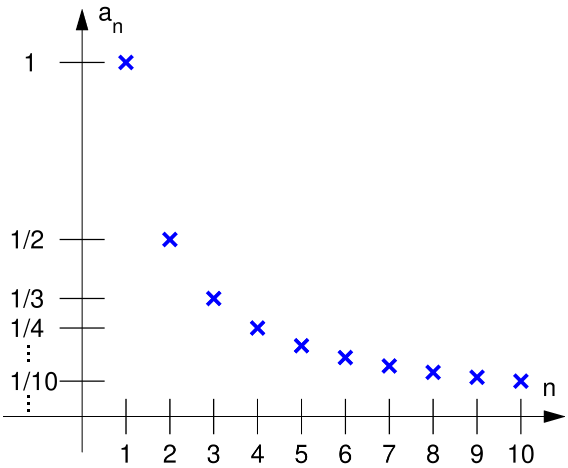


Figura 3.1: Ilustração do começo da primeira sequência dos exemplos.

Dizemos que a sequência converge ou tem um limite. Denotando o n-ésimo número da sequência por a_n $\left(\text{Exemplo 1: } a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3},\ \cdots\ ,\ a_n = \frac{1}{n}\right)$, escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

onde L é o limite da sequência. Lemos: O limite dos a_n quando n cresce ilimitadamente (tende a infinito) é L.

Para os exemplos acima, podemos então escrever

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

3) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{3\cdot 10^{n-1}}\right) = \frac{10}{3}$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 0$$

3.2 Limites de funções

Definição: O **limite** de uma função $f(x)$ no ponto $x = a$ existe se existir um intervalo aberto I contendo a tal que *qualquer* sequência de valores $x_n \in I$ da variável independente, que se aproxima a a, *sempre* resulta em uma sequência de valores da variável independente, $y_n = f(x_n)$, que se aproxima a um valor L. Dizemos que a função $y = f(x)$ tende a L quando x tende a a e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

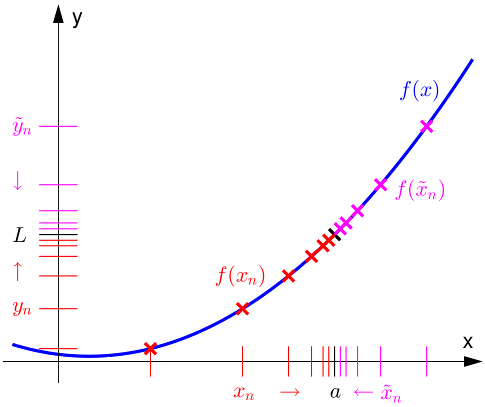


Figura 3.2: Limite de uma função.

Lemos: "O limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L."

A Figura 3.2 mostra duas sequências x_n e $\tilde{x}_n$ tendendo a a que geram duas sequências y_n e $\tilde{y}_n$ que tendem a L.

Observação: *Não foi utilizado* o valor $f(a)$ da função no ponto $x = a$. O valor da função nesse ponto *não tem relevância* para a existência (e para o valor) do limite. Caso o valor do limite L e o valor da função no ponto a forem iguais, chamamos a função de *contínua* em a. (Veremos isso na Seção 3.11.)

3.3 Cálculo com limites

Para cálculo com limites, temos a nosso dispor os seguintes teoremas:

Teorema (da unicidade – T.U.): Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$.

O Teorema de unicidade do limite garante que se o limite de uma função existe, então ele é único. Em outras palavras, dois valores do mesmo limite, mesmo encontrados por caminhos diferentes, sempre tem que ser iguais.

Teorema (da constante – T.C.): $\lim\limits_{x \to a} C = C$ com C constante. (Prova: Fica evidente que, para qualquer sequência de valores x, a sequência resultante em y neste caso sempre assume somente o valor de C.)

Teorema (da identidade – T.I.): $\lim\limits_{x \to a} x = a$ (Prova: Fica evidente que qualquer sequência de valores y será a mesma da respectiva sequência de valores x que converge para a.)

Para avaliarmos limites de expressões compostas, podemos fazer uso dos seguintes teoremas:

Teorema (da soma – T.S.):
Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_f$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_g$, então $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = L_f \pm L_g$.

Notamos que este teorema pode ser estendido a qualquer número finito de funções.

Teorema (da multiplicação por escalar – T.M.E.):
Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot L$.

Corolário (da reta): $\lim_{x\to a}(mx+b) = ma+b$ (Prova: Aplicação dos Teoremas da soma, da multiplicação por escalar, da identidade e da constante.)

Teorema (do produto – T.P.):
Se $\lim_{x\to a} f(x) = L_f$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L_g$, então $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = L_f \cdot L_g$.

Da mesma forma como o teorema da soma, também este teorema pode ser estendido a qualquer número finito de funções.

Teorema (da potência natural – T.P.N.):
Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{x\to a} f(x)^n = L^n$.
(Consequência do teorema anterior.)

Teorema (da divisão – T.D.):
Se $\lim_{x\to a} f(x) = L_f$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L_g \neq 0$, então $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_f}{L_g}$.

Teorema (da raiz – T.R.):
Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$.
Para o resultado ser real, consideramos $n \in \mathbb{N}$ e $L > 0$ ou n ímpar e $L \leq 0$.

Teorema (da potência real – T.P.R.):
Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $r \in \mathbb{R}$ (se $r < 0$, $L \neq 0$) então $\lim_{x\to a} f(x)^r = L^r$.
(Generalização dos teoremas anteriores.)
Para ser real, consideramos $L < 0$ só se r for inteiro ou racional com denominador ímpar.

Observação: Para podermos aplicar os teoremas acima, os limites individuais tem que *existir*. Senão, nada pode ser afirmado. Mesmo que os limites das partes não existam, o limite da expressão completa pode existir. Terá de ser analisado por outros meios.

Exemplo 1. *Encontre* $\lim_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^3+2x+4}{x^2+5}}$.

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^3+2x+4}{x^2+5}} \overset{(T.R)}{=} \sqrt{\lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x+4}{x^2+5}} \overset{(T.D)}{=} \sqrt{\frac{\lim_{x\to 2} x^3+2x+4}{\lim_{x\to 2} x^2+5}} \overset{(T.S)}{=} \sqrt{\frac{\lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2} 2x + \lim_{x\to 2} 4}{\lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 5}}$$

$$\overset{(T.M.E,T.P.N)}{=} \sqrt{\frac{(\lim_{x\to 2} x)^3 + 2\cdot \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 4}{(\lim_{x\to 2} x)^2 + \lim_{x\to 2} 5}} \overset{(T.I,T.C)}{=} \sqrt{\frac{2^3+2\cdot 2+4}{2^2+5}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

Encontramos o valor da expressão no limite, calculado no ponto $x = 2$.

Notamos que podemos proceder dessa forma para qualquer função algébrica, desde que não encontremos uma divisão por zero ou uma raiz de um valor negativo. Portanto, podemos concluir que vale a seguinte afirmação:

para **funções algébricas**: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ contanto que $a \in \mathbb{D}$.

Observação: Note que caso o cálculo de $f(a)$ envolva uma divisão por zero, então o ponto a não está no domínio da f e, portanto, o valor do limite não pode ser igual ao valor da função naquele ponto. Ainda assim, o limite pode existir. Abaixo, investigaremos essa situação em mais detalhe.

3.4 Limites laterais

Pela definição do limite $\lim_{x\to a} f(x)$, não podemos calcular $\lim_{x\to 4} \sqrt{x-4}$, porque a definição exige um intervalo aberto contendo o ponto a onde o limite está a ser calculado (veja a definição acima). Porém, restringindo x aos valores maiores que 4, ou seja, considerar $x \in (a, \varepsilon)$, podemos fazer $x - 4$ tão pequeno quanto quisermos, escolhendo x cada vez mais perto de 4, mantendo $x > 4$. Isto é chamado limite pela direita, por envolver somente sequências de valores de x que se aproximam a a pela direita. Dizemos que x tende a a pela direita, representado pelo símbolo $x \to 4^+$.

Observamos que neste caso, $f(x) = \sqrt{x-4}$ tenderá a zero. Escrevemos então:

$$\lim_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = 0$$

Correspondentemente existe o limite pela esquerda para uma função f definida em um intervalo aberto (δ, a), denotado por $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ se este limite existir.

Os teoremas acima para cálculo com limites permanecem inalterados para limites laterais, substituindo $x \to a$ por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

Para determinarmos a existência de um determinado limite, podemos avaliar a existência dos limites laterais.

Exemplo 1. *Determine o limite da função sinal em* $x = 0$.
Definição: A função

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$$

é a denominada função *sinal*. O símbolo sgn vem da palavra em latim *signum*, que significa sinal.

Observação:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sgn}(x) \cdot |x| \\ |x| &= \operatorname{sgn}(x) \cdot x \\ \operatorname{sgn}(x) &= \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

Calculamos os limites laterais em $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) &= \lim_{x\to 0^+} 1 &&= 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) &= \lim_{x\to 0^-} -1 &&= -1 \end{aligned}$$

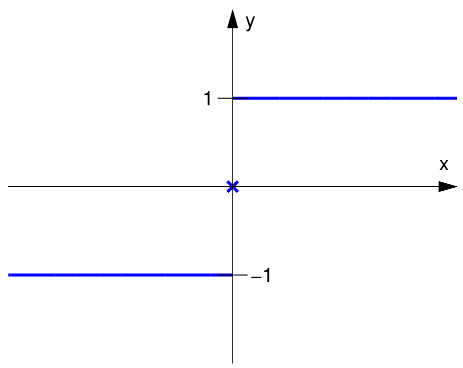


Figura 3.3: Função sinal.

Como $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) \neq \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x)$, concluimos que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ não existe.

Teorema dos limites laterais:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Exemplo 2. *Determine, se existir, o limite em $x = 0$ da função $g(x)$ dada por*

$$g(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rclcl} \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) & = & \lim\limits_{x\to 0^+} x & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) & = & \lim\limits_{x\to 0^-} -x & = & 0 \\ & \Rightarrow & \lim\limits_{x\to 0} g(x) & \stackrel{\text{Teor. lim. lat.}}{=} & 0 \end{array}$$

Note que o valor da função g no ponto $x = 0$ não foi utilizado no cálculo do limite. Observamos que neste caso, $g(0) = 2 \quad \neq \quad \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

Observação: Uma função pode assumir em um determinado ponto um valor diferente dos seus limites laterais.

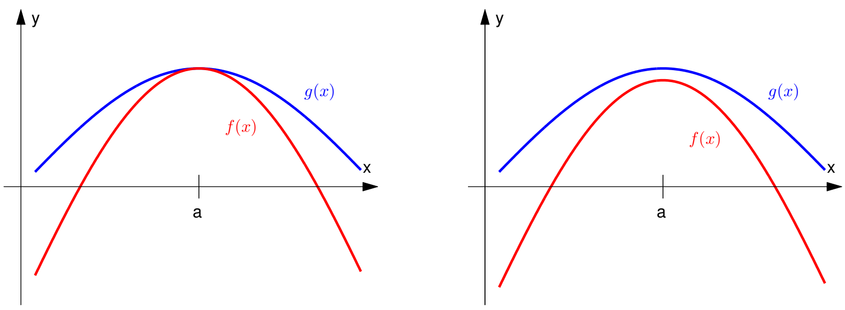
3.5 O Teorema do Confronto

Mas o que podemos fazer se a expressão cujo limite queremos calcular não admite a aplicação dos teoremas básicos da Seção 3.3? A seguir, veremos algumas ferramentas, a mais poderosa entre elas sendo o Teorema do Confronto.

3.5.1 Cotar um limite

Às vezes, não é possível determinar o valor de um limite. Nesse caso, pode ser interessante mostrar que ele está abaixo ou acima de uma determinada cota. Para esta finalidade, podemos aplicar o seguinte

Teorema: Se $f(x) \leq g(x)$ quando x está perto de a [i.e., $x \in (c, b)$ contendo a, $x \neq a$], então $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.



(a) (b)

Figura 3.4: Representação de duas funções f e g com $f(x) < g(x)$ para x perto de a.

Observação: Mesmo que $f(x) < g(x)$ para todos os x perto de a, ainda assim pode ser que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$. Veja Figura 3.4a.

3.5.2 Teorema do confronto

Mediante o teorema anterior, é fácil demonstrar o

Teorema do confronto (sanduiche, espremedura): Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está perto de a e $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então:

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Exercício: Prove o Teorema do Confronto.

Exemplo 1. *Determine* $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Observação: $\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ não funciona pois o seno oscila entre -1 e 1, portanto não tem limite quando o argumento cresce ilimitadamente. Mas sabemos que

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Portanto, multiplicando por $x^2 > 0$:

$$-x^2 \leq x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

Como $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, segue que

$$0 \leq \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

e portanto $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

3.5.3 Corolário do fator zero

Uma aplicação do Teorema do Confronto é o

Corolário do fator zero:
Seja $f(x) \gtrless 0 \; \forall \, x \in (a - \varepsilon, a)$ e $\forall \, x \in (a, a + \varepsilon)$.
Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M \; \forall \, x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, sendo M e ε constantes, então

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$$

Exercício: Prove o corolário do fator zero usando o teorema do confronto.

Exemplo 2. *Determine* $\lim_{x \to 2} (x - 2) \cdot \cos\left(\frac{1}{x - 2}\right)$

Sabemos que

$$\lim_{x \to 2} (x - 2) = 0$$

com $x-2<0 \; \forall \, x<2$ e $x-2>0 \; \forall \, x>2$. Além disso,

$$\left|\cos\left(\frac{1}{x-2}\right)\right| \leq 1 \qquad \forall x$$

Portanto também em um pequeno intervalo contendo 2. Assim, pelo corolário do fator zero,

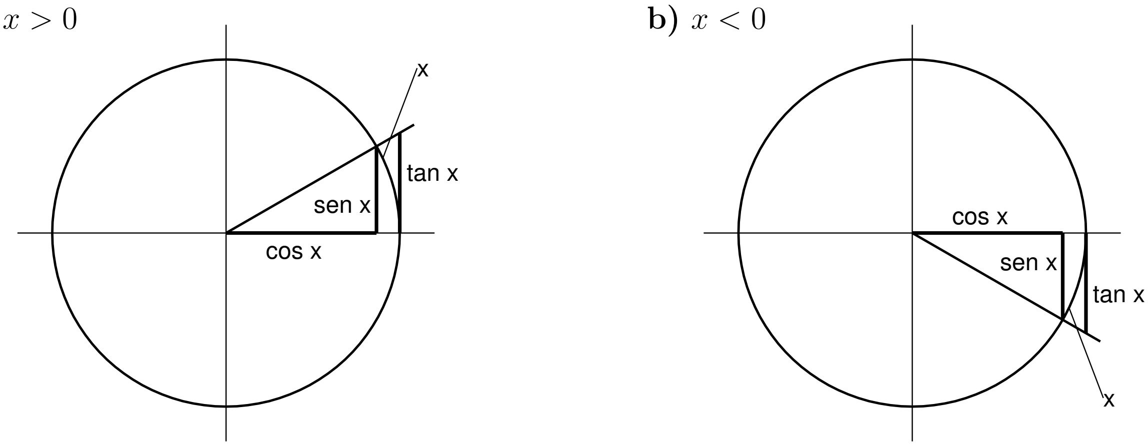
$$\lim_{x\to 2}(x-2)\cdot\cos\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$$

Exercício: Justifique este resultado diretamente com o Teorema do Confronto.

3.5.4 O limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Exemplo 3. *(Limite fundamental) Determine* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
Inicialmente, observamos que temos que tratar os casos $x>0$ e $x<0$ separadamente.

a) $x>0$ **b)** $x<0$



$\operatorname{sen} x < x < \tan x$ $\tan x < x < \operatorname{sen} x$

Figura 3.5: Relação entre x, $\operatorname{sen} x$ e $\tan x$

Analisamos geometricamente (veja Figura 3.5) a relação entre x, $\operatorname{sen} x$ e $\tan x$ e encontramos nos dois casos: (a) $x>0$: $\operatorname{sen} x < x < \tan x$, (b) $x<0$: $\tan x < x < \operatorname{sen} x$. Portanto,

(a) $x>0$: $\operatorname{sen} x < x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \quad$ e $\quad x < \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$

(b) $x<0$: $\operatorname{sen} x > x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \quad$ e $\quad x > \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$

Ou seja, em ambos os casos, a divisão da relação entre x e $\operatorname{sen} x$ por x fornece: $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ e a divisão da relação entre x e $\tan x$ por x e multiplicação por $\cos x$ fornece: $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$.
Assim, para todo $x \neq 0$:

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \ .$$

Já que $\cos x > 0 \; \forall \, |x| < \frac{\pi}{2}$, temos ainda que em torno de $x=0$ vale

$$1-\cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x} < \operatorname{sen}^2 x < x^2 \ ,$$

que implica que $\cos x > 1 - x^2$. Assim, obtemos

$$\begin{array}{rcccl} 1 - x^2 < \cos x & < & \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & < & 1 \\ 1 - x^2 & < & \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & < & 1 \\ \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} 1 - x^2 & \leq & \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \leq & \lim_{x \to 0} 1 \\ \Rightarrow \quad 1 & \leq & \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \leq & 1 \end{array}$$

e, portanto, pelo Teorema do Confronto, podemos concluir que $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$

Observação: Ainda notamos que $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

Exercício: Mostre que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ usando que as áreas dos triângulos ΔOPR e ΔOQS e do segmento do círculo $\sphericalangle OQR$ satisfazem $\Delta OPR < \sphericalangle OQR < \Delta OQS$. Veja Figura 3.6.

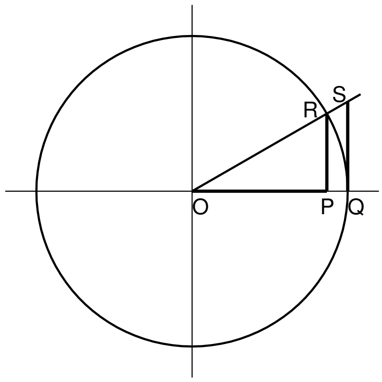


Figura 3.6: Exercício

Exemplo 4. *Calcule* $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + 3x}$

Não podemos aplicar o teorema da divisão, pois o limite da função no denominador é $\lim_{x \to 0} x^2 + 3x = 0$. Mas fatorando a expressão de modo a isolar um fator $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, podemos escrever

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{x+3} = \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{=1 (l.f.)} \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x+3}}_{=\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

onde foi possível aplicar o teorema do produto, uma vez que os limites individuais existem.

3.6 Limites no infinito e assíntotas horizontais

3.6.1 Limites no infinito

Exemplo 1. *Considere a função* f*:*

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

Vamos calcular valores desta função para alguns x crescentes:

x	0	1	2	3	4	5	6	10	100	1000	10000	$\cdots$	$\to\infty$
f	0	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{10}$	$\frac{23}{17}$	$\frac{50}{26}$	$\frac{72}{37}$	$\frac{200}{101}$	$\frac{20000}{10001}$	$\frac{2000000}{1000001}$	$\frac{200000000}{100000001}$	$\cdots$	$\to 2$

Da tabela vemos que a medida que x cresce, os valores de f se aproximam cada vez mais de 2 a difereça entre $f(x)$ e 2 fica:

x	0	1	2	3	4	5	6	10	100	1000	10000	$\cdots$
$2-f$	2	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{2}{26}$	$\frac{2}{37}$	$\frac{2}{101}$	$\frac{2}{10001}$	$\frac{2}{1000001}$	$\frac{2}{100000001}$	$\cdots$

Obviamente, podemos conseguir o valor de f tão próximo de 2 quanto desejarmos, tomando x suficientemente grande.

Esta forma do limite se chama *limite no infinito* e se escreve

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2$$

Da mesma forma pode ser definido o limite em menos infinito

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

se f se aproxima a L quando x descresce ilimitadamente.

Podemos observar que o limite da nossa função do exemplo $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$, também é 2 quando x decresce ilimitadamente, ou seja, quando "x tende a $-\infty$". Escrevemos

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2$$

3.6.2 Assintotas horizontais

Definição: Uma **assíntota** é uma reta da qual uma função se aproxima cada vez mais (i.e., a diferença entre a função e a reta tende a zero).

Definição: Dizemos que a reta horizontal $y=a$ é **assíntota horizontal** da função f quando x (de-)cresce ilimitadamente (ou "tende a (menos) infinito"), se $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-a]=0$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-a]=0$), ou seja,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=a \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=a\right)$$

Também dizemos nesse caso que a função f se aproxima **assintoticamente** à reta $y=a$.

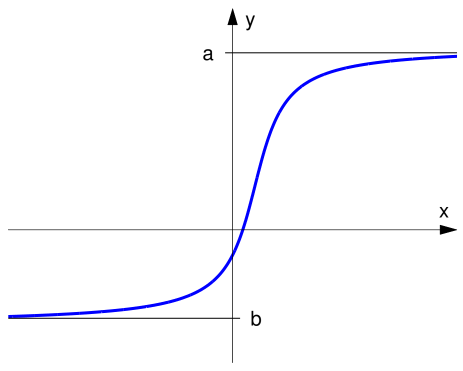


Figura 3.7: Função com duas assíntotas horizontais, sendo $y=a$ para $x\to\infty$ e $y=b$ para $x\to-\infty$.

Observação: Notamos que no exemplo acima, a reta $y=2$ é assíntota horizontal da função $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ quando $x\to\infty$ e quando $x\to-\infty$.

3.6.3 Cálculo com limites no infinito

Os teoremas de limites menos o da identidade (e, em consequência, o corolário da reta) permanecem inalterados quando "$x \to a$" é substituido por "$x \to \pm\infty$".

O fato de que o teorema da identidade não valer para limites no infinito causa um problema na aplicação das demais teoremas básicos, uma vez que não podemos mais desmembrar diretamente limites do tipo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x-3}{2x+5}$$

pois os limites individuais não existem. Mas podemos contornar a situação porque, para limites no infinito temos o seguinte teorema adicional:

Teorema do limite no infinito: Se r é um número positivo qualquer, então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Exemplo 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-3}{2x+5} = ?$

Uma vez que os limites do nomerador e do denominador não existem, não é possível aplicar o teorema da divisão nesta forma. Mas podemos alterar a expressão algebricamente. Para podermos usar o teorema do limite para infinito dividimos numerador e denominador por $x \neq 0$, obtendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x-3}{2x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{4-\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x}}$$

Agora podemos desmembrar a expressão, aplicando os teoremas básicos, para obtermos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4-\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\dfrac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{x}} = \frac{4 - 3\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}}{2 + 5\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}} = \frac{4-3\cdot 0}{2+5\cdot 0} = 2$$

Portanto, a reta $y = 2$ é assíntota horizontal dessa função quando $x \to \infty$. Pela conta correspondente, podemos mostrar que a mesma reta também é assíntota horizontal dessa função quando $x \to -\infty$.

Exemplo 3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-x+5}{4x^3-1} = ?$

Neste caso, temos que dividir numerador e denominador por x^3, que é a maior potência de x que aparece na fração, para que todos os termos tenham a forma do teorema do limite no infinito:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x+5}{4x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}} = \frac{2\cdot 0 - 0 + 5\cdot 0}{4-0} = \frac{0}{4} = 0$$

Exemplo 4. $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2-5}} =$ *?*

Neste caso, novamente temos que dividir pela maior potência de x que aparece. Qual é? É o x, pois o x^2 aparece dentro da raiz, o que faz ele valer como $(x^2)^{1/2} = x$ neste caso.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2-5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2-5}}{x}}$$

Agora, para que possamos simplificar a expressão no denominador, temos que lembrar que estamos considerando valores negativos de x. Portanto $x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x| = -|x| = -\sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2-5}}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2-5}}{-\sqrt{x^2}}} = -\lim_{x \to -\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2-5}{x^2}}} = -\lim_{x \to -\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}}$$

Agora podemos verificar que a expressão pode ser desmembrada usando os teoremas básicos, porque todos os limites individuais existem. Ao aplicarmos os teoremas da divisão, da soma e da raiz, vemos que

$$-\lim_{x \to -\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}} = -\frac{\lim\limits_{x \to -\infty} 3 + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} 4 + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^2}}} = L$$

Usando os teoremas da multiplicação por escalar, da constante e do limite infinito, obtemos então

$$L = -\frac{3+4\cdot 0}{\sqrt{4-5\cdot 0}} = -\frac{3}{\sqrt{4}} = -\frac{3}{2}$$

Observação: Um teste para verificar se o valor de um limite obtido é razoável é a substituição de um valor na expressão. Como neste caso, o limite é para $x \to -\infty$, podemos testar com $x = -10^q$, sendo q suficientemente grande. Obtemos

$$\frac{3(-10^q)+4}{\sqrt{4(-10^q)^2-5}} = -\frac{3\cdot 10^q - 4}{\sqrt{4\cdot 10^{2q}-5}} = -\frac{3\cdot 10^q(1-4/(3\cdot 10^q))}{2\cdot 10^q\sqrt{1-5/(4\cdot 10^{2q})}} = -\frac{3}{2}\underbrace{\frac{1-4/(3\cdot 10^q)}{\sqrt{1-5/(4\cdot 10^{2q})}}}_{\approx 1}$$

Assim, ganhamos confiança sobre o valor calculado ou temos um indício quando erramos na conta. Mas é importante ter em mente que este procedimento não constitui uma prova, porque não tem garantia que escolhemos o valor para o teste suficientemente próximo.

3.7 Limites infinitos e assíntotas verticais

3.7.1 Limites infinitos

Seja considerada a função

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$$

Procuramos o valor desta função quando x está próximo de 2.
Está obvio pela forma da função que cada vez mais perto x esteja de 2, cada vez maior o valor da função:

x	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{10}$	$\frac{199}{100}$	$\frac{1999}{1000}$	$\frac{19999}{10000}$	$\frac{199999}{100000}$	$\ldots$
f	3	12	27	48	300	30000	3000000	300000000	30000000000	$\ldots$

Como f cresce ilimitadamente quando x tende a 2, notamos que não existe um número L tal que a função se aproxime a ele, ou seja, o limite *não existe*. Porém, notamos que os valores da função são *cada vez maiores*. Neste caso, costumamos dizer que o limite desta função pela esquerda, quando x se aproxima a 2, é infinito, e escrevemos

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = \infty$$

embora ∞ não seja um número. Da mesma forma podemos verificar que o limite pela direita tem o mesmo comportamento, i.e.,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = \infty$$

Portanto, podemos afirmar que

$$\lim_{x\to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = \infty$$

Definições correspondentes devem ser feitas para limites no infinito que são infinitos. Escrevemos, por exemplo,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Nota-se: Quando o limite de uma função é infinito ou menos infinito, então o limite <u>não existe</u>! O símbolo $\pm\infty$ indica o que acontece com os valores da função. Eles (de)crescem ilimitadamente, i.e, sem se aproximar a um limite.

3.7.2 Assintotas verticais

Definição: Dizemos que a reta vertical $x = a$ é **assíntota vertical** da função f quando ao menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

$$\begin{array}{rlcl} \text{(i)} & \lim_{x\to a^+} f(x) & = & \infty \\ \text{(ii)} & \lim_{x\to a^+} f(x) & = & -\infty \\ \text{(iii)} & \lim_{x\to a^-} f(x) & = & \infty \\ \text{(iv)} & \lim_{x\to a^-} f(x) & = & -\infty \end{array}$$

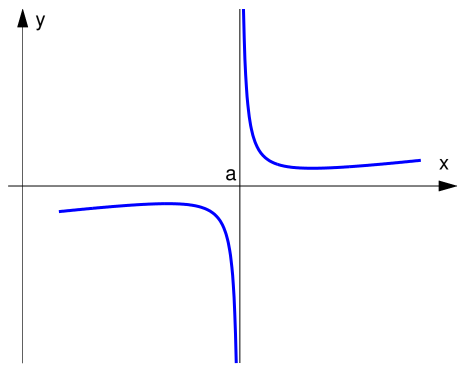


Figura 3.8: Função com assíntota vertical – Casos (i) e (iv).

Observação: Notamos que no exemplo acima, a reta $x = 2$ é assíntota vertical da função $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$.

3.7.3 Cálculo com limites infinitos

Pelo fato de um limite infinito ser um *limite inexistente*, não podemos fazer uso dos teoremas básicos da Seção 3.3 quando uma parecela de uma expressão tende a mais ou menos infinito. Em contrapartida, temos um novo conjunto de teoremas ao nosso dispor que permitem conclusões sobre tais limites.

Teorema do limite infinito: Se r é um número positivo, então:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} &= \infty \quad r \in \mathbb{R}^+ \\
\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} &= \begin{cases} \infty & r \text{ par} \\ -\infty & r \text{ ímpar} \end{cases} \quad r \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Note que, se $r \notin \mathbb{N}$, o último limite não está nos números reais.

Teorema do denominador zero: Se a é um número real qualquer, I um intervalo aberto contendo a, e se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \neq 0$, c constante, e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então:

(i) Se $c > 0$ e $g(x) > 0$ para $x \in I$, $x \neq a$, então:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \tag{1}$$

(ii) Se $c > 0$ e $g(x) < 0$ para $x \in I$, $x \neq a$, então:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \tag{2}$$

(iii) Se $c < 0$ e $g(x) > 0$ para $x \in I$, $x \neq a$, então:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \tag{3}$$

(iv) Se $c < 0$ e $g(x) < 0$ para $x \in I$, $x \neq a$, então:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \tag{4}$$

Este teorema vale também para limites laterais e limites no infinito.

Observação: Notamos que o teorema não trata da situação quando numerador e denominador tendem a zero. Dizemos que este é a forma indeterminada "$\frac{0}{0}$".

Uma forma indeterminada (ou indeterminação) é um limite cujo comportamento não pode ser determinado pelos teoremas básicos da Seção 3.3 e nem pelos desta e da próxima seção. Veremos mais adiante outras formas indeterminadas e, depois, um método para tratá-las. Deve-se notar, porém, que algumas formas indeterminadas podem ser modificadas algebricamente de modo a remover a indeterminação.

Exemplo 1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2} = ?$
Analisando númerador e denominador em separado, observamos

$$\lim_{x\to 2} 3 = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2}(x-2)^2 = 0$$

Pelo fato do denominador tender a zero, não podemos aplicar os teoremas básicos para calcular o limite. Mas podemos usar o teorema do denominador zero. Observamos que $3 > 0$ e $(x-2)^2 > 0 \,\forall\, x \neq 2$. Assim, podemos concluir que o limite zero do denominador é alcançado passando somente por valores positivos, o que podemos escrever como

$$\lim_{x\to 2}(x-2)^2 = 0^+$$

Portanto, pela parte (i) do teorema do denominador zero,

$$\lim_{x\to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = \text{“}\frac{\overset{>0}{3}}{0^+}\text{”} = +\infty$$

Exemplo 2. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$, *se existir.*

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 3} x^2 + \lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 2}{\lim\limits_{x\to 3} x^2 - \lim\limits_{x\to 3} 2x - \lim\limits_{x\to 3} 3} = \frac{(\lim\limits_{x\to 3} x)^2 + \lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 2}{(\lim\limits_{x\to 3} x)^2 - 2\lim\limits_{x\to 3} x - \lim\limits_{x\to 3} 3} = \frac{9+3+2}{9-6-3} = \text{“}\frac{14}{0}\text{”}$$

O limite do denominador é zero. Portanto, esse desmembramento é inválido. Temos que aplicar o *teorema do denominador zero*. Para tal, temos que ver o sinal do limite do numerador, $14 > 0$, e se os valores da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ são positivos ou negativos em volta de 3. Observamos que $f(x) < 0$ para $-1 < x < 3$ e $f(x) > 0$ para $x > 3$, portanto temos que distinguir os dois limites laterais:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} = \text{“}\frac{\overset{>0}{14}}{0^-}\text{”} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} = \text{“}\frac{\overset{>0}{14}}{0^+}\text{”} = +\infty$$

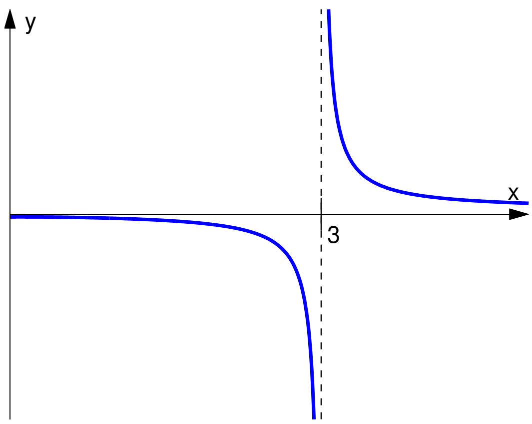


Figura 3.9: Assíntota vertical em em $x = 3$.

Portanto o limite $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$ **não existe!**
Observamos que a reta $x = 3$ é assíntota vertical dessa função (veja Figura 3.9).

Exemplo 3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-x^2}{3x+5} = ?$
Temos um limite no infinito. Para aplicarmos o teorema do limite no infinito, dividimos numerador e denominador pela maior potência de x que aparece.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-x^2}{3x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}-1}{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}} = \text{“}\frac{-1}{0}\text{”}$$

Observamos que o limite do numerador é $-1 < 0$, o do denominador é 0, passando somente por valores positivos, pois x é positivo. Portanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x - x^2}{3x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} = \text{“}\frac{-1}{0^+}\text{”} = -\infty$$

Como já observamos, um limite infinito é um limite que não existe. Portanto, quando uma expressão maior contém uma parte que tende a infinito, os teoremas básicos de Cálculo com limites não se aplicam. Por isso, necessitamos de mais regras para manipular expressões que envolvem limites infinitos. Para tal, temos os seguintes teoremas:

Teorema da soma infinita:

(i) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ constante, então:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \infty \tag{1}$$

(ii) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ constante, então:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = -\infty \tag{2}$$

(iii) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, então:

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \pm\infty \tag{3}$$

O teorema vale para limites laterais e limites para infinito da mesma forma.

Notamos que o teorema não trata da situação em que se precisa calcular a diferença de duas funções que ambas crescem ou decrescem ilimitadamente (ou, equivalentemente, a soma de duas funções quando uma cresce e a outra decresce ilimitadamente). Dizemos que esta é a forma indeterminada “$\infty - \infty$”.

Teorema do produto infinito:

(i) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c > 0$ ou $+\infty$, então:

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \infty \tag{1}$$

(ii) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c < 0$ ou $-\infty$, então:

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty \tag{2}$$

(iii) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c > 0$ ou $+\infty$, então:

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty \tag{3}$$

(iv) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c < 0$ ou $-\infty$, então:

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \infty \tag{4}$$

O teorema vale para limites laterais e limites para infinito da mesma forma.

Notamos que o teorema não trata da situação em que se precisa calcular o produto de duas funções da qual uma tende a zero e a outra cresce ou decresce ilimitadamente. Dizemos que esta é a forma indeterminada "$0 \cdot \infty$".

Teorema do denominador infinito:

Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ (ou $|f(x)| < M \in \mathbb{R}$ para x perto de a), então:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{1}$$

O teorema vale para limites laterais e limites para infinito da mesma forma.

Notamos que o teorema não trata da situação em que a função no numerador também cresce ou decresce ilimitadamente. Dizemos que esta é a forma indeterminada "$\frac{\infty}{\infty}$".

Observação: O caso em que o numerador tende a mais ou menos infinito e o denominador a uma constante é incluso no Teorema do produto infinito.

Exemplo 4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+2}{x^2-1} + \dfrac{2x^2+2}{x-1} = ?$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} + \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} + \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\
&= \frac{2+0}{1-0} + \text{“}\frac{2+0}{0^+(1-0^+)}\text{”} \\
&= 2 + \infty = \infty
\end{aligned}$$

(ou, como $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}\ \forall x > 1$, temos que o denominador sempre é positivo)

Exemplo 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-x^2}{2x^4+x^6} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-x^2}{2x^4+x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \cdot \frac{2-x^2}{2+x^2}$$

onde

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = \text{“}\frac{\overset{>0}{1}}{0^+}\text{”} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-x^2}{2+x^2} = \frac{2-0}{2+0} = 1$$

Portanto, pelo Teorema do Produto Infinito, $\lim\limits_{x\to 0} \underset{\searrow\infty}{\dfrac{1}{x^4}} \cdot \underset{\searrow 1>0}{\dfrac{2-x^2}{2+x^2}} = \infty$

Exemplo 6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-x^2}{3x+5} = ?$

Temos um limite no infinito. Como vimos no Exemplo 3 na página 61, podemos dividir numerador e denominador pela maior potência de x que aparece na fração inteira e aplicar o teorema do denominador zero. Mas também podemos dividir somente pela maior potência de x que aparece no denominador. Obtemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x - x^2}{3x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{3+5/x} = \text{“}\frac{2-\infty}{3+0}\text{”} = -\infty$$

onde usamos os teoremas da soma e do produto infinito.

3.8 Funções no expoente

Para limites que envolvem funções no expoente, temos as seguintes regras:

Teorema das exponenciais:

(i) Se $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$ então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = L^M$.

(Pode ser não real se $L < 0$.)

(ii) Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M > 0$ então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$.

(iii) Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M < 0$ então

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \infty & \text{se } f(x) \to 0^+ \text{ ou se } f(x) \to 0^- \text{ e } M \text{ par} \\ -\infty & \text{se } f(x) \to 0^- \text{ e } M \text{ ímpar} \\ \text{não real} & \text{se } f(x) \to 0^- \text{ e } M \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

O teorema vale para limites laterais e limites para infinito da mesma forma.

Notamos que o teorema não trata da situação quando base e expoente tendem a zero. Dizemos que esta é a forma indeterminada “0^0”.

Teorema das exponenciais com infinito:

(i) Se $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M > 0$ ou ∞ então

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \infty & f(x) > 0 \quad \text{ou} \quad f(x) < 0 \text{ e } M \text{ par} \\ -\infty & f(x) < 0 \text{ e } M \text{ ímpar} \\ \text{não real} & f(x) < 0 \text{ e } M \notin \mathbb{Z} \end{cases} \tag{1}$$

(ii) Se $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M < 0$ ou $-\infty$ então

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0 \tag{2}$$

(iii) Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ então

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \infty & \text{se } L > 1 \\ 0 & \text{se } -1 < L < 1 \\ \text{não real} & \text{se } L < -1 \end{cases}$$

O teorema vale para limites laterais e limites para infinito da mesma forma.

Note que o caso (iii) inclui a situação em que o expoente tende a $-\infty$, pois

$$f(x)^{-g(x)} = \left(\frac{1}{f(x)}\right)^{g(x)}$$

Notamos que o teorema não trata da situação em que a função na base cresce ou decresce ilimitadamente e a função no expoente tende a zero. Dizemos que esta é a forma indeterminada "∞^0". Além disso, o teorema também não trata da situação em que a função na base tende a 1 (ou -1) e a função no expoente cresce ou decresce ilimitadamente. Dizemos que esta é a forma indeterminada "1^∞".

Observação: Não é indeterminada a expressão "0^∞". Pela parte (iii) do teorema das exponenciais com infinito, uma expressão dessa forma tende a zero. Correspondentemente, "$0^{-\infty}$" tende a $\pm\infty$.

Exemplo 1.

$$\lim_{x\to\infty} (\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0})^{\overbrace{x}^{\to\infty}} = 0$$

3.9 Formas indeterminadas

Com os teoremas de cáculo de limites tratados até aqui, podemos julgar qualquer expressão cujo resultado é determinado pelos *valores* dos limites das suas partes. Porém, vimos que algumas expressões ficaram de forma. Denominamos estas de *formas indeterminadas*. A razão por uma expressão ser indeterminada é que o resultado não depende somente dos valores dos limites individuais, mas de *como* as partes se aproximam a ele.

Com os teoremas vistos até agora, não temos como calcular os limites nas seguintes situações:
(i) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ é indeterminado } \left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\right) \tag{1}$$

(ii) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ é indeterminado } \left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\right) \tag{2}$$

(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) \text{ é indeterminado } (\text{“}\infty - \infty\text{”}) \tag{3}$$

(iv) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) \text{ é indeterminado } (\text{“}0 \cdot \infty\text{”}) \tag{4}$$

(v) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \text{ é indeterminado } \left(\text{“}0^0\text{”}\right) \tag{5}$$

(vi) $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \text{ é indeterminado } (\text{“}1^\infty\text{”}) \tag{6}$$

(vii) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \text{ é indeterminado } \left(\text{“}\infty^0\text{”}\right) \tag{7}$$

Estas são as chamadas formas *indeterminadas*. Precisaremos de recursos adicionais para julgar estes tipos de limites. **Todas as demais expressões de limites podem ser determinadas usando os teoremas vistos até agora.**

Observação: Algumas formas indeterminadas podem ser manipuladas algebricamente de modo a perder a sua indeterminação!

Algumas ideias:

“$\infty - \infty$”: Multiplicar pelo conjugado:
$f(x) - g(x) = (f(x) - g(x))\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)+g(x)} = \dfrac{f^2(x) - g^2(x)}{f(x)+g(x)}$
Exercício: Mostre que $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2-1}) = 0$.
Alternativa: colocar um fator em evidência:
$f(x) - g(x) = f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$
Exercício: Mostre que $\lim_{x\to\infty}(x^2 - \sqrt{x^2-1}) = \infty$.

“$\frac{0}{0}$”, “$\frac{\infty}{\infty}$”: Encontrar um fator comum em numerador e denominador:
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{k(x)\cdot\tilde{f}(x)}{k(x)\cdot\tilde{g}(x)} = \dfrac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \qquad \forall\, x \notin \{x|k(x) = 0\}$
Exercício: Mostre que $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+8} = -2$.

“$0\cdot\infty$”: Colocar um dos fatores no denominador do denominador:
$f(x)\cdot g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.

“0^0”, “∞^0”, “1^∞”: Usar a definição de expressões exponenciais:
$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$
e avaliar o limite no expoente.

3.9.1 Alguns exemplos da forma indeterminada “0^0”

Uma forma indeterminada recebe esse nome porque, nesse caso, o limite depende do comportamente das funções específicas, de modo que uma conclusão genérica (somente baseada nos valores dos limites individuais, independente de quais funções sejam) não é possível. Vamos ver alguns exemplos simples da forma“0^0”:
$\lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^{-x}}_{\to 0})^{\frac{1}{x}\nearrow 0}$, $\lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^{-x}}_{\to 0})^{\frac{-1}{x}\nearrow 0}$, $\lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^{-x}}_{\to 0})^{\frac{1}{x^2}\nearrow 0}$, $\lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0})^{\frac{1}{x}\nearrow 0}$, $\lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0})^{\frac{-1}{x}\nearrow 0}$.
Para que houvesse uma possibilidade de uma avaliação genérica, todos esses limites teriam que ser iguais. Mas como veremos, são diferentes. Nestes casos, as expressões podem ser simplificadas algebricamente, de modo a permitir avaliar esses limites usando os teoremas acima. Obtemos

$$\lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^{-x}}_{\to 0})^{\frac{1}{x}\nearrow 0} = \lim_{x\to\infty} e^{-x\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-1} = e^{-1}$$

$$
\begin{array}{llllll}
\lim\limits_{x\to\infty} (\underbrace{e^{-x}}_{\to 0})^{\frac{-1}{x}\nearrow 0} & = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\cdot\frac{1}{x}} & = \lim\limits_{x\to\infty} e^{1} & = e & \\
\lim\limits_{x\to\infty} (\underbrace{e^{-x}}_{\to 0})^{\frac{1}{x^2}\nearrow 0} & = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x\cdot\frac{1}{x^2}} & = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x}\nearrow 0} & = e^0 = 1 & \\
\lim\limits_{x\to\infty} (\underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0})^{\frac{1}{x}\nearrow 0} & = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2\cdot\frac{1}{x}} & = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} & = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{e^x}_{\searrow\infty}} & = 0 \\
\lim\limits_{x\to\infty} (\underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0})^{\frac{-1}{x}\nearrow 0} & = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2\cdot\frac{1}{x}} & = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x} & = \infty &
\end{array}
$$

Observamos que o resultado depende da forma concreta das funções na base e no expoente. Dependendo das funções específicas, o limite pode não existir ou assumir qualquer valor real, não permitindo uma afirmação genérica sobre o resultado de um limite da forma “0^0”. Isso explica porque ela é chamada de indeterminada. O mesmo se aplica às outras formas indeterminadas.

3.10 O limite de uma função (definição exata/formal)

Observamos que uma função f possui um limite em um ponto a se qualquer sequência de valores x_n que se aproxime “cada vez mais” a a resulte em uma sequência de valores $y_n = f(x_n)$ que se aproxime “cada vez mais” a um valor L. Precisamos uma ferramenta matemática para expressar esse “cada vez mais”.

3.10.1 Valores de uma função perto de um ponto a

Exemplo 1. *Consideramos a função*

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)}$$

perto do ponto $x = 1$.
Observamos que f não é definida para $x = 1$. Para $x \neq 1$, podemos dividir o numerador e denominador por $x - 1$, assim obtendo

$$f(x) = 2x + 3 \quad x \neq 1$$

Vamos começar montando sequências de valores x_n ($n \in \mathbb{N}$) que tendam a 1 quando $n \to \infty$ e calcular os respectivos valores $y_n = f(x_n)$. As Tabelas 3.1 e 3.2 mostram duas sequências assim.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
x_n	0	0,5	0,9	0,99	0.999	0, 9999	0,99999	0,999999	$\cdots$
y_n	3	4	4,8	4,98	4,998	4,9998	4,99998	4,999998	$\cdots$

Tabela 3.1: Valores de de uma sequência x_n que tende a 1 pela esquerda e os valores correspondentes de $y_n = f(x_n)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\tilde{x}_n$	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	1,000001	$\cdots$
$\tilde{y}_n$	7	6	5,2	5,02	5,002	5,0002	5,00002	5,000002	$\cdots$

Tabela 3.2: Valores de de uma sequência $\tilde{x}_n$ que tende a 1 pela direita e os valores correspondentes de $\tilde{y}_n = f(\tilde{x}_n)$.

Notamos que conforme os valores das sequências dos x_n e $\tilde{x}_n$ se aproximam a 1, os valores das sequências associadas dos y_n e $\tilde{y}_n$ se aproximam a 5. Precisamos de uma ferramenta matemática para captar a essência dessa aproximação que não dependa do cálculo dos valores de $f(x)$, até porque o fato que que essa aproximação aconteça por algum número finito de valores de x_n não é uma prova de que isso será assim para uma sequência infinita de pontos x_n cada vez mais próximos a 1.

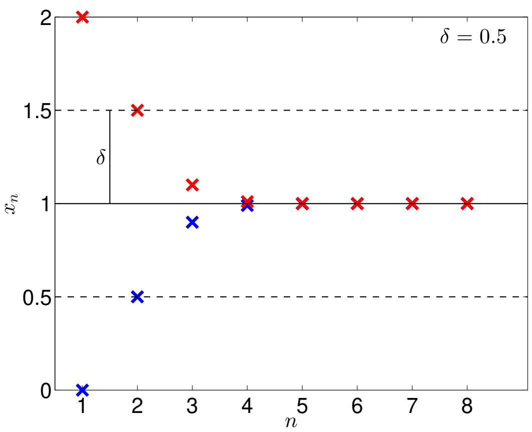


Figura 3.10: Valores de x_n da Tabela 3.1 e de $\tilde{x}_n$ da Tabela 3.2.

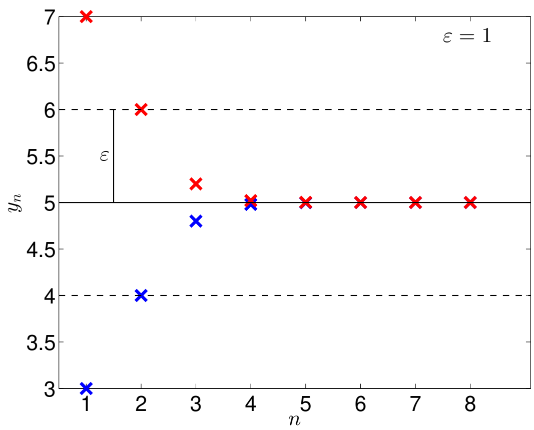


Figura 3.11: Valores de y_n da Tabela 3.1 e de $\tilde{y}_n$ da Tabela 3.2.

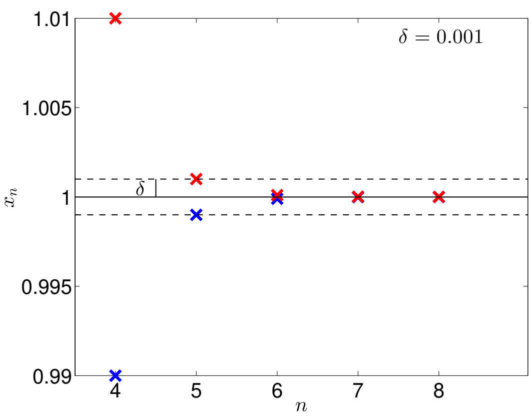


Figura 3.12: Valores de x_n da Tabela 3.1 e de $\tilde{x}_n$ da Tabela 3.2.

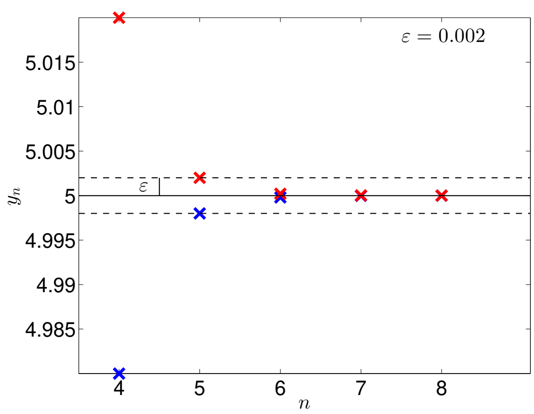


Figura 3.13: Valores de y_n da Tabela 3.1 e de $\tilde{y}_n$ da Tabela 3.2.

3.10.2 Distâncias cada vez menores

A essência dessa aproximação pode ser descrita pela observação de que uma função $f(x)$ se aproxima de um limite L quando x se aproxima de um número a, se pudermos fazer a "distância" entre $f(x)$ e L (i.e $|f(x) - L|$) tão pequena quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de a (sem ser igual a a).

Para visualizar esse conceito, as Figuras 3.10 e 3.11 mostram uma representação gráfica dos valores dessas tabelas. Notamos que conforme n aumenta, quando os x_n ou $\tilde{x}_n$ ficam dentro de uma faixa de certa largura em torno de $x = 1$, os valores associados dos y_n ou $\tilde{y}_n$ também ficam confinados a uma faixa de certa largura em torno de $y = 5$.

Mais ainda, escolhendo uma faixa de certa largura em torno de $y = 5$, sempre é possível achar uma faixa de valores x em torno de $x = 1$ tal o cálculo dos valores de $f(x_n)$ para valores de x_n dentro dessa faixa em x sempre resulta em valores y_n que estejam dentro da faixa em y (veja o *zoom* nas Figuras 3.12 e 3.13 com outra largura das faixas). Denotando a largura da faixa em y por 2ε e o tamanho da faixa em x por 2δ, podemos reformular esta observação:

> Dado um tamanho $\varepsilon > 0$ de uma faixa em y em torno de $L = 5$, sempre existe um tamanho $\delta > 0$ de uma faixa em x em torno de $a = 1$, tal que os valores de $f(x)$ tenham uma distância de 5 que é menor que ε, i.e., satisfaçam $|f(x) - 5| < \varepsilon$, para todos os x que tenham distância de 1 menor que δ, i.e., que satisfaçam $|x - 1| < \delta$,

ou seja, de forma concisa,

> Dado um valor $\varepsilon > 0$, existe um valor $\delta > 0$ tal que $|f(x) - 5| < \varepsilon$ sempre que $|x - 1| < \delta$.

De fato, como não podemos utilizar o valor $x = 1$ nessa argumentação, devemos afirmar que

> Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - 5| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$.

Exemplos
Vemos das Tabelas 3.1 e 3.2 que $|f(x) - 5| = 0{,}2$ para $x = 0{,}9$ e para $x = 1{,}1$, i.e, para $|x - 1| = 0{,}1$. Para todo x mais perto de 1, i.e, $\forall x$ tal que $|x - 1| < 0{,}1$ temos $|f(x) - 5| < 0{,}2$ (veja também Figuras 3.10 e 3.11). Portanto, se o valor de ε dado for $\varepsilon = 0{,}2$, vemos que podemos escolher qualquer valor $\delta \leq 0{,}1$ para que $0 < |x - 1| < \delta$ garanta que $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Da mesma forma, para um outro valor de ε, por exemplo $\varepsilon = 0{,}002$, vemos nas tabelas que $|f(x) - 5| < 0{,}002$ para $|x - 1| < 0{,}001$ (veja também Figuras 3.12 e 3.13). Portanto, um valor $\delta \leq 0{,}001$ serve para garantir que $|f(x) - 5| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$.
Podemos então concluir que o mesmo raciocínio sempre é possível, para qualquer valor de ε. Então, como é possível achar um valor para δ para qualquer valor de ε dado, tal que $|f(x) - 5| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$, podemos dizer que o valor da função se aproxima a 5 quando x se aproxima a 1. Provamos assim que o limite de $f(x)$, quando x tende a 1, é igual a 5. Em símbolos escrevemos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

3.10.3 Definição de limite

Definição: Seja f uma função definida em todo número de algum intervalo aberto $\mathbb{I}$, contendo a, exceto possivelmente no ponto a. O **limite** de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L, que pode ser escrito como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se para qualquer $\varepsilon > 0$, mesmo pequeno, existir um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x que satisfizer $0 < |x - a| < \delta$, ou seja,

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

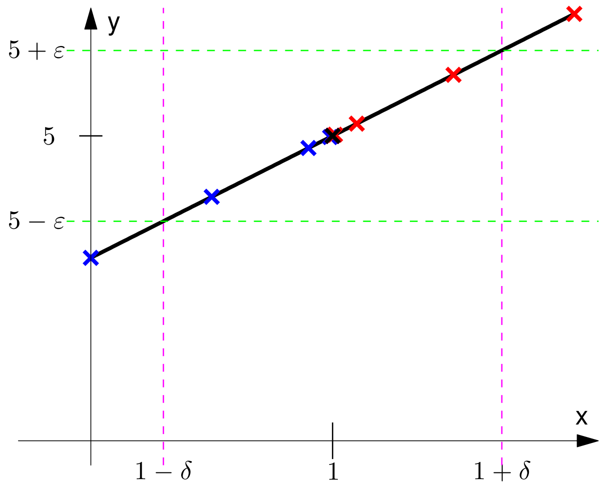


Figura 3.14: Situação independente da escala do gráfico: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que os valores da função $f(x)$ calculados para valores de x com $1 - \delta < x < 1 + \delta$ satisfazem $5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$.

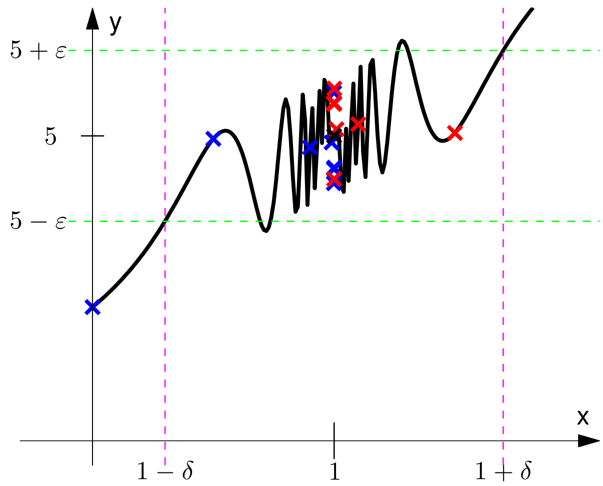


Figura 3.15: Situação em que não é possível reduzir a escala do gráfico: para pequenos $\varepsilon > 0$ não existe $\delta > 0$ tal que os valores da função $f(x)$ calculados para $1-\delta < x < 1+\delta$ satisfaçam $5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$.

Uma alternativa para a visualização desse conceito é apresentada na Figura 3.14. O valor selecionado para ε define uma faixa horizontal de valores y (indicado pelas linhas verdes tracejadas) em torno de $L = 5$. O limite da função em $a = 1$ existe e é igual a $L = 5$, porque para todo $\varepsilon > 0$ existe um tamanho $\delta > 0$ de uma faixa vertical de valores x (inicado pelas linhas roxas tracejadas) em torno de $a = 1$ tal que todos os valores da função calculados para valores de x nessa faixa vertical são valores y dentro da faixa horizontal. (Em outras palavras, se o gráfico estivesse na tela do nosso celular, poderíamos imaginar dar *zoom* quantas vezes quiséssemos e a figura sempre ficaria com o mesmo formato, sempre estaríamos visualizando os pontos da função na tela.)

Na Figura 3.15, temos uma função que oscila cada vez mas rápido conforme x se aproxima a 1, porém sempre com a mesma amplitude. Nesse caso, o limite não existe, pois para pequenos ε, não pode-se encontrar um correspondente δ. (Ou seja, se déssemos *zoom* mais vezes, chegaria o momento em que os pontos não estariam mais na tela, mais ficariam por cima e por baixo dela.)

3.10.4 Como demonstrar o limite de uma função

Como podemos demonstrar que o limite de uma função f existe e é igual a um valor L?
Em outras palavras: como mostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$?
Para tal precisamos mostrar que é possível escolher um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{para qualquer que seja } \varepsilon.$$

Modo mais fácil: exibir uma relação entre ε e δ que permita determinar um δ para qualquer valor de ε dado.

3.10.4.1 Encontrar δ

Para tal, precisamos encontrar um conjunto de soluções da igualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ em torno do ponto a.

Exemplo 2. *Seja* $f(x) = 4x - 1$. *Demonstre que* $\lim_{x\to 3} f(x) = 11$
Dado ε, precisamos achar um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - 11| < \varepsilon \ \forall \ 0 < |x - 3| < \delta$. Ou seja, precisamos que, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, seja satisfeito

$$\begin{aligned} |4x - 1 - 11| &< \varepsilon \\ |4x - 12| &< \varepsilon \\ 4|x - 3| &< \varepsilon \\ |x - 3| &< \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Como todos os passos são reversíveis, podemos concluir que para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, temos $|f(x) - 11| < \varepsilon$ sempre que $|x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ (neste caso simples, até mostramos "se e somente se" ($\Leftrightarrow$) ao invés de "sempre que" ($\Leftarrow$), mas não é necessário que haja essa equivalência). Portanto, achamos que para qualquer valor $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$,

$$0 < |x - 3| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{4} \ \Rightarrow \ |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4} \ \Rightarrow \ |f(x) - 11| < \varepsilon$$

Com isso, demonstramos que para cada valor de $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - 11| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 3| < \delta$. Portanto, provamos que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 11$$

Observação: Nota-se mais uma vez que o valor da função $f(x)$ no ponto a onde se quer calcular o limite, não importa, e não deve ser usado para determinar o limite. Existem funções para as quais ocorre $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Observação: Notamos que podemos provar que o limite existe encontrando um conjunto de soluções para a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ que seja centrado no ponto $x = a$ (não precisa incluir todas as soluções possíveis), exibindo assim uma relação entre o valor de ε e os valores possíveis de δ. Caso o conjunto de soluções não seja um intervalo em torno do ponto a, o valor L não é o limite da função no ponto a.

Exemplo 3. *Demonstre que* $\lim_{t\to 7} \dfrac{8}{t - 3} = 2$
Começamos manipulando a desigualdade desejada, i.e., a distância entre o valor da função e o limite deve ser menor que ε:

$$\begin{aligned} \left|\frac{8}{t-3} - 2\right| &< \varepsilon \\ \left|\frac{8}{t-3} - \frac{2(t-3)}{t-3}\right| = \left|\frac{8 - 2t + 6}{t-3}\right| = \left|\frac{14 - 2t}{t-3}\right| = \frac{2|7 - t|}{|t - 3|} &< \varepsilon \end{aligned}$$

Nesta expressão, temos que fazer algo que elimine o termo $|t - 3|$. Para esse fim, vamos usar uma estimativa para ele, fazendo uso da transitividade da relação de desigualdade (Prop. 1

na página 17). Sabemos que t terá que ficar próximo de 7 (porque queremos calcular o limite quando t tende a 7). Podemos então supor que t assuma valores não muito distantes de 7. Por exemplo, assumindo que o valor de $\delta > 0$ que limita a distância entre t e 7 satisfaça $\delta \leq 1$, temos $|t-7| < \delta \leq 1$, i.e., podemos concluir que

$$\begin{aligned} -1 &< t-7 < 1 && \Big| +4 \\ 3 &< t-3 < 5 \\ \Rightarrow \frac{1}{5} &< \frac{1}{t-3} < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Essa relação garante por um lado que $t-3 > 0$, o que implica que $t-3 = |t-3|$. Por outro lado, a limitação superior por $1/3$ pode ser usada para concluir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-3} = \frac{1}{|t-3|} &< \frac{1}{3} && \Big| \cdot 2|t-7| \\ |t-7| \cdot \frac{2}{|t-3|} &< |t-7| \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Portanto, pela transitividade da relação de desigualdade (Prop. 1 na página 17), ao fazermos esse último termo menor que ε, i.e., $|t-7| \cdot \frac{2}{3} < \varepsilon$, temos como consequência que também $|t-7| \cdot \frac{2}{|t-3|} < \varepsilon$, i.e.,

$$|t-7| \cdot \frac{2}{|t-3|} < |t-7| \cdot \frac{2}{3} < \varepsilon \;\Rightarrow\; |t-7| \cdot \frac{2}{|t-3|} < \varepsilon$$

Observamos que

$$\begin{aligned} |t-7| \cdot \frac{2}{3} &< \varepsilon && \Big| \cdot \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \quad |t-7| &< \varepsilon \cdot \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Portanto, o fato de $|t-7| < \frac{3}{2}\varepsilon$ implica $|t-7| \cdot \frac{2}{|t-3|} < \varepsilon$ (contanto que $\varepsilon \leq \frac{2}{3}$ para honrar a nossa hipótese que $|t-7| < 1$, mas isso não representa uma restrição para o nosso objetivo, já que queremos ver o que acontece quando ε é cada vez menor) que é equivalente a $\left|\frac{8}{t-3} - 2\right| < \varepsilon$. Assim, para qualquer valor de $\delta \leq \frac{3}{2}\varepsilon$, temos que $|t-7| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{8}{t-3} - 2\right| < \varepsilon$, ou seja $\left|\frac{8}{t-3} - 2\right| < \varepsilon$ sempre que $|t-7| < \delta$.

Dessa forma, mostramos que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ (e mostramos até como escolher), tal que a distância entre a função e o limite é menor que ε se x fica mais perto que δ ao ponto a, onde queremos calcular o limite!

Exemplo 4. *Prove que* $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ *para* $a \neq 0$.

Precisamos provar que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x-a| < \delta \\ \text{Simplificando:} \quad & \left|\frac{a-x}{xa}\right| < \varepsilon \\ & |a-x| < \varepsilon|a||x| \qquad \text{(equivalente à desigualdade original)} \end{aligned}$$

Assim, contanto que $|x| > 0.9|a|$ (que vai acontecer em algum momento porque $x \to a$), temos $\varepsilon|a||x| > \varepsilon|a|0.9|a| = 0.9\varepsilon a^2$ e, portanto, se escolhermos x tal que $|a - x| < 0.9\varepsilon a^2$, teremos

$$|a - x| < 0.9\varepsilon a^2 < \varepsilon|a||x|$$

Dessa forma qualquer $\delta \leq 0.9\varepsilon a^2$ garante que

$$0 < |a - x| < \delta \;\Rightarrow\; |a - x| < \delta \leq 0.9\varepsilon a^2 < \varepsilon|a||x| \;\Rightarrow\; |a - x| < \varepsilon|a||x| \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$$

o que prova que existe $\delta > 0$ para qualquer $\varepsilon > 0$ tal que $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$ sempre que $|x - a| < \delta$, ou seja, $\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$.

3.10.4.2 Falha em encontrar δ

Mas se o limite não for o valor proposto, como fica?

Exemplo 5. *Seja $f(x) = 4x - 1$. Tente demonstrar que $\lim_{x \to 3} f(x) = 12$*
Já vimos no Exemplo 2 que o limite em questão é 11. Se tentarmos provar que é igual a 12, a desigualdade a ser satisfeito ficaria

$$\begin{aligned} |4x - 1 - 12| &< \varepsilon \\ |4x - 13| &< \varepsilon \end{aligned}$$

que para x perto de 3, não pode ser satisfeita. Se considerarmos, por exemplo, valores de x no intervalo $2{,}9 < x < 3{,}1$ e multiplicarmos esta última desigualdade por 4 e subtrair 13, encontramos $-1{,}4 < 4x - 13 < -0{,}6$. Isso significa que não é possível que $4x - 13$ se aproxime a 0 quando x tende a 3, já que $4x - 13$ não pode ser maior que $-0{,}6$ para todos os x "perto de 3" (aqui: no intervalo $2{,}9 < x < 3{,}1$). Isto representa uma contradição com o objetivo.

Alternativamente, podemos observar que a solução dessa desigualdade é $\frac{13 - \varepsilon}{4} < x < \frac{13 + \varepsilon}{4}$ que não contém o ponto $x = 3$. Significa que para x perto de 3, a desigudade não pode ser satisfeita.

De ambas as formas, podemos concluir que para ε pequeno, não existe $\delta > 0$ tal que temos $|f(x) - 11| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 3| < \delta$. Portanto, o limite desta função para $x \to 3$ não é 12.

Exemplo 6. *Verifique se existe $L > 0$ tal que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = L$*
Precisaríamos mostrar mos que $|\frac{1}{x} - L| < \varepsilon$ sempre que $|x - 0| < \delta$
Queremos transformar a primeira desigualdade na segunda. Para tal, analisamos a desigualdade em dois casos:

I) $\dfrac{1}{x} - L \geq 0$, i.e., $\dfrac{1}{x} \geq L$

$$\begin{array}{llllll} \text{Para } x > 0: & 1 & \geq & xL & \text{ou seja, } \dfrac{1}{L} & \geq & x \\ \text{Para } x < 0: & 1 & \leq & xL & \text{ou seja, } \dfrac{1}{L} & \leq & x \qquad \text{(contradição, já que } \frac{1}{L} > 0) \end{array}$$

Portanto, a condição somente pode ser satsfeito se $0 < x \leq \dfrac{1}{L}$

Com $\dfrac{1}{x} - L \geq 0$, a desigualdade assume a forma $\dfrac{1}{x} - L < \varepsilon$, ou seja, $\dfrac{1}{x} < \varepsilon + L$

Uma vez que sabemos que $x > 0$, $L > 0$ e $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} 1 &< (L+\varepsilon)x \\ \frac{1}{L+\varepsilon} &< x \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Para o caso **I**, em que $\dfrac{1}{x} \geq L$, encontramos a restrição que a desigualdade será satisfeita somente se $\dfrac{1}{L+\varepsilon} < x \leq \dfrac{1}{L}$

II) $\dfrac{1}{x} - L < 0$; $\dfrac{1}{x} < L$

$$\begin{array}{lllllll} \text{Para } x > 0: & 1 & < & xL & \text{ou seja, } \dfrac{1}{L} & < & x \\ \text{Para } x < 0: & 1 & > & xL & \text{ou seja, } \dfrac{1}{L} & > & x \end{array}$$

Portanto, a condição pode ser satsfeito se $x > \dfrac{1}{L}$ ou $x < 0$.

Com $\dfrac{1}{x} - L < 0$, a desigualdade assume a forma

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{x} - L\right) &< \varepsilon \\ \frac{1}{x} - L &> -\varepsilon \\ \frac{1}{x} &> L - \varepsilon \end{aligned}$$

Para $x > \dfrac{1}{L}$, podemos concluir

$$\begin{aligned} 1 &> (L-\varepsilon)x \\ \frac{1}{L-\varepsilon} &> x \end{aligned}$$

onde usamos $L > \varepsilon$, uma vez que, para qualquer que seja o valor de L, sempre precisamos considerar o que acontece se ε for menor ainda. Podemos concluir que nesse caso, achamos a restrição $\dfrac{1}{L} < x < \dfrac{1}{L-\varepsilon}$

Para $x < 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &< (L-\varepsilon)x \\ \frac{1}{L-\varepsilon} &< x \qquad \text{(contradição, já que } \tfrac{1}{L-\varepsilon} > 0) \end{aligned}$$

Portanto, no caso **II**, em que $\frac{1}{x} < L$, encontramos a restrição que a desigualdade será satisfeita somente se $\frac{1}{L} < x < \frac{1}{L-\varepsilon}$.

Unindo os resultados dos dois casos, podemos concluir que a desigualdade $\left|\frac{1}{x} - L\right| < \varepsilon$ é satisfeita sempre que $\frac{1}{L+\varepsilon} < x < \frac{1}{L-\varepsilon}$.

Portanto, para que $\left|\frac{1}{x} - L\right| < \varepsilon$, x não pode ser escolhido arbitrariamente perto de 0, pois encontramos a condição de que $x > \frac{1}{L+\varepsilon}$. Isso implica que não existe δ tal que $\left|\frac{1}{x} - L\right| < \varepsilon$ sempre que $|x| < \delta$ para todo ε. Em consequência, podemos concluir que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \neq L$ para qualquer $L > 0$.

Exercício: Demonstre que também não existe $L < 0$ tal que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = L$.

3.10.5 Limites laterais

Correspondentemente à definição exata do limite acima, podemos definir o conceito de um limite lateral:
Definição: Seja f uma função definida em todo número de algum intervalo aberto (a, c) $[(c, a)]$. Então, o dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima a a pela direita [esquerda], i.e., assumindo valores $x > a$ $[x < a]$, é L, escrito como: $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ $[\lim_{x\to a^-} f(x) = L]$, se para qualquer $\varepsilon > 0$, embora pequeno, existir um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < x - a < \delta$ $[0 < a - x < \delta]$.
Note que nesta afirmação não tem módulo em $x - a$, porque o sinal de $x - a$ é bem definido, já que $x > a$ ou $x < a$.

3.10.6 Limites no infinito

Em analogia à definição acima, podemos também escrever uma definição para limites no infinito.

Definição: Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto (a, ∞). O **limite** de $f(x)$, quando x cresce ilimitadamente, pode ser escrito como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

se para qualquer $\varepsilon > 0$, ainda que pequeno, existir um número $N > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } x > N > 0$$

Da mesma forma pode ser definido o limite em menos infinito, se f se aproxima a L quando x descresce ilimitadamente, ou seja,

Definição: Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto $(-\infty, b)$. O **limite** de $f(x)$, quando x decresce ilimitadamente, pode ser escrito como

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se para cada $\varepsilon > 0$ existe $N < 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } x < N < 0$$

Exemplo 7. *Prove a observação feita no Exemplo 1 na página 56 que o limite da função* $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ *é 2 quando x cresce ilimitadamente e também quando x decresce ilimiatadamente, ou seja*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 \qquad e \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$$

Prova: Queremos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$ existem $N > 0$ e $N < 0$ tal que $|f(x)-2| < \varepsilon$ sempre que $x > N$ ou $x < M$. Começamos com

$$\left|\frac{2x^2}{x^2+1} - 2\right| < \varepsilon$$

Simplificando o lado esquerdo, temos

$$\left|\frac{2x^2}{x^2+1} - 2\right| = \left|\frac{2x^2 - 2(x^2+1)}{x^2+1}\right| = \left|\frac{-1}{x^2+1}\right| = \frac{1}{x^2+1} < \varepsilon$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x^2+1 &> \frac{1}{\varepsilon} \\ x^2 &> \frac{1}{\varepsilon} - 1 \\ |x| &> \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \qquad (\varepsilon \le 1) \end{aligned}$$

Portanto, ou $x > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$ ou $x < -\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$. Todos os passos acima são reversíveis. Portanto, todo x que satisfaz a última relação, também satisfaz a desigualdade inicial. Assim, podemos concluir que

- para $N \ge \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$ temos $\left|\dfrac{2x^2}{x^2+1} - 2\right| < \varepsilon$ sempre que $x > N$,
- para $M \le -\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$ temos $\left|\dfrac{2x^2}{x^2+1} - 2\right| < \varepsilon$ sempre que $x < M$.

Isso prova que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ e que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

3.10.7 Limites infinitos

Para esta situação, também existe uma definição análoga.

Definição: Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto $\mathbb{I}$ contendo a, exceto, possívelmente, no próprio número a. Quando x se aproxima a a, $f(x)$ cresce ilimitadamente, o que é escrito como

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

se para qualquer número $N > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) > N$ sempre que $|x - a| < \delta$.

De forma análoga, podemos definir um limite sendo menos infinito, substituindo na definição acima "cresce ilimitadamente" por "decresce ilimitadamente", ou seja:

Definição: Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto $\mathbb{I}$ contendo a, exceto, possívelmente, no próprio número a. Quando x se aproxima a a, $f(x)$ decresce ilimitadamente, o que é escrito como

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

se para qualquer número $N < 0$ existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$ sempre que $|x - a| < \delta$.

Definições correspondentes existem para limites laterais que são (mais ou menos) infinitos, e para limites para (mais ou menos) infinito que são (mais ou menos) infinitos, por exemplo:

Definição: Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto (a, ∞). O limite de $f(x)$ quando x cresce ilimitadamente é infinito, o que pode ser escrito como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

se $\forall \quad N > 0 \quad \exists \quad M > 0$ tal que $f(x) > N \quad \forall \quad x > M$.

Exercício: Escreva a definição de um limite lateral pela direita infinito e use-a para mostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

3.11 Função Contínua

O conceito de uma função ser contínua pode ser facilmente entendido mediante a seguinte observação: Se, ao desenhar uma função, temos que tirar a caneta do papel, então ela é descontinua (compare a Figura 3.16 com a Figura 3.17).

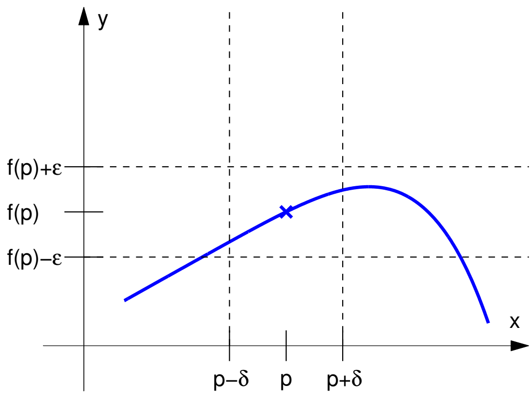


Figura 3.16: Função contínua em p.

3.11.1 Definição matemática

Porém, captar a essência dessa observação numa definição matemática não é tão simples assim.
Matematicamente:
Definição: Uma função f é contínua em um ponto $x = p$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ sempre que $|x - p| < \delta$.

Podemos ver na Figura 3.16 que para todo $\varepsilon > 0$, sempre existirá um $\delta > 0$ tal que os valores da função para todos os x em $(p-\delta, p+\delta)$ fiquem dentro do intervalo $(f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon)$.
Por outro lado, podemos ver na Figura 3.17 que para pequenos valores de $\varepsilon > 0$, não é mais possível encontrar um $\delta > 0$ tal que os valores da função para todos os x em $(p-\delta, p+\delta)$ fiquem dentro do intervalo $(f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon)$.

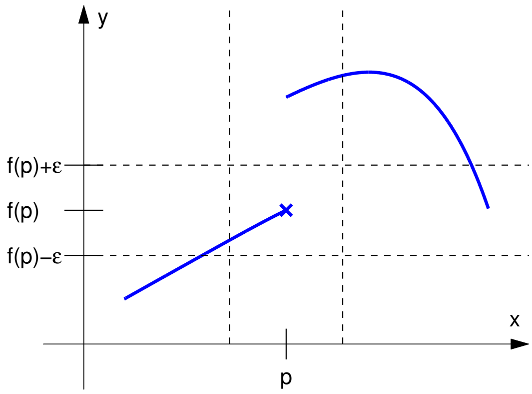


Figura 3.17: Função descontínua em p.

Observação: Notamos que essa definição possui uma forte semelhança à definição exata do limite:
Lembrando: Uma função f possui um limite L em $x = p$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$.
Ao compararmos as duas definições, notamos que: A função é contínua em $x = p$ se e somente se $f(p)$ existe, o limite $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$ existe e $L = f(p)$, ou seja, se

$$\boxed{\lim_{x\to p} f(x) = f(p)} \qquad \text{ou então} \qquad \boxed{\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) = f(p)}$$

3.11.2 Tipos de descontinuidade

Assim, podemos ter os seguintes tipos de descontinuidades:

- Limites laterais desiguais, i.e.,
  $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ para qualquer que seja $f(a)$.
- Limites laterais iguais, diferentes do valor da função, i.e.,
  $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ mas $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ ou $f(a) \nexists$.
- Limite lateral inexistente, i.e.,
  $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) \nexists$.

As Figuras 3.18 a 3.20 mostram os possíveis tipos de descontinuidade.

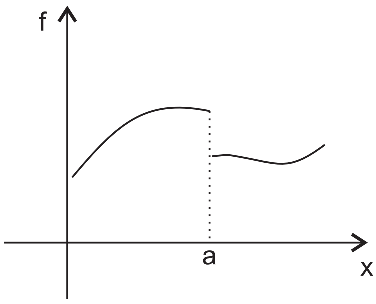


Figura 3.18: Limites laterais desiguais, i.e., $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ para qualquer que seja $f(a)$.

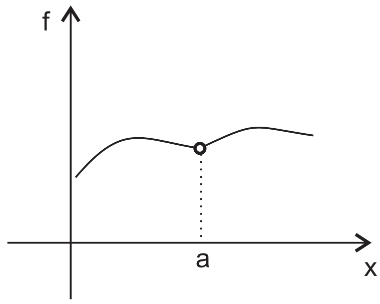


Figura 3.19: Limites laterais iguais, diferentes do valor da função, i.e., $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ mas $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ ou $f(a) \nexists$.

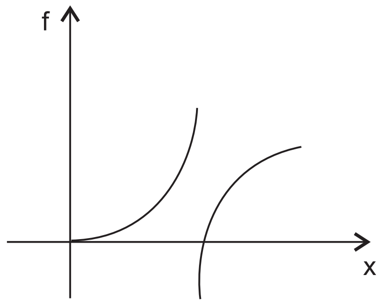


Figura 3.20: Limite inexistente, i.e., $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) \nexists$.

3.11.3 Continuidade lateral

Uma função f é contínua à direita [esquerda] de um número a se o limite lateral pela direita [esquerda] for igual ao valor da função no ponto a, i.e.,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \left[\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\right]$$

3.11.4 Continuidade num intervalo

Definição: Uma função é contínua em um intervalo $\mathbb{I}$ se $f(x)$ é contínua em todo $x \in \mathbb{I}$. Se os extremos do intervalo fazem parte, i.e., se $\mathbb{I}$ for (semi-)fechado, entendemos continuidade lateral nos extremos.
Definição: Dizemos que uma função é contínua se ela é contínua em todo o seu domínio.

Exemplo 1. *A função $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua, pois*

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & \sqrt{x} & \qquad \mathbb{D} = [0, \infty) \\ \lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} & = & \sqrt{a} & \qquad \forall a \in \mathbb{D} \end{array}$$

onde entendemos que o limite em $x = 0$ é calculado pela direita.

Observação: Enquanto essa definição do uso do conceito de continuidade corresponde à intuição no caso do exemplo acima, ele pode ser contra a intuição em outras situações. Por exemplo, no caso da função $f(x) = 1/x$, observamos que é uma função contínua, porém não é contínua em $x = 0$, mas esse ponto não faz parte do seu domínio.

3.11.5 Propriedades de funções contínuas

Teorema:
1) Se f e g são duas funções contínuas em a, e c é uma constante, então (a) $f + g$, (b) $f - g$, (c) $c \cdot g$, (d) $f \cdot g$, (e) $\dfrac{f}{g}$ (se $g(a) \neq 0$) também são contínuas em a.
2) Se g for contínua em a e f em $g(a)$, então $f \circ g$ é contínua em a.

Teorema: Os seguintes tipos de funções são funções contínuas:

a) Polinomiais
b) Racionais
c) Algébricas
d) Trigonométricas e hiperbólicas e suas inversas
e) Exponenciais e suas inversas (logarítmicas)

Observação: Deve ser enfatizado mais uma vez que "contínua" significa "contínua no domínio" (o que é diferente de "contínua em $\mathbb{R}$").
Sendo assim, funções dos tipos mencionados acima podem apresentar descontinuidades, mas sempre ocorrerão em pontos que não fazem parte de seu domínio.

Consequências:
1) Se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b)$$

2) Se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$ entào

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{t\to b} f(t) = f(b)$$

Exemplos: Determine os limites

2. $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-3x-3}{x^2+2x-5}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x-3}{x^2+2x-5}\right) = \ln 1 = 0$

3. $\lim_{x\to 3} e^{\left(\frac{x^2-6x}{x^2+6x}\right)} = e^{\left(\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x}{x^2+6x}\right)} = e^{\frac{-9}{27}} = e^{-1/3} = 1/\sqrt[3]{e}$

4. $\lim_{x\to 3} \operatorname{sen}\left(\pi\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-5}}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi\cdot\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-5}}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

5. $\lim_{x\to 2^+} \tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = \tan\left(\lim_{x\to 2^+}\dfrac{\pi}{x}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \nexists$ (inválido!)

Mas $\lim_{x\to 2^+} \tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = \lim_{x\to 2^+}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\lim_{x\to 2^+}\frac{\pi}{x}\right)}{\cos\left(\lim_{x\to 2^+}\frac{\pi}{x}\right)} = \text{“}\dfrac{1}{0}\text{”}.$

Como $\dfrac{\pi}{x} < \dfrac{\pi}{2}$ quando $x \to 2^+$, e $\cos(t) > 0$ para $t < \dfrac{\pi}{2}$, podemos afirmar:

$\lim_{x\to 2^+} \tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = \text{“}\dfrac{\overset{>0}{1}}{0^+}\text{”} = +\infty$

6. Considere $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 4 & x = 2 \\ bx & x > 2 \end{cases}$.

Para qual valor de b a função f é contínua?

f é contínua para $x < 2$, pois x^2 é polinomial.
f é contínua para $x > 2$, pois bx é polinomial, qualquer que seja o valor de b.
Em $x = 2$, temos $f(2) = 4$, e os limites laterais são $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} bx = b\lim_{x\to 2^+} x = 2b$.
Portanto, se $b = 2$, temos $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 4$. Assim, f é contínua se $b = 2$.

3.11.6 Mudança de variável

Podemos usar os teoremas de continuidade para mudar de variável ao avaliar um limite. Especificamente, a partir da consequência 2) acima podemos concluir que, se $\lim_{x\to a} g(x) = b$ e $\lim_{x\to b} f(x) = L$, então podemos calcular $\lim_{x\to a} f(g(x))$ substituindo $g(x) = t$, de modo que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{t\to b} f(t) = L$$

Exemplo 7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(3x-3)}{6x-6} = ?$
Notamos que numerador e denominador tendem a zero, de modo que tenhamos uma expressão indeterminada $\text{“}\dfrac{0}{0}\text{”}$.
Fazendo $3x - 3 = t$, onde podemos notar que $\lim_{x\to 1} t = \lim_{x\to 1} 3x - 3 = 0$, temos

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(3x-3)}{6x-6} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{2t} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}}_{\substack{=1 \\ \text{(limite fundamental)}}} = \frac{1}{2}$$

3.12 Teorema do valor intermediário

3.12.1 Teorema do valor intermediário

Teorema: Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a) \leq N \leq f(b)$ ou $f(a) \geq N \geq f(b)$, então existe (pelo menos) um ponto c em $[a, b]$ tal que $f(c) = N$ (veja Figura 3.21).

Caso contrário: Pode não haver c tal que $f(c) = N$ (veja Figura 3.22) quando existe um “buraco” (descontinuidade) na função.

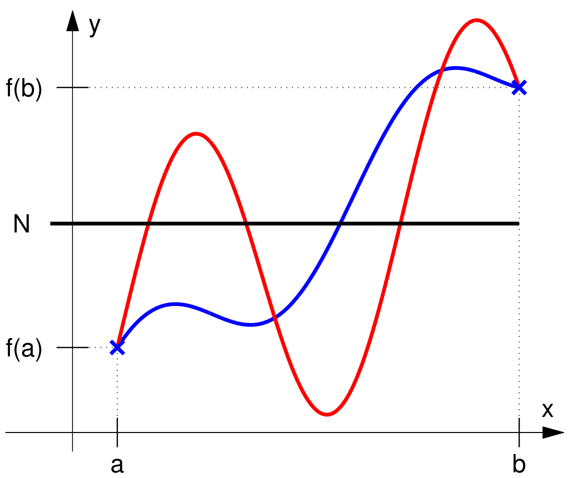


Figura 3.21: Uma função contínua cruza a reta $y = N$ uma vez (azul) ou mais vezes (vermelha) entre a e b.

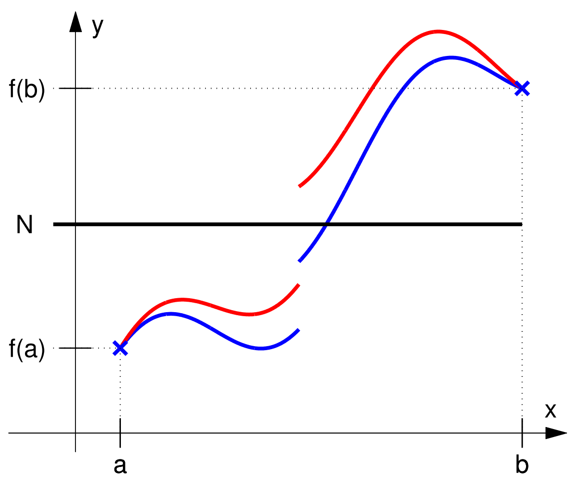


Figura 3.22: Uma função descontínua pode (azul) ou não (vermelha) cruzar a reta $y = N$.

3.12.2 Aplicação: Zeros de funções

Exemplo 1. *A função* $f(x) = 3x^2 - 10x + 2$ *possui um zero no intervalo* $[0, 1]$*?*
Notamos que:
- f é contínua em $[0, 1]$
- $f(0) = 0 - 0 + 2 = 2 > 0$
- $f(1) = 3 - 10 + 2 = -5 < 0$

Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), existe pelo menos um ponto c em $[0, 1]$ tal que $f(c) = 0$.

Exemplo 2. *A equação* $3x^2 - 10x + 2 = e^x$ *possui uma solução no intervalo* $[0, 1]$*?*
Consideramos a função $g(x) = 3x^2 - 10x + 2 - e^x$ e notamos que
- g é contínua em $[0, 1]$
- $g(0) = 0 - 0 + 2 - e^0 = 1 > 0$
- $g(1) = 3 - 10 + 2 - e^1 = -5 - e < 0$

Portanto, pelo TVI, existe pelo menos um ponto c em $[0, 1]$ tal que $g(c) = 0$. Isso implica que existe, neste intervalo, uma solução da equação $3x^2 - 10x + 2 = e^x$.

Exemplo 3. *A função* $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x - 4}$ *possui um zero no intervalo* $[3, 5]$*?*
Notamos que
- f é descontínua em $[3, 5]$, pois $f(4)\nexists$.

Portanto, não podemos aplicar o TVI no intervalo inteiro. Porém, podemos analisar os intervalos $[3, 4)$ e $(4, 5]$. Por não ser possível avaliar $f(4)$, usamos pontos um pouco à esquerda e à direita e observamos os limites de quando esses pontos se aproximam a 4. Em outras palavras, usamos os limites laterais. Observamos que
- f é contínua em $(4, 5]$
- $f(5) = \dfrac{25 - 20 + 2}{1} = 3 > 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} f(x) = \text{``}\frac{\overset{>0}{2}}{0^+}\text{''} = \infty$ (positivo!)

Portanto, o TVI não permite uma afirmação se existe um zero da função no intervalo $(4, 5]$. Porém,
- f é contínua em $[3, 4)$
- $f(3) = \dfrac{9 - 12 + 2}{-1} = 1 > 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} f(x) = \text{``}\frac{\overset{>0}{2}}{0^-}\text{''} = -\infty$ (negativo!)

Portanto, existe um ponto $p < 4$ suficientemente perto de 4 tal que $f(p) < 0$, o que implica que, pelo TVI, existe um zero da função no intervalo $[3, p] \subset [3, 5]$.

3.12.3 O Método da Bissecção

Um método para encontrar valores de zeros de funções, baseado no TVI, é o *Método da Bissecção*. Nele, divide-se o intervalo inicial ao meio, calcula-se o valor da função nesse novo ponto e substitui-se o intervalo pela metade que contém o zero.

Algoritmo: Dado um intervalo inicial $\mathbb{I} = [a, b]$ tal que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais opostos, i.e., $\text{sgn}(f(a)) \neq \text{sgn}(f(b))$, bem como uma precisão desejada P:

1. Determine $c = (a + b)/2$;
2. Calcule $s = \text{sgn}(f(c))$;
   (a) Se $s = 0$: Pare. O valor atual de c é a solução exata do problema.
   (b) Se $s = \text{sgn}(f(a))$: $a \leftarrow c$
   (c) Se $s = \text{sgn}(f(b))$: $b \leftarrow c$

3. Condição de Parada: Se $(b-a) < 2P$, pare. O valor $c = (a+b)/2$ é a solução numérica aproximada do problema. Caso contrário, volte ao passo 1.

Exemplo 4. *Encontre o zero do Exemplo 1 com precisão $P = 0.1$.*
Solução:
O intervalo inicial é $\mathbb{I} = [0, 1]$, i.e., $a = 0$ e $b = 1$, com

$f(a) = f(0) = 2 > 0$ e $f(b) = f(1) = -5 < 0$.

Iniciamos a solução numérica, calculando

1. $c = (a + b)/2 = (0 + 1)/2 = 1/2$ e $f(c) = f(1/2) = 3/4 - 10/2 + 2 = -9/4 < 0$

Este valor tem o mesmo sinal da função em $x = 1$, i.e., $\text{sgn}(f(c)) = \text{sgn}(f(b))$.
Portanto, o novo b será $b = 1/2$ e o intervalo passa ser $\mathbb{I} = [0, 1/2]$.
Como $b - a = 0.5 > 2P = 0.2$, continuamos, calculando

2. $c = 1/4,\ f(c) = f(1/4) = -5/16 < 0 \ \Rightarrow\ \mathbb{I} = [0, 1/4],\ b - a = 1/4 - 0 = 0.25 > 0.2$
3. $c = 1/8,\ f(c) = f(1/8) = 51/64 > 0 \ \Rightarrow\ \mathbb{I} = [1/8, 1/4]$.

Agora, o tamanho do intervalo é $b - a = 1/4 - 1/8 = 1/8 = 0.125 < 2P = 0.2$.
Portanto, a condição de parada foi alcançada e a solução encontrada numericamente é

$x_0 \approx c = (1/4 + 1/8)/2 = 3/16 = 0.1875$.

Teste:
Podemos, neste caso, conferir o resultado resolvendo a equação quadrática, encontrando

$$x_0 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{19}}{3}.$$

Fica evidente que a solução no intervalo $[0, 1]$ é a do sinal negativo, cujo valor é

$$x_0 = \frac{5 - \sqrt{19}}{3} \approx 0.21370,$$

de modo que o erro da aproximação numérica encontrada é de

$x_0 - c \approx 0.0262 < P = 0.1$.

Exemplo 5. *Encontre o ponto de intersecção das funções $f_1(x) = x^2 - 10x + 2$ e $f_2(x) = e^x$ no intervalo $[0, 1]$ (veja Exemplo 2) com precisão $P = 10^{-5}$.*
Com o método da bissecção (por exemplo realizado com um progama computacional), encontramos a seguinte sequência de pontos c (arredondados com 6 casas decimais): 0.5 0.25 0.125 0.0625 0.09375 0.078125 0.085938 0.089844 0.091797 0.092773 0.093262 0.093018 0.092896 0.092834 0.092865 0.092850

A Figura 3.23 mostra a qualidade da aproximação encontrada.

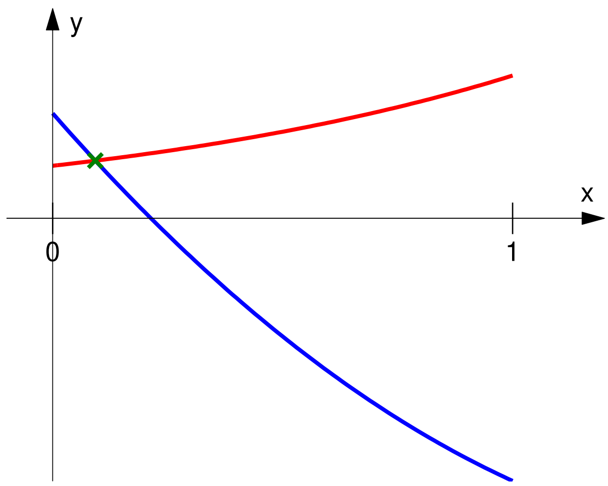


Figura 3.23: Gráficos das funções $f_1(x) = x^2 - 10x + 2$ (azul) e $f_2(x) = e^x$ (vermelha), junto com o ponto $(c, f_1(c))$ ($\times$ verde) com o último valor de c encontrado.

Capítulo 4

A Derivada

Neste capítulo definimos a derivada e aprendemos as regras básicas para o seu cálculo. As primeiras aplicações da derivada serão tratadas no próximo capítulo.

4.1 Inclinação da reta secante

Iniciamos a introdução à derivada com um estudo da inclinação de uma reta que intersecciona um gráfico de uma função em dois pontos, a reta secante.

4.1.1 Velocidade média

Exemplo 1. *Um amigo fez uma viagem e ligou de tempos em tempos para conversar. A primeira ligação foi depois de uma hora de viagem, e ele contou que já andou 100 km. Depois de mais três horas, ligou outra vez e conta que andou mais 200 km. Ainda ligou mais três vezes, depois de cinco horas, duas horas e mais uma hora e relatou o progresso da viagem em 300 km, 100 km e 100 km, respectivamente.*
A Tabela 4.1 resume a informação sobre a viagem e a Figura 4.1 representa o gráfico.

Tempo (h)	1	3	5	2	1
Distância (km)	100	200	300	100	100

Tabela 4.1: Distância percorrida em cada intervalo de tempo gasto em cada trecho do percurso de uma viagem.

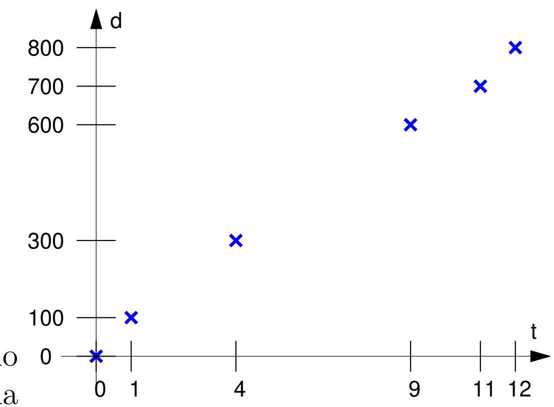


Figura 4.1: Gráfico da Tabela 4.1.

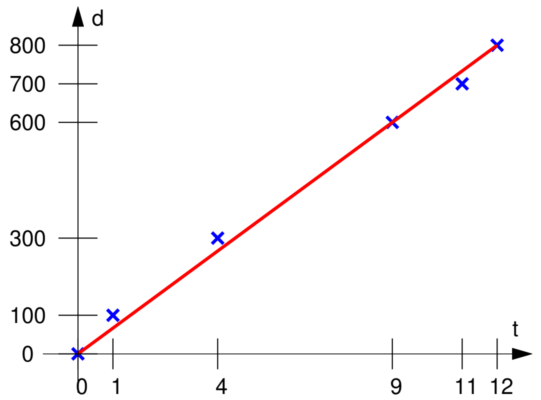


Figura 4.2: Velocidade média da viagem.

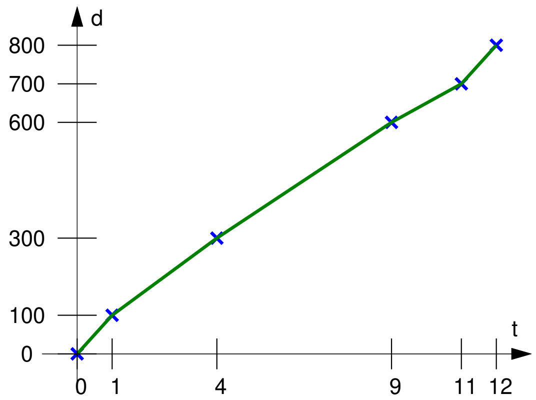


Figura 4.3: Velocidades em cada intervalo.

Com base na tabela acima podemos definir a velocidade média no percurso somando as distâncias percorridas e os respectivos tempos gastos em cada trecho. Podemos observar que a a velocidade média é a razão entre a distância total percorrida, s_{total} e o tempo total t_{total}, i.e.,

$$v_{\text{média}} = \frac{s_{\text{total}}}{t_{\text{total}}} = \frac{800\text{km}}{12\text{h}} = 66{,}\overline{6}\,\text{km/h}$$

e que esta razão define a inclinação da reta entre os pontos inicial e final do percurso (veja Figura 4.2).

Podemos calcular também a velocidade média em um intervalo de tempo menor (veja Figura 4.3). Por exemplo, obtemos a velocidade média no terceiro intervalo de tempo ao dividir a distância percorrida Δs_3 neste intervalo pela sua duração Δt_3, ou seja

$$v_{\text{média}} = \frac{\Delta s_3}{\Delta t_3} = \frac{300\text{km}}{5\text{h}} = 60,0\text{km/h}$$

Esse valor é representado pela inclinação da reta que passa pelo ponto inicial e final do segmento nesse intervalo (veja Figura 4.3).

4.1.2 Inclinação da reta secante

Podemos generalizar esse procedimento para calcular o coeficiente angular m_s, i.e., a inclinação, de uma reta secante entre dois pontos x_1 e x_2 de qualquer função $y(x)$ (veja Figura 4.4):

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = m_s$$

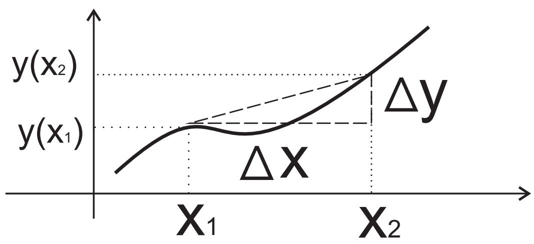


Figura 4.4: Exemplo de reta secante

Podemos também escrever

$$m_s = \frac{y(x_1 + \Delta x) - y(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \;,$$

4.2 Inclinação da reta tangente

4.2.1 Velocidade instantânea

A velocidade é uma medida de quanta distância foi percorrida em um determinado intervalo de tempo. Para atribuir um valor da velocidade a um determinado momento, temos que estudar o que acontece em intervalos de tempo cada vez menores. Assim, definimos a velocidade instantânea como o limite de quando o ponto final do intervalo se aproxima cada vez mais ao ponto inicial, i.e.,

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

4.2.2 Inclinação da reta tangente

Correspondentemente, para saber a inclinação de uma função melhor em um ponto x_1 temos que pegar um intervalo Δx cada vez menor para o cálculo da inclinação da reta secante.

Definição: A inclinação da reta tangente é obtida pelo limite da inclinação da reta secante entre x_1 e x_2 quando x_2 tende a x_1, i.e.,

$$m_t = \lim_{x_2 \to x_1} m_s = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_1 + \Delta x) - y(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

se este limite existir. Outrossim, a reta tangente é paralela ao eixo y, se este limite for mais ou menos infinito.

Notação:

$$m_t(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_1 + \Delta x) - y(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'(x_1)$$

A inclinação da reta tangente define a inclinação do gráfico naquele ponto. No exemplo da viagem, isto é a velocidade instântanea.

Observação: A notação fracionária $\frac{dy}{dx}$ não é uma divisão, mas o limite de uma. Ainda assim, essa notação é útil em alguns contextos.o

Observação: O limite a ser calculado em uma derivada sempre tem um denominador que tende a zero. Esse limite somente pode existir se o numerador também tende a zero, ou seja, se houver uma expressão indeterminada do tipo "$\frac{0}{0}$" que precisa ser resolvida algebricamente.

Exemplo 1. *Encontre a inclinação m da curva $y = x^2 - 4x + 3$ em $x_1 = 4$.*
Solução:

$$\begin{aligned} m(4) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4 + \Delta x)^2 - 4(4 + \Delta x) + 3 - (4^2 - 4 \cdot 4 + 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{4^2}^{1} + 8\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{4 \cdot 4}^{1} - 4\Delta x + \cancel{3}^{2} - \cancel{3}^{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 4 + \Delta x = 4 \end{aligned}$$

Portanto, a inclinação da reta tangente à parábola $y = x^2 - 4x + 3$ no ponto $x = 4$ é $m = y'(4) = 4$.

Exemplo 2. *Podemos também determinar a inclinação da curva $y = x^2 - 4x + 3$ em um ponto x_1 qualquer:*

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - 4(x_1 + \Delta x) + 3 - (x_1^2 - 4x_1 + 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2\Delta x x_1 + \Delta x^2 - 4x_1 - 4\Delta x + 3 - x_1^2 + 4x_1 - 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x x_1 + \Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_1 + \Delta x - 4 = 2x_1 - 4 \end{aligned}$$

Notamos que o valor em $x_1 = 4$ é $m(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$, como calculado antes. Como isto pode ser feito para todo $x = x_1$, podemos afirmar que a inclinação de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ em todo x é $f'(x) = 2x - 4$. Esta é a *função derivada* ou, brevemente, a *derivada* da função $f(x)$.

4.2.3 A função derivada

Definição: Definimos como *função derivada* ou, brevemente, a *derivada* da função $f(x)$ a função obtida pelo limite

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{A}$$

Observação: Note que usamos valores positivos e negativos para Δx quando calculamos o limite acima. Pela unicidade do limite, podemos calcular $f'(x)$, caso exista, por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \tag{B}$$

Essa expressão é obtida ao considerarmos, na definição acima, x_2 fixo e pensamos no limite de que x_1 se aproximando de x_2.

Na verdade, podemos generalizar essa expressão mais ainda. De modo mais geral, podemos calcular a derivada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + a\Delta x) - f(x - b\Delta x)}{(a + b)\Delta x} \tag{C}$$

No cálculo teórico do limite, as expressões (A), (B) e (C) são equivalentes e não costumam apresentar um diferente grau de dificuldade. Por isso, normalmente, recorremos à expressão (A) para calcular derivadas.

Porém, quando precisa-se calcular a derivada de uma função numericamente, não se pode executar o limite. Neste caso, substitui-se a inclinação da reta tangente pela inclinação de uma reta secante com dois pontos bem próximos, i.e., usa-se

$$f'(x) \approx \frac{f(x + a\Delta x) - f(x - b\Delta x)}{(a + b)\Delta x} \tag{D}$$

para um Δx pequeno. Neste caso, a qualidade da aproximação obtida pode depender da escolha da expressão utilizada. Uma aproximação frequentemente usada por muitas vezes fornecer resultados numéricos melhores é a expressão (D) com $a = b = \frac{1}{2}$ ou $a = b = 1$.

Por exemplo, a aproximação numérica com $\Delta x = 0.1$ da inclinação da curva $y = x^2 - 4x + 3$ em $x_1 = 4$ com $a = 1$, $b = 0$ é

$$y'(4) \approx \frac{4.1^2 - 4 \cdot 4.1 + 3 - 3}{0.1} = \frac{(4.1 - 4) \cdot 4.1}{0.1} = 4.1$$

enquanto a conta com $a = b = 1$ fornece

$$\begin{aligned} y'(4) &\approx \frac{4.1^2 - 4 \cdot 4.1 + 3 - (3.9^2 - 4 \cdot 3.9 + 3)}{2 \cdot 0.1} \\ &= \frac{(4.1 - 4) \cdot 4.1 - [(3.9 - 4) \cdot 3.9]}{0.2} = \frac{0.1 \cdot (4.1 + 3.9)}{0.2} = 4 \end{aligned}$$

que, coincidentemente, é o valor exato.

4.2.4 Reta tangente

Exemplo 3. *Determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ no ponto $x = 4$.*

Sabemos que a reta passa pelo ponto $x_1 = 4$ e tem a inclinação em $x = 4$ dada por $m_t = f'(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$.
Portanto, a equação da reta é $y = 4x + b$.
No ponto $x_1 = 4$, ela tem que ter o mesmo valor da própria função $y(x_1) = x_1^2 - 4x_1 + 3 = 4^4 - 4 \cdot 4 + 3 = 3$ (veja Figura 4.5).
Assim, temos, $y = 4 \cdot 4 + b = 3$, que implica $b = -13$.
Portanto, a reta tangente é dada por $y = 4x - 13$.

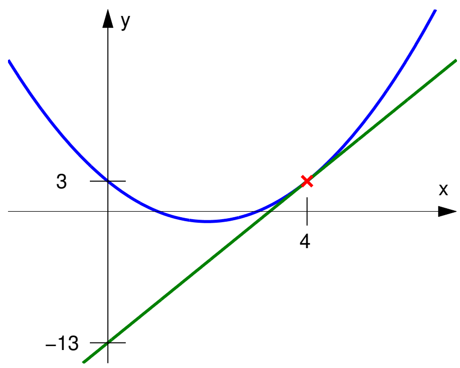


Figura 4.5: Construção da reta tangente.

Alternativa: em todo ponto (x, y) com $x \neq 4$, o coeficiente angular da reta tangente tem que satisfazer

$$m_t = \frac{y - y(x_1)}{x - x_1} = \frac{y - 3}{x - 4} = 4$$

que implica

$$y - 3 = 4(x - 4) = 4x - 16 \Rightarrow y = 4x - 13$$

4.2.5 Reta normal

Exemplo 4. *Achar a reta normal à curva $y = \sqrt{x - 4}$ em $x = 8$.*
Primeiramente, observamos que a reta normal é normal (i.e., perpendicular) à reta tangente.

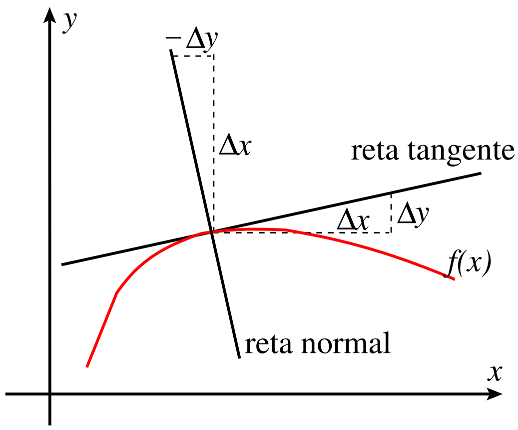


Figura 4.6: Retas normal e tangente. Se o coeficiente angular da reta tangente é dado por $m_t = \Delta y/\Delta x$, então o da reta normal é $m_n = -\Delta x/\Delta y$.

Portanto, a sua incinação é o negativo do recíproco da incinação da reta tangente, i.e., $m_n = -1/m_t$ (veja Figura 4.6).

Portanto, precisamos calcular a incinação da reta tangente, i.e., a derivada, em $x = 8$.

Temos

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x - 4} - \sqrt{x-4}}{\Delta x}$$

Multiplicação pelo conjugado do numberador fornece:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x-4} - \sqrt{x-4}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x-4} + \sqrt{x-4}}{\sqrt{x+\Delta x-4} + \sqrt{x-4}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - 4 - (x-4)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-4} + \sqrt{x-4})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-4} + \sqrt{x-4})} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x-4} + \sqrt{x-4}} = \frac{1}{2\sqrt{x-4}}
\end{aligned}$$

Em $x = 8$ temos: $y'(8) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$
Portanto, a reta tangente tem a inclinação $m_t = 1/4$.

A reta normal tem inclinação $m_n = -1/m_t$ o que implica que a normal tem a inclinação $m_n = -4$. (Figura 4.7).

Além disso, ela cruza a curva em $x = 8$, portanto passa pelo ponto $x = 8$, $y = \sqrt{8-4} = \sqrt{4} = 2$.

Portanto, a reta normal tem a fórmula:

$$y = -4x + b$$

com $y(8) = -4 \cdot 8 + b = -32 + b = 2 \Rightarrow b = 34$.

Assim, $\quad y(x) = -4x + 34$.

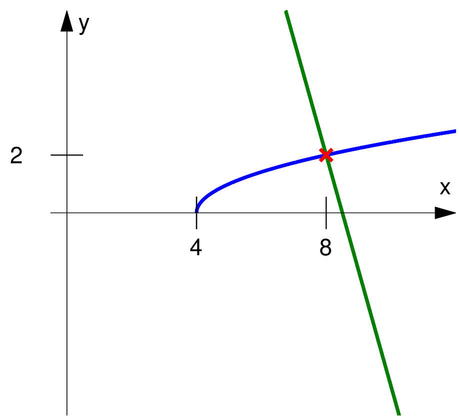


Figura 4.7: Contrução da reta normal.

4.3 A derivada

4.3.1 Significado da derivada

Se $y = f(x)$, $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Escrevendo $x = x_1$, $x + \Delta x = x_2$, $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, temos $\Delta y = y_2 - y_1$

Assim, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$

A derivada mede quanto a função f varia em relação à variação da variável independente em um intervalo infinitesimalmente pequeno localizado em um determinado ponto.

Por isso, dizemos que a derivada é uma **taxa de variação** da função f.

4.3.2 Algumas derivadas

A derivada pode ajudar a entender o comportamento de uma função.

Exemplo 1. *Considere uma partícula que se desloca ao longo de uma reta de acordo com a fórmula $s(t) = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1$. Determine quando a partícula se movimenta para direita ou para esquerda.*

Velocidade = derivada da posição como função do tempo

$$\begin{aligned}
v = s'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2(t + \Delta t)^3 - 4(t + \Delta t)^2 + 2(t + \Delta t) - 1 - (2t^3 - 4t^2 + 2t - 1)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6t^2 \Delta t + 6\Delta t^2 + 2\Delta t^3 - 8t\Delta t - 4\Delta t^2 + 2\Delta t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} 6t^2 + 6\Delta t + 2\Delta t^2 - 8t - 4\Delta t + 2 \\
&= 6t^2 - 8t + 2
\end{aligned}$$

$v = 0$ em $6t^2 - 8t + 2 = 0$. Temos então $t = 1$ e $t = \dfrac{1}{3}$, pois

$$6t^2 - 8t + 2 = 6(t - \frac{1}{3})(t - 1)$$

$v = 0$ em $t = 1$ e $t = \dfrac{1}{3}$ — Partícula parada

$v > 0$ em $t < \dfrac{1}{3}$ e $t > 1$ — Movimento para a direita

$v < 0$ em $\dfrac{1}{3} < t < 1$ — Movimento para a esquerda.

Observação: Notamos que a derivada ajuda em entender a função original. Faremos uso disso mais adiante, na hora de esboçar um gráfico.

Exemplo 2. *Calcule a derivada de* $f(x) = \dfrac{2+x}{3-x}$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2+x+\Delta x}{3-x-\Delta x} - \dfrac{2+x}{3-x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+x+\Delta x)(3-x)-(2+x)(3-x-\Delta x)}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x(3-x)(3-x-\Delta x)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(3-x)(3-x-\Delta x)} = \frac{5}{(3-x)^2}
\end{aligned}
$$

Observação: A derivada não existe em $x = 3$. Isso já era de se esperar, uma vez que esse ponto não faz parte do domínio da função.

Exemplo 3. *Sendo* $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ *calcule* $g'(x)$.
Devemos calcular

$$
g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}
$$

Gostariamos de remover as raízes cúbicas para poder simplificar essa expressão algebricamente. Precisamos da generalização da multiplicação pelo conjugado, baseado no 3º produto notável, para potências maiores. Notamos que

$$
\begin{aligned}
(a-b)(a+b) &= (a^2-b^2) \\
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= (a^3-b^3) \\
(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) &= (a^4-b^4) \\
&\vdots \\
(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1}) &= (a^n-b^n)
\end{aligned}
$$

Usando a forma para $n = 3$ e identificando $a = (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}$ e $b = x^{\frac{2}{3}}$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{\Delta x} \cdot \frac{(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}}{(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x[(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}]} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x[(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}]} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}} = \frac{2x}{3x^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}
\end{aligned}
$$

Observamos que $g'(x)$ não existe em $x = 0$, apesar que $g(x)$ exista neste ponto. A razão é que a reta tangente à curva $g(x) = x^{2/3}$ no ponto $x = 0$ é vertical (veja Figura 4.8).

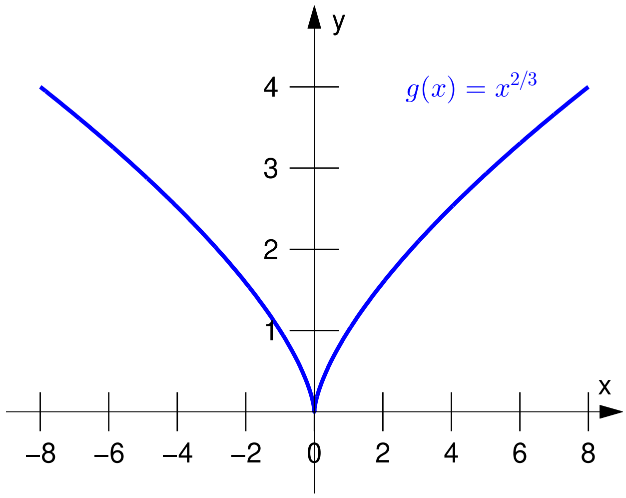


Figura 4.8: $g(x) = x^{2/3}$.

4.3.3 Diferenciabilidade

Derivada: $f'(x) = m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
Definição: Uma função $f(x)$ é diferenciável (derivável) em x_1 se $f'(x_1)$ existir.
Definição: Uma função $f(x)$ é diferenciável (derivável) em um intervalo $\mathbb{I}$ se $f'(x_1)$ existir para todo $x_1 \in \mathbb{I}$.
Definição: Uma função $f(x)$ é diferenciável (derivável) se $f'(x_1)$ existir em todo domínio de f, i.e., para todo $x_1 \in \mathbb{D}$.

Observamos que a função $f(x)$ do Exemplo 2 é diferenciável em seu domínio todo, pois o ponto $x = 3$ onde a derivada não existe não faz parte do domínio da função. Sendo assim, a função $f(x)$ é derivável. Em contraposição, vimos no Exemplo 3 que a função $g(x)$ não é diferenciável em $x = 0$ que faz parte do domínio da função. Portanto, $g(x)$ não é derivável [mas é derivável em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$]. Podemos concluir que o domínio da derivada pode ser diferente do domínio da função.

Também notamos a partir desse exemplo que a continuidade da função obviamente não implica na diferenciabilidade. Porém, o inverso é verdade, como afirma o teorema seguinte:

Teorema: Se a função f é diferenciável em x, então ela é contínua em x.
Prova: Se $f'(x)$ existe, então existe o limite $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.
Como o denominador desta expresão tende a zero, só é possível que o limite exista se o numerador também tende a zero, i.e.,

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) - f(x) = 0, \qquad \text{ou seja,} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

Portanto, o limite da função no ponto x é igual ao valor da função em x, o que garante a sua continuidade nesse ponto.

Observação: Isso implica que se f for descontínua em $x = a$, então não é diferenciável nesse ponto.

4.4 Derivadas laterais

Se a função $f(x)$ está definida no intervalo (x_1, a), então a derivada à direita de $f(x)$ em x_1, indicada por $f'_+(x_1)$ é definida por

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Correspondentemente, se $f(x)$ está definida no intervalo (a, x_1), a derivada à esquerda é

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Exemplo 1. *Determine se a função*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 3 \\ 8 - x & x \geq 3 \end{cases}$$

é derivável em $x = 3$.
Primeiro passo: verificar se f é contínua em $x = 3$ (porque se não for, não pode ser derivável). Temos

$$\begin{array}{rcccccl} f(3) & = & 8-3 & = & 5 & & \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 3^+} 8-x & = & 8-3 & = & 5 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 3^-} 2x-1 & = & 2\cdot 3-1 & = & 5 \end{array}$$

Como os três valores são iguais, $f(x)$ é contínua em $x = 3$.

Será f diferenciável em $x = 3$?

$$\begin{aligned} f'_-(3) &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{2(3+\Delta x) - 1 - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} 2 = 2 \\ f'_+(3) &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{8 - (3+\Delta x) - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} -1 = -1 \end{aligned}$$

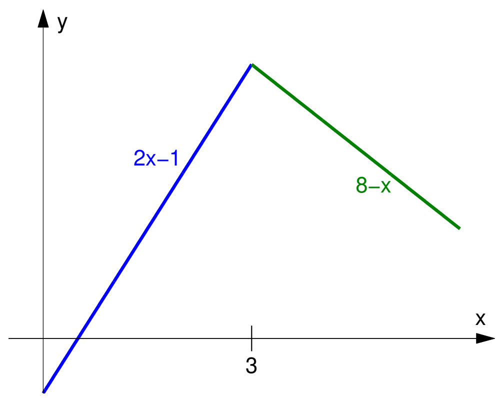


Figura 4.9: Função contínua, mas não diferenciável em $x = 3$.

Temos $f'_-(3) \neq f'_+(3)$, portanto $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ não existe, i.e., $f(x)$ não é diferenciável em $x = 3$ (veja Figura 4.9).

Exemplo 2. *Determine se a função f dada abaixo é derivável em $x = 2$:*

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & x \leq 2 \\ -x^2 + 7x - 6 & x > 2 \end{cases}$$

Verificamos a continuidade: $f(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$,
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 3x - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} -x^2 + 7x - 6 = -2^2 + 7 \cdot 2 - 6 = -4 + 14 - 6 = 4$
Como os três valores são iguais, a função é contínua em $x = 1$.
Diferenciabilidade:

$$
\begin{aligned}
f'_-(2) &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{3\cancelto{2}{(2} + \Delta x) - \cancelto{1}{2} - (\cancelto{2}{3 \cdot 2} - \cancelto{1}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^-} 3 = 3 \\
f'_+(2) &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-(2+\Delta x)^2 + 7(2+\Delta x) - 6 - 4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\cancelto{1}{2^2} - 2 \cdot 2\Delta x - \Delta x^2 + \cancelto{1}{7 \cdot 2} + 7\Delta x - \cancelto{1}{6} - \cancelto{1}{4}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(-4 - \Delta x + 7)\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 3 - \Delta x = 3
\end{aligned}
$$

Como as duas derivadas laterais são iguais, a derivada em $x = 2$ existe. Portanto, a função é derivável neste ponto (veja Figura 4.10).

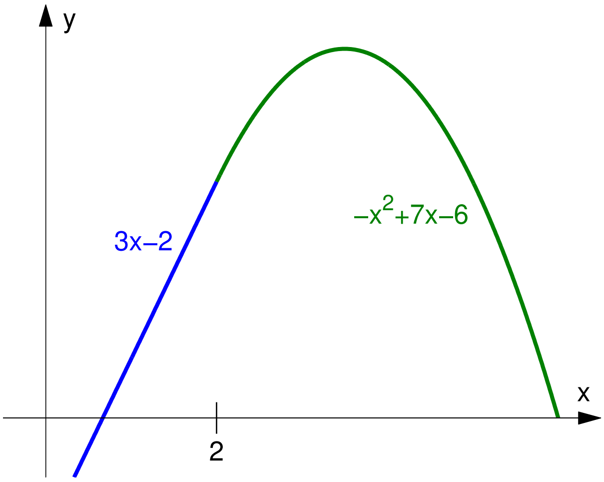


Figura 4.10: Função contínua e diferenciável em $x = 2$.

Observação: Embora iguais em muitos os casos, de modo geral, a derivada lateral não é igual ao limite lateral da derivada, i.e.,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to a^+} f'(x) &\neq f'_+(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}, \\
\lim_{x \to a^-} f'(x) &\neq f'_-(a) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 3. *A função*

$$
f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 5 & x \leq 1 \\ -3x^2 + 2 & x > 1 \end{cases}
$$

é derivável em $x = 1$?
A função não é contínua em $x = 1$, porque

$$f(1) = -3 \cdot 1 + 5 = 2 = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -3x^2 + 5 = 2 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -3x^2 + 2 = -1.$$

Portanto, f não é derivável neste ponto.

Mas, se calcularmos a derivada da função, obtemos (verifique!)

$$f'(x) = \begin{cases} -6 & x < 1 \\ -6 & x > 1 \end{cases}$$

e, portanto, os limites laterais satisfazem

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -6 = \lim_{x \to 1^+} f'(x),$$

o que poderia induzir ao erro de acreditar que a derivada no ponto $x = 1$ exista.

Podemos ver a não diferenciabilidade corretamente calculando as derivadas laterais:

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-3(1+\Delta x)^2 + 5 - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-6\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-3(1+\Delta x)^2 + 2 - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-3 - 6\Delta x - 3\Delta x^2}{\Delta x} = \text{“}\frac{\overset{<0}{-3}}{0^+}\text{”} = -\infty \end{aligned}$$

Portanto, $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, o que comprova que a derivada em $x = 1$ não existe.
Notamos que neste exemplo, $f'_+(1) \neq \lim_{x \to 1^+} f'(x)$.

4.5 Derivadas de funções básicas

4.5.1 Função constante

Teorema: Se $f(x) = c$ (c constante) para todo x, então $f'(x) = 0$
Prova:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

4.5.2 Função identidade

Teorema: Se $f(x) = x$ (c constante) para todo x, então $f'(x) = 1$
Prova:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

4.5.3 Função potência natural

Teorema: Seja $f(x) = x^n$ para $n \in \mathbb{N}$ a derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f'(x) = nx^{n-1} \tag{RT}$$

Este resultado às vezes é chamada de "**Regra do Tombo**".

Prova:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1})}{\Delta x} \\
&= nx^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \cdots + \Delta x^{n-2}\right) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

Exemplo 1. *Calcule a derivada de* $f(x) = x^4$
Regra do Tombo: $f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$. Prova:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)^4 - f(x)^4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4 - x^4}{\Delta x} \\
&= 4x^3 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2(6x^2 + 4x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 4x^3
\end{aligned}$$

Exemplo 2. *Calcule a derivada de* $f(x) = x$
Regra do Tombo: $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1x^0 = 1$.

4.5.4 Função afim

Exemplo 3. *Calcule a derivada de* $f(x) = ax + b$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x) + b - (ax+b)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{ax}^1 + a\Delta x + \cancel{b}^2 - \cancel{ax}^1 - \cancel{b}^2}{\Delta x} = a \lim_{\Delta x \to 0} 1 = a
\end{aligned}$$

Observação: A derivada da reta é o coeficiente angular (como esperado).

4.6 Regras de cálculo para derivadas

Nessa seção, veremos as regras de cálculo de derivadas. Com essas regras, qualquer função elementar poderá ser derivada, sem ter que recorrer à definição da derivada por limite.

4.6.1 Multiplicação por constante

Exemplo 1. *Calcule a derivada de* $f(x) = ax^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - ax^2}{\Delta x} \\ &= a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = a \cdot 2x \end{aligned}$$

Observação: A derivada de a vezes x^2 é a vezes a derivada de x^2. Será sempre assim?

Teorema da Multiplicação por Constante: Se $f(x)$ é diferenciável em x e c é uma constante, então a derivada de $g(x) = c \cdot f(x)$ é

$$g'(x) = c \cdot f'(x)$$

Prova:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} c\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cf'(x) \end{aligned}$$

4.6.2 Regra da Soma

Teorema: Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis em x, então a derivada de $h(x) = f(x) \pm g(x)$ é

$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Prova:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x) - [f(x) \pm g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x) \end{aligned}$$

Observação: Podemos generalizar a Regra da Soma para mais termos aditivos, aplicando-a recursivamente:

$$[f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm f_4(x)]' = [f_1(x) \pm f_2(x)]' \pm [f_3(x) \pm f_4(x)]' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm f_3'(x) \pm f_4(x)'$$

Observação: Os últimos dois teoremas implicam que a diferenciação é uma operação linear:

$$[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x)]' = a_1 f_1'(x) + a_2 f_2'(x) + \ldots + a_n f_n'(x)$$

Exemplo 2. *Calcule a derivada da função*

$$f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 8x + 5$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 8 \cdot 1 + 0 \\ &= 8x^3 - 6x^2 + 8 \end{aligned}$$

Observação: A derivada de um polinômio de grau n é um polinômio de grau $n - 1$.

Exemplo 3. *Calcule a derivada de* $f(x) = ax + b$

$$f'(x) = a \cdot 1 + 0 = a$$

4.6.3 Regra do Produto

Notamos que a derivada de um produto não pode ser igual ao produto das derivadas. Ao escrevermos $x^2 = x \cdot x$ ficaríamos com $1 \cdot 1 = 1$, mas já sabemos que a derivada de x^2 é $2x$.

Teorema: Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções diferenciáveis, então $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ tem derivada

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Está é a chamada **Regra do Produto**.

Prova:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) + f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

onde usamos a existência das derivadas e a continuidade da função g.

Exemplo 4. *Calcule a derivada de $f(x) = x^2$ pela regra do produto.*
Usando $f(x) = x^2 = x \cdot x$, obtemos $\quad f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x\checkmark$.

Exemplo 5. *Qual a derivada de $f(x) = a \cdot g(x)$, sendo a uma constante?*
Pela regra do produto

$$f'(x) = a' \cdot g(x) + a \cdot g'(x)$$

Mas a é constante $\Rightarrow a' = 0 \Rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$. Sempre é assim, um fator constante é preservado na derivada. (Em outras palavras, o Teorema da Multiplicação por Constante é um caso especial da Regra do Produto.)

Exemplo 6. *Calcule a derivada de $f(x) = (2x^3 - 4x^2) \cdot (3x^5 + x^2)$*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x^2 - 8x)(3x^5 + x^2) + (2x^3 - 4x^2)(15x^4 + 2x) \\ &= 18x^7 - 24x^6 + 6x^4 - 8x^3 + 30x^7 - 60x^6 + 4x^4 - 8x^3 \\ &= 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3 \end{aligned}$$

Multiplicando primeiro: $f(x) = 6x^8 - 12x^7 + 2x^5 - 4x^4$ e $f'(x) = 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3$. Obtemos o mesmo resultado.

Observação: A generalização da Regra do Produto para mais fatores é obtida por uso recursivo dela:

$$\begin{aligned} [f(x)g(x)h(x)]' &= f'(x)[g(x)h(x)] + f(x)\,[g(x)h(x)]' \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)\,[g'(x)h(x) + g(x)h'(x)] \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

4.6.4 Regra do Quociente

Teorema: Se $f(x)$ e $g(x)$ são diferenciáveis, então a derivada de $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ é

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Está é a chamada **Regra do Quociente**.

Prova: Exercíco (usar as ideias da prova da Regra do Produto).

Observação: O numerador da Regra do Quociente é parecido com o resultado da Regra do Produto, com exceção do sinal negativo, que fica com o termo que contém a derivada do denomindor.

Exemplo 7. *Calcule a derivada de* $f(x) = \dfrac{2x^3+4}{x^2-4x+1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6x^2(x^2-4x+1)-(2x^3+4)(2x-4)}{(x^2-4x+1)^2} \\ &= \frac{2x^4-16x^3+6x^2-8x+16}{(x^2-4x+1)^2} \end{aligned}$$

Observação: A derivada de uma função racional (ou algébrica) com "saldo de grau" $n \neq 0$ tem "saldo de grau" $n-1$. (No exemplo acima, o polinômio no numerador da função é de grau 3 e o polinômio no denominador é de grau 2, o que resulta em um saldo de grau 1. Na derivada, ambos os polinômios no numerador e denominador são de grau 4, o que resulta em um saldo de grau 0.) Se o saldo de grau for nulo, a redução será por mais do que 1.

4.6.4.1 Generalização da "Regra do Tombo"

Expoentes negativos:
Teorema: Se $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ com n positivo, i.e., $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = -nx^{-n-1}$
Prova:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$$

Em outras palavras, a "Regra do Tombo", equação (RT) na página 96, é válida para todos os números inteiros.

Expoentes racionais:
Teorema: Se $f(x) = x^q \quad q \in \mathbb{Q}$ i.e., $q = m/n$ com $m, n \in \mathbb{Z}$ então $f'(x) = qx^{q-1}$
Prova: Generalizar as contas feitas para a derivada de $x^{2/3}$ no exemplo 3 na página 91.

Expoentes reais:

Teorema: Se $f(x) = x^r \quad r \in \mathbb{R}$ então $f'(x) = rx^{r-1}$ (sem prova)

(Ou seja, a "Regra do Tombo" vale para todos os números reais).

Observação: Se $r < 0$, o ponto $x = 0$ não faz parte do domínio de f e nem de f'.
Se $r \geq 1$ ou $r = 0$, o ponto $x = 0$ é incluso no domínio da função e da derivada.
Se $0 < r < 1$, o ponto $x = 0$ faz parte do domínio de f, mas não faz parte do domínio de f'.

Portanto, as funções $f(x) = x^r$ para $0 \leq r < 1$ não são diferenciáveis (pois a função existe em $x = 0$, mas a derivada não), mas são diferenciáveis em $(-\infty, 0)$ e em $(0, \infty)$. Para todos os outros valores de r, $f(x) = x^r$ é diferenciável (embora para $r < 0$ a derivada não exista em $x = 0$, já que a função também não existe nesse ponto).

4.6.5 Exemplos

Exemplo 8. *Calcule a derivada de* $f(x) = x^7$

$$f'(x) = 7 \cdot x^{7-1} = 7x^6$$

Exemplo 9. *Calcule a derivada de* $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exemplo 10. *Calcule a derivada de* $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2} = 4x^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$$

Exemplo 11. *Calcule a derivada de* $f(x) = x\sqrt{x}$

a) Regra do Tombo: $f(x) = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$$

b) Regra do Produto:

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$$

Exemplo 12. *Calcule a derivada de* $f(x) = 7x^2 - 6x + 3$

$$f'(x) = 7 \cdot 2x^{2-1} - 6x^{1-1} + 0 = 14x^1 - 6x^0 = 14x - 6$$

Exemplo 13. *Calcule a derivada de* $f(x) = \dfrac{x^4 + 3}{x^4 - 3}$

$$f'(x) = \frac{(4x^3 + 0)(x^4 - 3) - (x^4 + 3)(4x^3 - 0)}{(x^4 - 3)^2} = \frac{(4x^7 - 12x^3) - (4x^7 + 12x^3)}{(x^4 - 3)^2} = \frac{-24x^3}{(x^4 - 3)^2}$$

Observação: O saldo de grau desceu de $4 - 4 = 0$ para $3 - 8 = -5$. O motivo é que a função pode ser reescrita por meio da divisão polinomial como

$$f(x) = \frac{x^4 + 3}{x^4 - 3} = 1 + \frac{6}{x^4 - 3}$$

cuja derivada é

$$f'(x) = 0 + \frac{0(x^4 - 3) - 6(4x^3 - 0)}{(x^4 - 3)^2} = \frac{-24x^3}{(x^4 - 3)^2}$$

onde o saldo de grau da fração remanescente desceu de -4 para -5.

Exemplo 14. *Calcule a derivada de* $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})(x-\sqrt{x}) - (x+\sqrt{x})(1-\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x-\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{\cancel{x}^{1} + \frac{1}{2}\sqrt{x} - \sqrt{x} - \cancel{\tfrac{1}{2}}^{2} - \cancel{x}^{1} - \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \cancel{\tfrac{1}{2}}^{2}}{(x-\sqrt{x})^2} = -\frac{\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

Observação: Aqui, o saldo de grau desceu de $1-1=0$ para $\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$. Entendemos o saldo de grau resultante se escrevermos a função original como

$$f(x) = 1 + \frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$$

onde o saldo de grau da fração remanescente é $\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

Exemplo 15. *Encontrar todas as retas normais à curva* $y(x) = 2x^2 - 1$ *que passam pelo ponto* $(0, 5/4)$
Solução: A derivada da curva dada é

$$f'(x) = 2\cdot 2x^{2-1} - 0 = 4x$$

Portanto, a inclinação da reta tangente ao gráfico desta função em qualquer ponto x_0 é dada por $m_t = 4x_0$. Assim, a inclinação da reta normal neste ponto é $m_n = -1/4x_0$ onde $x_0 \neq 0$, ou então a reta normal é vertical nos pontos $x = x_0$ onde a inclinação da reta tangente for zero, i.e., em $x_0 = 0$. Portanto, a reta normal que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ é

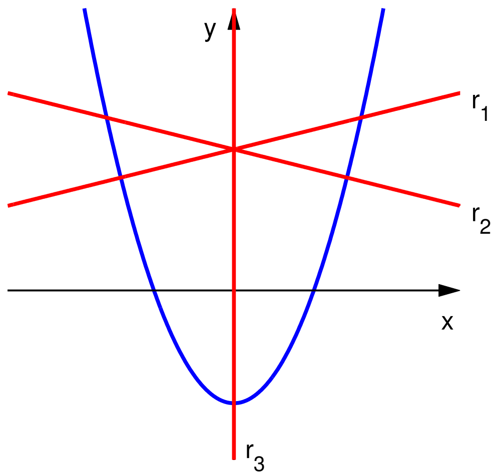


Figura 4.11: Três retas normais

$$n(x) = -\frac{1}{4x_0}(x-x_0) + f(x_0) = -\frac{x-x_0}{4x_0} + 2x_0^2 - 1$$

As retas normais que passam pelo ponto $(0, 5/4)$ tem que satisfazer

$$n(0) = 5/4 \Rightarrow -\frac{0-x_0}{4x_0} + 2x_0^2 - 1 = \frac{1}{4} + 2x_0^2 - 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow 2x_0^2 = \frac{5}{4} + 1 - \frac{1}{4} = 2,$$

ou seja,

$$x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = \pm 1$$

Portanto, temos duas retas normais r_1 e r_2, dadas por

$$r_{1,2} : n(x) = \mp\frac{1}{4}(x \pm 1) + 2 - 1 = \mp\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$$

Além disso, temos que analisar o caso $x_0 = 0$ que corresponde a reta vertical $r_3 : x = 0$, i.e., o eixo y. Observamos que esta reta passa também pelo ponto $(0, 5/4)$ por este ter coordenada horizontal $x = 0$. Assim, temos três retas normais à curva dada que passam pelo ponto $(0, 2)$ (veja Figura 4.11).

4.6.6 Regra da Cadeia

Como devemos proceder se temos que derivar uma função composta, $f(g(x))$?

> **Teorema:** Se g for uma função derivável em x e f for uma função derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$, definida por $F(x) = f(g(x))$, será derivável em x e F' será dada pelo produto
> $$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
> Esta é a chamada **Regra da cadeia**.

Prova:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x) - g(x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Usando que $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g$ com $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta g = 0$, porque g é contínua em x, temos

$$F'(x) = \underbrace{\lim_{\Delta g \to 0} \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g}}_{f'(g)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{g'(x)}$$

Notação: Escrevemos também

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Observação: Novamente, a Regra da Cadeia pode ser generalizada para uma função multiplamente composta, aplicando-a recursivamente:

$$f(g(h(x)))' = f'(g) \cdot g(h(x))' = f'(g) \cdot g'(h) \cdot h'(x)$$

Esta forma é o motivo pelo nome "Regra da Cadeia". Na notação fracionária, esta última equação fica:

$$f(g(h(x)))' = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{dx}$$

Exemplo 16. *Calcule a derivada de* $F(x) = (2x+1)^3$
$f(g) = g^3 \quad$ e $\quad g(x) = 2x+1$
$f'(g) = 3g^2 \quad$ e $\quad g'(x) = 2$
$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3g(x)^2 \cdot 2 = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(4x^2+4x+1) = 24x^2 + 24x + 6$
Teste: $F(x) = (2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 1 + 3(2x) \cdot 1^2 + 1^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
Assim, $F'(x) = 8 \cdot 3x^2 + 12 \cdot 2x + 6 \cdot 1 + 0 = 24x^2 + 24x + 6$

Recomendação: Até se acostumar com a Regra da Cadeia, introduza funções auxiliares para calcular a derivada de funções compostas.

Exemplo 17. *Calcule a derivada de* $h(x) = (2x^3 - 5x^2 + 4)^5$
$f(g) = g^5$ e $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$.
$f'(g) = 5g^4$ e $g'(x) = 6x^2 - 10x$
Portanto: $h'(x) = 5(2x^3 - 5x^2 + 4)^4 \cdot (6x^2 - 10x)$

Exemplo 18. *Calcule a derivada de* $F(x) = \sqrt{6x^4 + 3x^2}$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= f(g(x)) = \sqrt{\underbrace{6x^4 + 3x^2}_{g}} = \sqrt{g} \quad \Rightarrow \quad f'(g) = \frac{1}{2\sqrt{g}} \\
g(x) &= 6x^4 + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 24x^3 + 6x \\
F'(x) &= [f(g(x))]' = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot (24x^3 + 6x) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{6x^4 + 3x^2}} \cdot (24x^3 + 6x) \\
&= \frac{12x^3 + 3x}{\sqrt{6x^4 + 3x^2}}
\end{aligned}
$$

Exemplo 19. *Calcule a derivada de* $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 1}$
$f(x) = h(g(x))$ com $h(g) = g^{1/3}$ e $g(x) = 3x^2 - 1$
$h'(g) = \frac{1}{3}g^{-2/3}$ e $g'(x) = 3 \cdot 2x - 0 = 6x$
Portanto, $f'(x) = h'(g)g'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 1)^{-2/3} \cdot 6x = 2x(3x^2 - 1)^{-2/3}$.

Exemplo 20. *Calcule a derivada de* $F(x) = \sqrt{(3x + 1)^{-1} - 1}$
Escrevemos $F(x) = f(g(h(x)))$ onde $f(g) = \sqrt{g}$, $g(h) = h^{-1} - 1$ e $h(x) = 3x + 1$
$f'(g) = \dfrac{1}{2\sqrt{g}}$, $g'(h) = (-1)h^{-2}$ e $h'(x) = 3$

Portanto,
$$F'(x) = f'(g)g'(h)h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{h^{-1} - 1}} \cdot (-(3x + 1)^{-2}) \cdot 3 = \frac{-3}{2(3x + 1)^2\sqrt{(3x + 1)^{-1} - 1}}$$

Observação: Podemos deduzir a Regra do Quociente usando a Regra do Produto e a Regra da Cadeia:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= f(x)\frac{1}{g(x)} = f(x) \cdot g(x)^{-1} \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot [g(x)^{-1}]' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot (-1)g(x)^{-2} \cdot g'(x) \\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}
$$

4.6.7 Resumo das regras de diferenciação

1) Regra da Soma:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \pm g(x) \\ F'(x) &= f'(x) \pm g'(x) \end{aligned}$$

2) Regra do Produto:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ F'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

3) Regra do Quociente:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ F'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

4) Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(g(x)) \\ F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Observação: Com as regras da diferenciação, podemos calcular a derivada de qualquer combinação de funções, contanto que conheçamos as derivadas das funções envolvidas.

4.7 Derivadas de funções elementares

4.7.1 Função potência

Lembrete: Já vimos que a derivada da função potência $f(x) = x^r$ (para qualquer potência real r) é dada pela "Regra do Tombo": $f'(x) = rx^{r-1}$.

Com isso e com as regras de cálculo para derivadas, podemos determinar a derivada de qualquer

- função polinomial,
- função racional,
- função algébrica.

Exemplo 1. *Calcule a derivada de* $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{3x^2-1}}$

Aplicamos a regra do quociente e a regra da cadeia para obter:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3x^2\sqrt[3]{3x^2-1} - x^3 \cdot \left(\sqrt[3]{3x^2-1}\right)'}{\left[\sqrt[3]{3x^2-1}\right]^2} \\
f'(x) &= \frac{3x^2(3x^2-1)^{\frac{1}{3}} - x^3 \cdot 2x(3x^2-1)^{-\frac{2}{3}}}{(3x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{(3x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{(3x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{3x^2(3x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(3x^2-1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{x^2(7x^2-3)}{\sqrt[3]{(3x^2-1)^4}}
\end{aligned}$$

onde usamos a derivada da raiz cúbica calculada no Exemplo 19 da página 104.

Exemplo 2. *Calcule a derivada de* $f(x) = (x^2+\sqrt{x})\sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

Aplicamos a regra do produto, a regra da cadeia e a regra do quociente para obter:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + (x^2+\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}}\frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\
&= (2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + (x^2+\sqrt{x})\sqrt{\frac{x^2+1}{2x}}\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \\
&= (2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + (x^2+\sqrt{x})\frac{1-x^2}{\sqrt{2x(x^2+1)^3}} \\
&= \frac{(4x^2+\sqrt{x})(x^2+1) + (x^2+\sqrt{x})(1-x^2)}{\sqrt{2x(x^2+1)^3}} = \frac{3x^4+5x^2+2\sqrt{x}}{\sqrt{2x(x^2+1)^3}}
\end{aligned}$$

4.7.2 Funções exponenciais

$$\begin{aligned}
f(x) &= a^x \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^{0+h}-a^0}{h} = a^x \cdot f'(0)
\end{aligned}$$

Observamos aqui duas coisas.

1) A função a^x é diferenciável em todo x contanto que ela seja diferenciável em $x = 0$.

2) Sabendo que $f'(0)$ representa a inclinação da função em $x = 0$, a derivada de $f(x) = a^x$ é ela mesma, multiplicada por essa inclinação!

Lembramos que introduzimos uma base e (número de Euler) para a função exponencial tal que a inclinação de e^x em $x = 0$ seja 1. Assim, por definição do número e, temos para $f(x) = e^x$ que $f'(0) = 1$ e, portanto,

$$f'(x) = e^x \cdot f'(0) = e^x \cdot 1 = e^x$$

Observação: A função $f(x) = c \cdot e^x$ (para qualquer valor da constante c) é a única função cuja derivada é igual a própria função!

A nossa definição do número e pode agora ser especificada em forma de limite:

Def: O número de Euler é o número e tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \qquad \text{(limite fundamental)} \qquad (\dagger)$$

Com este resultado, podemos também determinar o valor da derivada de a^x. Para tal, determinamos o expoente q tal que $e^q = a^x$ (veja Figura 4.12). Ou seja, se $a^x = r \in \mathbb{R}^+$, então $x = \log_a r$ e existe um único q tal que $e^q = r$, com $q = \ln r$. Portanto, $q = \ln r = \ln a^x = x \cdot \ln a$.

Assim $r = e^q = e^{x \cdot \ln a}$ é uma outra forma de representar $r = a^x$. De fato, podemos usar esta representação como definição da função exponencial, i.e., $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

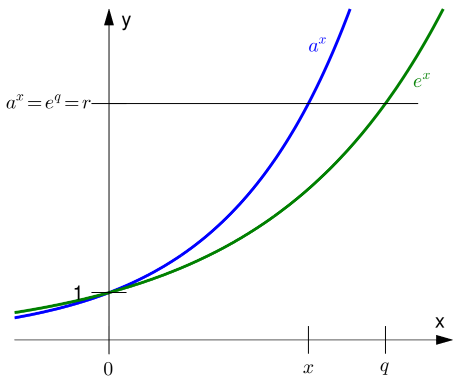


Figura 4.12: Para todo x existe um único q tal que $a^x = e^q$.

Usando essa representação, podemos calcular agora a derivada de $f(x) = a^x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)\cdot \ln a} - e^{x \cdot \ln a}}{h} = \underbrace{e^{x\cdot \ln a}}_{a^x} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{h \cdot \ln a} - 1}{h}$$

Aqui podemos introduzir uma nova variável $p = h \cdot \ln a$ e, observando que $\lim\limits_{h\to 0} p = 0$, podemos escrever

$$f'(x) = a^x \lim_{p\to 0} \frac{e^p - 1}{p/\ln a} = a^x \cdot \ln a \cdot \underbrace{\lim_{p\to 0} \frac{e^p - 1}{p}}_{=1,\text{ definição de } e} = a^x \cdot \ln a$$

Observação: Acabamos de mostrar que a inclinação de uma função exponencial $f = a^x$ em $x = 0$ é igual ao logaritmo natural de sua base, i.e, $f'(0) = \ln a$.

O limite fundamental da equação ($\dagger$) pode então ser generalizado para

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$$

Resumindo as derivadas encontradas: $(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$

Exemplo 3. *Calcule a derivada de $f(x) = 3^{2x}$.*
Podemos escrever

$$f(x) = 3^g \quad \text{com } g(x) = 2x \;\Rightarrow\; g'(x) = 2$$

Assim, pela regra da cadeia:

$$f'(x) = 3^g \ln 3 \cdot g' = 3^{2x} \ln 3 \cdot 2 = 2 \ln 3 \cdot 3^{2x}$$

Alternativa: $f(x) = 3^{2x} = e^{2x \ln 3} = e^g$ com $g = 2x \ln 3 \Rightarrow g' = 2 \ln 3$.
Assim, pela regra da cadeia:

$$f'(x) = e^g \cdot g' = e^{2x \ln 3} \cdot 2 \ln 3 = 2 \ln 3 \cdot 3^{2x}$$

Exemplo 4. *Calcule a derivada de* $f(x) = \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$.
Pelas regras do produto e da cadeia:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(1+\sqrt{x})e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

4.7.3 Funções trigonométricas

1) Seno:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x \\ f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \end{aligned}$$

Teorema de adição: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$. Portanto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x (\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h} = \operatorname{sen} x \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=L} + \cos x \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{=1} \end{aligned}$$

Já calculamos $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ (limite fundamental), falta determinar $L = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$

Ideia: Quando uma diferença tende a zero, multiplicar pelo conjugado.

$$\begin{aligned} L = \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} -\frac{\operatorname{sen} h}{(\cos h + 1)}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Desta forma

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{sen} x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} + \cos x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{=1} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

A derivada do seno é o cosseno!

2) Cosseno:

De forma análoga (exercício): $\dfrac{d\cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x$

3) Demais funções trigonométricas:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Cálculo pela Regra do Quociente: $f(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\operatorname{sen} x)' \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

As derivadas das outras funções trigonométricas são calculadas de forma análoga (exercício!), obtendo

$$\begin{aligned} (\cot x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x \\ (\sec x)' &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec x \cdot \tan x \\ (\csc x)' &= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc x \cdot \cot x \end{aligned}$$

Com esses resultados, podemos agora derivar funções compostas envolvendo funções trigonométricas.

Exemplo 5. *Calcule a derivada de* $F(x) = \operatorname{sen}^2 x$

Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned} f(g) &= g^2 \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen} x \\ f'(g) &= 2g \quad \text{e} \quad g'(x) = \cos x \\ F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2g(x) \cdot \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

Teste pela Regra do Produto:

$$\begin{aligned} F(x) &= \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x \\ F'(x) &= \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

Exemplo 6. *Calcule a derivada de* $F(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^6 - 3x^2}\right)$

Regra da Cadeia: $F(x) = f(g(h(x)))$ com

$f(g) = \operatorname{sen} g$, $g(h) = \sqrt{h}$ e $h(x) = x^6 - 3x^2$.

Assim, $f'(g) = \cos g$, $g'(h) = \frac{1}{2\sqrt{h}}$ e $h'(x) = 6x^5 - 6x$.

Portanto, $F'(x) = \cos\left(\sqrt{x^6 - 3x^2}\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^6 - 3x^2}} \cdot (6x^5 - 6x) = \dfrac{3x(x^4 - 1)}{\sqrt{x^6 - 3x^2}} \cos\left(\sqrt{x^6 - 3x^2}\right)$

Exemplo 7. *Calcule a derivada de* $f(x) = e^{\cos(\sqrt{x})}$
Pela Regra da Cadeia:

$$f = e^g \quad \text{com } g = \cos(\sqrt{x}) = \cos(h) \quad \text{com } h = \sqrt{x}$$

Assim,

$$f'(g) = e^g \ , \quad g'(h) = -\operatorname{sen}(h) \ , \quad h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e, portanto,

$$f'(x) = e^{\cos(\sqrt{x})}[-\operatorname{sen}(\sqrt{x})]\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{e^{\cos(\sqrt{x})}\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

Antes de seguir com o cálculo das derivadas das funções logarítmicas e trigonométricas inversas, temos que tratar de alguns assuntos adicionais.

4.8 Derivadas de ordem superior

Se a função f for diferenciável, a derivada de f será f'.

Se essa função f' for diferenciável, a derivada de f' será $(f')'$.

Escrevemos $(f')' = f''$ e dizemos que f'' é a derivada segunda ou segunda derivada de f, e f' então também é chamada de primeira derivada de f. Definimos

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \ ,$$

se esse limite existir.

Correspondentemente, definimos ordens maiores de derivadas, f''' terceira, f'''' quarta, etc.

Se a n-ésima derivada existir, dizemos que a função f é n vezes diferenciável (ou derivável).

Notação: Como vão ficar muitas linhas, também se usa as seguintes notações:
$f''' = f^{III}$, $f'''' = f^{IV} = f^{(4)}$, $f^V = f^{(5)}$, $f^{VI} = f^{(6)}$, $f^{(n)}$; a última sendo a n-ésima derivada.
Notação fracional: $f' = \dfrac{df}{dx}$, $\qquad f'' = \dfrac{d\frac{df}{dx}}{dx} = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$, $\qquad f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$

Exemplo 1. *Se* $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 3x + 3$ *então:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^2 - 8x + 3 \\ f''(x) &= 18x - 8 \\ f'''(x) &= 18 \end{aligned}$$

Exemplo 2. *Se* $f(x) = \operatorname{sen}(2x^2)$ *então:*

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \cos(2x^2)\cdot 4x \\ f''(x) & = & [\cos(2x^2)]'\cdot 4x + \cos(2x^2)\cdot(4x)' = -\operatorname{sen}(2x^2)\cdot 4x\cdot 4x + \cos(2x^2)\cdot 4 \\ & = & 4\cos(2x^2) - 16x^2\operatorname{sen}(2x^2) \\ f'''(x) & = & 4[-\operatorname{sen}(2x^2)\cdot 4x] - 16[2x\operatorname{sen}(2x^2) + x^2\cos(2x^2)4x] \\ & = & -48x\operatorname{sen}(2x^2) - 64x^3\cos(2x^2) \end{array}$$

Exemplo 3. *Encontre todas as derivadas da função* $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 32x^3 + 15x^2 - 2x \\ f''(x) & = & 96x^2 + 30x - 2 \\ f'''(x) & = & 192x + 30 \\ f^{(4)}(x) & = & 192 \\ f^{(5)}(x) & = & 0 \\ f^{(6)}(x) & = & 0 \\ & \vdots & \end{array}$$

De modo geral, a n-ésima primeira derivada (e todas as superiores) de um polinômio de grau n é nula.

Observação: Notamos que polinômios são infinitas vezes deriváveis. Também são infinitas vezes deriváveis as funções $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x e a^x.

Exemplo 4. *Ache a variação da inclinação da reta tangente* $m(x)$ *à curva* $y = x^3 - 2x^2 + x$ *no ponto* $(2, 2)$.

$$\begin{array}{rcccl} m(x) & = & f'(x) & = & 3x^2 - 4x + 1 \\ m'(x) & = & f''(x) & = & 6x - 4 \\ m'(2) & = & f''(2) & = & 6\cdot 2 - 4 = 8 \end{array}$$

A variação da inclinação da reta tangente $m(x)$ à curva dada em $x = 2$ é $m'(2) = 8$.

Um exemplo para uma derivada segunda é a variação da velocidade, ou seja, a aceleração.

$$\boxed{\begin{array}{l} s = s(t)\text{: Distância percorrida} \\ \dfrac{ds}{dt} = v(t)\text{: Velocidade instantânea} \\ \dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} = a(t)\text{: Aceleração} \end{array}}$$

Observação: A aceleração pode ser negativa, representando então uma desaceleração.

Exemplo 5. *Uma partícula se move ao longo de uma reta horizontal de acordo com a equação* $s = 3t^2 - t^3$. *Determine quando ela passa pela origem, quando ela está parada e quando não está acelerada.*

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= s'(t) = 6t - 3t^2 \\ a(t) &= v'(t) = 6 - 6t \end{aligned}}$$

Portanto:
$s = 0$ em $t = 0$ e $t = 3$
$v = 0$ em $t = 0$ e $t = 2$
$a = 0$ em $t = 1$

Com essas informações, podemos descrever o movimento da partícula: $t = 0$: parada em $x = 0$, sem velocidade, com aceleração $a = 6$; $0 < t < 1$: movimento para a direita, velocidade crescente, aceleração positiva; $t = 1$: posição $x = 2$, velocidade máxima alcançada para a direita $v = 3$, sem aceleração; $1 < t < 2$: movimento para a direita, velocidade decrescente, aceleração negativa (desaceleração); $t = 2$: posição máxima alcançada em $x = 4$, velocidade zero, aceleração $a = -6$, i.e., para a esquerda; $2 < t < 3$: posição à direita da origem, velocidade negativa, i.e., movimento para a esquerda, aceleração negativa; $t = 3$: passagem pela origem; $t > 3$: posição, velocidade e aceleração decrescentes para valores negativos com módulo cada vez maior.

4.9 Diferenciação implícita

Até agora derivamos funções em sua forma explícita, i.e., da forma

$$y = f(x)$$

Exemplo 1. $y = 3x^2 + 5x + 1 \quad \Rightarrow \quad y' = 6x + 5.$

Estas são as chamadas funções explícitas, pois y é explicitamente dado em termos de x. Existem, porém, funções não explícitas, as chamadas implícitas, dadas por $F(x, y) = 0$, por exemplo

Exemplo 2. *Encontre* y' *se* $x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$
Não necessariamente podemos resolver a equação definindo a função implícitamente. Além disso, pode existir mais que uma função $y = f(x)$ satisfazendo a equação implícita.

Mas, admitindo que uma equação desse tipo define implícitamente uma ou mais funções $y = f(x)$, podemos encontrar a derivada dela(s) pelo processo da diferenciação implícita.

O lado esquerdo da equação no Exemplo 2 é uma função de x que podemos denotar por $F(x)$, ou seja, $F(x) = x^6 - 2x$. Da mesma forma, o lado direito é uma função de y, digamos $G(y)$, ou seja, $G(y) = 3y^6 + y^5 - y^2$, onde y depende de alguma forma (desconhecida) de x, que podemos representar por $y = f(x)$. Portanto, podemos escrever a equação do Exemplo 2 como

$$F(x) = G(f(x))$$

Agora já podemos diferenciar a equação, porque sabemos diferenciar uma função $F(x)$ e também sabemos diferenciar uma função $G(f(x))$. Derivando, temos

$$F'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = G'(y) \cdot y'$$

onde usamos a Regra da Cadeia para derivar o lado direito.

Voltando ao exemplo:

$$\begin{array}{rcl} F'(x) & = & 6x^5 - 2 \\ G'(y) & = & 18y^5 + 5y^4 - 2y \\ \text{Assim,} \quad 6x^5 - 2 & = & G'(y) \cdot y' = (18y^5 + 5y^4 - 2y) \cdot y' \end{array}$$

ou seja

$$y'(x) = \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}$$

Dessa forma, é possível expressar y' em dependência de x e y. Note que esse procedimento funciona para qualquer que seja a expressão implícita que relacione x e y. Não é necessário que seja possível separar as variáveis x e y para os dois lados da relação.

Exemplo 3. *Determine* y' *no ponto* $(1,1)$ *se* $3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$
O ponto está na curva, pois $3 \cdot 1^4 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 \cdot 1^3 = -4 = 4 - 8 \cdot 1 \checkmark$.
A diferenciação segue as mesmas regras; da soma, do produto, da divisão e da cadeia. Basta lembrar que y depende de x, i.e.,$y = y(x)$. Obtemos

$$\begin{array}{rcl} 3x^4 \cdot y^2(x) - 7x \cdot y^3(x) & = & 4 - 8y(x) \\ 3 \cdot 4x^3 \cdot y^2(x) + 3x^4 \cdot 2y(x) \cdot y'(x) - 7 \cdot 1 \cdot y^3(x) - 7x \cdot 3y^2(x)y'(x) & = & 0 - 8y'(x) \\ 12x^3y^2 + 6x^4yy' - 7y^3 - 21xy^2y' & = & -8y' \\ 12x^3y^2 - 7y^3 & = & (21xy^2 - 6x^4y - 8)y' \\ y' & = & \dfrac{12x^3y^2 - 7y^3}{21xy^2 - 6x^4y - 8} \\ \text{Assim, } y'(1,1) & = & \dfrac{12 - 7}{21 - 6 - 8} = \dfrac{5}{7} \end{array}$$

De modo geral, podemos expressar explicitamente a derivada de uma relação implícita $F(x,y) = 0$ em termos de x e y, usando *derivadas parciais*:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\left.\frac{\partial F}{\partial x}\middle/\frac{\partial F}{\partial y}\right.$$

onde o símbolo $\frac{\partial}{\partial x}$ denota a derivada parcial com respeito às ocorrências explícitas da variável x, i.e., como se y fosse uma constante e, correspondentemente, $\frac{\partial}{\partial y}$ denota a derivada parcial com respeito às ocorrências explícitas da variável y, i.e., como se x fosse uma constante.

Exemplo 4. *Encontre a equação da reta tangente à curva* $x^3 + y^3 = 9$ *no ponto* $(1,2)$.
O ponto está na curva, pois $1^3 + 2^3 = 9\checkmark$. Diferenciação implícita:

$$\begin{array}{rcl} 3x^2 + 3y^2 \cdot y' & = & 0 \\ y' & = & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{array}$$

Portanto a inclinação da reta tangente a curva em $(1,2)$ e $\quad m_t = y'(1) = -\dfrac{1}{4}$

Dessa forma sabemos que a reta tem que ter a forma $y = m_t x + b$ com intercepto b a ser determinado pelo fato da reta passar pelo ponto (1,2). Podemos escrever

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{4}x + b \\ y(1) &= -\frac{1}{4} + b \\ 2 &= -\frac{1}{4} + b \;\Rightarrow\; b = \frac{9}{4} \\ y &= -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}(9 - x) \end{aligned}$$

(veja Figura 4.13).

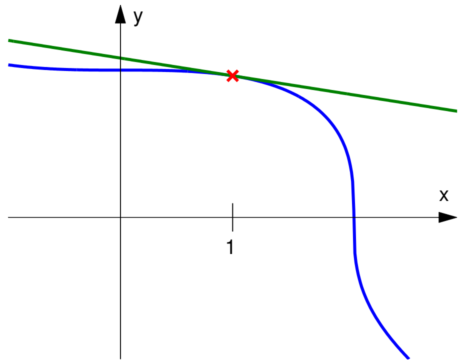


Figura 4.13: Reta tangente à curva $x^3 + y^3 = 9$ no ponto $(1, 2)$.

Exemplo 5. *Dado* $4x^2 + 9y^2 = 36$, *encontre* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *por derivada implícita.*

$$\begin{aligned} 8x + 18yy' = 0 \;\Rightarrow\; y' &= -\frac{8x}{18y} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{x}{y} \\ y'' &= -\frac{4}{9} \cdot \frac{1 \cdot y - xy'}{y^2} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{y + x\frac{4x}{9y}}{y^2} \\ &= -\frac{4}{81} \cdot \frac{9y^2 + 4x^2}{y^3} = -\frac{4}{81} \cdot \frac{36}{y^3} = -\frac{16}{9y^3} \end{aligned}$$

Exemplo 6.
Considere a relação $x^2 + y^2 = 9$
a) Encontre a derivada implícita
b) Resolva por y *e ache as duas funções*
$y = f_1(x)$ *e* $y = f_2(x)$
c) Calcule a derivada explicitamente
d) Compare os resultados

Solução:

a) $2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$

b) $y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2}$.
Assim temos $f_1 = +\sqrt{9 - x^2}$ e $f_2 = -\sqrt{9 - x^2}$

c) $f_1' = \dfrac{1}{2\sqrt{9 - x^2}} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$

$f_2' = -\dfrac{1}{2\sqrt{9 - x^2}} \cdot (-2x) = +\dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$

d) $f_1' = f_2' = -\dfrac{x}{y}$, i.e., as derivadas implícita e explícita são iguais.

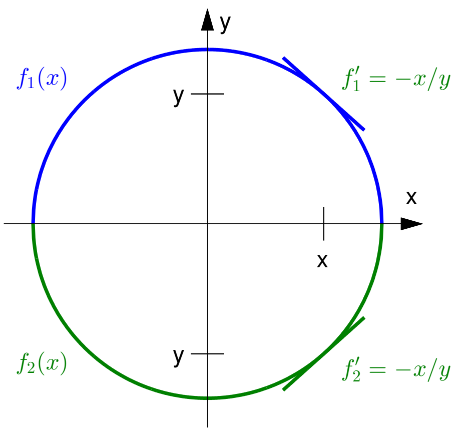


Figura 4.14: Inclinação das duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ que definem o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

4.10 Derivada do logaritmo

4.10.1 Logaritmo natural

$y = f(x) = \ln x \quad f'(x) = ?$
Podemos tentar calcular a derivada pela definição por limite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

mas não conseguimos nos livrar da indeterminação. Um caminho mais fácil usa a derivada implícita:

$$\begin{array}{rrcl l rcl}
 & y & = & \ln x & \iff & x & = & e^y \\
 & & & & & 1 & = & e^y \cdot y' \\
\Rightarrow & y' & = & \dfrac{1}{e^y} & \text{com} & e^y & = & x \\
\text{Portanto,} & y' & = & \dfrac{1}{x}. & & & &
\end{array}$$

Assim temos:

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

4.10.2 Outros logaritmos

Correspondentemente para $f(x) = \log_a x$:

$$\begin{array}{rrcl l rcl}
\text{Usamos} & y & = & \log_a x & \iff & x & = & a^y \\
\text{e a derivada implícita:} & & & & & 1 & = & a^y \ln a \cdot y' \\
\Rightarrow & y' & = & \dfrac{1}{a^y \ln a} & \text{com} & a^y & = & x \\
\text{Portanto,} & y' & = & \dfrac{1}{x \ln a}. & & & &
\end{array}$$

Assim temos:

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

4.10.3 Limite fundamental

Conhecendo a derivada das funções logarítmicas, podemos analisar o limite definindo a inclinação da função $f(x) = \ln x$ em $x = 1$. Sabemos que $f'(x)$ tem que satisfazer

$$\begin{array}{rrcl}
 & f'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\
\text{e} & f'(x) & = & \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x}
\end{array}$$

Em $x = 1$, esse limite ele tem que ser igual a $f'(1) = 1/1 = 1$. Desta forma,

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\Delta x) - \ln(1)}{\Delta x} = 1$$

Uma vez que este limite existe, podemos reescrevê-lo algebricamente como

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \ln(1+\Delta x) \right) \\ &= \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} \ln(1+t) \right) = \lim_{t \to 0} \left(\ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \right) = \ln\left(\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right) = 1 \end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} &= e \\ \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e \end{aligned}}$$

Limite Fundamental!

Forma Geral:

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{t \to 0}(1+at)^{\frac{b}{t}} &= e^{ab} \\ \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} &= e^{ab} \end{aligned}}$$

Limite Fundamental!

Ainda, podemos escrever a derivada do logaritmo natural em $x = 1$ como

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = 1$$

e, portanto, temos

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1}$$

Limite Fundamental!

4.11 A derivada da função inversa

Vamos lembrar da Seção 2.5, considerando a relação

$$x^2 - y^2 = 4 \tag{‡}$$

Resolvendo-a para y, obtemos

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$$

Portanto, a equação (‡) não define y como função de x, porque para todo x tem dois valores de y que satisfazem a equação. Correspondentemente, resolvendo a equação (‡) para x, obtemos

$$x = \pm\sqrt{y^2 + 4}$$

Portanto, essa equação também não define x como função de y.

Em contrapartida, a relação
$$x^2 - y = 1$$
define $y = x^2 - 1$ como função de x, porém $x = \pm\sqrt{y+1}$ não é função de y.

Em alguns casos, uma relação envolvendo duas variáveis, x e y, define tanto y como função de x como x em função de y. Por exemplo,

$$y - x^3 = 1$$

define

$$y = 1 + x^3 = f(x) \qquad \text{e} \qquad x = \sqrt[3]{y-1} = g(y)$$

As funções f e g são chamadas funções inversas uma da outra, ou seja, f é a inversa de g e g é a inversa de f.

Também escrevemos a inversa de uma função f como f^{-1}. Devemos prestar atenção para não confundir esta notação com o expoente $(f)^{-1}$, que significa $\dfrac{1}{f}$.

Portanto, para nosso último exemplo, podemos escrever que a função inversa de $f(x) = x^3+1$ é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

Definição: Seja f o conjunto de pares ordenados (x, y). Se existe uma função f^{-1} tal que $x = f^{-1}(y)$ se e somente se $f(x) = y$, então f^{-1} (que representa o conjunto dos pares ordenados (y, x)) é chamada de inversa da função f. O domínio de f é a imagem de f^{-1} e a imagem de f é o domínio de f^{-1}.

Observamos que $x = f^{-1}(f(x))$ ou $y = f(f^{-1}(y))$.

Teorema: Se f for uma função contínua crescente (decrescente) em $[a, b]$, então

(i) f tem uma inversa f^{-1}, definida em $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$).

(ii) f^{-1} é contínua em $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$).

(iii) f^{-1} é crescente (decrescente) em $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$).

Teorema: Se $y = f(x)$ for uma função monótona e contínua em $[a, b]$ com valores $y \in \mathbb{V}$, se f é derivável em $[a, b]$ e $f'(x) \neq 0$ para todo x em $[a, b]$, então a derivada da função inversa, $x = f^{-1}(y)$, é dada por
$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x)}{dx}} \qquad \forall y \in \mathbb{V}$$
Prova:
$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} \tag{§}$$

Da mesma forma como $f(x) = y$, temos também que $f(x+\Delta x) = y+\Delta y$ (pela continuidade de f). Portanto, para a função inversa, temos $f^{-1}(y) = x$ e também $f^{-1}(y + \Delta y) = x + \Delta x$.

Além disso, $f(f^{-1}(y+\Delta y)) = y+\Delta y = f(x+\Delta x)$, portanto $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Usando essas relações na equação (§), obtemos

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{x+\Delta x - x}{f(x+\Delta x)-f(x)} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} .$$

Como $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$, segue que $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, e $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \Delta x = 0$. Portanto

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$$

Exemplo 1. *Seja $y = f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. Determine inclinação do gráfico da função inversa no ponto $y(2)$, i.e., no valor de y quando $x=2$.*

Notamos que em $x = 2$, temos $y = f(2) = \dfrac{2\cdot 2+3}{2-1} = 7$.

Para determinar a função inversa, isolamos o x na expressão dela:

$$\begin{aligned}
y(x-1) &= 2x+3\\
yx-y &= 2x+3\\
yx-2x &= y+3\\
(y-2)x &= y+3\\
x = f^{-1}(y) &= \frac{y+3}{y-2}
\end{aligned}$$

Derivada:

$$x' = \frac{1(y-2)-(y+3)1}{(y-2)^2} = \frac{-5}{(y-2)^2}$$

Assim, obtemos como inclinação em $y = 7$: $x'(7) = \dfrac{-5}{(7-2)^2} = -\dfrac{1}{5}$

Caminho alternativo usando a expressão para a derivada da função inversa $\dfrac{df^{-1}}{dy} = \dfrac{1}{f'(x)}$:

Derivada da função original:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2(x-1)-(2x+3)1}{(x-1)^2}\\
f'(x) &= -\frac{5}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função inversa é

$$\frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} = \frac{1}{-\frac{5}{(x-1)^2}} = -\frac{1}{5}(x-1)^2$$

Assim, obtemos o valor procurado da inclinação da função inversa ao substituirmos $x=2$ nessa expressão: $x'(y=7) = \dfrac{df^{-1}}{dy}(x=2) = -\dfrac{1}{5}(2-1)^2 = -\dfrac{1}{5}$

Note que para determinar a inclinação da função inversa, não foi necessário explicitá-la e nem conhecer o valor $y = 7$ associado ao valor de $x = 2$. Sendo assim, esse caminho pode ser utilizado quando não é possível encontrar a expressão explícita da função inversa.

Observação: As duas expressões encontradas para a derivada da função inversa são equivalentes: usando a equação acima para x em função de y na derivada da função inversa, temos

$$\begin{aligned} \frac{df^{-1}}{dy} &= -\frac{1}{5}\left(\frac{3+y}{y-2}-1\right)^2 = -\frac{1}{5}\left(\frac{3+y-(y-2)}{y-2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{5}\left(\frac{5}{y-2}\right)^2 = -\frac{5}{(y-2)^2} \ , \end{aligned}$$

que iguala o resultado anterior par x'.

4.12 Funções trigonométricas inversas e suas derivadas

As funções trigonométricas são periódicas e, portanto, não são injetoras, i.e. existem múltiplos valores da variável independente que fornecem o mesmo valor da variável independente. Como vimos na Seção 2.5.3, funções não injetoras precisam ser divididos em ramos, i.e., partes de seu domínio em que a função é injetora, para funções inversas possam ser determinadas para cada um desses ramos. Vimos esse procedimento no Exemplo 4 na página 42 para o seno. Lembramos aqui este procedimento e fazemos o procedimento análogo para as demais funções trigonométricas.

4.12.1 As funções trigonométricas inversas

Como as funções trigonométricas são associadas, geometricamente, ao arco do ângulo na medida em radianos, as suas inversas fornecem o valor desse arco. Por isso, recebem o nome de arco-seno, arco-cosseno, arco-tangente, arco-cotangente, arco-secante e arco-cossecante.

Arco-seno: Definimos a função arco-seno, $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, pela equivalência dessa expressão com a expressão inversa, $x = f^{-1}(y) = \operatorname{sen} y$ com a restrição de que $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ (ramo principal). Ou seja, definimos

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

e notamos que o domínio do arco-seno é $\mathbb{D} = [-1, 1]$ e sua imagem é $\mathbb{V} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Notamos ainda que $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \quad x \in [-1, 1]$ e $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y) = y \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

A Figura 4.15a mostra o ramo principal do arco-seno.

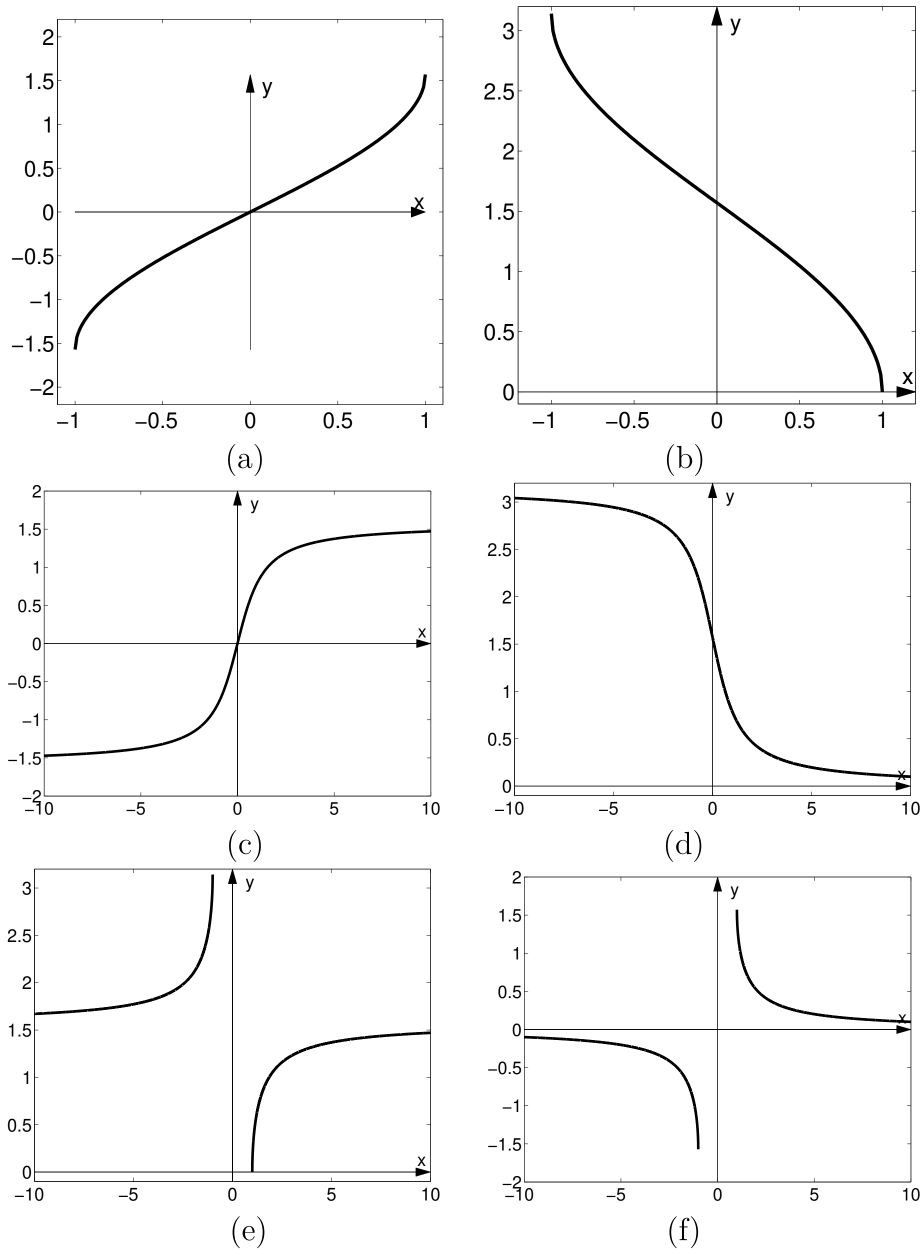


Figura 4.15: Ramos principais das funções trigonométricas inversas: (a) arco-seno, (b) arco-cosseno, (c) arco-tangente, (d) arco-cotangente, (e) arco-secante, (f) arco-cossecante.

Observação: Como o seno é monótono em outros intervalos $\left[\frac{2n-1}{2}\pi, \frac{2n+1}{2}\pi\right] \quad (n \in \mathbb{Z})$, poderíamos ter escolhido qualquer outro intervalo destes para definir a sua função inversa. Estas funções são os outros ramos do seno.

Cabe mencionar que, para os nossos objetivos, a escolha $n = 0$, i.e $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, é a que mais convém. Porém, em outras aplicações, isto não é necessariamente o caso. Antes de usar o arco-seno, é sempre necessário pensar sobre o ramo, i.e., o intervalo de domínio do seno, onde se deseja definí-lo no problema atual.

Arco-cosseno: Correspondentemente, definimos a função inversa do cosseno, a função arco-cosseno, como

$$y = \arccos x \quad \Longrightarrow \quad x = \cos y \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \pi$$

com domínio $\mathbb{D} = [-1, 1]$ e imagem $\mathbb{V} = [0, \pi]$ (ramo principal).
Observação: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x$ (Consequência de $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{sen}(x)$).

A Figura 4.15b mostra o ramo principal do arco-cosseno.

Arco-tangente: A função inversa da tangente é o arco-tangente,

$$y = \arctan x \quad \Longrightarrow \quad x = \tan y \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

com domínio $\mathbb{D} = [-\infty, \infty]$ e imagem $\mathbb{V} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (ramo principal).

A Figura 4.15c mostra o ramo principal do arco-tangente.

Arco-cotangente: A função inversa da cotangente é o arco-cotangente

$$y = \operatorname{arccot} x \quad \Longrightarrow \quad x = \cot y \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \pi$$

com domínio $\mathbb{D} = [-\infty, \infty]$ e imagem $\mathbb{V} = [0, \pi]$ (ramo principal).
Observação: $\operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ (Consequência de $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan(x)$).

A Figura 4.15d mostra o ramo principal do arco-cotangente.

Arco-secante: A função inversa da secante é o arco-secante

$$y = \operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$$

com domínio $\mathbb{D} = \{x \Big| |x| \geq 1\}$ e imagem igual à do arco-cosseno.

A Figura 4.15e mostra o ramo principal do arco-secante.

Arco-cossecante: A função inversa da cossecante é o arco-cossecante

$$y = \operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arccot}\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$$

com domínio $\mathbb{D} = \{x \Big| |x| \geq 1\}$ e imagem igual à do arco-seno.

A Figura 4.15f mostra o ramo principal do arco-cossecante.

4.12.2 Derivadas das funções trigonométricas inversas

Calculamos as derivadas das funções trigonométricas inversas usando a derivada da função inversa:
Arco-seno:

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \Longrightarrow \quad x = \operatorname{sen} y \quad \text{com} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Derviando a relação $x = \operatorname{sen} y$ implicitamente, temos:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos y \cdot y' \\ y' &= \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

onde usamos

$$\begin{aligned} \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y &= 1 \\ \Rightarrow \cos y &= \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} \end{aligned}$$

Ramo principal $\Rightarrow$ sinal positivo

Ou $\dfrac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$ é a derivada de função inversa. Portanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Arco-cosseno: Correspondentemente $y = \arccos x \iff x = \cos y$. A derivada é

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= -\operatorname{sen} y \\ &= -\sqrt{1-\cos^2 y} \\ &= -\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Função inversa:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Resumindo:

$$\begin{aligned} (\operatorname{arcsen} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Note: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x$.
Portanto, $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x\right)' = -(\operatorname{arcsen} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Arco-tangente: Temos também $y = \arctan x \iff x = \tan y$. Derivando a última:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\cos^2 y} \\ &= \tan^2 y + 1 \\ &= x^2 + 1 \\ \Rightarrow (\arctan x)' = \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Arco-cotangente: $y = \operatorname{arccot} x \iff x = \cot y$

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 y} \\
&= -\cot^2 y - 1 \\
&= -(x^2+1) \\
\Rightarrow (\operatorname{arccot} x)' = \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Arco-secante: $y = \operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}$. Derivando essa expressão usando a Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

Arco-cossecante: $y = \operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsen} \frac{1}{x}$. Derivando usando a Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= -\frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

Resumindo, as derivadas das funções trigonométricas inversas são as seguintes funções racionais e algébricas:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{arcsen} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\
(\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \\
(\operatorname{arcsec} x)' &= \frac{1}{|x|}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
(\operatorname{arccsc} x)' &= -\frac{1}{|x|}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

Observação: Os sinais das derivadas de arcsen, arccos, arcsec e arccsc se referem aos ramos principais dessas funções trigonométricas inversas. Ramos deslocados por múltiplos pares de π têm os mesmos sinais, enquanto ramos deslocados por múltiplos ímpares de π têm os sinais opostos.

4.13 As funções hiperbólicas

4.13.1 Definições

1) A função $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R},\ \mathbb{V} = \mathbb{R})$ é o seno hiperbólico.

2) A função $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R},\ \mathbb{V} = \{y|y \geq 1\})$ é o cosseno hiperbólico.

3) A função $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R},\ \mathbb{V} = (-1, 1))$ é a tangente hiperbólica.

4) A função $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{0\},$ $\mathbb{V} = \{y \,\big|\, |y| > 1\})$ é a cotangente hiperbólica.

5) A função $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R},\ \mathbb{V} = \{y|0 < y \leq 1\})$ é a secante hiperbólica.

6) A função $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{0\},\ \mathbb{V} = \mathbb{R} - \{0\})$ é a cossecante hiperbólica.

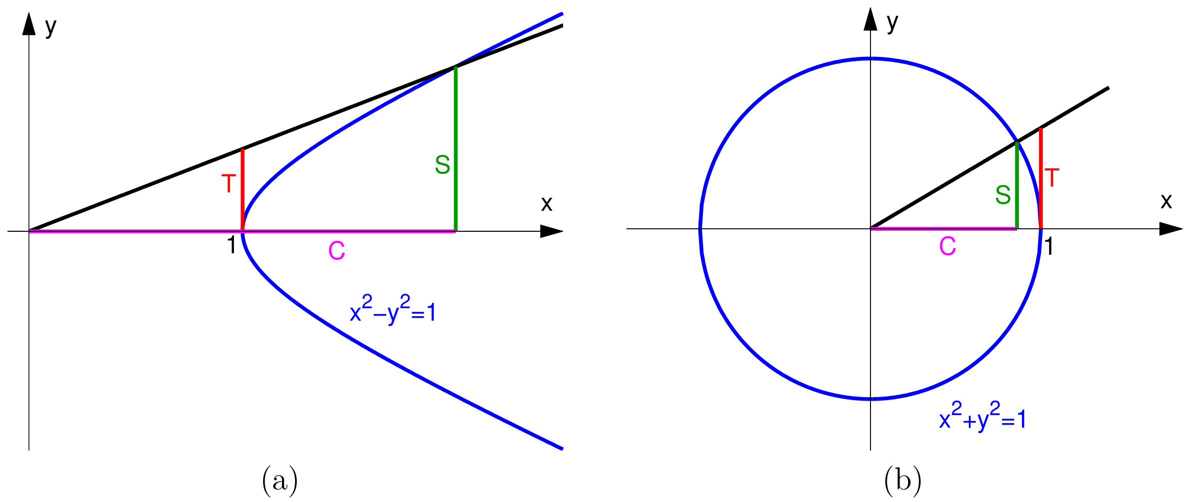


Figura 4.16: Analogia geométrica entre as funções trigonométricas e hiperbólicas. (a) Hipérbola unitária $x^2 - y^2 = 1$ com $S = \operatorname{senh} A$, $C = \cosh A$, $T = \tanh A$. (b) Circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$, com $S = \operatorname{sen} a$, $C = \cos a$, $T = \tan a$.

As funções hiperbólicas recebem nomes correspondentes às funções trigonométicas, porque podem ser interpretadas geometricamente de forma análoga usando a hipérbola unitária ao invés da circunferência unitária (ver Figura 4.16).

4.13.2 Propriedades da função $\operatorname{senh} x$

$$\begin{array}{rclcl}
f(x) & = & \operatorname{senh} x & = & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\
f(0) & = & \dfrac{e^0 - e^{-0}}{2} & = & \dfrac{1-1}{2} & = & 0 \\
f'(x) & = & & = & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & = & \cosh x \\
\text{para que } f'(x) & = & 0 & & \text{teria que ser} & & e^{-x} = -e^x \quad \text{nunca!} \\
f'(0) & = & \dfrac{1+1}{2} & = & \dfrac{2}{2} = 1
\end{array}$$

Comportamento para grandes x:

$$\begin{array}{rclclcl}
\lim\limits_{x\to\infty} f(x) & = & \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & = & \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}(\underbrace{e^x}_{\infty} - \underbrace{e^{-x}}_{0}) & = & \infty \\
\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) & = & \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & = & \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}(\underbrace{e^x}_{0} - \underbrace{e^{-x}}_{\infty}) & = & -\infty
\end{array}$$

O gráfico da função $f(x) = \operatorname{senh} x$ é mostrada na Figura 4.17a.

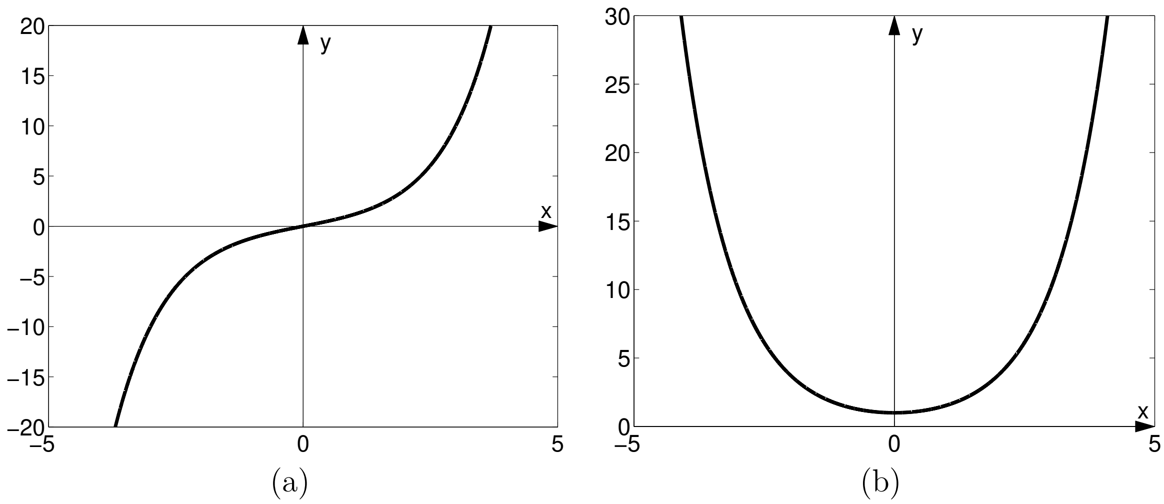


Figura 4.17: Gráficos das funções hiperbólicas: (a) seno hiperbólico, (b) cosseno hiperbólico.

4.13.3 Propriedades da função $\cosh x$

$$\begin{array}{rclclcl}
f(x) & = & \cosh x & = & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & > & 0 \quad \forall \quad x \\
f(0) & = & 1 \\
f'(x) & = & & = & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & = & \operatorname{senh} x \\
\text{para que } f'(x) & = & 0 & & \text{precisamos que} & & e^{-x} = e^x \Rightarrow x = 0
\end{array}$$

Comportamento para grandes x:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^x}_{\infty}+\underbrace{e^{-x}}_{0}) &= \infty\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{e^x}_{0}+\underbrace{e^{-x}}_{\infty}) &= \infty
\end{aligned}$$

O gráfico da função $f(x) = \cosh x$ é mostrada na Figura 4.17b.

Observação: O cosh é a função que descreve a forma que uma corda assume quando fixa em dois pontos quaisquer. A curva resultante é chamada de *catenária*.

Os gráficos das demais funções hiperbólicas são mostrados na Figura 4.18.

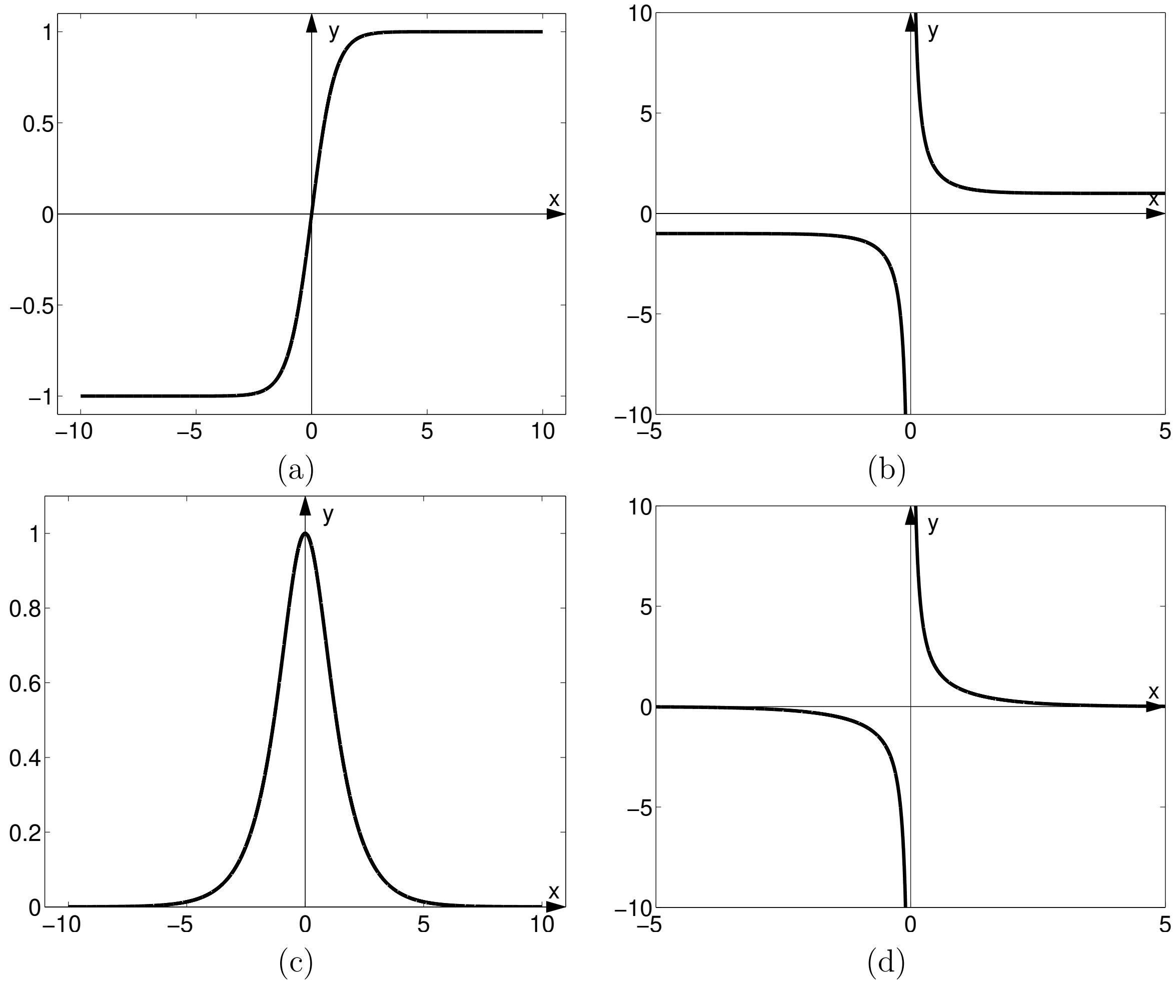


Figura 4.18: Funções hiperbólicas: (a) tangente hiperbólica, (b) cotangente hiperbólica, (c) secante hiperbólica, (d) cossecante hiperbólica.

4.13.4 Relações

Entre as funções hiperbólicas, existem algumas relações que se assemelham a correspondentes relações entre as funções trigonométricas. Primeiramente notamos que

Hiperbólicas	Trigonométricas
$\cosh x + \operatorname{senh} x = e^{x}$	$\cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix}$ (Fórmula de Euler)
$\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$	$\cos x - i \operatorname{sen} x = e^{-ix}$
	(onde i denota a unidade imaginária)

Além disso, existem relações similares aos conhecidos teoremas de adição das funções trigonométricas:

Hiperbólicas	Trigonométricas
$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$	$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$
$1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\coth^2 x - 1 = \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x}$	$\cot^2 x + 1 = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

Prova da primeira relação:

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

As outras duas relações seguem direto desta identidade e das definições de $\tanh x$ e $\coth x$.

Além disso, temos outras analogias, como por exemplo:

Hiperbólicas	Trigonométricas
$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$	$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$	$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$	$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
$\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$	$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\coth(x+y) = \dfrac{1 + \coth x \coth y}{\coth x + \coth y}$	$\cot(x+y) = \dfrac{1 - \cot x \cot y}{\cot x + \cot y}$
$\operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = 2 \operatorname{senh} \dfrac{x+y}{2} \cosh \dfrac{x-y}{2}$	$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \dfrac{x+y}{2} \cosh \dfrac{x-y}{2}$	$\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
$\cosh x - \cosh y = 2 \operatorname{senh} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{senh} \dfrac{x-y}{2}$	$\cos x - \cos y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2}$

Notamos que em algumas das relações entre funções hiperbólicas, ocorre troca de sinal em comparação à correspondente relação trigonométrica.

4.13.5 Derivadas das funções hiperbólicas

$$
\begin{array}{rcccccl}
\hline
f(x) & = & \operatorname{senh} x & = & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & & \\
f'(x) & = & \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}(-1)) & = & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & = & \cosh x \\
\hline
f(x) & = & \cosh x & = & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & & \\
f'(x) & = & \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}(-1)) & = & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & = & \operatorname{senh} x \\
\hline
f(x) & = & \tanh x & = & \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} & & \\
f'(x) & = & \dfrac{\cosh x \cosh x - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} x}{\cosh^2 x} & = & \dfrac{1}{\cosh^2 x} & = & \operatorname{sech}^2 x \\
\hline
f(x) & = & \coth x & = & \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} & & \\
f'(x) & = & \dfrac{\operatorname{senh} x \operatorname{senh} x - \cosh x \cosh x}{\operatorname{senh}^2 x} & = & -\dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x} & = & -\operatorname{csch}^2 x \\
\hline
f(x) & = & \operatorname{sech} x & = & \dfrac{1}{\cosh x} & & \\
f'(x) & = & -\dfrac{1}{\cosh^2 x} \operatorname{senh} x & = & -\operatorname{sech} x \tanh x & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccc}
\hline
f(x) & = & \operatorname{csch} x & = & \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} \\
f'(x) & = & -\dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x} \cosh x & = & -\operatorname{csch} x \coth x \\
\hline
\end{array}
$$

4.14 As funções hiperbólicas inversas

4.14.1 Definições

Seno hiperbólico: O seno hiperbólico é monótono (crescente) para todo $x \in \mathbb{R}$, e portanto não tem nenhuma restrição sobre o domínio para a determinação de sua função inversa. Como veremos mais adiante, essa inversa fornece o valor de uma área associada à hipérbola unitária $x^2 - y^2 = 1$. Por isso, recebe o nome de **área-seno hiperbólico**, denotado por $f(x) = \operatorname{arsenh} x$.

Def: $y = \operatorname{arsenh} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{senh} y$

O domínio do área-seno hiperbólico é dado pela imagem do seno hiperbólico, i.e, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
A imagem do área-seno hiperbólico é o domínio do seno hiperbólico, ou seja $\mathbb{V} = \mathbb{R}$.

Cosseno hiperbólico: Já a função cosseno hiperbólico é monótona em cada um dos intervalos $(-\infty, 0]$ e $[0, \infty)$. Temos que nos decidir por um ramo. O ramo principal usa $y \in [0, \infty)$. Neste intervalo:

Def: $y = \operatorname{arcosh} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \cosh y \qquad 0 \leq y < \infty$

O domínio do área-cosseno hiperbólico é dado pela imagem do cosseno hiperbólico, i.e, $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < \infty\}$.
A imagem do área-cosseno hiperbólico é o domínio do ramo utilizado do cosseno hiperbólico, i.e., no caso do ramo principal, temos $\mathbb{V} = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y < \infty\}$.

Tangente, cotangente e cossecante hiperbólicas: As funções $\tanh x$, $\coth x$ e $\operatorname{csch} x$ são inversíveis em $\mathbb{R}$, i.e., não temos restrições para o domínio, para a determinação da função inversa. As definições das funções inversas são diretas para todo y.

Def:

$$
\begin{array}{lllllll}
y & = & \operatorname{artanh} x & \Longleftrightarrow & x & = & \tanh y \qquad \mathbb{D} : (-1 < x < 1) \quad \mathbb{V} = \mathbb{R} \\
y & = & \operatorname{arcoth} x & \Longleftrightarrow & x & = & \coth y \qquad \mathbb{D} : |x| > 1 \qquad\quad\;\; \mathbb{V} = \mathbb{R} - \{0\} \\
y & = & \operatorname{arcsch} x & \Longleftrightarrow & x & = & \operatorname{csch} y \qquad \mathbb{D} : \mathbb{R} - \{0\} \qquad\; \mathbb{V} = \mathbb{R} - \{0\}
\end{array}
$$

Secante hiperbólica: A função secante hiperbólica, sendo definida como $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$, sofre as mesmas restrições de domínio do cosseno hiperbólico, i.e.,

Def:

$$
y = \operatorname{arsech} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{sech} y \qquad \mathbb{D} : (0 < x \leq 1) \quad \mathbb{V} : (0 \leq y < \infty)
$$

Resumindo, as funções inversas do cosseno hiperbólico e da secante hiperbólica necessitam de considerações de ramo. As demais funções hiperbólicas não tem restrições quanto às suas inversas.

Observação: Motivado pela similaridade dos prefixos arc (representando arco) das funções trigonométricas inversas e ar (representando área) das funções hiperbólicas inversas, às vezes usa-se somente um prefixo a para todas essas funções inversas (ex: $\operatorname{acos} x$, $\operatorname{acosh} x$).

Observação: Uma notação alternativa para essas funções inversas, sobretudo em uso no domínio anglo-saxão, usa o superscrito $^{-1}$ (ex: $\operatorname{sen}^{-1} x$, $\operatorname{senh}^{-1} x$). Ao usar essa notação, deve-se tomar muito cuidado para não confundir o superscrito com um expoente.

4.14.2 Relações

Uma vez que as funções hiperbólicas são definidas mediante a função exponencial, as suas inversas podem ser expressas em termos do logaritmo. Temos as seguintes expressões:

$$
\begin{array}{lcll}
\operatorname{arsenh} x & = & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) & x \in \mathbb{R} \\
\operatorname{arcosh} x & = & \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) & x \geq 1 \\
\operatorname{artanh} x & = & \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & |x| < 1 \\
\operatorname{arcoth} x & = & \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) & |x| > 1
\end{array}
$$

Demonstração do $\operatorname{arcosh} x$ (os outros são mais fáceis):

$$y = \operatorname{arcosh} x \iff x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

Multiplicando x por $2e^y$, obtemos

$$\begin{aligned} 2xe^y &= e^{2y} + 1 \\ e^{2y} + 1 - 2xe^y &= 0 \\ (e^y)^2 - 2xe^y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^y &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} \\ &= x \pm \sqrt{x^2 - 1} \\ y &= \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) \end{aligned}$$

Os dois sinais correspondem aos dois ramos do cosseno hiperbólico. Mas qual é qual? Bem, sabemos que no ramo principal (positivo), $x \geq 1$ e $y \geq 0$.

Em particular, para grandes x, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x = \lim_{x\to\infty} \cosh y &= \infty \\ \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y &= \infty \\ \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x \pm \sqrt{x^2 - 1} &= \infty \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} x + \sqrt{x^2 - 1} = \infty$$

Mas

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2 - 1}\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0 \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos considerar um ponto selecionado. $x = 1$ não serve, pois

$$y = \ln(1 \pm \sqrt{1^2 - 1}) = \ln 1 = 0$$

para ambos os sinais. Mas, por exemplo, no ponto $x = \frac{5}{4}$ temos

$$\begin{aligned} y &= \ln\left[\frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1}\right] \\ &= \ln\left[\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{16}{16}}\right] \\ &= \ln\left[\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}\right] \\ &= \ln\left[\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}\right] \\ &= \begin{cases} \ln\frac{8}{4} = \ln 2 > 0 \\ \ln\frac{2}{4} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, o sinal positivo tem as propriedades desejadas do ramo principal. O sinal negativo corresponde ao outro ramo. Concluimos que $y = \operatorname{arcosh} x = x \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

Exemplo 1. *Determine o valor de* $\operatorname{artanh}\left(-\frac{4}{5}\right)$
Resposta:

$$\begin{aligned} y = \operatorname{artanh}\left(-\tfrac{4}{5}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{9}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3 \end{aligned}$$

4.14.3 Derivadas das funções hiperbólicas inversas

$$y = \operatorname{arsenh} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{senh} y$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \cosh y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cosh y} \end{aligned}$$

Lembrando que $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ temos $\cosh y = \pm\sqrt{1+\operatorname{senh}^2 y}$. Como o cosseno hipberbólico é sempre positivo, concluimos que $\cosh y = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$. Portanto

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Este resultado segue também derivando a relação $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) \\ y' &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

De maneira análoga:

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arcosh} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad x > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ y' &= \frac{1}{1-x^2} \qquad |x| < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
y & = & \operatorname{arcoth} x \quad = \quad \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \\
y' & = & -\dfrac{1}{x^2-1} \qquad |x| > 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
y & = & \operatorname{arsech} x \quad = \quad \operatorname{arcosh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \\
y' & = & -\dfrac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}} \qquad 0 < x < 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
y & = & \operatorname{arcsch} x \quad = \quad \operatorname{arsenh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \\
y' & = & -\dfrac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \qquad x \neq 0
\end{array}$$

Exemplo 2. *Derive a função* $f(x) = \operatorname{artanh}\cos 2x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1-\cos^2 2x}\cdot(-\operatorname{sen} 2x)\cdot 2 \\
&= -\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}\cdot 2 = -\frac{2}{\operatorname{sen} 2x} = -2\csc 2x
\end{aligned}$$

Exemplo 3. *Derive a função* $f(x) = x\operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1\cdot\operatorname{arcosh} x + x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x \\
&= \operatorname{arcosh} x
\end{aligned}$$

4.15 Resumo das derivadas das funções trigonométricas e hiperbólicas inversas

Função		Derivada
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$		$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$		$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan x$		$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arccot} x$		$f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arcsec} x$		$f'(x) = \dfrac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \operatorname{arccsc} x$		$f'(x) = -\dfrac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$

Função		Derivada
$f(x) = \operatorname{arsenh} x$		$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arcosh} x$		$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \operatorname{artanh} x$		$f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
$f(x) = \operatorname{arcoth} x$		$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2-1}$
$f(x) = \operatorname{arsech} x$		$f'(x) = -\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arcsch} x$		$f'(x) = -\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}$

4.16 Diferenciação logarítmica

O logaritmo pode ser empregado para facilitar as contas no cálculo de derivadas de expressões que envolvem múltiplos fatores e/ou potências, uma vez que o logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores.

Exemplo 1. *Calcule a derivada de* $f(x) = (x-3)^3(x-4)^7$
Regra do produto:
$f'(x) = 3(x-3)^2 \cdot 1(x-4)^7 + (x-3)^3 7(x-4)^6 \cdot 1 = 3(x-3)^2(x-4)^7 + 7(x-3)^3(x-4)^6$.
Caminho alternativo: Calculando o logaritmo natural da função, temos

$$\ln|f(x)| = \ln|(x-3)^3(x-4)^7| = \ln|(x-3)^3| + \ln|(x-4)^7| = 3\ln|x-3| + 7\ln|x-4|$$

Usando que

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln(x) & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e, portanto,

$$(\ln|x|)' = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{x}$$

obtemos, usando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{f(x)} f'(x) = 3\frac{1}{x-3} \cdot 1 + 7\frac{1}{x-4} \cdot 1 \\ &\Rightarrow\ f'(x) = \left(\frac{3}{x-3} + \frac{7}{x-4}\right)(x-3)^3(x-4)^7 = 3(x-3)^2(x-4)^7 + 7(x-3)^3(x-4)^6 \end{aligned}$$

Esse caminho é interessante quando temos expressões com múltiplos fatores no numerador e/ou denominador.

Exemplo 2. *Calcule a derivada de* $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$.
Ao calcularmos o logaritmo natural da expressão, obtemos

$$\begin{aligned}
\ln|f(x)| &= \ln\left|\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}\right| \\
&= \ln\left|\sqrt[3]{x+1}\right| - \ln|x+2| - \ln\left|\sqrt{x+3}\right| \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x+3|
\end{aligned}$$

Ao derivar implicitamente, obtemos

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}\cdot 1 - \frac{1}{x+2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x+3}\cdot 1$$

Ao multiplicar por $f(x)$, obtemos

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+3}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$$

que pode ser simplificado para

$$f'(x) = -\frac{7x^2+23x+12}{6(x+1)^{2/3}(x+2)^2(x+3)^{3/2}}$$

Exemplo 3. *Determine a derivada de* $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x^4+6x-1}\cdot 3x\operatorname{sen}x$.
Por derivada logarítmica:

$$\begin{aligned}
\ln|f(x)| &= \ln\left|\frac{x^2-2x+3}{x^4+6x-1}\cdot 3x\operatorname{sen}x\right| \\
&= \ln\left|x^2-2x+3\right| - \ln\left|x^4+6x-1\right| + \ln 3 + \ln x + \ln|\operatorname{sen}x|
\end{aligned}$$

Derivando, obtemos

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{1}{x^2-2x+3}\cdot(2x-2) - \frac{1}{x^4+6x-1}\cdot(4x^3+6) + 0 + \frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{sen}x}\cdot\cos x$$

Portanto, a derivada procurada é

$$f'(x) = \left(\frac{2x-2}{x^2-2x+3} - \frac{4x^3+6}{x^4+6x-1} + \frac{1}{x} + \cot x\right)\cdot\frac{x^2-2x+3}{x^4+6x-1}\cdot 3x\operatorname{sen}x$$

4.17 Exemplos de derivadas aplicando as regras de diferenciação

Exemplo 1. *Calcule a derivada de* $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + x}{\cos x - x}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\operatorname{sen} x + x)'(\cos x - x) - (\operatorname{sen} x + x)(\cos x - x)'}{(\cos x - x)^2} \\
&= \frac{(\cos x + 1)(\cos x - x) - (\operatorname{sen} x + x)(-\operatorname{sen} x - 1)}{(\cos x - x)^2} \\
&= \frac{\cos^2 x + \cos x - x\cos x - x - (-\operatorname{sen}^2 x - x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - x)}{(\cos x - x)^2} \\
&= \frac{\cos^2 x + \cos x(1 - x) - x + \operatorname{sen}^2 x + (x + 1)\operatorname{sen} x + x)}{(\cos x - x)^2} \\
&= \frac{1 + (1 - x)\cos x + (1 + x)\operatorname{sen} x}{(\cos x - x)^2}
\end{aligned}$$

Exemplo 2. *Calcule a derivada de* $f(x) = x^2 \tan x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x\tan x + x^2(\tan x)' \\
\tan x' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \\
&= \left(\frac{(\operatorname{sen} x)'\cos x - \operatorname{sen} x(\cos x)'}{\cos^2 x}\right) \\
&= \left(\frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}\right) \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
f'(x) &= 2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

Outra maneira:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\cos x} \\
f'(x) &= \frac{(x^2 \operatorname{sen} x)'\cos x - (x^2 \operatorname{sen} x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{(2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x)\cos x - x^2 \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2}{\cos^2 x} = 2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

Outra maneira:

$$\begin{aligned}
\ln|f(x)| &= 2\ln|x| + \ln|\operatorname{sen} x| - \ln|\cos x| \\
\frac{1}{f(x)}f'(x) &= \frac{2}{x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x - \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) \\
&= \frac{2}{x} + \cot x + \tan x \\
\Rightarrow\ f'(x) &= x^2\tan x(\frac{2}{x} + \cot x + \tan x) \\
&= 2x\tan x + x^2(1+\tan^2 x) = 2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

Exemplo 3. *Calcule a derivada de* $f(x) = (x^2+3x)e^x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2x+3)e^x + (x^2+3x)e^x \\
&= (x^2+5x+3)e^x
\end{aligned}$$

Exemplo 4. *Calcule a derivada de* $f(x) = (x^2+3x)e^{-x}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2x+3)e^{-x} + (x^2+3x)e^{-x}(-1) \\
&= (2x+3-x^2-3x)e^{-x} \\
&= (-x^2-x+3)e^{-x}
\end{aligned}$$

Outra maneira:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2+3x}{e^x} \\
f'(x) &= \frac{(2x+3)e^x + (x^2+3x)e^x}{e^{2x}} \\
&= \frac{-x^2-x+3}{e^x} = (-x^2-x+3)e^{-x}
\end{aligned}$$

Exemplo 5. *Calcule a derivada de* $f(x) = 2x\cdot\operatorname{sen} x\cdot e^x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2x\cdot\operatorname{sen} x)'e^x + 2x\cdot\operatorname{sen} x(e^x)' \\
&= (2\operatorname{sen} x + 2x\cos x)e^x + 2x\cdot\operatorname{sen} x\cdot e^x \\
&= 2e^x[(x+1)\operatorname{sen} x + x\cos x]
\end{aligned}$$

Lembrete: Forma geral:

$$\begin{aligned}
F(x) &= f(x)\cdot g(x)\cdot h(x) \\
F'(x) &= f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)
\end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \operatorname{sen} x \cdot e^x + 2x \cos x \cdot e^x + 2x \operatorname{sen} x \cdot e^x \\ &= 2e^x[(x+1)\operatorname{sen} x + x \cos x] \end{aligned}$$

Outra maneira:

$$\begin{aligned} \ln|f(x)| &= \ln 2 + \ln|x| + \ln|\operatorname{sen} x| + x \\ \frac{1}{f(x)} f'(x) &= 0 + \frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x + 1 \\ \Rightarrow\ f'(x) &= 2x \operatorname{sen} x \cdot e^x \left(\frac{1}{x} + \cot x + 1\right) \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cdot e^x + 2x \cos x \cdot e^x + 2x \operatorname{sen} x \cdot e^x \\ &= 2e^x[(x+1)\operatorname{sen} x + x \cos x] \end{aligned}$$

Exemplo 6. *Calcule a derivada de* $f(x) = e^{3x^2} \operatorname{sen}(2x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{3x^2})' \operatorname{sen}(2x) + e^{3x^2}(\operatorname{sen}(2x))' \\ &= e^{3x^2}(3x^2)' \operatorname{sen}(2x) + e^{3x^2}\cos(2x)(2x)' \\ &= e^{3x^2}(3 \cdot 2x)\operatorname{sen}(2x) + e^{3x^2}\cos(2x)2 \\ &= 2e^{3x^2}[3x \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)] \end{aligned}$$

Outra maneira:

$$\ln|f(x)| = \ln|e^{3x^2}| + \ln|\operatorname{sen}(2x)| = 3x^2 + \ln|\operatorname{sen}(2x)|$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = 6x + \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\cos(2x) \cdot 2$$

$$\Rightarrow\ f'(x) = e^{3x^2}\operatorname{sen}(2x)\left(6x + \frac{2\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}\right) = 2e^{3x^2}[3x \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)]$$

Capítulo 5

Aplicações da derivada

O capítulo anterior trata do cálculo de derivadas. Neste capítulo estudamos as primeiras aplicações da derivada.

5.1 Assíntotas

Definição: Uma assíntota é uma reta à qual o gráfico de uma função se aproxima cada vez mais.

Nas seções 3.6 e 3.7 vimos as definições de assíntodas horizontais e verticais. Resumindo, dizemos que a reta $y = a$ é **assíntota horizontal** da função f, se ao menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

e dizemos que a reta $x = a$ é **assíntota vertical** da função f quando ao menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty & \text{(iii)} & \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty \\ \text{(ii)} & \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty & \text{(iv)} & \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty \end{array}$$

Mas uma função também pode se aproximar cada vez mais a uma reta inclinada ou *oblíqua*.
Definição: Dizemos que a reta $y = mx + b$ é assíntota oblíqua de uma função f quando x cresce (ou decresce) ilimitadamente se

$$\text{(v)} \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = m \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = b$$

(ou

$$\text{(vi)} \quad \lim_{x\to-\infty} f'(x) = m \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = b)$$

Exemplo 1. *Determine se a função* $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x+1}$ *possui assíntotas oblíquas.*
Resposta: Ao derivar, obtemos

$$f'(x) = \frac{(2x+3)\cdot(x+1)-(x^2+3x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+5x+3-(x^2+3x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+1}$$

Assim,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+1} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+2/x+4/x^2}{1+2/x+1/x^2} = 1 = m$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-mx &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x-1}{x+1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x-1-x(x+1)}{x+1}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-1/x}{1+1/x} = 2 = b\end{aligned}$$

Portanto, a reta $y = x+2$ é assíntota oblíqua da função f quando $x \to \infty$ e também quando $x \to -\infty$ (ver Figura 5.1). Esse comportamento é mais intuitivo ao observarmos que podemos reescrever a função como

$$f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+1} = \frac{x(x+1)-x+3x-1}{x+1} = x + \frac{2(x+1)-2-1}{x+1} = x+2-\frac{3}{x+1}$$

o que mostra que, quando x cresce, a diferença entre a função e a reta $y = x+2$ vai ficar cada vez menor.

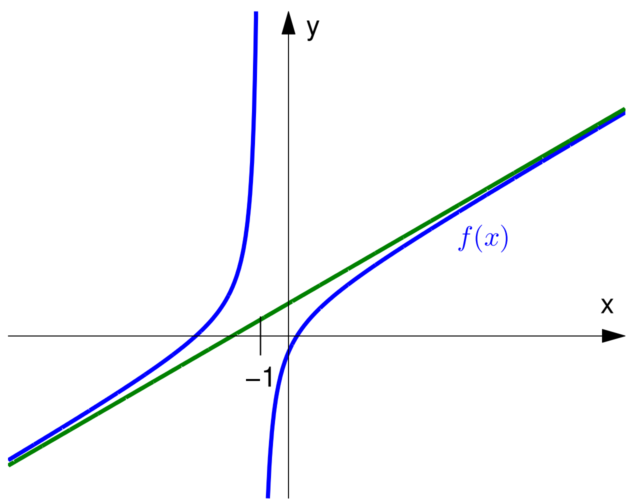


Figura 5.1: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x+1}$ (linha azul) e sua assíntota oblíqua (linha verde).

Observação: É importante observar que, para que uma função tenha uma assíntota oblíqua, ambos os limites em (v) ou (vi) tem que existir.

Exemplo 2. *Determine se a função* $g(x) = \dfrac{x^2+3x^{3/2}-1}{x+1}$ *possui assíntotas oblíquas.*
Resposta: Só precisamos analisar $x \to \infty$, pois a função só é definida para $x \geq 0$. Ao derivar,

obtemos

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{(2x+9x^{1/2}/2)\cdot(x+1)-(x^2+3x^{3/2}-1)\cdot 1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{2x^2+9x^{3/2}/2+2x+9x^{1/2}/2-(x^2+3x^{3/2}-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+3x^{3/2}/2+2x+9x^{1/2}/2+1}{x^2+2x+1}
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} g'(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x^{3/2}/2+2x+9x^{1/2}/2+1}{x^2+2x+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1+3x^{-1/2}/2+2/x+9x^{-3/2}/2+1/x^2}{1+2/x+1/x^2} = 1 = m
\end{aligned}
$$

mas

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} g(x)-mx &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x^{3/2}-1}{x+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x^{3/2}-1-x(x+1)}{x+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^{3/2}-x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^{1/2}-1-1/x}{1+1/x} = \infty
\end{aligned}
$$

não existe. O fato do último limite ter resultado infinito significa que o gráfico da função g se afasta cada vez mas de qualquer reta com inclinação $m = 1$. Portanto, essa função não possui uma assíntota oblíqua (ver Figura 5.2).

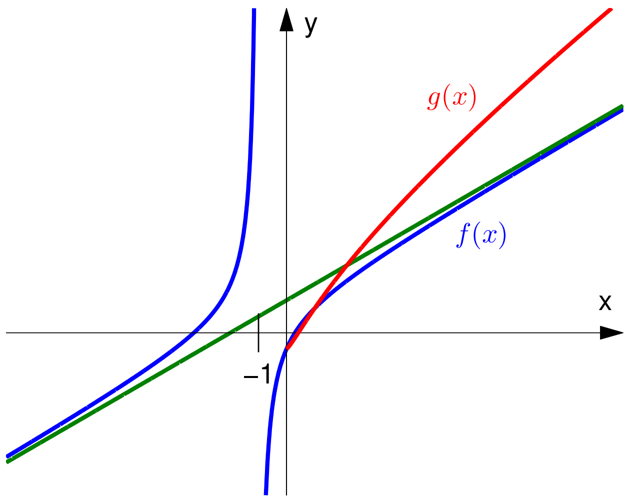


Figura 5.2: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x+1}$ (linha azul) e sua assíntota oblíqua (linha verde), bem como $g(x) = \dfrac{x^2+3x^{3/2}-1}{x+1}$ (linha vermelha) que não possui assíntota oblíqua.

5.2 Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio

5.2.1 Teorema de Rolle

Teorema de Rolle: Seja f uma função com as seguintes propriedades:

(i) f é contínua em $[a, b]$

(ii) f é derivável em (a, b)

(iii) $f(a) = f(b)$

Então existe pelo menos um número ξ em (a, b) tal que $f'(\xi) = 0$. Veja Figura 5.3.

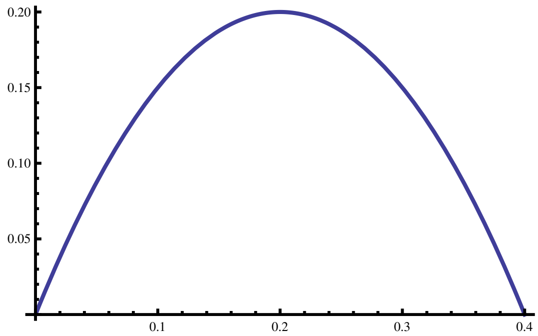


Figura 5.3: Exemplo de função que satisfaz as condições (i), (ii), e (iii) acima.

Prova:

(a) Se $f(x) = c \in \mathbb{R}\ \forall x \in [a, b]$, então $f'(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$.

(b) Se existe $x = x_0$ tal que $f(x_0) > f(a)$, então, pela continuidade de f, existe um ponto $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) \geq f(x)\ \forall x \in [a, b]$. Portanto, as derivadas laterais satisfazem

$$f'_-(\xi) = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\underbrace{h}_{<0}} \left(\underbrace{f(\xi + h) - f(\xi)}_{\leq 0} \right) \geq 0$$

e

$$f'_+(\xi) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\underbrace{h}_{>0}} \left(\underbrace{f(\xi + h) - f(\xi)}_{\leq 0} \right) \leq 0.$$

Como f é derivável, segue que $f'_-(\xi) = f'_+(\xi) = f'(\xi)$ que somente é possível se $f'_-(\xi) = f'_+(\xi) = f'(\xi) = 0$.

(c) Se existe $x = x_0$ tal que $f(x_0) < 0$: correspondentemente.

Definição: Um ponto onde uma função tem derivada nula é chamado de *ponto estacionário* da função.

Exemplo 1. *Verifique se a função $f(x) = 4x^3 - 9x$ possui pontos estacionários (i.e., pontos de tangente horizontal).*
Resposta: Sabemos que $f(x) = 0$ em $x = -\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{3}{2}$. Portanto, pelo teorema de Rolle, temos pelo menos dois pontos estacionários desta função, um no intervalo $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$ e um no intervalo $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

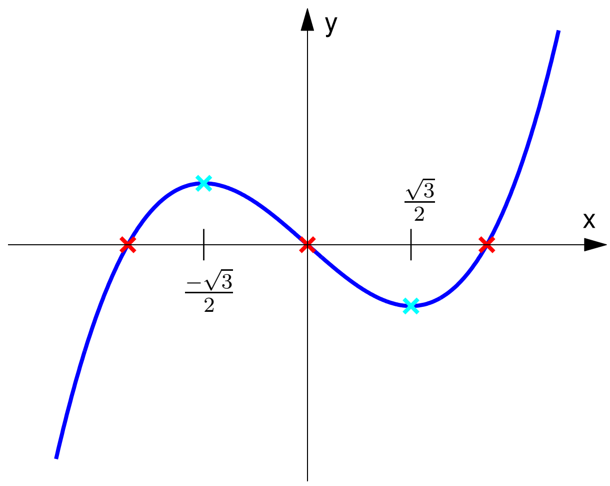


Figura 5.4: Gráfico da função $f(x) = 4x^3 - 9x$ com zeros ($\times$) e pontos estacionários ($\times$).

Teste: Verificamos que é correto (veja Figura 5.4):

Pontos estacionários:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 - 9 = 0 \\ x^2 &= \frac{9}{12} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{com} \quad \frac{-\sqrt{3}}{2} \in (-\frac{3}{2}, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \in (0, \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

5.2.2 Teorema do Valor Médio (TVM)

Teorema do Valor Médio: Seja f uma função com as seguintes propriedades:

(i) f é contínua em $[a, b]$,

(ii) f é derivável em (a, b).

Então, existe um número ξ em (a, b) tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (*)$$

Ou seja, existe um ponto ξ em (a, b) tal que a reta tangente neste ponto é paralela a reta secante por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (veja Figura 5.5).

Prova: Aplicação do Teorema de Rolle à função $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$.

Exemplo 2. *Considere a função $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ no invervalo $[1, 3]$. Verifique a veracidade do TVM neste caso, exibindo todos os valores $x = \xi$ que satisfaçam o teorema.*
Resposta: f é contínua em $[1, 3]$ e derivável em $(1, 3)$. Portanto, pelo TVM, existe ao menos um ponto $\xi \in (1, 3)$ tal que a equação $(*)$ seja satisfeita. Para localizá-lo, calculamos

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$$

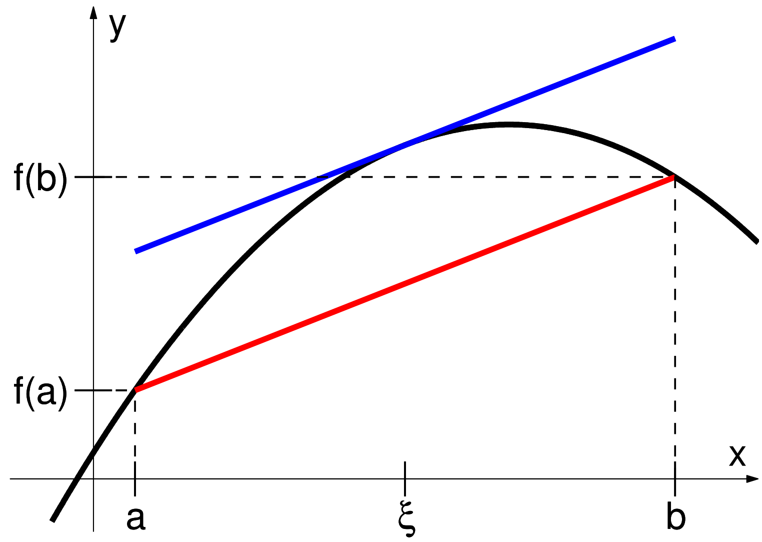


Figura 5.5: Teorema do Valor Médio: Se f for contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), existe ao menos um ponto $\xi \in (a, b)$ tal que a reta secante pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (vermelha) e a reta tangente à f em ξ (azul) têm a mesma inclinação.

e os valores da função nas pontas do invervalo: $a = 1$, $f(1) = -7$ e $b = 3$, $f(3) = -27$. Daí, o coeficiente angular da reta secante é

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 + 7}{2} = -10$$

Igualando a derivada da função em ξ a esse valor, obtemos

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= 3\xi^2 - 10\xi - 3 &= -10 \\ &\Rightarrow 3\xi^2 - 10\xi + 7 &= 0 \end{aligned}$$

Assim temos $\xi = \dfrac{7}{3}$ e $\xi = 1$. Portanto o ponto procurado em $(1, 3)$ é $\xi = \dfrac{7}{3}$.

5.3 Aproximação polinomial

5.3.1 Aproximação linear

As vezes é util a gente aproximar uma função complicada ou até desconhecida em um pequeno intervalo por uma reta. Que reta é uma escolha interessante?

Aquela reta que tem, em um determinado ponto x_0, o mesmo valor e a mesma inclinação da função, i.e., a reta tangente (veja Figura 5.6),

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \Rightarrow f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

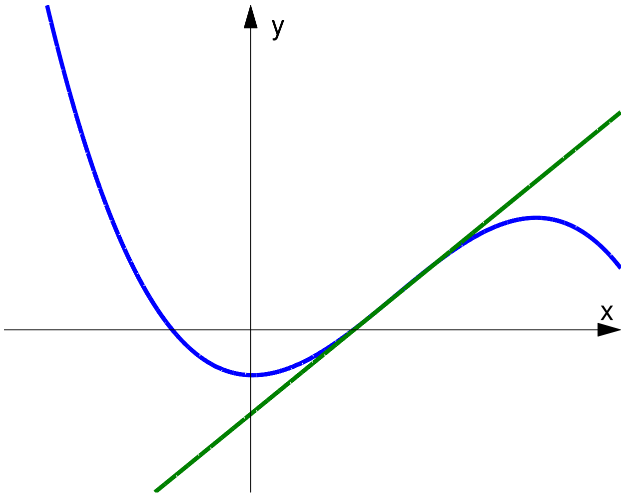


Figura 5.6: Aproximação linear: Em um certo intervalo, podemos aproximar a função (linha azul) pela sua reta tangente (linha verde).

Exemplo 1. *Aproxime a raiz quadrada de 4.04*
Resposta:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &\approx \sqrt{x_0} + (\sqrt{x})'|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)\\ &\approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot (x - x_0)\end{aligned}$$

Usando $x_0 = 4$ (por ser um valor onde conhecemos o valor da função):

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sqrt{4.04} &\approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (4.04 - 4)\\ &\approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 0.04 = 2{,}01\end{aligned}$$

Valor verdadeiro: 2,009975. (Erro de 0,0012 %)

Exemplo 2. *Aproxime a raiz quadrada de 5*
Resposta:

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &\approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (5 - 4)\\ &\approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 2{,}25\end{aligned}$$

Valor verdadeiro: 2,236068. (Erro de 0,623 %)

Notamos que o erro aumenta quando nos afastamos do ponto x_0.

Observação: A aproximação iterativa pode fornecer melhores resultados do que usar um ponto mais afastado.

Exemplo 3. *Aproxime a raiz quadrada de 6*
Resposta direta:

$$\begin{aligned}\sqrt{6} &\approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (6-4) \\ &\approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 2{,}5\end{aligned}$$

Valor verdadeiro: 2,4495; erro de 2,0616 %
Aproximação iterativa (usando a aproximação anterior $\sqrt{5} \approx 2{,}25$):

$$\begin{aligned}\sqrt{6} &\approx \sqrt{5} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (6-5) \\ &\approx 2{,}25 + \frac{1}{2 \cdot 2{,}25} \cdot 1 = 2,{,}722\end{aligned}$$

Valor verdadeiro: 2,4495; erro de 1,1245 %
Aproximação iterativa usando 4 passos:

$$\begin{aligned}\sqrt{4{,}5} &\approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4{,}5-4) = 2 + \frac{1}{4}0{,}5 = 2 + \frac{1}{8} = \frac{17}{8} = 4{,}125 \\ \sqrt{5} &\approx \sqrt{4{,}5} + \frac{1}{2\sqrt{4{,}5}}(5-4{,}5) \approx 4{,}125 + \frac{1}{2 \cdot 4{,}125}0{,}5 \approx 2{,}2426 \\ \sqrt{5{,}5} &\approx \sqrt{5} + \frac{1}{2\sqrt{5}}(5{,}5-5) \approx 4{,}2426 + \frac{1}{2 \cdot 4{,}2426}0{,}5 \approx 2{,}3541 \\ \sqrt{6} &\approx \sqrt{5{,}5} + \frac{1}{2\sqrt{5{,}5}}(6-5{,}5) \approx 4{,}3541 + \frac{1}{2 \cdot 4{,}3541}0{,}5 \approx 2{,}4603\end{aligned}$$

Valor verdadeiro: 2,4495; erro de 0,44211 %

5.3.2 Aproximação de Taylor

Mas o que fazer se precisarmos aproximar o valor de uma função em um lugar mais afastado? Ou se quisermos uma aproximação melhor? Podemos tentar usar uma função quadrática.

5.3.2.1 Aproximação de segunda ordem

Que polinômio de grau dois seria interessante? Por generalização do princípio da aproximação linear acima, é interessante fazer $f(x) \approx p(x)$ onde $p(x)$ é aquele polinômio quadrático $p(x) = a + bx + cx^2$ que tem, no ponto x_0, o mesmo valor, a mesma derivada e a mesma segunda derivada da função $f(x)$:

$$\begin{aligned}p(x) &= a + bx + cx^2 & p(x_0) &= a + bx_0 + cx_0^2 &= f(x_0) \\ p'(x) &= b + 2cx & p'(x_0) &= b + 2cx_0 &= f'(x_0) \\ p''(x) &= 2c & p''(x_0) &= 2c &= f''(x_0)\end{aligned}$$

Da última, obtemos

$$c = \frac{1}{2}f''(x_0)$$

Utilizando esta expressão na segunda, temos

$$\begin{aligned} b &= f'(x_0) - 2cx_0 \\ &= f'(x_0) - f''(x_0)x_0 \end{aligned}$$

Agora, mediante a primeira, temos

$$\begin{aligned} a &= f(x_0) - bx_0 - cx_0^2 \\ &= f(x_0) - (f'(x_0) - f''(x_0)x_0)x_0 - \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2 \\ &= f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2 + [f'(x_0) - f''(x_0)x_0]x + \frac{1}{2}f''(x_0)x^2 \\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{reta tangente}} + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

Notamos que o polinômio de segunda ordem inclui, como os primeiros dois termos, a reta tangente, somente acrescentado uma correção de segunda ordem. Isso se deve ao fato de que em $x = x_0$, a derivada deste termo de segunda ordem é nula.

5.3.2.2 Aproximação de ordem maior

Esse procedimento pode ser feito de forma análoga com polinômios de ordem maior. Podemos notar que a terceira derivada de um polinômio de grau 3 só depende do coeficiente do termo x^3. Dessa forma, o polinômio de grau 3 com os mesmos valores da função e suas primeiras três derivadas simplesmente adiciona um termo de terceira ordem ao polinômio de grau 2 acima sem alterar os primeiros três termos. O novo termo é múltiplo de $f'''(x_0)$ e tem um fator que compensa pelos fatores 3 e 2 que tombam ao derivar $(x - x_0)^3$ três vezes. Dessa forma, o polinômio de grau 3 é dado por

$$p_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

Podemos generalizar para a ordem n, observando que cada ordem maior do polinômio acrescenta mais um termo à expressão anterior.

Sendo assim, podemos construir aproximações polinomiais até ordens arbitrárias pelo mesmo princípio. Basta que as derivadas necessárias existam. Este tipo de aproximação é conhecida com a **Aproximação de Taylor**.

5.3.2.3 Fórmula de Taylor

A fórmula de Taylor representa a forma do polinômio de Taylor de ordem genérica n, além de especificar a diferença entre ele e a função original.

Teorema: Seja f uma função tal que suas n primeiras derivadas sejam contínuas no intervalo fechado $\mathbb{I} = [a, b]$. Além disso, $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x em (a, b). Então existe um número ξ no interior de $\mathbb{I}$, i.e., no intervalo aberto (a, b), tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \quad (\dagger)$$

O correspondente vale se $b < a$. A igualdade ($\dagger$) é conhecida com *Fórmula de Taylor*.

Este teorema pode ser considerado a generalização do Teorema do Valor Médio. Ele é muito importante porque permite aproximar uma função complicada por um polinômio com qualquer precisão desejada. O último termo, denominado **Resto**, não pode ser calculado, pois o ponto ξ é desconhecido. Sua importância está no fato de que ele permite majorar (i.e., estimar um limitante superior para) o erro cometido pela aproximação de Taylor.

Substituindo b por x e a por x_0 na equação ($\dagger$), podemos escrever

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

onde $P_n(x)$ é chamado de *Polinômio de Taylor* de n-ésimo grau em torno de $x = x_0$ e $R_n(x)$ é chamado de *Resto*. Temos

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (\xi \text{ entre } x \text{ e } x_0) \end{aligned}$$

Esta forma de representar o Resto é chamada de *forma de Lagrange* do Resto.

Uma outra forma do Resto é obtido ao representar a função usando o polinômio de Taylor de grau $n-1$ e o respectivo Resto:

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned}$$

que demonstra a *forma de Peano* do Resto:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

que independe da existência da n-ésima primeira derivada de f. Note que o ξ de R_n da forma de Peano é o ξ de R_{n-1} da forma de Lagrange. Existem ainda outras formas de representar o Resto.

A aproximação de Taylor consiste então na igualdade aproximada

$$f(x) \approx P_n(x)$$

onde o Resto R_n pode ser utilizado para majorar o erro cometido com essa aproximação.

Exemplo 4. *Determine o polinômio de Taylor de grau n em torno de $x_0 = 0$ da função $f(x) = \operatorname{sen} x$.*
Resposta:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(IV)}(x) = f(x) \\
P_n(x) &= \operatorname{sen} 0 + \frac{\cos 0}{1!}(x-0) + \frac{-\operatorname{sen} 0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-\cos 0}{3!}(x-0)^3 + \frac{\operatorname{sen} 0}{4!}(x-0)^4 + \cdots \\
&= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \cdots
\end{aligned}$$

Portanto, somente possui termos de potência ímpar. Assim, para $n = 2m+1$, temos

$$P_{2m+1}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

Notamos que para $n = 2m+2$ obtemos o mesmo polinômio. A Figura 5.7 mostra a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e os polinômios de Taylor até grau 31.

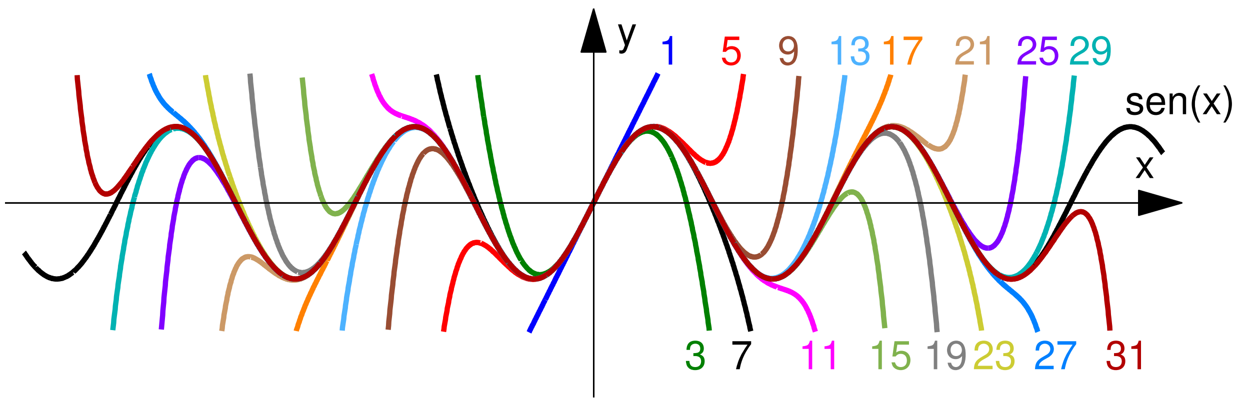


Figura 5.7: Função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e approximações de Taylor até grau 31.

Exemplo 5. *Encontre o polinômio de Taylor do terceiro grau de $\cos x$ em torno de $45°$, i.e., $a = \pi/4$ e a forma de Lagrange do Resto. Estime o valor do cosseno em $47°$, i.e., $\cos(47\pi/180)$ e majore o erro da aproximação.*
Resposta:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x, \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \operatorname{sen} x, \quad f^{(IV)}(x) = f(x) \\
P_3(x) &= \cos(\pi/4) + \frac{-\operatorname{sen}(\pi/4)}{1!}(x-\pi/4) + \frac{-\cos(\pi/4)}{2!}(x-\pi/4)^2 + \frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{3!}(x-\pi/4)^3 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\pi/4) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x-\pi/4)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}(x-\pi/4)^3 \\
R_3(x) &= \frac{1}{4!}f^{(IV)}(\xi)(x-\pi/4)^4 = \frac{1}{24}\cos\xi\,(x-\pi/4)^4
\end{aligned}$$

onde foi usado que $\operatorname{sen}(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

O valor de ξ fica entre $\pi/4$ e x. Como $|\cos\xi| \le 1$, segue que, para qualquer valor de x,

$$|R_3| = \left|\frac{1}{24}\cos\xi\,(x-\pi/4)^4\right| = \frac{(x-\pi/4)^4}{24}|\cos\xi| \le \frac{(x-\pi/4)^4}{24}$$

Uma vez que o Resto representa a diferença entre o polinômio de Taylor e a função aproximada por ele, sabemos assim que o erro da aproximação não pode ser maior do que o valor dado por essa expressão para qualquer x. Podemos notar que o erro é pequeno se $|x - \pi/4| < 1$, mas cresce muito rápido quando x fica mais longe de $\pi/4$.

Presisão da aproximação de Taylor: Agora podemos usar esta fórmula para determinar $\cos 47°$ e a precisão de aproximação: Note que $47°$ corresponde a $\frac{47}{180}\pi$ em radianos.

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{47\pi}{180} - \frac{45\pi}{180} = \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$$

Fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} \cos 47° &= P_3\left(\frac{47\pi}{180}\right) + R_3\left(\frac{47\pi}{180}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{90} - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 + R_3\left(\frac{47\pi}{180}\right) \\ &\approx P_3\left(\frac{47\pi}{180}\right) = 0{,}6819983166 \end{aligned}$$

onde a última linha representa a aproximação de Taylor.

Estimativa do erro: O erro é dado por $R_3\left(\frac{47\pi}{180}\right) = \frac{1}{24}\cos\xi\left(\frac{\pi}{90}\right)^4$ com $\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{47\pi}{180}$.

Para estes valores de ξ, sabemos que $0 < \cos\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos

$$0 < R_3\left(\frac{47\pi}{180}\right) < \frac{\sqrt{2}}{48}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 = 4{,}4 \cdot 10^{-8}$$

Portanto, sabemos que os primeiros 7 dígitos da aproximação encontrada são corretos. Verificando:

$$\begin{aligned} \cos 47° &\approx 0{,}6819983601 \quad \text{(com 9 digitos de precisão)} \\ \text{Erro:} &\approx 4{,}34 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

Exemplo 6. *Use o polinômio de Taylor em torno de $x = 0$ de $f(x)e^x$ para determinar o valor de $\sqrt{e}$ com precisão de quatro decimais.*

Resposta: Queremos aproximar $e^{1/2}$, portanto a função a ser aproximada é

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad \ldots$$

O polinômio de Taylor em $x = 0$ e o Resto são

$$\begin{aligned} P_n(x) &= e^0 + \frac{e^0}{1!}(x-0) + \frac{e^0}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{e^0}{n!}(x-0)^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \end{aligned}$$

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

onde $0 < \xi < \frac{1}{2}$. Precisamos $R_n(1/2) < 10^{-4}$. Com $e^{\xi} \leq e^{1/2} < 2$, temos

$$R_n(1/2) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \bar{R}_n$$

Os primeiros valores das estimativas $\bar{R}_n$ são

n	1	2	3	4	5	6
$\bar{R}_n$	1/4	1/24	1/192	1/1920	1/23040	1/322560

Observamos que para $n = 5$, $\bar{R}_5 = \frac{1}{23040} = 0{,}0000434 < 10^{-4}$. Portanto, $P_5(x)$ resolve o problema

$$\begin{aligned}
P_5\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{120}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \\
&= 1{,}6486979... \approx 1{,}6487 \\
\text{valor verdadeiro:} \quad e^{1/2} &= 1{,}648721270700128... \approx 1{,}6487 \\
\text{erro:} \quad e^{1/2} - P_5\left(\frac{1}{2}\right) &= 2{,}33 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

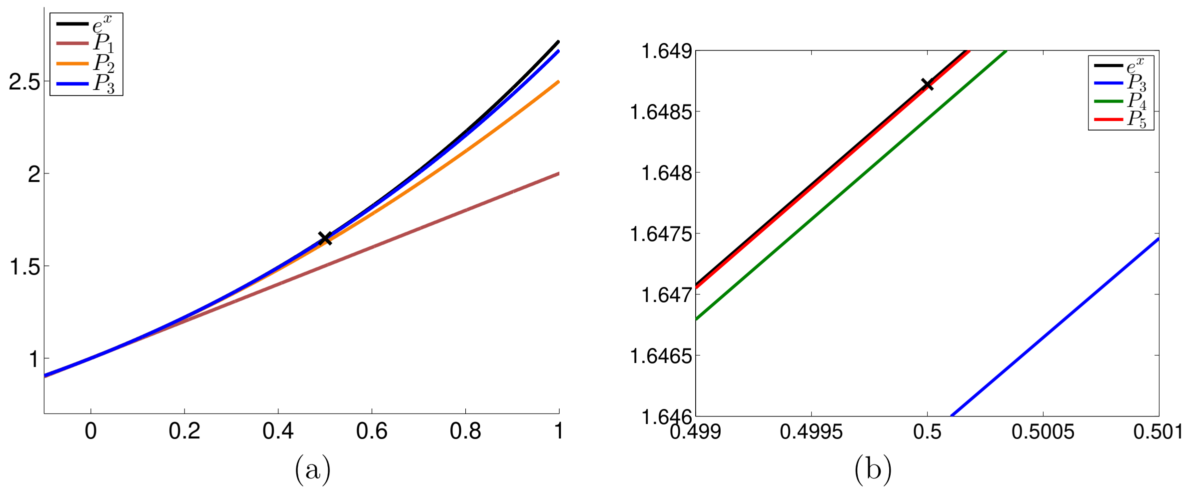


Figura 5.8: Polinômios de Taylor em torno de $a = 0$ para a função $f(x) = e^x$ (linha preta). (a) $P_1(x)$ (linha marrom), $P_2(x)$ (linha laranja), $P_3(x)$ (linha azul), (b) Detalhe: $P_3(x)$ (linha azul), $P_4(x)$ (linha verde), $P_5(x)$ (linha vermelha). O ponto $(1/2, e^{1/2})$ está marcado por $\times$.

Observação: Podemos usar isso para determinar valores aproximados de e. Com o polinômio de grau 5 acima encontramos

$$e = e^1 \approx P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2{,}7167$$

com um erro de -0,059418%.

5.4 Formas indeterminadas

Com os teoremas de cáculo de limites tratados no Capítulo 3, podemos julgar somente as expressões cujo resultado é determinado pelos *valores* dos limites das suas partes. Porém, vimos que algumas expressões ficaram de forma. Denominamos estas de *formas indeterminadas*.

Temos por formas indeterminadas os limites dos tipos:
"$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$0 \cdot \infty$", "$\infty - \infty$", "0^0", "∞^0", e "1^∞".

5.4.1 A forma indeterminada "$\frac{0}{0}$"

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existem desde que $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, já sabemos determinar, pelo teorema de divisão dos limites, o limite de uma razão de funções como

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Este teorema não se aplica quando $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Porém, temos o Teorema do limite do denominador zero, que estabelece que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, onde o sinal depende de se $L > 0$ ou $L < 0$ e se g vai para zero através de valores positivos ou negativos.

Então, falta determinar o que acontece se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Definição: Se f e g são duas funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então dizemos que a função $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada "$\dfrac{0}{0}$" em a.

Exemplo 1. $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} =?$

Obervamos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada "$\dfrac{0}{0}$" em $x = 0$.
Porém, neste caso podemos calcular o limite por simplificação algébrica.
Temos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

Exemplo 2. $f(x) = x, g(x) = x^3$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} =?$

Obervamos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada "$\dfrac{0}{0}$" em $x = 0$.
Porém, algebricamente, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} =$ "$\dfrac{1}{0^+}$" $= \infty$

Exemplo 3. $f(x) = x^2 - x - 12, g(x) = x^2 - 3x - 4,\ \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ?$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 16 - 4 - 12 = 0$

$\lim\limits_{x \to 4} g(x) = 16 - 12 - 4 = 0$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada "$\dfrac{0}{0}$" em $x = 4$.

Porém, algebricamente, $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+1)} = \dfrac{7}{5}$.

Exemplo 4. $f(x) = \operatorname{sen} x, g(x) = x,\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ?$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0\ ,\ \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada "$\dfrac{0}{0}$" em $x = 0$.

Porém $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (Limite fundamental!)

Exemplo 5. $f(x) = x, g(x) = 1 - e^x, \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 - e^x} = ?$

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0,\ \lim\limits_{x \to 0}(1 - e^x) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada "$\dfrac{0}{0}$" em $x = 0$.

Mas, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 - e^x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{\frac{e^x - 1}{x}} = \dfrac{-1}{\underbrace{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}}_{=1 \text{ (l.f.)}}} = -1$.

Concluimos que o valor do limite de uma forma indeterminada "$\frac{0}{0}$" pode ser 0, um número qualquer ou $\pm$ infinito (é por isso que se chama forma indeterminada).

Mas nem sempre é possível modificar a expressão algebricamente:

Exemplo 6. $f(x) = 1 - x + \ln x, g(x) = x^3 - 3x + 2$

Temos $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 - 1 + 0 = 0$ e $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1 - 3 + 2 = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2} = ?$

5.4.2 A Regra de L'Hospital

Temos que achar uma maneira de determinar o comportamento da mesma. Isso é possível mediante o teorema da Regra de L'Hospital:

Teorema (Regra de L'Hospital):
Sejam f e g funções diferenciáveis em um intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no número a. Supomos que para todo $x \neq a$ em I, $g'(x) \neq 0$.
Então, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ e se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, segue que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Prova para o caso especial em que f e g são contínuas e deriváveis em I:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{f'(a)}{g'(a)} \qquad \text{(pela diferenciabilidade de } f \text{ e } g)\\
&= \frac{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}}{\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{g(a+\Delta x)-g(a)}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)}{g(a+\Delta x)} \qquad \text{(pela continuidade de } f \text{ e } g)\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}
\end{aligned}$$

A prova geral pode ser encontrada no livro.
Observação: O teorema vale também para limites laterias.

Observação: O nome L'Hospital pode ser encontrado em duas formas ortográficas: L'Hospital e L'Hôpital. Isso se deve ao fato que o francês, língua da qual provém o nome, teve uma reforma ortográfica após a vida do matemático Guillaume de L'Hospital, na qual a ortografia da palavra "hospital" foi modificada para "hôpital" para melhor refletir a pronúncia.

Exemplo 7. $f(x) = x^2 - x - 12, g(x) = x^2 - 3x - 4, \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{g(x)} =?$

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{7}{5}$ como mostrado anteriormente.

Pela regra de L'Hospital: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-3x-4} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-1}{2x-3} = \dfrac{8-1}{8-3} = \dfrac{7}{5}$

Exemplo 8. $f(x) = \operatorname{sen} x, g(x) = x, \lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} =?$

Sabemos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Pela regra de L'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1} = 1$

Exemplo 9. $f(x) = x, g(x) = 1 - e^x, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-e^x} =?$

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^x) = 1 - 1 = 0$. Portanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-e^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{-e^x} = \dfrac{1}{-1} = -1.$

Exemplo 10. $f(x) = 1 - x + \ln x, g(x) = x^3 - 3x + 2$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 - 1 + 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1 - 3 + 2 = 0$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1+\frac{1}{x}}{3x^2-3} = \text{“}\dfrac{0}{0}\text{”}.$

Nos deparamos com a forma indeterminada “$\dfrac{0}{0}$”. E agora?

Continuamos com L'Hôpital, pois se o limite das derivadas desta razão existe, então ele é igual ao limite atual. Portanto, aplicando a regra de L'Hôpital mais uma vez, temos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{3x^2-3} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{x^2}}{6x} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{3x^2-3} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2} = -\frac{1}{6}$$

Observação: Se, ao aplicarmos a Regra de L'Hôpital, encontrarmos novamente uma expressão da forma $\text{“}\dfrac{0}{0}\text{”}$, podemos aplicar a Regra de L'Hôpital novamente.

5.4.2.1 Limites no infinito

Do mesmo modo, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.

Para mostrar isso, usamos $x = \dfrac{1}{t} \Rightarrow f(x) = f(\dfrac{1}{t}) = F(t)$ e $g(x) = g(\dfrac{1}{t}) = G(t)$.

Assim, $\dfrac{F'(t)}{G'(t)} = \dfrac{\frac{dF}{dt}}{\frac{dG}{dt}} = \dfrac{\frac{d}{dt}f(\frac{1}{t})}{\frac{d}{dt}g(\frac{1}{t})} = \dfrac{\frac{d}{dx}f(x)\cdot\frac{d}{dt}(\frac{1}{t})}{\frac{d}{dx}g(x)\cdot\frac{d}{dt}(\frac{1}{t})} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Portanto, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F'(t)}{G'(t)}$ se este existir.

Desta forma, temos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F'(t)}{G'(t)} = L$.

Consequentemente, pela regra de L'Hôpital, segue que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{G(t)} = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Exemplo 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\arctan\frac{1}{x}} =?$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0\\ \lim\limits_{x\to\infty}\arctan\dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\arctan\frac{1}{x}} = \text{“}\dfrac{0}{0}\text{”}.$$

L'H: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}{\arctan\dfrac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{-1}{x^2}}{\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\dfrac{-1}{x^2}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$

onde usamos $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{1}{x} = \cos(0) = 1$ e $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+(\frac{1}{x^2})_{\searrow 0}} = 1$

Exemplo 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{\tanh\frac{1}{x}} =?$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{0}{1} = 0\\ \lim\limits_{x\to\infty}\tanh\dfrac{1}{x} = \tanh 0 = 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{\tanh\frac{1}{x}} = \text{“}\dfrac{0}{0}\text{”}.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{\tanh\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2(x^2+1)-2x2x}{(x^2+1)^2}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}(-x^2)\cosh^2\dfrac{1}{x} =$
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-2x^2}{x^4-2x^2+1}\cosh^2\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\cosh^2\dfrac{1}{x} = 2$

Observe que no limite $-\dfrac{2}{x^2}\to 0$, $\dfrac{2}{x^2}\to 0$, $\dfrac{1}{x^4}\to 0$ e $\cosh^2\dfrac{1}{x}\to 1$.

Observação: A regra de L'Hôpital vale também para limites laterais e limites no infinito!

5.4.3 A forma "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

Para expressões da forma indeterminada "$\dfrac{\infty}{\infty}$" a Regra de L'Hôspital também se aplica.

Teorema (Regra de L'Hospital):
Sejam f e g funções diferenciáveis em um intervalo aberto I contendo a, com a possível exceção no número a. Suponha que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I.
Então, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ e se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ segue que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Esta regra também se aplica do mesmo modo para limites laterais e limites para infinito.

Exemplo 13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} =?$
$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Observação: Correspondentemente, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^r}{e^x} = 0 \ \forall\, r \in \mathbb{R}$.

Aviso: O fato do limite da razão das derivadas não existir não implica nada sobre a razão das funções.

Exemplo 14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x + \operatorname{sen} x}{2x + \cos x} =?$
Obervamos que $\lim\limits_{x\to\infty} 2x + \operatorname{sen} x = \infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} 2x + \cos x = \infty$. Portanto, o limite procurado é uma expressão indeterminada da forma "$\dfrac{\infty}{\infty}$".
Ao aplicarmos a Regra de L'Hospital, obtemos $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 + \cos x}{2 - \operatorname{sen} x}$.
Esse limite não existe, pois a fração é uma função osciladora.
Porém, manipulação algébrica da fração original fornece

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + \operatorname{sen} x}{2x + \cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + \cos x + \operatorname{sen} x - \cos x}{2x + \cos x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2x + \cos x} = 1,$$

onde usamos que o numerador da fração resultante é limitado e o denominador tende a infinito.

Observação: O fato da razão das derivadas não possuir limite **não** implica na não existência do limite da fração original.

5.4.4 Outras formas indeterminadas

As outras formas indeterminadas são "$0 \cdot \infty$", "$\infty - \infty$", "0^0", "∞^0", e "1^∞".

Por exemplo, se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ então $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} =$ "∞^0".

Notícia ruim: Para essas formas indeterminadas, a regra de L'Hôpital **NÃO SE APLICA!**

Notícia boa: Porém, elas **podem ser modificadas algebricamente**, de modo que a indeterminação apareça na forma "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$", onde a regra é aplicável.

5.4.4.1 A forma indeterminada "$0 \cdot \infty$"

Ideias para manipular "$0 \cdot \infty$": Observe que "$\frac{1}{0} \to \infty$" e "$\frac{1}{\infty} \to 0$".

Assim, "$0 \cdot \infty$"="$\dfrac{\infty}{\frac{1}{0}\searrow_{\infty}}$" ou "$\dfrac{0}{\frac{1}{\infty}\searrow_{0}}$"

ou seja, $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

Exemplo 15. $\lim\limits_{x\to 0} x \ln|x| = ?$

$\lim\limits_{x\to 0} x \to 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| \to -\infty$

é indeterminado mas não "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$".

Porém: $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln|x|^{\nearrow -\infty}}{\frac{1}{x}\searrow_{\pm\infty}} =$ "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

Observação: Correspondentemente, $\lim\limits_{x\to 0} x^r \ln|x| = 0 \; \forall \; r > 0$.

5.4.4.2 A forma indeterminada "$\infty - \infty$"

Ideias para manipular "$\infty - \infty$":

"$\infty - \infty$" = "$\dfrac{(\infty-\infty)(\infty+\infty)}{\infty+\infty}$" ou "$\infty(1 - \dfrac{\infty}{\infty})$"

ou seja, $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{[f(x)-g(x)][f(x)+g(x)]}{f(x)+g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)^2 - g(x)^2}{f(x)+g(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x)\left(1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}\right) = \lim\limits_{x\to a} g(x)\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1\right)$

Exemplo 16. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x - x = ?$

Observamos que $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$. Portanto, temos uma expressão indeterminada da forma "$\infty - \infty$".

Algebricamente, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x - x = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right)$.

Notamos que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}$ admite aplicação da Regra de L'Hospital.
Obtemos $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$
Assim, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x - x = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\nearrow\infty} \left(\frac{\ln x}{x}^{\nearrow 0} - 1 \right) = -\infty.$

Exemplo 17. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - x} - x = ?$
Observamos que $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x(x-1)} = \infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$. Portanto, temos uma expressão indeterminada da forma “$\infty - \infty$”.
Mutiplicação pelo conjugado: $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-x} - x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x)}{(\sqrt{x^2-x}+x)} =$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}.$
Aplicando a Regra de L'Hospital, temos $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1}{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}+1}$
onde notamos que a expressão $\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ no denominador ainda é indeterminada do tipo “$\frac{\infty}{\infty}$”. Ao aplicarmos L'Hôpital em $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x^2-x}}{2x-1}$, notamos que a expressão não simplificou.
Divisão pela maior potência de x fornece: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \overset{x\geq 0}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{2\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{2\sqrt{1}} = 1$
Portanto, $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-x} - x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1}{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}+1} = -\frac{1}{2}$

5.4.4.3 As formas indeterminadas exponenciais “0^0”, “∞^0”, e “1^∞”

Ideias para manipular as expressões exponenciais indeterminadas: usar $a^b = e^{b\ln a}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{“}0^0\text{”} = \text{“}e^{0.\ln 0^{\nearrow -\infty}}\text{”} \\ \text{“}1^\infty\text{”} = \text{“}e^{\infty\cdot\ln 1^{\nearrow 0}}\text{”} \\ \text{“}\infty^0\text{”} = \text{“}e^{0\cdot\ln\infty^{\nearrow\infty}}\text{”} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{“}0\cdot\infty\text{” no expoente}$$

Exemplo 18. $\lim\limits_{x\to 3^+} \underbrace{\left(\frac{1}{x-3}\right)}_{\searrow\infty}^{\overbrace{\ln(x-2)}^{\nearrow 0}} = \text{“}\infty^0\text{”}$ forma indeterminada.

$$L = \lim_{x\to 3^+} \left(\frac{1}{x-3}\right)^{\ln(x-2)} = \lim_{x\to 3^+} e^{\ln(x-2)\ln\left(\frac{1}{x-3}\right)} = \lim_{x\to 3^+} e^{-\ln(x-2)\ln(x-3)}$$

$$= e^{-\lim_{x\to 3^+} \ln(x-2)^{\nearrow 0} \ln(x-3)^{\nearrow -\infty}} = \text{“}e^{0\cdot\infty}\text{”} \text{ Forma indeterminada.}$$

Limite no expoente: $L = e^{-L_1}$ com

$$L_1 = \lim_{x\to 3^+} \ln(x-2)\ln(x-3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{\ln(x-3)^{\nearrow -\infty}}{\frac{1}{\ln(x-2)}\searrow_{\infty}} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} \text{ forma indeterminada}$$

$$\text{L'Hôpital:} \quad L_1 \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 3^+} \frac{\frac{1}{x-3}}{-\frac{1}{(\ln(x-2))^2}\frac{1}{x-2}} = -\lim_{x\to 3^+} \frac{(x-2)\ln^2(x-2)^{\nearrow 0}}{(x-3)\searrow_0} =$$

$$-\lim_{x\to 3^+} \underbrace{(x-2)}_{\searrow 1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 3^+} \frac{\ln^2(x-2)^{\nearrow 0}}{(x-3)\searrow_0}}_{L_2} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \text{ forma indeterminada.}$$

$$\text{L'Hôpital: } L_2 \overset{\text{L'H}}{=} -\lim_{x\to 3^+} \frac{2\ln(x-2)\frac{1}{x-2}}{1} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2\ln(x-2)^{\nearrow 0}}{(x-2)\searrow_1} = 0$$

Portanto, $L_1 = -1\cdot L_2 = -1\cdot 0 = 0$ e, assim,

$$L = \lim_{x\to 3^+} \left(\frac{1}{x-3}\right)^{\ln(x-2)} = \lim_{x\to 3^+} e^{-\ln(x-2)\cdot\ln(x-3)} = e^{-L_1} = e^0 = 1$$

Exemplo 19. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \underbrace{\left(\cos\frac{1}{x}\right)}_{\searrow 1}^{\overbrace{x^2}^{\nearrow\infty}} = \text{“}1^\infty\text{”}$ *forma indeterminada.*

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{\lim_{x\to\infty} \overbrace{x^2}^{\nearrow\infty} \ln\left(\overbrace{\cos\frac{1}{x}}^{\nearrow 1}\right)} = \text{“}e^{\infty\cdot 0}\text{”} \text{ forma indeterminada.}$$

Limite no expoente: $L = e^{L_1}$ com $L_1 = \displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{x^{-2}} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$: forma indeterminada.

L'H: $\displaystyle L_1 \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}\cdot\left(-\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\searrow 1}} \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{L_2} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$ forma indeterminada.

L'H: $\displaystyle L_2 \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} = 1.$

Assim, $L_1 = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = -\frac{1}{2}$ e, portanto, $\displaystyle L = \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{L_1} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

5.4.5 Resumo dos limites de formas indeterminadas

I) Formas indeterminadas $\text{“}\frac{0}{0}\text{”}$ ou $\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}$:

Aplicar a regra de L'Hôpital: Se $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$ ou $\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}$; se $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ($g'(x)\neq 0$ em I

contendo a sem possivelmente a) ($f'(x)$ e $g'(x)$ existem em I) então $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

II) Outras formas indeterminadas: Primeiro, modificar algebricamente, até a indeterminação desaparecer ou assumir a forma $\dfrac{\text{“}0\text{”}}{0}$ ou $\dfrac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty}$. Nessa forma, aplicar a regra de L'Hôpital.

Exemplo 20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{artanh} x}{\arctan x} = \dfrac{\text{“}0\text{”}}{0}$.

L'H: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{artanh} x}{\arctan x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1-x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^{2^{\nearrow 0}}}{1-x^2{}_{\searrow 0}} = \dfrac{1}{1} = 1$

Exemplo 21.

$\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)\cos\dfrac{\pi}{x} = ?$

$\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2}\cos\dfrac{\pi}{x} = 0$. Forma indeterminada “$0\cdot\infty$”.

Transformar algebricamente: $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)\cos\dfrac{\pi}{x} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-2)}{\sec\frac{\pi}{x}} = \dfrac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty}$

Assim, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-2)}{\sec\frac{\pi}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x-2}}{\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}{\cos^2\frac{\pi}{x}}\frac{-\pi}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2\cos^2\frac{\pi}{x}}{\pi(x-2)\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^{2^{\nearrow -4}}}{\pi\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}{}_{\searrow 1}}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\cos^2\frac{\pi}{x})^{\nearrow 0}}{(x-2)_{\searrow 0}}$

L'H: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{x}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2\cos\frac{\pi}{x})^{\nearrow 0}\left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right)^{\nearrow -1}\dfrac{-\pi}{x^2}^{\nearrow -\frac{\pi}{4}}}{1} = 0$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)\cos\dfrac{\pi}{x} = -\dfrac{4}{\pi}\cdot 0 = 0$

Exemplo 22. $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{\operatorname{sen}\pi x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\ln x = \ln 1 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{sen}\pi x = \operatorname{sen}\pi = 0$. Forma indeterminada “$0^0$”.

Transformação algébrica usando a definição da função eponencial $x^y = e^{y\ln x}$:

$\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{\operatorname{sen}\pi x} = \lim\limits_{x\to 1}e^{\operatorname{sen}\pi x\ln(\ln x)} = e^{\lim_{x\to 1}\operatorname{sen}\pi x\ln(\ln x)}$.

Limite no expoente: $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{sen}\pi x\cdot\ln(\ln x) = $ “$0\cdot\infty$”

Transformação algébrica: $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{sen}\pi x\ln(\ln x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}\pi x}} = \dfrac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty}$

Aplicar L'Hospital: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}\pi x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2\pi x}\cos\pi x\cdot\pi} = -\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}^2\pi x}{\pi x\ln x\cos\pi x} = -\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}^2\pi x}{\ln x}\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\pi x\cos\pi x}}_{=-1/\pi} = \dfrac{\text{“}0\text{”}}{0}$.

Aplicar L'Hospital: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}^2\pi x}{\ln x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\operatorname{sen}\pi x\cos\pi x\cdot\pi}{1/x} = \lim\limits_{x\to 1}2\pi x\operatorname{sen}\pi x\cos\pi x = 0.$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{sen}\pi x\cdot\ln(\ln x) = 0$ e, em consequência, $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{\operatorname{sen}\pi x} = e^0 = 1$

5.5 A derivada como uma taxa de variação

5.5.1 A variação de uma função

Para uma reta $y = ax + b$, podemos determinar o coeficiente angular por

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

ou seja,

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a\Delta x$$

Assim, o coeficiente angular é o coeficiente de proporcionalidade entre a variação em x e a correspondente variação em y, representando assim a *taxa de variação* de y em função de x, que mede quanto y varia sob variação de x.

Podemos generalizar esse conceito para uma função $y = f(x)$ com derivada

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

A derivada mede, em cada ponto, quanto a função f varia sob variação da variável independente naquele ponto (veja Figura 5.9).

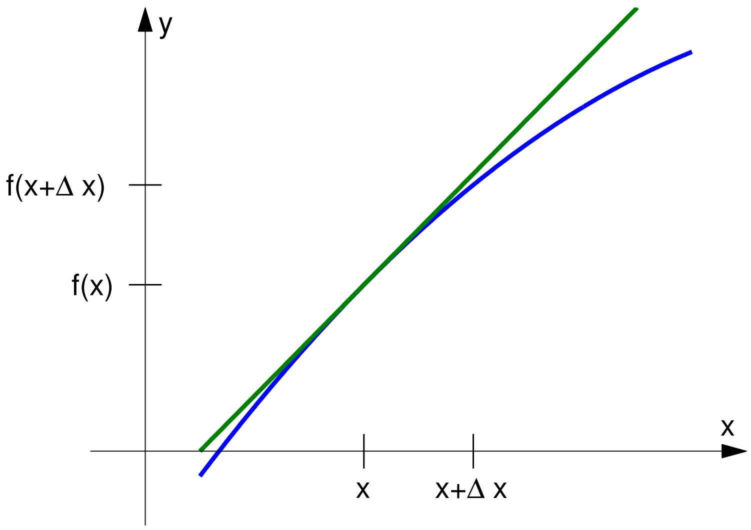


Figura 5.9: Taxa de variação de uma curva. Em cada ponto x, a taxa de variação é a mesma da reta tangente neste ponto.

5.5.2 Diferencial

Pela aproximação linear, temos $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \approx \frac{dy}{dx} \Delta x$. Ao fazer o Δx cada vez menor nesta relação, obtemos o **Diferencial**, definido por

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx$$

O Diferencial descreve uma variação infinitesinalmente pequena da variável dependente em função de uma variação infinitesinalmente pequena da variável independente.

5.5.3 Taxa de variação

Sendo assim, reconhecemos que a derivada faz o papel de uma **taxa de variação**, i.e., o fator de proporcionalidade entre as variações das variáveis independente e dependente.

Definição: Se $y = f(x)$, então $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx}$ é a taxa de variação instantânea de y pois é a constante de proporcionalidade que mede quanto y varia sob uma variação de x.

Exemplo 1. *Uma empresa descobriu que nos últimos 2 anos o seu rendimento bruto anual, p, medido em milhões de reais (MR\$), pode ser descrito pela formula $p(t) = \frac{2}{5}t^2 + 2t + 10$, onde t é o tempo medido em anos.*
(a) Encontre a taxa de crescimento atual da empresa.
(b) Supondo que a fórmula continue valendo, faça uma previsão da taxa de crescimento da empresa para daqui a 4 anos.
Taxa de crescimento: derivada $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{4t}{5} + 2$
(a) Neste momento, temos $t = 2$ e, portanto, $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{4 \cdot 2}{5} + 2 = \dfrac{8}{5} + 2 = 3{,}6$ MR\$/a
(b) Daqui a 4 anos, teremos $t = 6$ e, portanto, $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{4 \cdot 6}{5} + 2 = \dfrac{24}{5} + 2 = 6{,}8$ MR\$/a

5.5.4 Taxa de variação relativa

Obviamente estes valores não nos dizem se a empresa é bem sucedida, pois se o rendimento foi de 3 MR\$, então a taxa de crescimento em 2021 de 3,6 MR\$/a é um resultado extremamente bom. Porém, se o rendimento foi de 3000 MR\$, então um crescimento por 3,6 MR\$/a não é tão bom. Para ter uma melhor medida para isto, precisamos da taxa de variação relativa, dada por $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Exemplo 2. *Determine as taxas de variação relativas do exemplo anterior.*
(a) Neste momento, o rendimento bruto da empresa é de $p(2) = \dfrac{2}{5} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 10 = 15{,}6$. Portanto, a taxa de crescimento relativa é $\dfrac{dp/dt}{p} = \dfrac{3{,}6}{15{,}6} = 0{,}231 = 23{,}1\%$, i.e., o rendimento da empresa está crescendo em 23,1%.
(b) Daqui a 4 anos, o rendimento será de $p(6) = \dfrac{2}{5} \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 10 = 36{,}4 \Rightarrow \dfrac{dp/dt}{p} = \dfrac{6{,}8}{36{,}4} = 0{,}187 = 18{,}7\%$, i.e., rendimento da empresa vai crescer 18,7%.

Observação: Notamos que, para ter o entendimento completo da situação, necessitamos das duas informações, as taxas de variação absoluta e relativa (pois uma vendinha de quintal que vendeu num ano 5 revistinhas e no ano seguinte 6 também tem crescimento de 20%, sendo nesse caso provavelmente a mera flutuação normal do negócio).

5.6 Taxas relacionadas

Taxas de variação (derivadas) relacionadas ocorrem quando existe uma relação entre duas grandezas que faz com a variação de uma delas com respeito a uma terceira variável apresente uma dependência da variação da outra.

A versão mais reduzida de um problema de taxas relacionadas fornece a relação entre as varíaveis, de modo que somente seja necessário derivá-la e substituir os valores.

Exemplo 1. *Determine a variação de y em função de t no instante em que $x = 5$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}$, se y depende de x de acordo com $\sqrt{y} + 2(x-2)^2 = 20$*
Pela relação dada, temos o valor de y quando $x = 5$:
$\sqrt{y} + 2(x-2)^2 = 20 \;\Rightarrow\; \sqrt{y} = 20 - 2 \cdot 9 = 2 \;\Rightarrow\; y = 4$
Derivando a relação, obtemos:
$\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dt} + 4(x-2)\dfrac{dx}{dt} = 0$, ou seja, $\dfrac{1}{2 \cdot 2}\dfrac{dy}{dt} + 4(5-2)\dfrac{1}{4} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{4}\dfrac{dy}{dt} = -4 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{4} \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dt} = -12.$

Observação: Na maioria dos problemas de taxas relacionadas, a relação entre as varíaveis precisa ser encontrada a partir de informações textuais. Os exemplos a seguir mostram essa situação.

Exemplo 2. *Uma pessoa se encontra no topo de uma escada de 25 m de comprimento encostada numa parede. A escada escorrega de tal forma que seu pé deslize a uma velocidade constante de 3 m/s. Com que velocidade a pessoa cairá em um pedestal que se encontra na parede a uma altuda de 15 m?*
Denominamos a altura por y e a posição do pé da escada por x (veja a Figura 5.10).
Queremos determinar a variação da altura y, i.e. $\dfrac{dy}{dt}$.
Temos a relação entre x e y: $x^2 + y^2 = (25)^2 = 625$
Derivando essa relação, obtemos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0, \text{ i.e., } \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}.$$

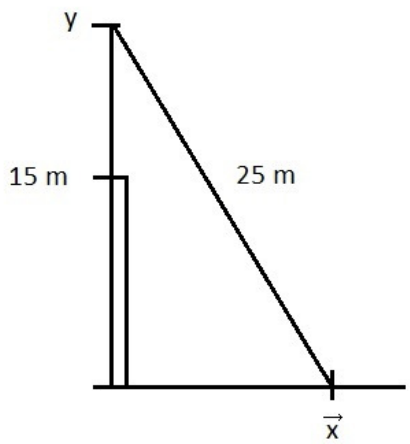


Figura 5.10: Situação geométrica da escada na parede.

(Não é realista. A velocidade tenderia a infinito quando y tende a zero, i.e., perto do chão, o que é fisicamente impossível!)

Mas supondo que seja uma aproximação aceitável no começo da queda, podemos calcular a posição do pé quando $y = 15$, obtendo $x = \sqrt{625 - 225} = 20$. Assim, usando a informação no texto que $\dfrac{dx}{dt} = 3$ m/s, obtemos $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{20}{15} \cdot 3 = -4 \Rightarrow$ A pessoa cai com uma velocidade de 4 m/s (negativo = para baixo) no pedestal.

Observação: Taxas relacionadas fazem uso da relação de duas variáveis que dependem de uma terceira. A derivada da relação fornece a relação entre as derivadas.

Exemplo 3. *Areia esta sendo jogada no topo de um monte que mantém a forma de um cone, cuja altura é sempre o dobro do raio da base. A que taxa cresce a altura do cone quando atingir 8 m de altura se a estera carrega 10 m^3 de areia por segundo.*

Temos a variação do volume do cone (que é igual ao volume de areia transportado pela esteira) e precisamos a variação de sua altura. A relação entre o volume de um cone e sua altura é $V = \frac{\pi r^2}{3} \cdot h$. De acordo com o enunciado, a relação entre raio r e altura h do cone é $h = 2r \Rightarrow r = \frac{h}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{h^2}{4}$

Daí: $V = \frac{\pi r^2}{3} \cdot h = \frac{\pi}{12} \cdot h^3$

Portanto, $\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi}{12} h^2 \cdot \frac{dh}{dt} = 10$

$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{10}{3\pi} \cdot \frac{12}{h^2} = \frac{5}{8\pi}$ m/s $\approx 0{,}2$ m/s.

No instante em que $h = 8$ m, o monte de areia cresce na taxa de $\frac{5}{8\pi}$ m/s $\approx 0{,}2$ metros por segundo.

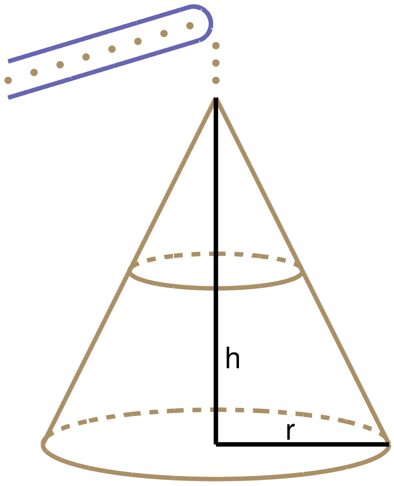


Figura 5.11: Cone de areia.

Exemplo 4. *Um balão esférico está sendo enchido a uma taxa de 100 m^3/min. Qual é a taxa de crescimento do diâmetro do balão no instante em que o seu raio é de 5 m?*

Volume: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, Derivada: $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = 100 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{100}{4\pi r^2} = \frac{1}{\pi}$

$d = 2r \Rightarrow \frac{dd}{dt} = 2\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi} \frac{\text{m}}{\text{min}}$

Exemplo 5. *O preço de venda p de certo produto depende do seu custo de produção c seguindo a fórmula $p = 2c + 20$. A demanda d deste produto depende do seu preço de aquisição de acordo com $d = \frac{14400}{p} + 80$, onde d denota o número de peças vendidas e p é o preço da peça em reais. Assumindo que o custo fixo de produção seja R\$ 50, o lucro pela venda do produto será $l = (p - c) \cdot d - 50$. Determine a variação do lucro quando o custo de produção é de* 50 *reais por peça e aumenta na taxa de* 2 *reais por semana.*

Variação do preço: $\frac{dp}{dt} = 2\frac{dc}{dt} = 2 \cdot 2 = 4$

Variação da demanda: $\frac{dd}{dt} = \frac{-14400}{p^2} \frac{dp}{dt}$

O preço é de $p = 2 \cdot 50 + 20 = 120 \Rightarrow \frac{dd}{dt} = -\frac{14400}{(120)^2} \cdot 4 = -4$

Variação do lucro: $\frac{dl}{dt} = \frac{d(p-c)}{dt} \cdot d + (p-c)\frac{dd}{dt} = (\frac{dp}{dt} - \frac{dc}{dt}) \cdot d + (p-c) \cdot \frac{dd}{dt}$

A demanda é de $d = \frac{14400}{120} + 80 = 200 \Rightarrow \frac{dl}{dt} = (4-2) \cdot 200 + (120 - 50) \cdot (-4) = 120$

O lucro aumenta a 120 reais por semana.

Exemplo 6. *Uma pessoa de 81 kg está no topo de uma escada de de 3 kg e 13 m de comprimento que está apoiada numa parede cujo pé está a 5 m da parede. De repente, a escada começa a deslizar (sem fricção). Por medida de segurança, colocou-se um bloco de metal a 12 m da parede que pode absorver um impacto com um momentum de 300 kg m/s. Iso vai ser suficiente para a pessoa não bater no chão?*

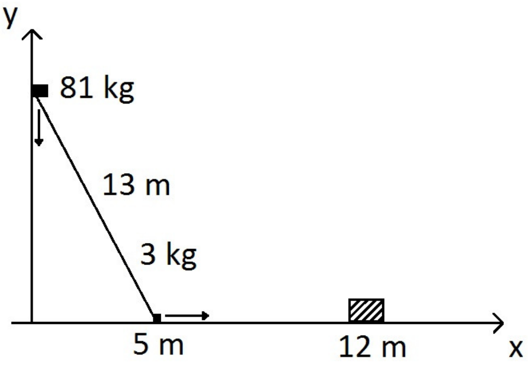


Figura 5.12: Pessoa de 81 kg no topo de uma escada.

O momentum do impacto será:

$$p = m \cdot v_x = m \cdot \frac{dx}{dt},$$

onde $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ representa a velocidade com que o pé da escada deslisa no momento do impacto, e m denota a massa total do sistema composto pela pessoa e a escada, i.e. $m = m_p + m_e = (81 + 3)$ kg= 84 kg.

A velocidade de deslisamento do pé é relacionada com a velocidade de queda da pessoa na escada, $\dfrac{dy}{dt}$. Para relacionarmos a velocidade do deslisamento com a velocidade de queda, precisamos relacionar a altura y da pessoa na escada com a posição x do pé da escada. Temos $x^2 + y^2 = \ell^2$, onde $\ell = 13$ m é o comprimento da escada.

Derivando essa relação, obtemos $2x\dfrac{dx}{dt} + 2y\dfrac{dy}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dt}$

Quanto é $\dfrac{dy}{dt}$? Para responder isso, precisamos da função $y(t)$:

Queda livre (sem fricção): $y = y_0 - \dfrac{1}{2}gt^2$, onde y_0 é a altura inicial da pessoa na escada e g é a aceleração gravitacional $g = 9,81$ m/s^2

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot 2t = -gt \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x} \cdot (-gt) = \frac{y}{x}gt.$$

Nesta relação, conhecemos $x = 12\ m$, mas precisamos determinar a altura y e o momento t do impacto.

A altura nesse instante será $y = \sqrt{\ell^2 - x^2} = \sqrt{169 - 144}$ m $= \sqrt{25}$ m $= 5$ m

Mas como determinar t?

O momento t em que a altura da pessoa é y pode ser determinado por inverter a função $y(t)$, i.e.,

$y - y_0 = -\dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2}{g}(y_0 - y)}$, onde y_0 é a altura inicial da escada.

Assim obtemos $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{x} \cdot g \cdot \sqrt{\dfrac{2}{g}(y_0 - y)} = \dfrac{y}{x}\sqrt{2g(y_0 - y)}$

Já calculamos $y = 5$ m, mas qual é o valor de y_0?

Temos $y_0^2 + x_0^2 = \ell^2$ com $x_0 = 5$ m $\Rightarrow y_0 = \sqrt{169 - 25}$ m $= 12$ m

Portanto, a velocidade de deslisamento do pé da escada no momento do impacto é:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5\text{m}}{12\text{m}}\sqrt{2 \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}(12\text{m} - 5\text{m})} = \frac{5}{12} \cdot \sqrt{14 \cdot 9{,}81}\ \text{m/s}$$

Com isso, podemos determinar o momentum no instante do impacto:

$p = 84\text{kg} \cdot \frac{5}{12} \cdot \sqrt{14 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 35 \cdot \sqrt{14 \cdot 9,81}$ kg m/s ≈ 410 kg m/s.
$\Rightarrow$ O choque será pois mais forte que 300 kg m/s $\Rightarrow$ O bloco não vai ser suficiente para segurar a queda.

5.7 Discussão do gráfico de uma função

Nesta seção reunimos todas as ferramentas necessárias para descobrir as propriedades do gráfico de uma função que permitem a esboçar o seu gráfico. É importante observar que, no caso de uma função desconhecida, o esboço obtido conectando alguns pontos predeterminados nãogarante a presença de todos os elementos importantes no gráfico.

5.7.1 Sinal da função

O sinal da função pode ser positivo ou negativo em certos intervalos. Observamos que o sinal pode trocar somente em pontos onde $f(x) = 0$ ou onde a função for descontínua (veja Figura 5.13). Sendo assim, basta avaliar o sinal da função em um ponto em cada intervalo entre zeros e descontinuidades para saber o sinal no intervalo todo.

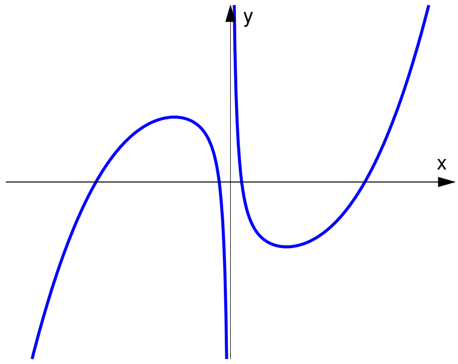


Figura 5.13: O sinal de uma função pode trocar somente em pontos onde $f(x) = 0$ ou onde a função for descontínua.

5.7.2 Funções monótonas

Definição: A função f definida num intervalo I é crescente (decrescente) em I se e somente se $f(x_2) > f(x_1)[f(x_2) < f(x_1)]$ $\forall\, x_2 > x_1$, onde x_1 e x_2 são números quaisquer em I.
Com igual: não decresente (não crescente).
Uma função crescente ou decrescente é chamada de **monótona**.

Temos dois teoremas importantes que relacionam a monotonia de uma função ao sinal de sua derivada:

Teorema: Se $f(x)$ for uma função crescente (decrescente) em (a, b) e se $f'(x)$ existir, então $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$.

Prova:
Caso 1: Se $f(x)$ é uma função crescente em (a, b) e se $f'(x)$ existir, então $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

f crescente: $f(x_2) > f(x_1)$ sempre que $x_2 > x_1$.
No limite pela direita:

$$x_2 = x_1 + \Delta x \ (\text{com } \Delta x > 0) \Rightarrow f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_2) - f(x_1)}^{>0}}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} \Rightarrow f'_+(x) \geq 0$$

No limite pela esquerda:

$$x_2 = x_1 + \Delta x \ (\Delta x < 0) \Rightarrow f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_2) - f(x_1)}^{<\,0}}{\underbrace{x_2 - x_1}_{<\,0}} \Rightarrow f'_-(x) \geq 0$$

Se $f'(x)$ exitir, $f'_-(x) = f'_+(x)$. Portanto, f crescente implica $f'(x) \geq 0$.

Caso 2: Se $f(x)$ é uma função decrescente em (a,b) então $f'(x) \leq 0$ em (a,b) se $f'(x)$ existir.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

f decrescente: $f(x_2) < f(x_1)$ sempre que $x_2 > x_1$.
No limite pela direita:

$$x_2 = x_1 + \Delta x \ (\Delta x > 0) \Rightarrow f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_2) - f(x_1)}^{<\,0}}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>\,0}} \Rightarrow f'_+(x) \leq 0$$

No limite pela esquerda:

$$x_2 = x_1 + \Delta x \ (\Delta x < 0) \Rightarrow f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_2) - f(x_1)}^{>\,0}}{\underbrace{x_2 - x_1}_{<\,0}} \Rightarrow f'_-(x) \leq 0$$

Se $f'(x)$ exitir, $f'_-(x) = f'_+(x)$. Portanto, f decrescente implica $f'(x) \leq 0$.

Teorema: Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Se $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ $\forall x \in [a,b]$ então f é crescente (decescente) em (a,b).

Prova (*Caso 1:* derivada positiva):
Hipótese: $f'(x) > 0$ $\forall x$ em (a,b). Consideramos qualquer par de pontos $x_1, x_2 \in (a,b)$ com $x_2 > x_1$.

Pelo Teorema do Valor Médio, existe, para qualquer um desses pares x_1, x_2, um ponto $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (ver Figura 5.14).
Sabemos, pela hipótese, que $f'(c) > 0$.
Portanto, a fração representando a inclinação da reta secante no intervalo (x_1, x_2) é positiva.
Como $x_2 > x_1$, segue que $f(x_2) > f(x_1)$.
O fato deste raciocínio valer para qualquer par $x_1, x_2 > x_1 \in (a,b)$ implica que f é crescente em (a,b).

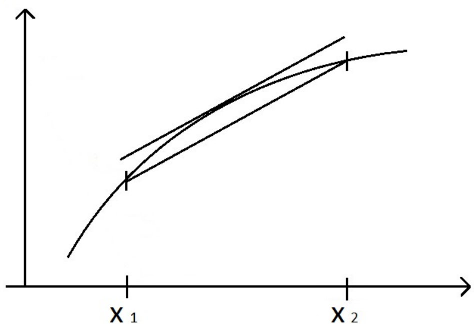


Figura 5.14: Temorema do Valor Médio no intervalo (x_1, x_2)

A prova para o *Caso 2*, quando a derivada é negativa, é análoga.

Observação: Notamos que, para determinar intervalos de monotonia da função, precisamos julgar o sinal da derivada que pode trocar somente nos pontos críticos da função. Assim, em analogia ao sinal da função, basta avaliar o sinal da derivada em um ponto em cada intervalo entre dois pontos críticos para saber a monotonia neste intervalo.

5.7.3 Extremos

Extremos são os valores máximos e mínimos de uma função. Temos que distinguir dois tipos de extremos:

5.7.3.1 Extremos abolutos (ou globais)

Definição: A função $f(x)$ tem um valor máximo [mínimo] absoluto (ou global) em um intervalo I no ponto $c \in I \subset \mathbb{D}$ se $f(c) \geq f(x)$ $[f(c) \leq f(x)]$ para todo x em I.

5.7.3.2 Extremos relativos (ou locais)

Definição: A função $f(x)$ tem um máximo [mínimo] relativo (ou local) em $x = c$ se existir um intervalo aberto contendo c, onde f está definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ $[f(c) \leq f(x)]$ para todo x neste intervalo.

Observação: A diferença entre essas definições está no fato do intervalo ser dado no caso do extremo global, enquanto no caso do extremo local, basta existir um, quão pequeno que seja.

Observação: Todo extremo absoluto também é extremo relativo.

5.7.4 Localização de extremos

O problema da localização de extremos é de extrema importância. São frequentes as situações em que precisamos encontrar o menor caminho, o menor prejuízo, o maior lucro, o menor erro, etc. Por isso, existe uma subdisciplina da Matemática Aplicada, chamada Otimização, que estuda métodos de encontrar extremos de funções complicadas, frequentemente de muitas variáveis.

Para localizar os extremos absolutos de uma função real de uma variável, precisamos primeiro tratar dos seus extremos relativos. Exemplos de extremos relativos se encontram nas Figuras 5.15 e 5.16.

5.7.4.1 Teorema de Fermat

Para localizar extremos relativos, temos o

Teorema de Fermat: Se f existir em (a, b) contendo c e f tem um extremo relativo em c, então, se $f'(c)$ existir, $f'(c) = 0$.

Prova (análoga à prova do Teorema de Rolle):

$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$. Se este limite existir, os dois limites laterais tem que ser iguais, i.e., $f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$

Máximos:

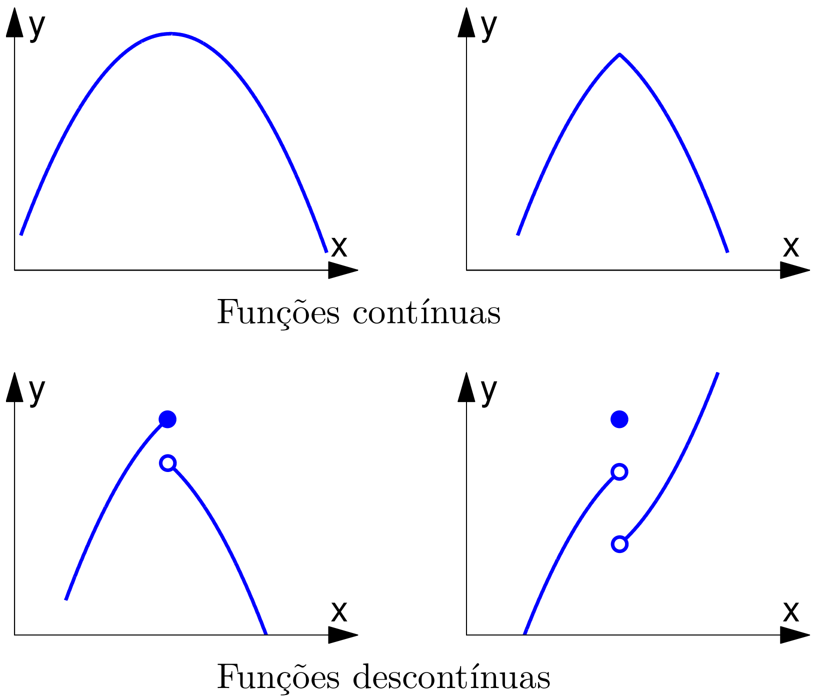


Figura 5.15: Exemplos de máximos relativos

Mínimos:

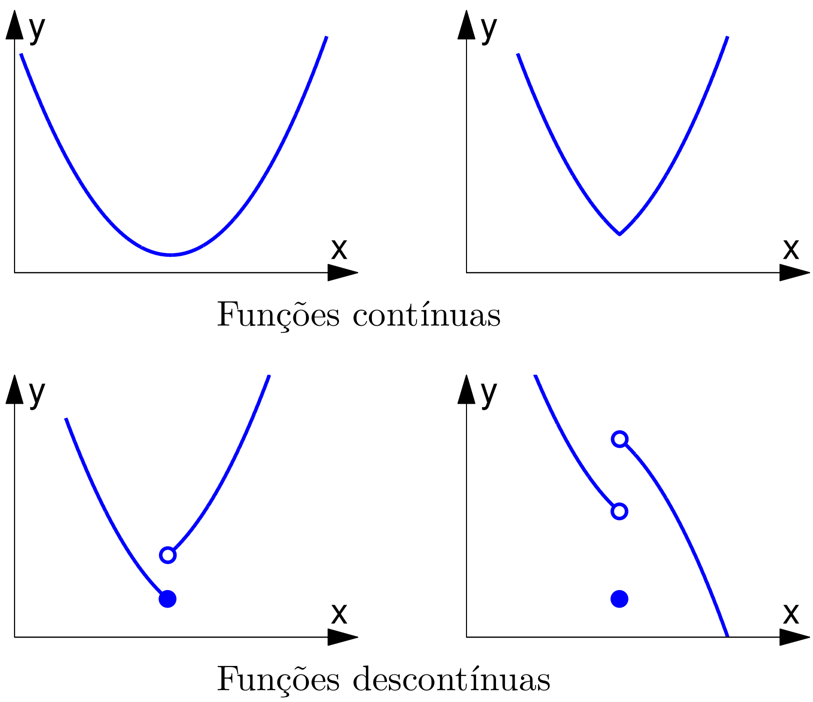


Figura 5.16: Exemplos de mínimos relativos

Mas se c é um ponto de máximo [mínimo] relativo de f, então $f(c) \geq [\leq] f(c+\Delta x)$ $\forall \Delta x$ pequeno e, portanto

para $\Delta x > 0$, $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq [\geq] 0$ e para $\Delta x < 0$, $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq [\leq] 0$.

Assim, podemos concluir pelo limite pela direita que $f'_+(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq [\geq] 0$ e pelo limite pela esquerda que $f'_-(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq [\leq] 0$. Portanto, como $f'(c)$ existe, temos que ter $f'_-(c) = f'_+(c)$ que tem que ser ao mesmo tempo tanto maior igual a zero quanto menor igual a zero. Só pode ser verdade se $f'(c) = 0$.

Observação: Pelo Teorema de Fermat, podemos então notar que uma condição necessária para que a função f tenha um extremo relativo em um ponto c é que a derivada dela seja nula ou não exista nesse ponto (porque se $f'(c) = k \neq 0$, não é possível, já que a existência de um extremo implica que uma derivada existente tem que ser nula).

5.7.4.2 Interpretação geométrica

O fato da derivada igual a zero quer dizer o que?
Quer dizer que a reta tangente neste ponto é horizontal (veja Figura 5.17).

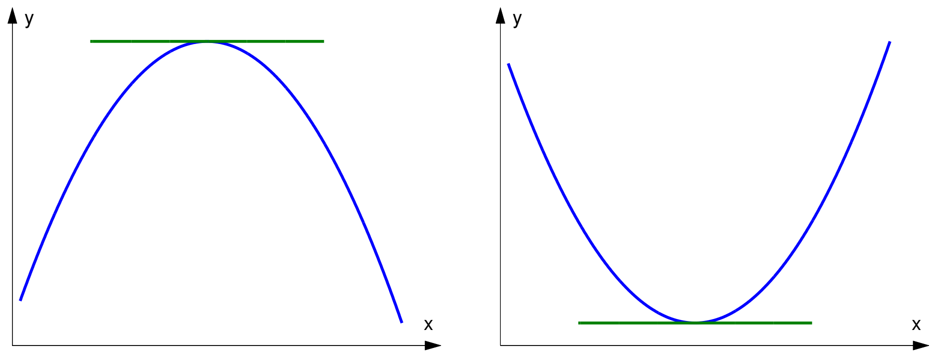


Figura 5.17: Tangente horizontal nos extremos relativos

O que quer dizer o fato da derivada não existir?
Quer dizer que a reta tangente não existe naquele ponto, ou porque a função forma um "bico" ou porque é descontínua.

Exemplo 1. *(Exemplo 1 na página 93): Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 3 \\ 8 - x & x > 3 \end{cases}$$

Vimos na página 93 que $f'(3)$ não existe, pois $f'_-(3) = 2$ e $f'_+(3) = -1$. A função possui um máximo relativo em $x = 3$ (veja Figura 5.18).

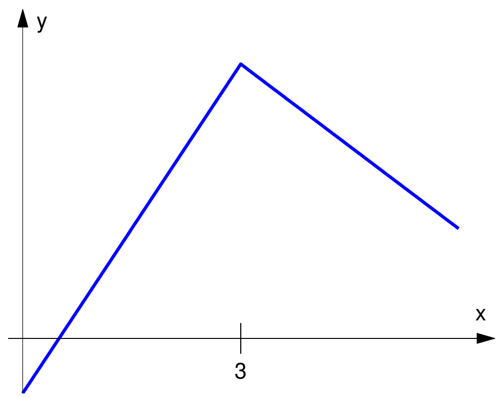


Figura 5.18: Derivada inexistente no extremo.

Porém, existem funções que tem a derivada zero ou inexistente em algum ponto que não seja um extremo relativo.

Exemplo 2. $y = (x-1)^3$
$y' = 3(x-1)^2 \cdot 1 = 3(x-1)^2$

Portanto, $y'(1) = 0$ Esta função tem uma reta horizontal como tangente em $x = 1$, mas neste ponto a função não tem um extremo (veja a Figura 5.19).

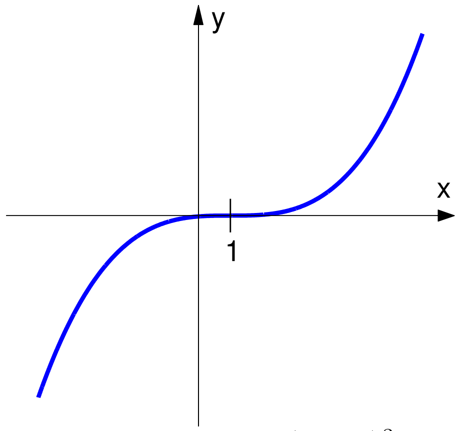


Figura 5.19: Função $y = (x-1)^3$: tangente horizontal em $x = 1$, mas não tem extremo.

5.7.5 Pontos críticos

Para localizarmos os extremos de uma função, usamos a negação do Teorema de Fermat, i.e., se $f'(c)$ existir e $f'(c) \neq 0$, então c não e um ponto de extremo de f.
Eliminando assim todos os pontos de uma função onde a derivada existe e não é nula, ficamos com os pontos candidatos a serem pontos de extremos de f.

Definição: Se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe, então c é chamado **ponto** (ou número) **crítico** de f.

(**Lembrete:** Se $f'(c) = 0$, então c é chamado **ponto estacionário** da função.)

Exemplo 3. *Encontre os números críticos da função* $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$
$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \dfrac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}}$ Portanto, $y'(x)$ não esta definida em $x = 0$, $y'(x) = 0$ em $x = -1$. Os pontos críticos de f são $x = 0$ e $x = -1$.

Portanto, a função $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$ pode ter extremos somente nos pontos $x = 0$ e $x = -1$.

5.7.6 Classificação de pontos críticos

Como saber se a função possui extremos nestes pontos e, caso afirmativo, se são mínimos ou máximos?

Olhando novamente as Figuras 5.15 e 5.16, notamos que temos que distinguir os casos em que a função é contínua no ponto crítico daqueles em que a função é descontínua naquele ponto.

5.7.6.1 Função descontínua no ponto crítico

Neste caso, devemos comparar os valores da função em volta do ponto crítico. A maneira mais fácil de fazer isso é pelos limites laterais.

Se c for um ponto crítico de f onde f for descontínua, então:
(i) Se $f(c)$ for maior que ambos limites laterais, então f possui um máximo relativo em c.
(ii) Se $f(c)$ for menor que ambos limites laterais, então f possui um mínimo relativo em c.
(iii) Se $f(c)$ fica entre os valores dos limites laterais, f não possui um extremo relativo em c.

Se a função for lateralmente contínua, a derivada do lado contínuo precisa ser considerada.

Exemplo 4. *(Exemplo 3 na página 95): A função*

$$f(x) = \begin{cases} -3x+5 & x \leq 1 \\ -3x+2 & x > 1 \end{cases}$$

possui um extremo em $x = 1$?
Vimos na página 95 que a função é descontńua em $x = 1$. Comparando o valor da função e os limites laterais, $f(1) = 2, \quad L_- = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2, \quad L_+ = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1,$
notamos que $f(1) = L_- > L_+$, que implica que a função não possui um mínimo local em $x = 1$, pois à direita f tem valores menores do que $f(1)$. Uma vez que a derivada lateral pela esquerda é $f'_-(1) = -3 < 0$, a função é descrescente à esquerda de $x = 1$, ou seja, possui valores maiores do que $f(1)$. Portanto, a função também não possui um máximo local em $x = 1$ (veja Figura 5.20).

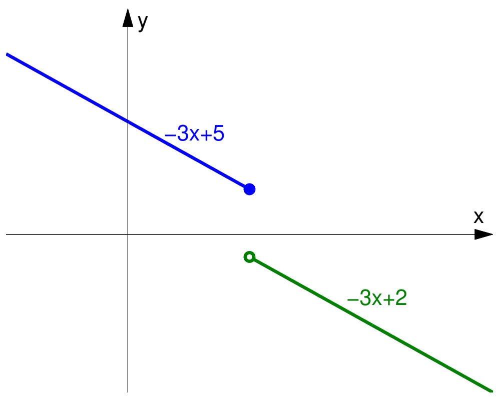


Figura 5.20: Função descontínua no ponto crítico.

5.7.6.2 Função contínua no ponto crítico

Quando a função é contínua no ponto crítico podemos observar na Figura 5.15 que em um ponto de máximo, a função é crescente do lado esquerdo do ponto e decrescente do lado direito. De forma análoga, em um ponto de mínimo, a função é decrescente do lado esquerdo do ponto e crescente do lado direito (Figura 5.16).

No exemplo 3 acima, a função é contínua em ambos os pontos cíticos. Notamos que f' não troca de sinal em $x = 0$. Ou seja, $f' > 0 \; \forall x \in (-1, 0)$ e $f' > 0 \; \forall x \in (0, \infty)$. Portanto, a função é crescente dos dois lados de $x = 0$, o que implica que tem valores menores à esquerda e valores maiores à direita. Portanto, neste ponto a função não possui um extremo.

Em contrapartida, f' troca de sinal em $x = -1$. Temos $f' < 0 \; \forall x \in (-\infty, -1)$ e $f' > 0 \; \forall x \in (-1, 0)$. Isso significa que f tem um extremo neste ponto?
Observamos que f é crescente à direita de $x = -1$, ou seja, os valores de f à direita de -1 são maiores do que em $x = -1$, e que f é decrescente à esquerda de $x = -1$, ou seja, os valores de f desse lado também são maiores do que $f(-1)$. Portanto, f possui um mínimo relativo em $x = -1$.

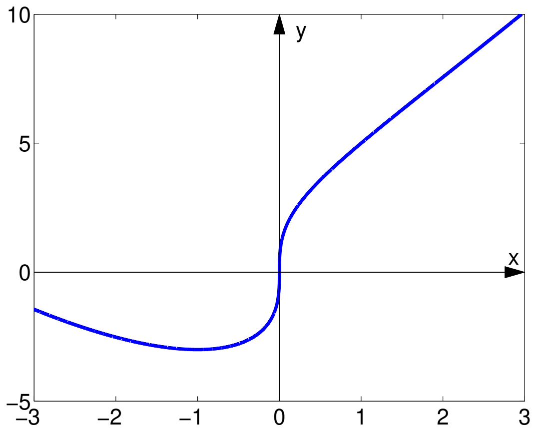


Figura 5.21: Gráfico da função $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$.

Essas observações podem ser confirmados no gráfico da função na Figura 5.21.

Podemos então decidir se um ponto crítico é um extremo a partir de informações sobre a derivada em volta dele. Para formular isso, temos o seguinte critério.

5.7.6.3 Critério da primeira derivada

Teorema: Seja c um ponto crítico de f, com f contínua em (a, b) contendo c e derivável em (a, b), menos possivelmente em $x = c$. Então,
(i) se $f'(x) > 0$ em (a, c) e $f'(x) < 0$ em $(c, b) \Rightarrow f$ tem um máximo relativo em c;
(ii) se $f'(x) < 0$ em (a, c) e $f'(x) > 0$ em $(c, b) \Rightarrow f$ tem um mínimo relativo em c;
(iii) se $f'(x) < 0$ em (a, c) e $f'(x) < 0$ em (c, b), então não tem extremo em c;
(iv) se $f'(x) > 0$ em (a, c) e $f'(x) > 0$ em (c, b), então não tem extremo em c.

Exemplo 5. *Achar os extremos relativos de* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) \; \exists \; \forall \; x,\; f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Portanto, os pontos críticos são $x = 1$ e $x = 3$
Significa que f' pode estar trocando de sinal somente nesses pontos. Podemos então julgar o sinal de f' nos intervalos da seguinte maneira:
Usamos um ponto em cada intervalo, por exemplo,

$x = 0 \in (-\infty, 1)$, $\quad x = 2 \in (1, 3)$ $\quad$ e $\quad x = 4 \in (3, \infty)$:

Como $f'(0) = 9 > 0$, temos $f'(x) = 3(x-1)(x-3) > 0 \; \forall \; x < 1$
Como $f'(2) = -3 < 0$, temos $f'(x) < 0 \; \forall \; 1 < x < 3$
Como $f'(4) = 9 > 0$, temos $f'(x) > 0 \; \forall \; x > 3$
Portanto, como f' troca de sinal de positivo para negativo em $x = 1$, f tem um máximo local em $x = 1$, e como f' troca de sinal de negativo para positivo em $x = 3$, f tem um mínimo local em $x = 3$.

Observação: Notamos que ao trocar o sinal de menos para mais, a derivada f' é uma função crescente no caso de um mínimo (ou ao trocar de mais para menos, decrescente no caso de um máximo) em torno do ponto crítico. Sendo assim, a sua derivada, i.e., a segunda derivada da função f, tem que ser positiva (ou negativa). Esta observação fornece o seguinte critério:

5.7.6.4 Critério da segunda derivada

Teorema: Seja c um ponto crítico de f em $I = (a, b)$ no qual $f'(c) = 0$ e $f'(x)$ existe em (a, b). Então, se $f''(c)$ existe:
(i) se $f''(c) > 0$, f tem um mínimo relativo em c;
(ii) se $f''(c) < 0$, f tem um máximo relativo em c;
(iii) se $f''(c) = 0$, nada se pode afirmar.

Prova (caso (i) de um mínimo):
$$f''(c) = \lim_{x\to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \Rightarrow \exists I = (a, b) \text{ tal que } \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \ \forall\ x \in I.$$

Portanto $x < c \Rightarrow f'(x) < f'(c)$ e $x > c \Rightarrow f'(x) > f'(c)$
Assim, $f'(x) < 0\ \forall x < c$ e $f'(x) > 0\ \forall x > c$
$\Rightarrow f$ tem mínimo relativo em c

A prova para o caso (ii) de um máximo é análoga.

Observação: Nota-se que **nada se pode concluir** usando somente a segunda derivada se $f''(c) = 0$!

(Mas há uma segunda parte desse critério para poder decidir. Veremos a seguir.)

Exemplo 6. *Determine os extremos relativos de* $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 2$
$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x = 4x(x^2 + x - 2)\ \exists\forall x \in \mathbb{R}$
$$f'(x) = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x^2 + x - 2 = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$
$f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$
$f''(0) = -8 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo
$f''(1) = 12 + 8 - 8 = 12 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo
$f''(-2) = 48 - 16 - 8 = 24 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo

Observação: Em funções contínuas, máximos e mínimos relativos tem que aparecer alternando.

Note que o critério da segunda derivada nem sempre permite uma conclusão. Nestes casos, podemos recorrer ao critério da primeira derivada:

Exemplo 7. *Determine os extremos relativos de* $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$ $\exists\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ em $x = 0$.
$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow$ nada se conclui.
Mas pelo critério da primeira derivada:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \quad \forall \quad x < 0 \\ f'(x) > 0 \quad \forall \quad x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mínimo relativo}$$

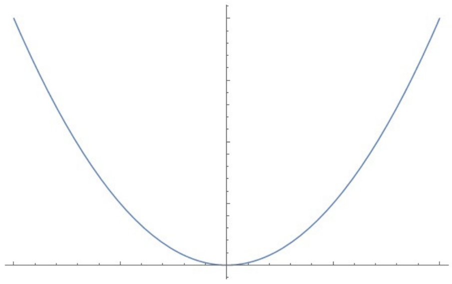


Figura 5.22: $f(x) = x^4$

Exemplo 8. *Determine os extremos relativos de* $f(x) = -x^4$

$f'(x) = -4x^3$ $\exists\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ em $x = 0$.
$f''(x) = -12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow$ nada se conclui
Mas pelo critério da primeira derivada:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \quad \forall \quad x < 0 \\ f'(x) < 0 \quad \forall \quad x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{máximo relativo}$$

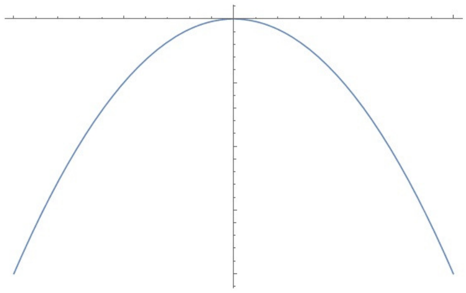


Figura 5.23: $f(x) = -x^4$

Exemplo 9. *Determine os extremos relativos de* $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$ $\exists\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ em $x = 0$.
$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow$ nada se conclui.
Mas pelo critério da primeira derivada:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \quad \forall \quad x > 0 \\ f'(x) > 0 \quad \forall \quad x < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{nem máximo nem mínimo}$$

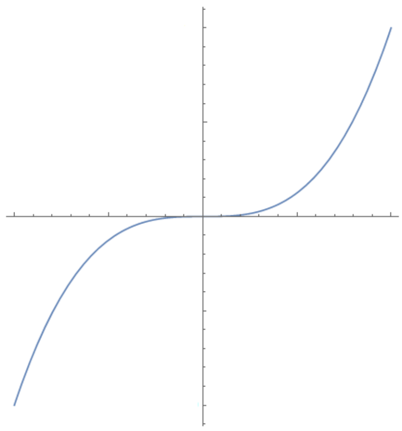


Figura 5.24: $f(x) = x^3$

5.7.6.5 Critério da segunda derivada, parte II

Se c for um ponto crítico de f com $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, e se as primeiro n derivadas de f em c existem, podemos afirmar: se $f^{(i)}(c) = 0$ ($\forall i < n$) e se $f^{(n)}(c) \neq 0$ (i.e., a n-ésima derivada é a primeira não nula em c), então
(a) se n for par,
   (i) Se $f^{(i)}(c) > 0$, f tem um mínimo relativo em c;
   (ii) Se $f^{(i)}(c) < 0$, f tem um máximo relativo em c;
(b) se n for ímpar, f não possui um extremo em c.

Exemplo 10. *Determine os extremos relativos de* $f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$ $\exists\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ em $x = 0$. $f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow$ nada se conclui.
Mas $f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(0) = 0$; $f^{\text{IV}}(x) = 24 \Rightarrow f^{\text{IV}}(0) = 24 \neq 0$. Como a quarta derivada é a primeira não nula no ponto $x = 0$, sendo 4 um número par, podemos julgá-la como se fosse a segunda derivada. Assim, $f^{\text{IV}}(0) = 24 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo.

Exemplo 11. *Determine os extremos relativos de $f(x) = x^3$*
$f'(x) = 3x^2\ \exists \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ em $x = 0$. $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow$ nada se conclui.
Mas $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(0) = 6 \neq 0$. Como a terceira derivada é a primeira não nula no ponto $x = 0$, sendo 3 um número ímpar, concluímos que a função não possui um extremo nesse ponto.

Observação: Em funções contínuas, máximos e mínimos relativos tem que aparecer alternando. Não é possível uma função contínua apresentar dois máximos locais sem que haja um mínimo local entre eles.

5.7.7 Concavidade e pontos de inflexão

5.7.7.1 Concavidade

Definição: O gráfico de uma função f é côncavo para cima [para baixo] em $x = c$ se existe $f'(c)$ e se existe um intervalo aberto I contendo c tal que para todos $x \neq c$ em I, o ponto $(x, f(x))$ está acima [abaixo] da reta tangente ao gráfico em $x = c$ (veja Figuras 5.25 e 5.26).

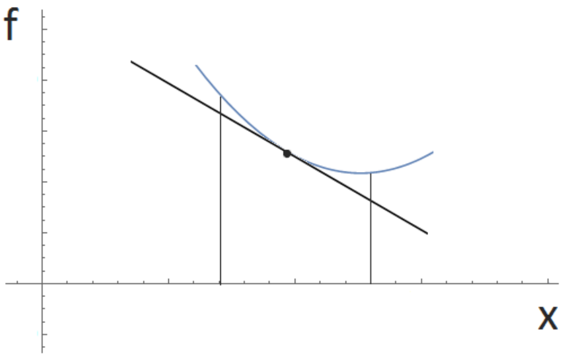


Figura 5.25: Gráfico côncavo para cima.

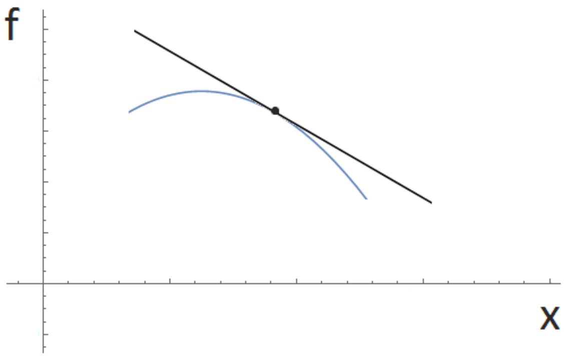


Figura 5.26: Gráfico côncavo para baixo.

Observação: Concavidade para cima [baixo] significa derivada crescente [decrescente], i.e., $\{f'(x)\}' > 0$ $[\{f'(x)\}' < 0]$ ou seja, $f''(x) > 0$ $[f''(x) < 0]$.

Portanto, o sinal da segunda derivada determina a concavidade.

Teorema: Se f' é derivável em (a, b) contendo c, então se $f''(c) > 0$ $[f''(c) < 0]$ o gráfico de f é côncavo para cima [para baixo] em c.

Observação: O gráfico de uma função f é dita côncavo para cima [baixo] em um intervalo I se a sua derivada for crescente [decrescente] em todos os pontos $x \in I$.

As Figuras 5.27 e 5.28 mostram exemplos de gráficos de funções com concavidade para cima e para baixo.

Observação: Notamos que em um mínimo local, o gráfico da função é côncavo para cima, enquanto em um máximo local, o gráfico é côncavo para baixo.

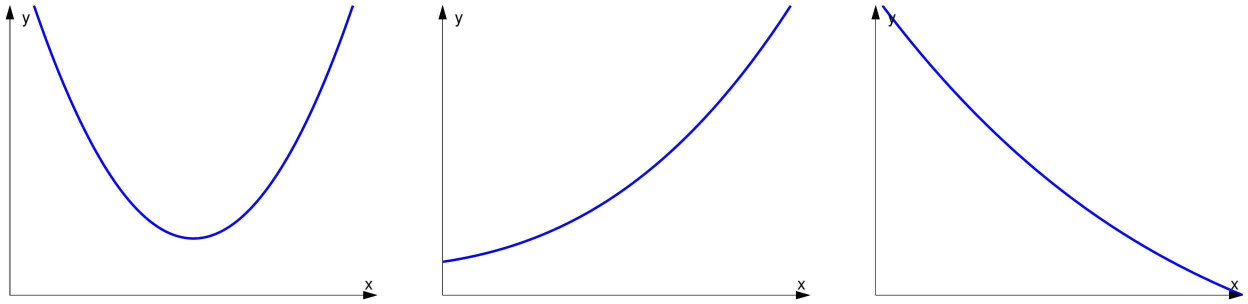


Figura 5.27: Exemplos de funções com concavidade para cima.

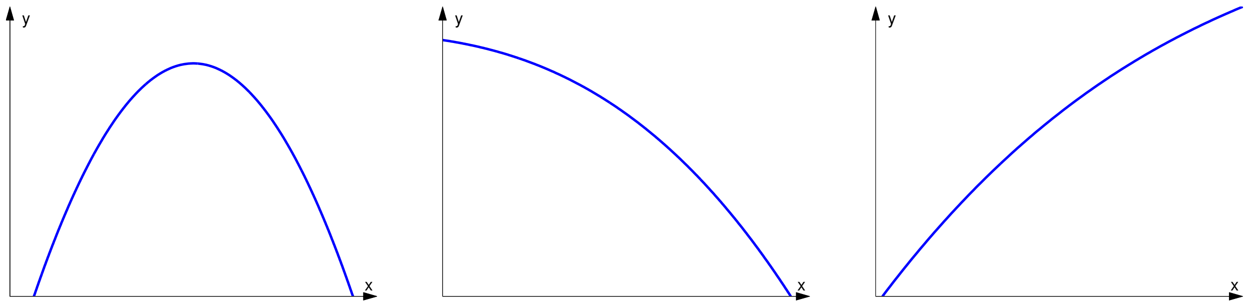


Figura 5.28: Exemplos de funções com concavidade para baixo.

5.7.7.2 Pontos de inflexão

Definição: Um ponto onde o gráfico não é côncavo para cima nem para baixo se chama ponto de inflexão. Em volta dele, existe um intervalo (a, b) tal que:
i)$f'' < 0, x \in (a, c)$ e $f'' > 0, x \in (c, b)$, ou
ii)$f'' > 0, x \in (a, c)$ e $f'' < 0, x \in (c, b)$.

Em outras palavras, um ponto de inflexão é um ponto onde a concavidade da função muda. A Figura 5.29 mostra exemplos de pontos de inflexão.

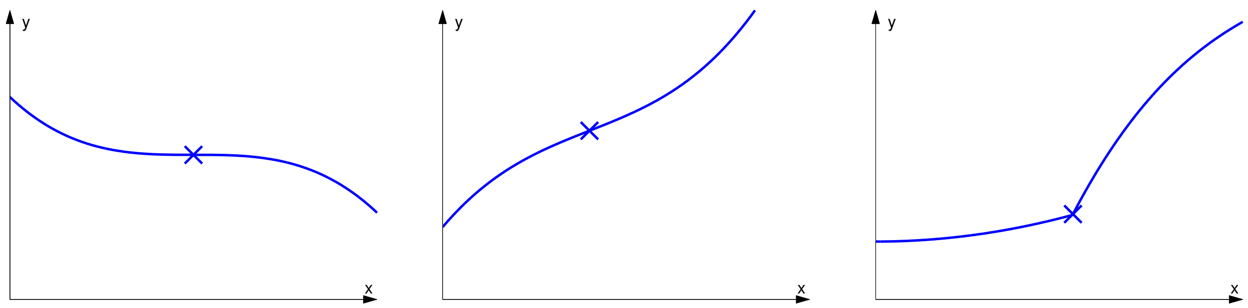


Figura 5.29: Pontos de inflexão.

Porém, é importante observar que um ponto somente é considerado ponto de inflexão se ele fizer parte do domínio da função. A Figura 5.30 mostra um ponto em torno do qual a função muda de concavidade, mas que não é um ponto de inflexão por não fazer parte do domínio da função.

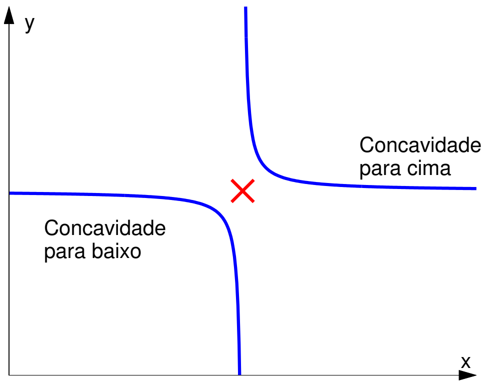


Figura 5.30: A concavidade da função $f(x) = 1/(x-1)$ muda em $x = 1$. Porém, este ponto não é um ponto de inflexão dessa função, porque não pertence ao seu domínio.

Pontos de inflexão: Onde a derivada para de crescer e começa a decrescer, ou vice e versa. $\Rightarrow$ Pontos de inflexão são extremos da derivadada f.

Portanto vale o seguinte teorema (equivalente ao Teorema de Fermat):

Teorema: Seja f derivável em (a, b) contendo c. Se f tem um ponto de inflexão em c, então, se $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.

Observação: Note que o reverso não vale! A derivada segunda pode ser zero em outros pontos que não são pontos de inflexão! Além disso, a derivada segunda pode não existir em pontos de inflexão.

Portanto, para localizarmos pontos de inflexão, precisamos primeiro localizar os pontos críticos da derivada, i.e., pontos onde a derivada da derivada, ou seja, a segunda derivada, for nula ou inexistente.

Para determinar se um ponto crítico da derivada é um ponto de inflexão, podemos então aplicar os critérios dos extremos à derivada da função. Em outras palavras, temos:

(I) O critério da segunda derivada: Um ponto crítico da derivada, c, é um ponto de inflexão se e somente se
(i) $f''(x) > 0 \; \forall \; x \in (a, c)$ e $f''(x) < 0 \; \forall \; x \in (c, b)$
ou
(ii) $f''(x) < 0 \; \forall \; x \in (a, c)$ e $f''(x) > 0 \; \forall \; x \in (c, b)$,
i.e., se a segunda derivada troca de sinal em torno do ponto c.

(II) O critério da terceira derivada: Um ponto crítico da derivada, c, com $f''(c) = 0$ é um ponto de inflexão de f se e somente se
(i) $f'''(c) \neq 0$
ou
(ii) $f^{(j)}(c) = 0 \; \forall \; 3 \leq j < n$ e $f^{(n)}(c) \neq 0$ com n ímpar.

Exemplo 12. *Encontre os pontos de inflexão da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ e determine as regiões onde o gráfico da função é côncavo para cima ou para baixo.*
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f''(x) = 0$ em $x = 2$

Critério da segunda derivada:

$$\left.\begin{array}{ll} f''(x) < 0 & x < 2 \\ f''(x) > 0 & x > 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ponto de inflexão!}$$

Alternativa: Critério da terceira derivada:

$$f'''(x) = 6 \;\Rightarrow\; f''(2) = 6 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{ponto de inflexão!}$$

Notamos que $f(x)$ é côncava para baixo em $(-\infty, 2)$, pois f'' é negativa para todos os valores de x nesse intervalo, e f é côncava para cima em $(2, \infty)$, pois $f''(x) > 0 \; \forall \; x \in (2, \infty)$.

Exemplo 13. *Encontre os pontos de inflexão da função* $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ *e determine as regiões onde o gráfico da função é côncavo para cima ou para baixo.*
$f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow f''(x) = 0$ não ocorre, $f''\nexists$ em $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{lll} f''(x) > 0 & \forall & x < 0 \\ f''(x) < 0 & \forall & x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \text{ é ponto de inflexão, pois } f(0) = 0 \text{ existe.}$$

Notamos que $f(x)$ é côncava para cima em $(-\infty, 0)$ e côncava para baixo em $(0, \infty)$.

5.7.8 Esboço do gráfico de uma função

Completamos as ferramentas que precisamos para reunir as informações necessárias para esboçar o gráfico de uma função.

Para esboçar um gráfico de uma função, procedemos reunindo as seguintes informações:

(a) O domínio $\mathbb{D}$ da função

(b) As simetrias (f é par ou ímpar?)

(c) Os interceptos da função, i.e., as suas interseções com os eixos, ou seja, o valor em $x = 0$ e os pontos onde $f(x) = 0$. Acrescentando os pontos de descontinuidade, podemos ver os intervalos em que a função não muda de sinal.

(d) As assíntotas da função. Candidatos a assíntotas verticais são os pontos de descontinuidade. Assíntotas horizontais ou oblíquas são determinadas pelo seu comportamento quando $x \to \pm\infty$.

(e) Os extremos. Os pontos críticos separam os intervalos de monotonia.

(f) Os pontos de inflexão. Os pontos críticos da derivada separam os intervalos de concavidade.

(g) Após a finalização do esboço do gráfico, podemos concluir sobre a imagem $\mathbb{V}$ da função.

Note que costuma ser útil completar o gráfico passo a passo conforme as informações acima estão sendo determinadas. A imagem da função é mais facilmente determinada quando o gráfio estiver completo.

Exemplo 14. *Esboce o gráfico da função* $f(x) = x^3 - 3x$
Domínio: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Simetria: $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x) \Rightarrow f$ é ímpar.
Interceptos: $f(0) = 0$, $f(x) = x(x^2 - 3) = 0$ em $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3}$.
Descontinuidades não existem.

Dentro de cada intervalo entre dois interceptos com o eixo horizontal, a função não mudará o sinal. Assim podemos concluir:

Intervalo:	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
f em um ponto:	$f(-2) = -2 < 0$	$f(-1) = 2 > 0$	$f(1) = -2 < 0$	$f(2) = 2 > 0$
Sinal no intervalo:	$-$	$+$	$-$	$+$

Assíntotas: Como não há descontinuidades, não tem assíntotas verticais.
Assintotas horizontais:
$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 3x = \lim_{x\to\infty} x(x^2 - 3) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x = \lim_{x\to-\infty} x(x^2 - 3) = -\infty$$
Portanto, f não tem assíntotas horizontais.
Assintotas oblíquas: Primeiramente, precisamos verificar se existe o limite da derivada, $f'(x) = 3x^2 - 3$, em mais ou menos infinito. Obtemos
$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 3x^2 - 3 = \infty$. Portanto, f não tem assíntotas oblíquas.
Extremos e monotonia: $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$.
Pontos críticos:
$f'(x)$ existe para todo x,
$f'(x) = 0 = 3(x^2 - 1)$ em $x = \pm 1$.
Temos $f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo;
$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo.
Monotonia:
Como $f'(x) > 0$ para $|x| > 1$, f é crescente em $(-\infty, -1)$ e em $(1, \infty)$.
Como $f'(x) < 0$ para $|x| < 1$, f é decrescente em $(-1, 1)$.
Valores da função nos extremos:
$f(1) = -2$, $f(-1) = 2$

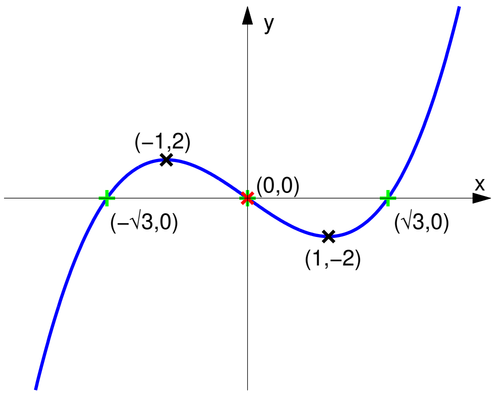


Figura 5.31: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x$. Extremos em $(-1, 2)$ e $(1, -2)$ ($\times$ pretos), ponto de inflexão em $(0, 0)$ ($\times$ vermelho) e interceptos em $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, 0)$ ($+$ verdes).

Pontos de inflexão e concavidade:
$f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$.
Pontos críticos da derivada:
$f''(x) = 0$ em $x = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$.
Portanto, f tem um ponto de inflexão em $x = 0$.
Concavidade:
$f''(x) < 0$ para $x < 0$, $f''(x) > 0$ para $x > 0$,
$\Rightarrow f$ é côncava para baixo para $x < 0$,
f é côncava para cima em $x > 0$.
Gráfico e imagem:
Valores da função: $f(-\sqrt{3}) = 0$, $f(\sqrt{3}) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(-1) = 2$
Gráfico: Figura 5.31. Imagem: $\mathbb{V} = \mathbb{R}$

Exemplo 15. *Esboce o gráfico de* $f(x) = x^2e^{-x^2}$

Derivadas:
$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2e^{-x^2}(-2x)$
$\quad = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$,
$f''(x) = 2(1-x^2)e^{-x^2}$
$\quad +2x(-2x)e^{-x^2}$
$\quad +2x(1-x^2)e^{-x^2}(-2x)$
$\quad = 2(1-5x^2+2x^4)e^{-x^2}$

1) Domínio: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$

2) Interceptos: $f(0)=0$, $\quad f(x)=0$ só em $x=0$;
Sinal da função:
$f(x) > 0\ \forall\, x \in (-\infty, 0)$, pois $f(-1) > 0$,
$f(x) > 0\ \forall\, x \in (0, \infty)$, pois $f(1) > 0$.

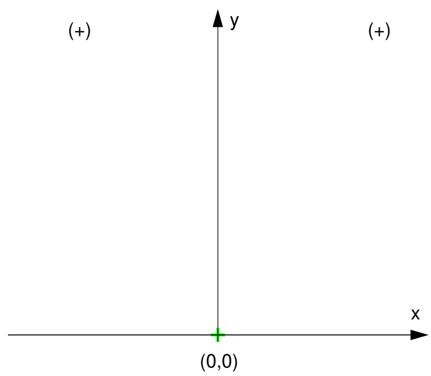


Figura 5.32: Gráfico da função $f(x)=x^2e^{-x^2}$: Intercepto $(+)$ e sinal.

3) Simetria $f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{(-x)^2} = x^2e^{-x^2} = f(x)$
$\Rightarrow$ função par;

4)Assíntotas
a) $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ não tem assíntotas verticais.
b) Assíntotas horizontais:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$
$\Rightarrow$ a reta $y=0$ é assíntota horizontal para $x \to \infty$;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (função par!)
$\Rightarrow$ a reta $y = 0$ é assíntota horizontal para $x \to -\infty$.

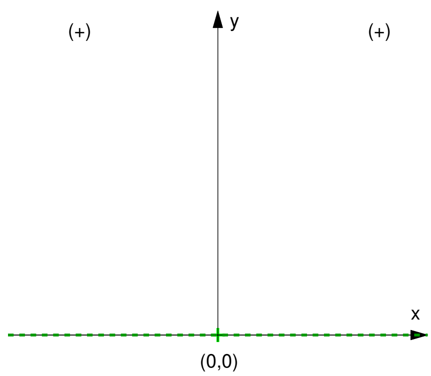


Figura 5.33: Gráfico da função $f(x) = x^2e^{-x^2}$: assíntota horizontal $y=0$ para $x \to \pm\infty$.

5) Intervalos de crescimento e decrescimento e extremos locais:
$f'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$.
Pontos críticos: $f'(x)\exists\ \forall\, x \in \mathbb{R}$;
$e^{-x^2} > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ f'(x) = 0$ em $x=0$ e $x=\pm 1$.
Como $f'(-2) = -4(1-4)e^{-4} > 0$,
$f'(-0,5) = -1(1-0,25)e^{-0,25} < 0$,
$f'(0,5) = 1(1-0,25)e^{-0,25} > 0$,
$f'(2) = 4(1-4)e^{-4} < 0$,
temos: f é crescente em $(-\infty,-1)$ e em $(0,1)$,
f é decrescente em $(-1,0)$ e em $(1,\infty)$
Assim, em $x=-1$, f' troca de positivo para negativo
$\Rightarrow$ f tem um máximo local em $x=-1$;
em $x=0$, f' troca de negativo para positivo
$\Rightarrow$ f tem um mínimo local em $x=0$;
em $x=1$, f' troca de positivo para negativo
$\Rightarrow$ f tem um máximo local em $x=1$.

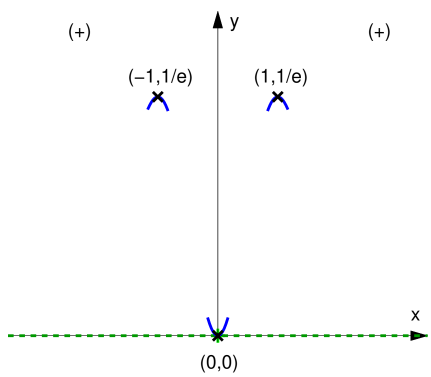


Figura 5.34: Gráfico da função $f(x) = x^2e^{-x^2}$: extremos ($\times$ pretos) com indicação do tipo.

6) Concavidade e pontos de inflexão:
$f''(x) = 2(1-5x^2+2x^4)e^{-x^2}$.
Pontos críticos da derivada: $f''(x)\exists\ \forall\, x \in \mathbb{R}$;

$f''(x) = 0$ em $x^2 = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$
$\Rightarrow\ x_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}$
(numerados da esquerda para a direita).
A análise do sinal de f'' mostra que
$f'' > 0\ \forall\ x < x_1$, $\quad f'' < 0\ \forall\ x_1 < x < x_2$,
$f'' > 0\ \forall\ x_2 < x < x_3$, $\quad f'' < 0\ \forall\ x_3 < x < x_4$,
$f'' > 0\ \forall\ x > x_4$.
Portanto, f é côncava para cima em $(-\infty, x_1)$, em (x_2, x_3) e em (x_4, ∞) e côncava para baixo em (x_1, x_2) e em (x_3, x_4).
7) Esboço do gráfico e imagem:
Gráfico: Figuras 5.32 a 5.36.
Imagem: $V = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq e^{-1}\}$.

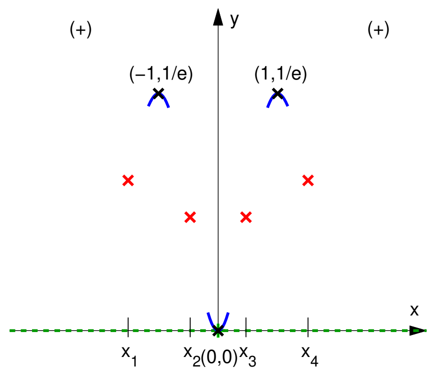


Figura 5.35: Gráfico da função $f(x) = x^2 e^{-x^2}$: pontos de inflexão ($\times$ vermelhos).

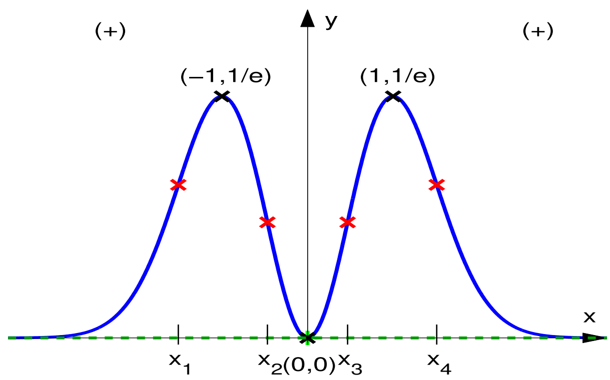


Figura 5.36: Gráfico da função $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ com os seus extremos ($\times$ pretos) e pontos de inflexão ($\times$ vermelhos).

Exemplo 16. *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x - 10}{x - 6}$.

- Domínio: $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{6\}$.
- Simetria: $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2 - 8(-x) - 10}{(-x) - 6} = -\dfrac{2x^2 + 8x - 10}{x + 6} \neq \pm f(x) \ \Rightarrow\ f$ não é par nem ímpar.
- Interceptos: $f(0) = \frac{5}{3}$, $f(x) = 0$ onde o numerador for zero, i.e., onde $2(x^2 - 4x - 5) = 0$, ou seja, em $x = 5$ e $x = -1$.
  Portanto, os intervalos em que o sinal não muda são: $(-\infty, -1)$, $(-1, 5)$, $(5, 6)$ e $(6, \infty)$.

  Sinal:

Intervalo:	$(-\infty, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, 6)$	$(6, \infty)$
Ponto:	-2	0	5.5	7
Valor de f:	$-5/4$	$5/3$	-13	32
Sinal:	$-$	$+$	$-$	$+$

- Assíntotas:

1. Verticais: Pode ter uma assíntota vertical em $x = 6$. Verificando:
$$\lim_{x\to 6^+} \frac{2x^2-8x-10}{x-6} = \frac{\text{“}2\cdot 36 - 8\cdot 6 - 10\text{”}}{0} = \text{“}\frac{14^{>0}}{0^+}\text{”} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 6^-} \frac{2x^2-8x-10}{x-6} = \text{“}\frac{14^{>0}}{0^-}\text{”} = -\infty$$
Portanto, a reta $x = 6$ é assíntota vertical de f.

2. Horizontais:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-8x-10}{x-6} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-8/x-10/x^2}{1/x-6/x^2} = \text{“}\frac{2^{>0}}{0^+}\text{”} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-8x-10}{x-6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-8/x-10/x^2}{1/x-6/x^2} = \text{“}\frac{2^{>0}}{0^-}\text{”} = -\infty$$
Portanto, f não possui assíntotas horizontais.

3. Oblíquas:
Derivada: $f'(x) = \dfrac{(4x-8)(x-6)-(2x^2-8x-10)\cdot 1}{(x-6)^2}$
$$= \frac{(4x^2-32x+48)-2x^2+8x+10}{(x-6)^2} = \frac{2x^2-24x+58}{x^2-12x+36}$$
Assim, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-24x+58}{x^2-12x+36} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-24/x+58/x^2}{1-12/x+36/x^2} = 2 = a$
Daí, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-8x-10}{x-6} - 2x \cdot \frac{x-6}{x-6} =$
$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-8x-10-2x^2+12x}{x-6} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x-10}{x-6} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4-10/x}{1-6/x} = 4 = b.$
Portanto, a reta $y = 2x+4$ é assíntota de f quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.

Observação: Por divisão polinomial, podemos perceber que a função pode ser expressa como $f(x) = 2x + 4 + \dfrac{14}{x-6}$. Escrito dessa forma, fica evidente que a função, para grandes valores de $|x|$, se aproxima à reta $y = 2x + 4$.

- Extremos e intervalos de monotonia:
Pontos críticos:
$f'(x) = \dfrac{2x^2-24x+58}{(x-6)^2} \nexists$ em $x = 6 \notin \mathbb{D}$.
$f'(x) = 0$ em $x = \dfrac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4\cdot 2\cdot 58}}{2\cdot 2} = 6 \pm \sqrt{36-29} = 6 \pm \sqrt{7}.$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x-24)(x-6)^2 - (2x^2-24x+58)2(x-6)}{(x-6)^4} \\ &= \frac{(4x-24)(x-6) - (2x^2-24x+58)2}{(x-6)^3} \\ &= \frac{4x^2-48x+144-4x^2+48x-116}{(x-6)^3} = \frac{28}{(x-6)^3} \end{aligned}$$

Assim, $f''(6+\sqrt{7}) = \frac{4}{\sqrt{7}} > 0 \;\Rightarrow\;$ mínimo relativo.
Assim, $f''(6-\sqrt{7}) = -\frac{4}{\sqrt{7}} < 0 \;\Rightarrow\;$ máximo relativo.

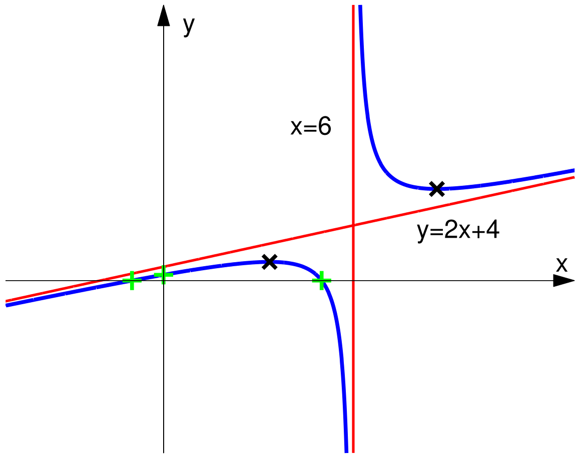


Figura 5.37: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x - 10}{x - 6}$ com as suas assíntotas, os seus extremos ($\times$ pretos) e interceptos ($+$ verdes).

- Pontos de inflexão e concavidade:

  Notamos que $f''(x) = \dfrac{28}{(x-6)^3} \nexists$ em $x = 6 \notin \mathbb{D}$, e que $f''(x) \neq 0 \; \forall \; x \in \mathbb{D}$. Desta forma, a função não tem pontos de inflexão. Pelos valores da segunda derivada nos extremos calculados acima, temos concavidade para baixo em $(-\infty, 6)$ e para cima em $(6, \infty)$.

- Gráfico e imagem: Valores:

  $$f(6 \pm \sqrt{7}) = \frac{2(36 \pm 12\sqrt{7} + 7) - 8(6 \pm \sqrt{7}) - 10}{\pm\sqrt{7}} = \frac{86 \pm 24\sqrt{7} - 48 \mp 8\sqrt{7} - 10}{\pm\sqrt{7}}$$
  $$= \frac{28 \pm 16\sqrt{7}}{\pm\sqrt{7}} = 16 \pm 4\sqrt{7}$$

  Gráfico: Figura 5.37.

  $\mathbb{V} = \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, x < 16 - 4\sqrt{7} \text{ ou } x > 16 + 4\sqrt{7}\} = \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x - 16| > 4\sqrt{7}\}$

5.8 Extremos absolutos e Problemas de Otimização

Definição: $f(x)$ tem um ponto de máximo [mínimo] absoluto (ou global) em um intervalo $I \subset \mathbb{D}$ no ponto $c \in I$ se $f(c) \geq f(x)$ $[f(c) \leq f(x)]$ para todo x em I, sendo $f(c)$ o valor máximo [mínimo] absoluto correspondente em c. Fala-se de extremo absoluto nos dois casos.

5.8.1 Localização de extremos absolutos

Como localizamos extremos absolutos?
Sabemos que todo extremo absoluto também é um extremo relativo, i.e., ele pode ser localizado somente em um ponto crítico de uma função. Assim, se determinarmos todos os pontos

críticos no intervalo e compararmos os valores da função nesses pontos, encontraremos os extremos absolutos.

Observação: As pontas do intervalo, dentro do qual procuramos o(s) extremo(s) absoluto(s) sempre devem ser considerados, pois os extremos absolutos podem estar localizados neles. Formalmente, são pontos críticos, pois não podemos calcular a derivada neles, uma vez que não podemos considerar pontos fora do intervalo.

5.8.1.1 Exemplos

Exemplo 1. *Encontre os extremos absolutos de*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<1 \\ x^2-6x+7 & x \geq 1 \end{cases}$$

em [-5, 4] se existirem.
Calculamos a derivada da função, obtendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x<1 \\ 2x-6 & x > 1 \end{cases}$$

A derivada no ponto $x = 1$ tem que ser investigada em separado:
Verificando a continuidade:
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x+1 = 2 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2-6x+7 = 2 = f(1) = 1^2 - 6\cdot 1 + 7 = 2.$
Portanto, f é contínua em $x = 1$.
Derivadas laterais:
Pela esquerda: $f'_-(1) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \dfrac{1+\Delta x+1-2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} 1 = 1,$
pela direita: $f'_+(1) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{(1+\Delta x)^2-6(1+\Delta x)+7-2}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{1+2\Delta x+\Delta x^2-6-6\Delta x+5}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{-4\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} -4+\Delta x = -4.$
Notamos que $f'_+(1) \neq f'_-(1)$. Portanto $f'(1)\nexists$.

Assim, os pontos críticos da função são:
$x = -5$ e $x = 4$, pois $f'(x)$ não existe (fim do intervalo);
$x = 3$ pois $f'(x) = 2x - 6 = 0$ em $x = 3$;
e $x = 1$, pois $f'(1)\nexists$.
Comparação dos valores de f nos pontos críticos fornece:
$f(-5) = -5 + 1 = -4$, $f(1) = 1 - 6 + 7 = 2$, $f(3) = 9 - 18 + 7 = -2$, $f(4) = 16 - 24 + 7 = -1$
Assim, $f(-5) < f(3) < f(4) < f(1)$
Portanto, o mínimo absoluto de f fica em $x = -5$, com $f(-5) = -4$, e o máximo absoluto em $x = 1$, com $f(1) = 2$ (veja Figura 5.38).

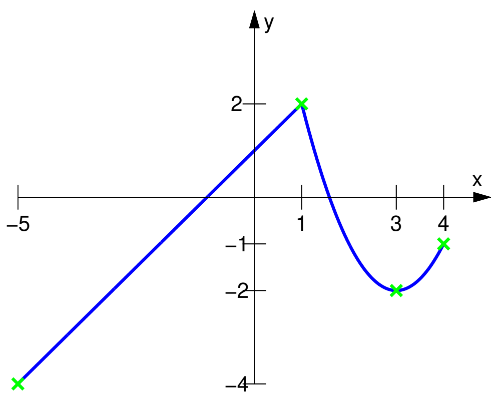


Figura 5.38: A função $f(x)$ e seus pontos críticos ($\times$).

Exemplo 2. *Encontre os extremos absolutos de $f(x) = 2x$ no intervalo $[1, 4)$, se houver.*
A derivada da função é $f'(x) = 2$. Portanto, os únicos pontos críticos de f são as pontas do intervalo. Porém, o ponto $x = 4$ não faz parte dele. Então, para poder avaliar a função nesse lugar, temos que calcular o limite quando x se aproxima a 4 pela esquerda.
Temos $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} 2x = 8 > f(1) = 2$.
Portanto, o valor mínimo absoluto é em $x = 1$, sendo $f(1) = 2$, pois $f(x) \geq 2 \;\forall\; x \in [1, 4)$.
Entretanto, a função não tem um valor máximo absoluto em $[1, 4)$ pois o ponto $x = 4$ não faz parte do intervalo, e em qualquer ponto $x_0 < 4$, o valor da função $f(x_0)$ é menor que 8 e não é o maior valor da função no intervalo, porque a direita desse ponto ainda há infinitos pontos $x_0 < x < 4$ com $f(x_0) < f(x) < 8$.

Observação: Quando não é possível comparar os valores da função nos pontos críticos, temos que usar os limites nestes pontos.

Exemplo 3. *Encontre os extremos absolutos de $f = \dfrac{1}{x-3}$ em $[1, 5]$, se tiver.*
Pontos críticos: $x = 1$ e $x = 5$ (pontas do intervalo) e $x = 3$ (descontinuidade, portanto $f'(3)\nexists$).
Temos $f(1) = \dfrac{1}{1-3} = -\dfrac{1}{2}$ e $f(5) = \dfrac{1}{5-3} = \dfrac{1}{2}$.
Como f é descontínua em $x = 3$, temos que calcular os limites laterais:
$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \dfrac{1^{>0}}{\underbrace{x-3}_{\searrow 0^+}} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \dfrac{1^{>0}}{\underbrace{x-3}_{\searrow 0^-}} = -\infty$.
Como a função assume valores acima de $f(5) = 1/2$ perto de $x = 3$, ela não possui um máximo absoluto em $[1, 5]$. Da mesma forma, como a função assume valores abaixo de $f(1) = -1/2$ perto de $x = 3$, ela não possui um mínimo absoluto em $[1, 5]$.
Portanto não existe um ponto $c \in [1, 5]$ tal que $f(x) \leq f(c) \;\forall\; x \in [1, 5]$ e também não existe $c \in [1, 5]$ tal que $f(x) \geq f(c) \;\forall\; x \in [1, 5] \Rightarrow$ A função não tem nenhum extremo absoluto nesse intervalo.

Observação: Quando procurarmos extremos absolutos, sempre temos que calcular ambos os limites laterais em cada ponto de descontinuidade da função (e nas pontas abertas do intervalo do lado de dentro), pois o valor da função nesses pontos pode não ser relacionado com os valores na sua vinzinhança.

Teorema de mínimo e máximo de Weierstraß: Se f for uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f terá um mínimo absoluto e um máximo absoluto em $[a, b]$.

Observação: A existência de extremos absolutos é somente garantida para funçēs contínuas em intervalos fechados. Em qualquer outra situação, pode ocorrer (ou não) que a função não possua um mínimo absoluto e/ou um máximo absoluto.

Exemplo 4. *Encontre os extremos absolutos de $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ no intervalo $[-2, \frac{1}{2}]$, se houver.*
Pelo teorema, notamos que ambos os extremos absolutos têm que existir, pois o intervalo é fechado e f, sendo polinomial, é contínua nele.
Temos $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ que existe em todos os x do intervalo aberto $(-2, \frac{1}{2})$.

Portanto, os pontos críticos do intervalo são $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$ (pontas do intervalo), bem como $x = \frac{1}{3}$ e $x = -1$ (zeros da derivada).
Os valores da função nesses pontos são:

$f(-2) = -8 + 4 + 2 + 1 = -1$

$f(-1) = -1 + 1 + 1 + 1 = 2$

$f(\frac{1}{3}) = \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{1 + 3 - 9 + 27}{27} = \dfrac{22}{27}$

$f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1 + 2 - 4 + 8}{8} = \dfrac{7}{8}$

Assim, $f(-2) < f(\frac{1}{3}) < f(\frac{1}{2}) < f(-1)$. Portanto, o máximo absoluto é em $x = -1$ com $f(-1) = 2$ e o mínimo absoluto é em $x = -2$ com $f(-2) = -1$.

Exemplo 5. *Encontre os extremos absolutos de*

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 12 - x^2 & x < -3 \\ x^2 - 6 & x > -3 \end{cases} \qquad (b) \quad f(x) = \begin{cases} 12 - x^2 & x < -3 \\ x^2 - 16 & x > -3 \end{cases}$$

em [-4, 4] se existirem.
Calculamos a derivada da função, obtendo

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x < -3 \\ 2x & x > -3 \end{cases}$$

Como a função não está definida em $x = -3$, a derivada também não existe nesse ponto. Portanto, temos os pontos críticos: $x = -4$ e $x = 4$ (pontas do intervalo), $x = -3$ ($f' \nexists$) e $x = 0$ ($f' = 0$).
Avaliamos a função nos pontos críticos:

$f(-4) = 12 - (-4)^2 = 12 - 16 = -4$

(a) $f(0) = 0^2 - 6 = -6$ (b) $f(0) = 0^2 - 16 = -16$

(a) $f(4) = 4^2 - 6 = 16 - 6 = 10$ (b) $f(4) = 4^2 - 16 = 16 - 16 = 0$

Como f não existe em $x = -3$, calculamos os limites laterais:

$L^-_{-3} = \lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} 12 - x^2 = 12 - 9 = 3$

(a) $L^+_{-3} = \lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^-} x^2 - 6 = 9 - 6 = 3$ (b) $L^+_{-3} = \lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^-} x^2 - 16 = -7$

Assim, (a) $f(0) < f(-4) < L^-_{-3} = L^+_{-3} < f(4)$ (b) $f(0) < L^+_{-3} < f(-4) < f(4) < L^-_{-3}$

Portanto,
(a) a função assume o seu maior valor em $x = 4$, sendo $f(4) = 10$ e o seu menor valor em $x = 0$, sendo $f(0) = -6$.
Concluímos que o máximo absoluto está em $x = 4$ e o mínimo absoluto em $x = 0$ (veja Figura 5.39).
(b) a função assume o seu menor valor em $x = 0$, sendo $f(0) = -16$ e os valores maiores se encontram à esquerda de $x = -3$.
Concluímos que o mínimo absoluto está em $x = 0$ e a função não possui um máximo absoluto neste intervalo (veja Figura 5.39).

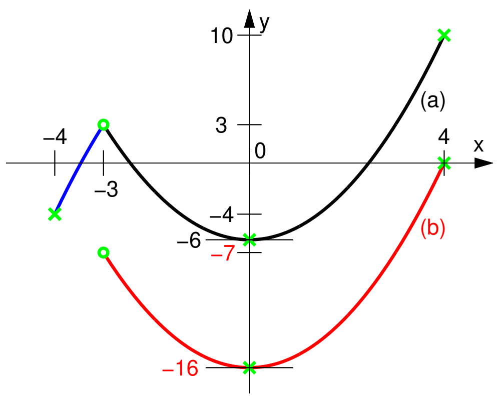


Figura 5.39: A função f e seus pontos críticos (× e ∘). (a) — e —. (b) — e —.

5.8.1.2 Problemas adicionais:

Exemplo 6. *Encontre os extremos absolutos de* $f(x) = (x^2 - 27)(x - 6)^{-1}$ *em* $[0, 5)$
Observação: O teorema não garante nada, pois o intervalo é semiaberto.
$f'(x) = 2x(x - 6)^{-1} - (x^2 - 27)(x - 6)^{-2} = \dfrac{2x^2 - 12x - x^2 + 27}{(x - 6)^2} = \dfrac{x^2 - 12x + 27}{(x - 6)^2}$
$f'(x) = 0$ onde $x^2 - 12x + 27 = 0$
$\Rightarrow x_{1,2} = +6 \pm \sqrt{36 - 27} = +6 \pm 3 = \{^{+3}_{+9} \Rightarrow\ f'(x) = (x - 3)(x - 9)(x - 6)^{-2}$.
Portanto, $f'(x) = 0$ em $x = 3$ e $x = 9$, mas $\quad 9 \notin [0, 5)$
$\Rightarrow$ pontos críticos: $x = 3$, $x = 0$ e $x = 5$
$f(0) = \dfrac{-27}{-6} = \dfrac{9}{2}$
$f(3) = \dfrac{-18}{-3} = +6$
$L_5^- = \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{x^2 - 27}{x - 6} = \dfrac{-2}{-1} = 2.$
Como $f(3) > f(0)$ e que ambos valores são maiores do que o limite L_5^- em $x = 5$, concluímos que o máximo absoluto fica em $x = 3$, com o valor de $f(3) = 6$ e que a função não possui um mínimo absoluto neste intervalo.
Note que $f''(x) = (x - 9)(x - 6)^{-2} + (x - 3)(x - 6)^{-2} - 2(x - 3)(x - 9)(x - 6)^{-3}$
$f''(3) = -\frac{6}{(-3)^2} = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow$ máximo relativo.
Como é o único extremo no interior do intervalo, ele tem que ser o máximo absoluto!

Observação: Se no interior do intervalo existe um único extremo relativo, ele também é o correspondente extremo absoluto se a função é contínua!

Exemplo 7. *Encontre os extremos absolutos da função* $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$ *em* $[1, 3)$
$f'(x) = \dfrac{(2x - 5)x - (x^2 - 5x + 4)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 5x - x^2 + 5x - 4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2} = 0$ em $x = \pm 2$;
$f'(x)$ não existe somente em $x = 0$.
Quais são então os pontos críticos?
$x = 1$, $x = 3$ e $x = 2$, pois os pontos $x = 0$ e $x = -2$ não estão em $[1, 3)$

Pelo critério da segunda derivada:
$f''(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2 - 4)}{x^4} = \dfrac{8x}{x^4} = \dfrac{8}{x^3} \Rightarrow f''(2) = 1 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo
$\Rightarrow f$ tem mínimo relativo em $x = 2$, mas é absoluto?

Como a função é contínua no intervalo e $x = 2$ é o único ponto crítico no interior dele, podemos concluir que é o local do mínimo absoluto, porque ao lado de um mínimo local de uma função contínua precisa haver primeiro um máximo antes que possa haver outro mínimo.

Confirmando:
$f(1) = \dfrac{1 - 5 + 4}{1} = 0; \qquad f(2) = \dfrac{4 - 15 + 4}{2} = -1;$
$L_3^- = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x} = \dfrac{9 - 15 + 4}{3} = -\dfrac{2}{3}$

Como $f(2) < L_3^- < f(1)$, o mínimo relativo em $x = 2$ é o mínimo absoluto. Notamos ainda que o máximo absoluto fica em $x = 1$.

5.8.2 Problemas de Otimização

Problemas de otimização são aqueles onde se tenta encontrar um extremo absoluto específico (mínimo ou máximo) de uma função. Na prática porém, eles vêm em forma de um problema do dia-a-dia, como por exemplo, encontrar o menor custo de um produto, minimizar o tempo de uma viagem ou maximizar a capacidade de um recipiente. Precisam da parametrização do problema.

5.8.2.1 Exemplos

Exemplo 8. *Qual é o retângulo com maior área, com perímetro (soma dos comprimentos dos lados) fixo?*
Área do retângulo: $A = x \cdot y$, onde x e y são as laterais diferentes.

perímetro fixo: $2x + 2y = c \Rightarrow y = \dfrac{c}{2} - x \Rightarrow A = x \cdot (\dfrac{c}{2} - x) = \dfrac{cx}{2} - x^2$

Minimizar: Encontrar o mínimo absoluto de $A(x)$ no intervalo: $[0, \frac{c}{2}]$ $A'(x) = \dfrac{c}{2} - 2x$ sempre existe, $A'(x) = 0$ em $\dfrac{c}{2} - 2x = 0$, ou seja, $x = \dfrac{c}{4}$.

Comparando os valores da função nos pontos críticos, temos $A(0) = A(\frac{c}{2}) = 0 < A(\dfrac{c}{4}) = \dfrac{c^2}{16}$, portanto o valor máximo encontra-se em $x = \dfrac{c}{4}$. Nesse ponto, temos $y = \dfrac{c}{2} - x = \dfrac{c}{2} - \dfrac{c}{4} = \dfrac{c}{4}$, máximo absoluto i.é., o retângulo com a maior área é o quadrado com laterais $x = y = \dfrac{c}{4}$

Exemplo 9. *Um fazendeiro tem material para 12m de cerca para fazer um cercado para as suas cabras atrás das sua casa, usando a parede da casa como uma limitação. Ajude-o a cercar a maior área possível (ver Figura 5.40). Qual será a área do cercado?*
Área do cercado: $A = x \cdot y$ onde $y = L - 2x = 12 - 2x$ com L o comprimento fixo de 12m.
Intervalo: Comprimento mínimo da lateral: $x = 0$, comprimento máximo $x = 6$, tal que $y = 0$. Assim, $I = [0, 6]$.

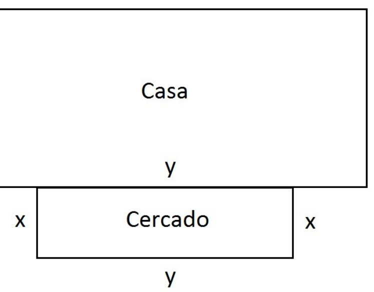


Figura 5.40: Esboço do problema do exemplo 9.

Dessa forma, $A(x) = x(12 - 2x) = 12x - 2x^2$,
$A'(x) = 12 - 4x \ \Rightarrow\ A'(x) = 0$ em $12 = 4x$, ou seja, $x = 3$.
Como a função é contínua no intervalo $[0, 6]$ e temos um único ponto crítico no interior dele, i.e., em $(0, 6)$, podemos aplicar o critério da segunda derivada para verificar se ele é

um ponto de máximo, calculando $A''(x) = -4$. Assim, temos $A''(3) = -4 < 0$. Portanto, a função tem um máximo relativo nesse ponto que, por ser único no intervalo, tem que ser o máximo absoluto.
Concluímos que cercado deve ter as dimensões $x = 3$ m e $y = 12 - 2 \cdot 3 = 6$ m, de modo que a área seja $A = 3 \cdot 6 = 18$ m^2.

Exemplo 10. *Considere as funções* $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 6x + 25$ *e* $g(x) = 4x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 6x + 10$.
Encontre a menor distância vertical entre os seus gráficos.

A distância vertical $v(x)$ entre os gráficos das funções f e g é dada pela sua diferença. Assim, temos

$$v(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 2x^2 + 15$$

cuja derivada é

$$v'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

O intervalo de busca é $\mathbb{R}$. A derivada existe em todo intervalo. Ela é nula em

$$v'(x) = 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{e} \quad x = \pm 1$$

Comparando os valores da diferença nos três pontos críticos, obtemos

$$v(0) = 15, \qquad v(-1) = 14, \qquad v(1) = 14$$

Nas pontas do intervalo, encontramos

$$\lim_{x \to \pm\infty} v(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^2(x^2 - 2) + 15 = \infty$$

A partir disso concluímos que a distância vertical é mínima em $x = 1$ e $x = -1$, sendo nos dois pontos $v(1) = v(-1) = 14$

Exemplo 11. *Um produtor de caixas tem que fornecer caixas fechadas de base quadrada de volume de* 2000 cm^3*, com materiais diferentes para base e tampa e para as paredes laterais. O material da tampa e da base custa 3 centavos por* cm^2*, enquanto o das paredes custa 1.5 centavos por* cm^2 *(ver Figura 5.41). Que dimensões da caixa minimizam o custo?*

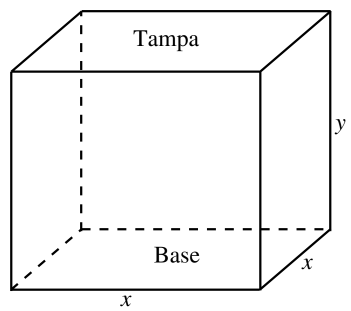


Figura 5.41: Caixa com base quadrada do exemplo 11.

Usamos a letra x para designar a extensão lateral da base e a letra y para denotar a altura da caisa. Observando que a área da base e da tampa será x^2 e a área de uma lateral será $x \cdot y$, obtemos que a função custo pode ser reprentada por:
$C = 3 \cdot (2 \cdot x^2) + 1.50 \cdot 4xy = 6x^2 + 6xy$.
Como o volume V da caixa é fixo, podemos observar que
$V = x \cdot x \cdot y = 2000 \Rightarrow y = \dfrac{2000}{x^2}$
Assim, $C(x) = 6x^2 + 6x \cdot \dfrac{2000}{x^2} = 6x^2 + \dfrac{12000}{x}$
Como intervalo, temos que considerar $(0, \infty)$, sem poder incluir as pontas do intervalo.

Temos $C'(x) = 12x - \dfrac{12000}{x^2}$
Pontos críticos:
$x = 0$ (ponta do intervalo) e $C'(x) = 0$ implica $12x = \dfrac{12000}{x^2} \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10$.
Além disso, temos que analisar o comportamento da função quando $x \to \infty$.

O valor da função no ponto $x = 10$ é $C(10) = 600 + \dfrac{12000}{10} = 600 + 1200 = 1800$,
e os limites nas pontas do intervalo são:
$\lim_{x\to 0^+} C(x) = 0 + \infty = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} C(x) = \infty + 0 = \infty$
Portanto, o custo é mínimo para $x = 10$, já que os limites nas pontas do intervalo são maiores do que o valor no ponto crítico.
Assim, a caixa com base de 10 cm e altura de 20 cm, tem o custo mínimo de R$ 18,00 por caixa.

Exemplo 12. *Um fabricante de caixas comprou quadrados de papelão de 12 cm, dos quais ele quer fazer caixas abertas com o maior volume possível, cortando nos cantos pequenos quadrados para dobrar a borda para cima e colar (ver Figura 5.42).*

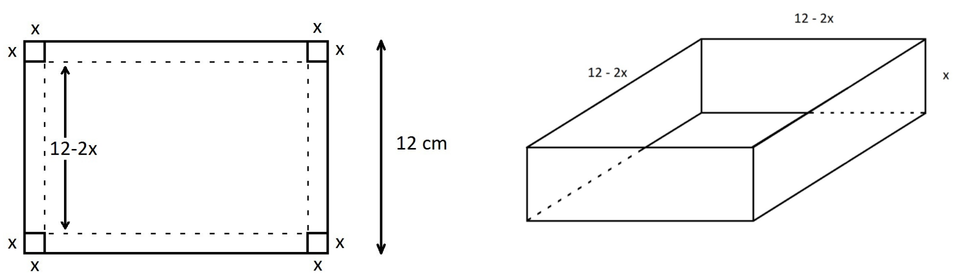


Figura 5.42: Esboço do problema do exemplo 12. Denotamos por x o tamanho do corte.

Volume da caixa: $U = (12 - 2x) \cdot (12 - 2x) \cdot x$

O valor máximo tem que estar no intervalo $[0, 6]$ (a função é contínua $\Rightarrow$ existe), pois o corte não pode ser maior do que a metade do tamanho do quadrado.

$U'(x) = 2(12 - 2x)(-2) \cdot x + 1(12 - 2x)^2 = (12 - 2x)(-4x + 12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$

$U'(x)\nexists$ em $x = 0$ e $x = 6$ (pontas do intervalo)

$U'(x) = 0$ em $x = 6$ e $x = 2$; $U(0) = U(6) = 0 < U(2) = (12 - 4)^2 \cdot 2 = 128$

Portanto, o volume máximo é 128 cm^3 e é alcançado para $x = 2$ cm.

Exemplo 13. *O lucro pela venda de um produto é dada por $\ell = (p - c) \cdot d - F$, onde d denota a demanda, i.e., o número de peças vendidas, p é o preço de venda por peça, c é o custo de produção por peça e F é o custo fixo da produção. Supondo que o custo de produção por peça de um certo produto seja 20 mil Reais, o custo fixo seja 50 mil Reais e a demanda*

d deste produto dependa do seu preço de venda de acordo com $d = \frac{180000}{(p+10)^2}$, determine o preço que maximize o lucro.
Fazemos a conta em milhares de Reais (MR$). Substituindo o custo por peça $c = 20$, o custo fixo $F = 50$ e a expressão para a demanda na fórmula para o lucro, obtemos a função a ser minimizada:

$$\ell(p) = (p-20)\frac{180000}{(p+10)^2} - 50$$

Como o preço pode assumir qualquer valor acima do custo, temos que considerar o intervalo $p \in [20, \infty)$.

A derivada da função dada é

$$\ell'(p) = 1 \cdot \frac{180000}{(p+10)^2} + (p-20) \cdot (-2)\frac{180000}{(p+10)^3} - 0 = \frac{180000[p+10-2(p-20)]}{(p+10)^3} = \frac{180000(-p+50)}{(p+10)^3}$$

Assim, podemos localizar os seguintes pontos críticos:
Pontas do intervalo: $p = 20$ e $p \to \infty$.
Derivada inexistente: $p = -10$ (fora do intervalo sob consideração).
Derivada nula: $\dfrac{180000(-p+50)}{(p+10)^3} = 0$ em $p = 50$.
Desta forma, temos $\ell(20) = -50$ e $\ell(50) = 30\frac{180000}{60^2} = 1500$.
No infinito:

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty}(p-20)\frac{180000}{(p+10)^2} - 50 &= -50 + 180000 \lim_{p\to\infty} \frac{p-20}{p^2+20p+100} \\ &= -50 + 180000 \lim_{p\to\infty} \frac{1 - \overbrace{20/p}^{\to 0}}{\underbrace{p}_{\to\infty} + 20 + \underbrace{100/p}_{\to 0}} = -50\end{aligned}$$

Como o valor $\ell(50)$ é o maior destes três valores, concluimos que o ponto $p = 50$ representa o máximo absoluto da função no intervalo.

Alternativamente, podemos reconhecer que $p = 50$ é o único ponto crítico no interior do intervalo de busca e a função é contínua no intervalo. Sendo assim, se ele for um máximo relativo, ele é o máximo absoluto. Com a segunda derivada,

$$\begin{aligned}\ell''(p) &= 180000\frac{-1(p+10)^3 - (-p+50)3(p+10)^2 \cdot 1}{(p+10)^6} \\ &= 180000\frac{-p-10+3p-150}{(p+10)^4} = 180000\frac{2p-160}{(p+10)^4}\end{aligned}$$

observamos que $\ell''(50) < 0$, o que implica que o lucro tem um máximo relativo neste ponto. (Também podemos chegar a essa conclusão observando que $\ell'(p)$ troca de sinal de positivo para negativo em $p = 50$.)

Portanto, o preço de venda $p =$ MR$50,00 permite o maior lucro de $\ell(50) =$ MR$1.500,00, vendendo $d(50) = 50$ peças.

5.8.2.2 A Lei de Snell

Exemplo 14. *A velocidade da luz no ar e na água são diferentes. Isso faz com que os raios de luz sejam refratados na superfície da água, não prosseguindo em linha reta. De acordo com o Princípio de Fermat, a luz se propaga ao longo do caminho com o menor tempo de propagação*[1]*. Mostre que a refração na superfície da água obedece a Lei de Snell, que estabelece que a razão dos senos dos ângulos de propagação será igual a razão das velocidades de propagação, i.e.,*

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades da luz no ar e na água e θ_1 e θ_2 são os ângulos de incidência na superfície, ou seja, os ângulos que o caminho de propagação faz com a vertical no ar e na água, respectivamente (ver Figura 5.43).

Considere a Figura 5.43. As distâncias l_1 de propagação em ar e l_2 de propagação em água

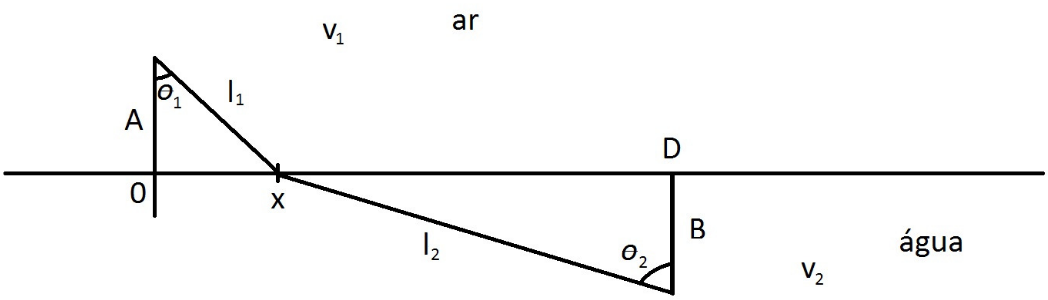


Figura 5.43: Caminho da luz entre os pontos $(0, A)$ em ar e (D, B) em água. $x \in [0, D]$

são dadas em função do ponto x, onde a luz atravessa a interface entre ar e água, por: $l_1 = \sqrt{A^2 + x^2}$ e $l_2 = \sqrt{(D-x)^2 + B^2}$.

Portanto, o tempo de propagação é $T = \dfrac{l_1}{v_1} + \dfrac{l_2}{v_2} = \dfrac{1}{v_1}\sqrt{A^2 + x^2} + \dfrac{1}{v_2}\sqrt{(D-x)^2 + B^2}$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_1}\frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{A^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{1 \cdot 2(D-x)(-1)}{2\sqrt{(D-x)^2 + B^2}} = \frac{1}{v_1}\frac{x}{l_1} - \frac{1}{v_2}\frac{D-x}{l_2} = 0$$

Observando que $\dfrac{x}{l_1} = \operatorname{sen}\theta_1$ e $\dfrac{D-x}{l_2} = \operatorname{sen}\theta_2$, temos $\dfrac{1}{v_1}\operatorname{sen}\theta_1 - \dfrac{1}{v_2}\operatorname{sen}\theta_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Como estacionariedade do tempo de propagação, i.e., derivada nula, é suficiente para um caminho de propagação da luz, não precisamos demonstrar aqui que o tempo ao longo desse caminho, de fato, é mínimo.

Exemplo 15. *Uma companhia de fornecimento de energia elétrica tem que instalar uma linha de transmissão a partir de uma subestação localizada numa rua reta até uma casa na floresta localizada no meio da floresta a 3km da rua, 9km rua abaixo da subestação. Encontre*

[1] Mais precisamente, o tempo de propagação deve ser estacionário.

o caminho de menor custo de instalação, se o valor ao longo da rua é de R$ 300,00 por km e a instalação através da floresta custa R$ 500 por km (ver Figura 5.44).

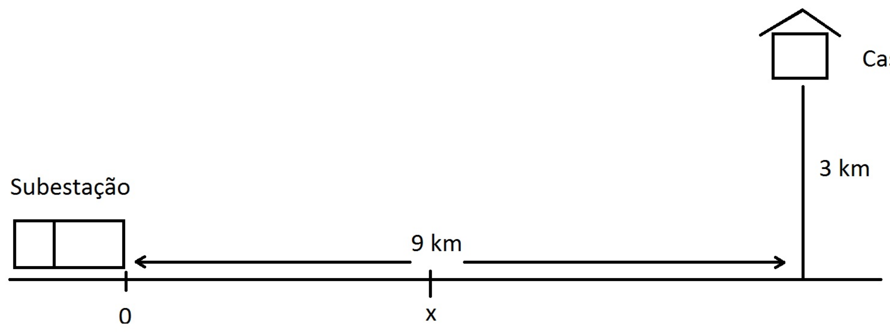


Figura 5.44: Problema da instalação de linha de transmissão.

Opções de instalação:
9 km ao longo da rua mais 3 km pela floresta. Custo: $C = 9 \cdot 300 + 3 \cdot 500 = 2700 + 1500 = R\$4200$;
Diretamente pela floresta: $C = \sqrt{9^2 + 3^2} \cdot 500 = \sqrt{90} \cdot 500 = 3\sqrt{10} \cdot 500 = 1500\sqrt{10}$.
Como $\sqrt{10} > 3$, notamos que nesse caso $C >$ R$4500.
Um trecho x de rua mais um trecho $y = \sqrt{(9-x)^2 + 3^2}$ através da floresta:
$C(x) = 300x + 500\sqrt{(9-x)^2 + 3^2}$ com $x \in \mathbb{I} = [0, 9]$
$C(x) = 300x + 500\sqrt{x^2 - 18x + 90}$
$C'(x) = 300 + 500\dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - 18x + 90}} \cdot (2x - 18) = 300 + \dfrac{500(x-9)}{\sqrt{x^2 - 18x + 90}}$
Pontos críticos: $C'(x)$ não existe em $x = 0$ e $x = 9$ (pontas do intervalo).
$C'(x) = 0$ onde $300 + \dfrac{500(x-9)}{\sqrt{x^2 - 18x + 90}} = 0$
$300\sqrt{x^2 - 18x + 90} = -500(x-9) = 500(9-x)$
$300^2(x^2 - 18x + 90) = 500^2(81 - 18x + x^2)$
$300^2(x^2 - 18x + 81) + 300^2 \cdot 9 = 500^2(81 - 18x + x^2)$
$300^2 \cdot 9 = (500^2 - 300^2)(81 - 18x + x^2) = 400^2(81 - 18x + x^2)$
$300 \cdot 3 = \pm 400(x-9) \Rightarrow x = 9 \pm \dfrac{300 \cdot 3}{400} = \begin{cases} 45/4 \\ 27/4 \end{cases}$
Destes valores $\frac{45}{4} \notin \mathbb{I}$, $\frac{27}{4} \in \mathbb{I}$

Obtemos $C(27/4) = 300 \cdot 27/4 + 500\sqrt{(9 - 27/4)^2 + 9} = 75 \cdot 3 \cdot 9 + 500\sqrt{(9/4)^2 + 9} = 225 \cdot 3 \cdot 3 + 125\sqrt{9^2 + 16 \cdot 9} = 675 \cdot 3 + 375\sqrt{9 + 16} = 2025 + 1875 = 3900$.
Assim, $C(27/4) = 3900 < C(9) = 4200 < C(0) = 1500\sqrt{10} \approx 4700$.

Portanto, o caminho de instalação que segue por $x = 27/4 = 6{,}75$ km pela rua e depois por $y = \sqrt{(9 - 27/4)^2 + 9} = 15/4 = 3{,}75$ km pela floresta, é o de menor custo, no valor de R$ 3.900,00.

5.8.3 Resmumo da localização de extremos absolutos e problemas de otimização

Para encontrarmos extremos absolutos de uma função em um intervalo dado, temos o seguinte procedimento de dois passos:

- Cálculo da derivada da função e determinação dos pontos críticos no intervalo:
  - Pontas do intervalo,
  - Pontos com derivada nula,
  - Pontos com derivada inexistente;
- Avaliação dos pontos críticos:
  - Cálculo dos valores da função, onde possível,
  - Cálculo dos limites laterais nas pontas de intervalos abertos e nas descontinuindades da função,
  - Comparação dos valores obtidos: se o maior for um valor da função, será o máximo absoluto, se o maior for um limite, não haverá máximo absolulo. Correspondentemente para mínimos.
  - Alternativa no caso de um único ponto crítico de uma função contínua no interior do intervalo: se for extremo relativo, será também extremo absoluto do mesmo tipo.

Para problemas de otimização, é necessário encontrar a função e o intervalo a partir da descrição do problema.

Capítulo 6

Integração

6.1 A antiderivada

6.1.1 Definição: a inversa da derivada

A integral representa a operação inversa da derivada – a "Antiderivada". A função antiderivada também se chama primitiva.

Definição: Uma função F será chamada de antiderivada de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Exemplo 1. *Se* $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$ *e se* $f(x) = 12x^2 + 2x$
(derivada de F), então F é antiderivada de f, pois $F'(x) = f(x)$.

Exemplo 2. *Se* $G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$,
podemos observar que $G'(x) = f(x)$ também. Portanto, $G(x)$ também é uma antiderivada de $f(x) = 12x^2 + 2x$.

Observação: Concluimos que a antiderivada não é única. Existem múltiplas antiderivadas para uma função dada.

6.1.2 A não unicidade da antiderivada

Qual é a não unicidade da antiderivada?

Para responder essa pergunta, estudamos a antiderivada de $f(x) = 0$.
Em outras palavras, procuramos a função F que tem a derivada $F'(x) = 0$.

Resposta: Toda função constante. $F(x) = 2$, $F(x) = 7$, $F(x) = 1000$, $F(x) = \pi$, etc., pois todas as retas horizontais, e somente estas, tem derivada identicamente nula.
Escrevemos: $F(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$ constante.

Teorema: Se f e g forem duas funções tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo I, então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C \ \forall \ x \in I$.

Prova: Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Então temos $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Portanto, $h(x) = f(x) - g(x) = C \ \forall \ x \in I$.

Teorema: Se F for uma antiderivada particular (específica) de f em um intervalo I, então toda antiderivada será dada por

$$G(x) = F(x) + C \qquad (C: \text{ constante de integração})$$

i.e., todas as antiderivadas de f podem ser determinadas somando valores diferentes da constante C à antiderivada particular $F(x)$.

Graficamente:

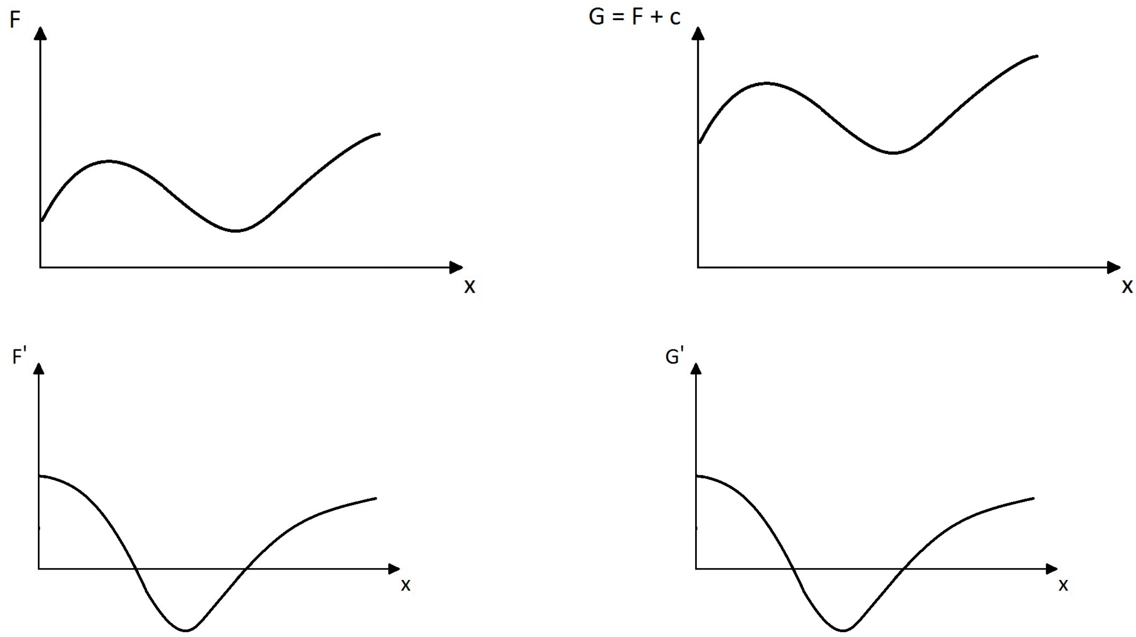


Figura 6.1: Duas funções F e G com a mesma derivada $F' = G'$.

6.1.3 Notação: a integral

O símbolo da antiderivada é a integral, $\int$, i.e. a integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

representa a forma geral da antiderivada, ou seja, a operação inversa da derivada $F'(x) = f(x)$, onde $F(x)$ é uma antiderivada particular de $f(x)$.

Podemos escrever: $\dfrac{dF}{dx} = f$

Formalmente, " $\dfrac{dF}{dx}dx = fdx \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{dF}{dx}dx = \int fdx \Rightarrow \int fdx = F(x) + C$ ", onde $\displaystyle\int \dfrac{dF}{dx}dx$ representa "qualquer função cuja derivada seja igual a $\dfrac{dF}{dx}$", com resultado $F(x) + C$.

6.1.4 Como calcular antiderivadas

6.1.4.1 Algumas antiderivdas

Iniciamos este tipo problema com a pergunta:

Exemplo 3. *Qual é a antiderivada da função $f(x) = 1$? Qual a função $F(x)$ que tem a derivada $F'(x) = f(x) = 1$?*
Sabemos que $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Então, se $n = 1$, temos $(x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$ Então a função $F(x) = x$ tem a derivada $f(x) = 1$. Porém, existem mais funções:

$F_2(x) = x + 1 \Rightarrow F_2'(x) = 1$, $F_3(x) = x + 3 \Rightarrow F_3'(x) = 1$, $F_4(x) = x - 207 \Rightarrow F_4'(x) = 1$

Portanto, a resposta geral à pergunta acima é $F(x) = \displaystyle\int 1\, dx = \int dx = x + C$.

Exemplo 4. *Qual é a antiderivada da função $f(x) = x$?*
A antiderivada de $f(x) = x$ pode ser determinada correspondentemente. Sabemos que $G(x) = x^2$ tem a derivada $G'(x) = 2x$. Portanto, $\frac{1}{2}G'(x) = [\frac{1}{2}G(x)]' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$.
Assim, $\displaystyle\int x\, dx = \frac{1}{2}G(x) + C = \frac{1}{2}x^2 + C$.

6.1.4.2 Função x^r

Qual é a antiderivada da função $f(x) = x^r$?

Generalizando o procedimento acima, encontramos a antiderivada de $f(x) = x^r$ para todos os valores reais de r, exceto $r = -1$ ($r \in \mathbb{R} - \{-1\}$): Sabemos que $G(x) = x^{r+1}$ tem a derivada $G'(x) = (r+1)x^r$. Portanto, $\frac{1}{r+1}G'(x) = [\frac{1}{r+1}G(x)]' = x^r$.
Assim, $\displaystyle\int x^r\, dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$ ($r \neq -1$).

Essa é a inversão da regra do tombo da derivada.

Exemplo 5.
$\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{2+1}x^{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$

Exemplo 6.
$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}dx + C = -\frac{1}{x} + C$

Exemplo 7.
$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{4/3} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

6.1.4.3 Função $1/x$

Qual é a antiderivada da função $f(x) = x^{-1}$?

Vimos que:

$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \ \forall \ r \neq -1$

pois $(x^n)' = nx^{n-1}$ fornece $(x^0)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$ e, portanto, não se pode achar a antidevivada de $x^{-1} = \frac{1}{x}$ através desta formula.

Qual será então a antiderivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$? Para achar esta função, usamos que conhecemos a derivada do logaritmo natural. Sabemos que se $G(x) = \ln|x|$, então $G'(x) = \frac{1}{x}$. Portanto, temos

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

De fato, como veremos mais adiante, o logaritmo natural pode ser definido como uma antiderivada específica de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Observação: Não podemos esquecer o módulo em $\ln|x|$ na integral de x^{-1}, pois x pode ser negativo, mas o logaritmo pode ser calculado somente de valores positivos.

6.1.5 Cálculo com Antiderivadas

Teoremas que ajudam a calcular antiderivadas (integrais):

Teorema: $\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$ Prova: $\left(a\int f(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right)' = af(x)$

Teorema: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ Prova: correspondentemente.

Os dois teoremas anteriores implicam que a integração é uma operação linear, i.e.,

$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n)dx = c_1 \int f_1 dx + c_2 \int f_2 dx + ... + c_n \int f_n dx$

Exemplo 8.
$\int (3x^2 + 4x + 5)dx = 3\int x^2 dx + 4\int x dx + 5\int dx = 3(\frac{x^3}{3} + C_1) + 4(\frac{x^2}{2} + C_2) + 5(x + C_3) =$

$x^3 + 2x^2 + 5x + \underbrace{3C_1 + 4C_2 + 5C_3}_{C} = x^3 + 2x^2 + 5x + C$

Teste: $(x^3 + 2x^2 + 5x + C)' = 3x^2 + 4x + 5$✓

Exemplo 9.

$\int \sqrt{x}(x - \frac{1}{x})dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{x} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x}(x^2 - 5) + C$

Teste: $\left(\frac{2}{5}\sqrt{x}(x^2 - 5) + C\right)' = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 5) + \sqrt{x} \cdot 2x\right) = \frac{2}{5}\frac{x^2 - 5 + 4x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{5}\frac{5x^2 - 5}{\sqrt{x}} = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$.

6.1.6 Antiderivadas de funções elementares

6.1.6.1 Funções trigonométricas

$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$

Prova: $\frac{d}{dx}(-\cos x + C) = -(-\operatorname{sen} x) + 0 = \operatorname{sen} x$

$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$

Prova: $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x + C) = (\cos x) + 0 = \cos x$

Correspondentemente:

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}dx = -\cot x + C$

$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx = \int \sec x \tan x \; dx = \sec x + C = \frac{1}{\cos x} + C$

$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx = \int \csc x \cot x \; dx = -\csc x + C = \frac{-1}{\operatorname{sen} x} + C$

Exemplo 10.

$\int (3\sec x \tan x - 5\csc^2 x)dx = 3\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx - 5\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}dx = 3\sec x + 5\cot x + C$

Exemplo 11.

$$\int \tan^2 x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int 1dx = \tan x - x + C$$

6.1.6.2 Funções hiperbólicas

$$\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x} \, dx = -\coth x + C$$

$$\int \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh^2 x} \, dx = \int \operatorname{sech} x \tanh x \; dx = -\operatorname{sech} x + C = -\frac{1}{\cosh x} + C$$

$$\int \frac{\cosh x}{\operatorname{senh}^2 x} dx = \int \operatorname{csch} x \coth x \; dx = -\operatorname{csch} x + C = -\frac{1}{\operatorname{senh} x} + C$$

6.1.6.3 Funções trigonométricas inversas

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arcsec} x + C = -\operatorname{arccsc} x + C$$

6.1.6.4 Funções hiperbólicas inversas

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C & \text{se} \quad x < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \operatorname{arsenh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arcosh} x + C$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\operatorname{arsech} x + C$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \, dx = -\operatorname{arcsch} x + C$$

6.1.7 Condições iniciais (ou laterias, ou de fronteira)

Vimos que sempre existe um número infinito de antiderivadas de uma função . Para determinar qual delas é a procurada, precisa-se de informação adicional. Esta é dada pelo valor da função em algum ponto. Esta informação adicional denomina-se condição inicial (no caso genérico ou se for uma função temporal) ou condição lateral (ou de fronteira, ou de contorno, se for uma função espacial).

Exemplo 12. *Procure a função que satisfaça* $\frac{dy}{dx} = 2x$ *e que passa pelo ponto* $(2, 6)$ *(ou seja, cujo valor em* $x = 2$ *seja* $y = 6$*)*
Primeiro, precisamos descobrir a forma geral da antiderivada de $2x$:

Se $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ então $y = \displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + c$

Agora, entre todas essas funções, a procurada é a que satisfaz $y(2) = 6$. Calculando o valor em $x = 2$ pela expressão geral, econtramos $y(2) = 4 + c = 6 \Rightarrow c = 2$ Portanto, a constante c tem o valor 2. $\Rightarrow y(x) = x^2 + 2$ è a função procurada.

Exemplo 13. *Determine a curva cuja derivada em qualquer ponto* (x, y) *seja dada por* $y' = 4x - 5$*, e que passe pelo ponto* $(3, 7)$
Solução: $\dfrac{dy}{dx} = 4x - 5 \Rightarrow y = \displaystyle\int (4x - 5)dx = 4\frac{x^2}{2} - 5x + c = 2x^2 - 5x + c$

$y(3) = 7 = 2 \cdot 9 - 5 \cdot 3 + c = 18 - 15 + c = c + 3 \Rightarrow c = 4.$
Portanto, a função procurada é $y(x) = 2x^2 - 5x + 4$

Observação: Temos a liberdade de escrever a constante de integração da forma como for mais conveniente. Por exemplo, se escrevermos
$y = \displaystyle\int (4x - 5)dx = 4(\frac{x^2}{2} + C_1) - 5(x + C_2) = 2x^2 - 5x + 4C_1 - 5C_2,$
obtemos pela condição inicial
$y(3) = 7 = 2 \cdot 9 - 5 \cdot 3 + 4C_1 - 5C_2 = 3 + 4C_1 - 5C_2 \;\Rightarrow\; 4C_1 - 5C_2 = 4 \;\Rightarrow\; y(x) = 2x^2 - 5x + 4$

Independentemente de como escrevemos a constante de integração, a condição inicial fornece, entre todas as soluções possíveis, aquela única solução que passa pelo ponto dado.

6.1.8 A antiderivada - para que?

A antiderviada aparece em problemas onde somente se conhece a informãção sobre a derivada da função desejada.

Exemplo 14. *Você encontra um poço profudo e quer saber a profundidade. Você pega uma pedra e deixa cair no posso. Você escuta ela cair na água após 7,1 s. Qual a profundidade?*
Negligenciando a resistência do ar e o tempo de retorno do som, podemos usar que a velocidade é a derivada da distância percorrida e a aceleração é a derivada da velocidade. Sabemos que a aceleração gravitacional é $a = g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ e que a relação da aceleração com a velocidade é $a = \frac{dv}{dt}$, i.e., a aceleração é a derivada da velocidade. Portanto, a velocidade da queda é dada por:
$v(t) = \displaystyle\int a dt = \int g dt = gt + C$, uma vez que a aceleração g é constante.

Para determinar o valor da constante C, precisamos de uma condição inicial: a velocidade inicial foi zero, deixamos a pedra cair da nossa mão. Assim,
$v(0) = g \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

O caminho percorrido $s(t)$ é dado pela antiderivada da velocidade, uma vez que a velocidade é a derivada do caminho percorrido, i.e.,
$s(t) = \int v(t)dt = \int gtdt = g \int tdt = \dfrac{g}{2}t^2 + c$

Outra vez aparece uma constante de integração, i.e., outra vez precisamos de uma condição inicial. Claramente, definimos a nossa posição inicial como sendo zero, tendo
$s(0) = 0 = \dfrac{g}{2}0^2 + c = c$, assim obtendo $s(t) = \frac{g}{2}t^2$

Com o tempo medido de 7,1 s e a aceleração gravitacional de $g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, obtemos uma profundidade aproximada de $s(t) = \dfrac{9{,}81}{2}(7{,}1)^2 \approx 250$ m.

Exemplo 15. *Voltamos ao nosso exemplo de viagem: Um amigo conta que saiu de Campinas às 8 hs da manhã e teve pista livre, conseguindo andar a 120 km/h por meia hora antes de começar a congestionar, e ele só pode andar a 80 km/h pela próxima meia hora. Antes dele contar para onde estava indo, a ligação caiu. A que distância chegou?*

Sabemos que $\quad s(t) = \int v(t)dt$ onde $\quad v(t) = \begin{cases} 120, & \text{se} \quad t < \frac{1}{2}, \\ 80, & \text{se} \quad t > \frac{1}{2}. \end{cases}$

Agora, como devemos proceder?

Primeiramente, observamos que $\int 120dt = 120t + C_1$ e $\int 80dt = 80t + C_2$

Como podemos conectar isso?

No início é fácil, esquecemos a segunda parte da equação e trabalhamos só com a primeira. Obviamente $s(0) = 0$, porque é o começo da viagem, então temos

$s(0) = 120 \cdot 0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ daí $s(t) = 120t$, para $t < \frac{1}{2}$.

Então, após meia hora estava com $s(\frac{1}{2}) = 120 \cdot \frac{1}{2} = 60$ km. Esta é a condição inicial para a segunda parte da viagem (porque, evidentemente, a função da distância percorrida tem que ser contínua). Temos $s(\frac{1}{2}) = 80 \cdot \frac{1}{2} + C_2 = 60 \Rightarrow C_2 = 20$ assim $s(t) = 80t + 20$, para $t > \frac{1}{2}$.

Também podemos escrever $s(t) = 80(t - \frac{1}{2}) + 60$.

Obtemos então a função

$$s(t) = \begin{cases} 120t, & \text{se} \quad t \leq \frac{1}{2}, \\ 80(t - \frac{1}{2}) + 60, & \text{se} \quad t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Assim, depois de mais meia hora, ele chegou em $s(1) = 80(1-\frac{1}{2})+120\cdot\frac{1}{2} = 40+60 = 100$ km. Deve ter chegado em São Paulo.

Graficamente, observamos o resultado do cálculo efetuado na Figura 6.2. Notamos que a expressão $s(1) = 80(1-\frac{1}{2})+120\cdot\frac{1}{2}$ representa a área por baixo da função $v(t)$ entre $t = 0$ e $t = 1$.

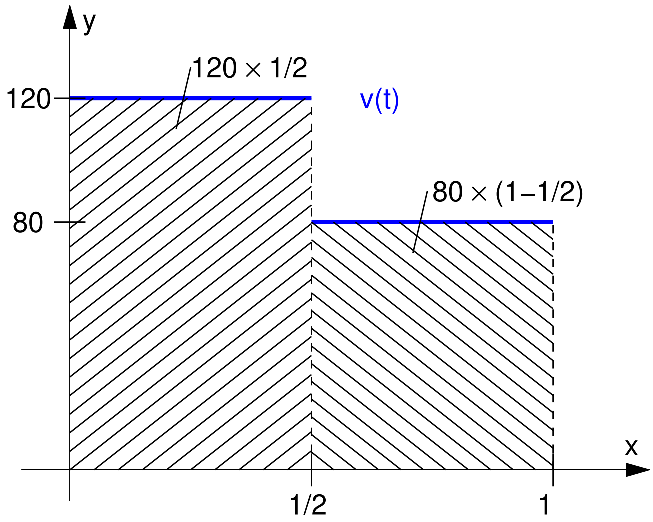


Figura 6.2: Cálculo da distância percorrida: Área por baixo da função $v(t)$ entre $t = 0$ e $t = 1$.

6.2 Área

No último exercício, vimos que a área por baixo de uma função estava relacionada à sua antiderivada. Vamos então estudar o cálculo de áreas para reconhecer que sempre há esta relação.

Para podermos formalizar o estudo de áreas necessitamos da notação do *somatório*.

6.2.1 O somatório

O somatório é uma forma compacta de escrever uma soma de muitos termos.

6.2.1.1 Notação

Símbolo: $\sum$ = Sigma (maiúsculo), a letra S do Grego (de *soma, somatório*).

$\sum\limits_{i=1}^{3} i = 1 + 2 + 3 \quad (= 6)$

Leia-se: "A Soma de $i = 1$ até 3 sobre i".

$\sum\limits_{i=0}^{4} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 \quad (= 30)$

$\sum\limits_{i=-2}^{2} i^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 = -8 + (-1) + 1 + 8 \quad (= 0)$

$\sum\limits_{i=i_0}^{N} F(i) = F(i_0) + F(i_0 + 1) + ... + F(N)$

Falamos a soma de i_0 a N de $F(N)$

i: Índice de soma, i_0: Início da soma, N: Fim da soma

Não importa o símbolo que usamos para o índice da soma:

$\sum\limits_{i=1}^{3} i^2 = \sum\limits_{k=1}^{3} k^2 = \sum\limits_{l=1}^{3} l^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$

Dizemos que o índice da soma é uma *variável muda*.

Trocando o índice por uma letra, temos que trocar todas as ocorrências:

$\sum\limits_{i=1}^{3} i^2 + 2i + \frac{i}{4} = \sum\limits_{k=1}^{3} k^2 + 2k + \frac{k}{4} \neq \sum\limits_{k=1}^{3} i^2 + 2k + \frac{k}{4}$

A representação da mesma soma não é única:

$\sum\limits_{i=1}^{7} i^2 \overset{i=j+1}{=} \sum\limits_{j=0}^{6} (j+1)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 \quad (= 140)$

Significa que podemos mudar a forma, alterando o índice e, em consequência, o início e o fim da soma.

Exemplo 1. *Mude a representação do somatório* $\sum\limits_{i=3}^{7} i^2 - 3i + 6$ *de tal forma que a soma comece em 1.*

Precisamos um novo índice da soma j tal que $j = 1$ quando $i = 3$, i.e., $j = i - 2$. Dessa forma, quando $i = 7$, temos $j = 7 - 2 = 5$. Além disso, temos $i = j + 2$. Assim,

$$\sum_{i=3}^{7} i^2 - 3i + 6 = \sum_{j=1}^{5} (j+2)^2 - 3(j+2) + 6 = \sum_{j=1}^{5} j^2 + 4j + 4 - 3j - 6 + 6 = \sum_{j=1}^{5} j^2 + j + 4$$

Teste: Calculamos a soma. Na forma original temos

$$\sum_{i=3}^{7} i^2 - 3i + 6 = \underbrace{3^2 - 3 \cdot 3 + 6}_{=6} + \underbrace{4^2 - 3 \cdot 4 + 6}_{=10} + \underbrace{5^2 - 3 \cdot 5 + 6}_{=16} + \underbrace{6^2 - 3 \cdot 6 + 6}_{=24} + \underbrace{7^2 - 3 \cdot 7 + 6}_{=34} = 90$$

e na forma nova temos

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 + j + 4 = \underbrace{1^2 + 1 + 4}_{=6} + \underbrace{2^2 + 2 + 4}_{=10} + \underbrace{3^2 + 3 + 4}_{=16} + \underbrace{4^2 + 4 + 4}_{=24} + \underbrace{5^2 + 5 + 4}_{=34} = 90$$

Notamos que não somente o valor total é igual como todas as contribuições individuais.

6.2.1.2 Propriedades

1) $\sum\limits_{n=1}^{N} c = Nc, \quad c$ constante

$$(\quad = \underbrace{c + c + c + ... + c}_{N \text{ termos}} \quad)$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{N} cF(n) = c \sum\limits_{n=1}^{N} F(n)$

$$(\quad = cF(1) + cF(2) + ... + cF(N)) = c[F(1) + F(2) + ... + F(N)] \quad)$$

3) $\sum\limits_{n=1}^{N}[F(n) \pm G(n)) = \sum\limits_{n=1}^{N} F(n) \pm \sum\limits_{n=1}^{N} G(n)$

$(\quad = F(1) \pm G(1) + ... + F(N) \pm G(N)) = [F(1) + ... + F(N)] \pm [G(1) + ... + G(N)] \quad)$

Observação: Propriedades 2 e 3 juntas significam que a operação denotada pelo somatório e uma operação linear, i.e.,
$\sum\limits_{n=1}^{N}[a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \ldots + a_k f_k(n)] = a_1 \sum\limits_{n=1}^{N} f_1(n) + a_2 \sum\limits_{n=1}^{N} f_2(n) + \ldots + a_k \sum\limits_{n=1}^{N} f_k(n).$

4) Soma telescópica: $\sum\limits_{n=1}^{N}(F(n) - F(n-1)) = F(N) - F(0)$

$(\quad = F(1) - F(0) + F(2) - F(1) + F(3) - F(2) + ... + F(N) - F(N-1) \quad)$

Exemplo: $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} i^3 - (i-1)^3 = 1^3 - 0^3 + 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 = 3^3 - 0^3 \quad (= 27)$

5) Fórmulas úteis:

$$1. \ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad 2. \ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$3. \ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad 4. \ \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

Estas fórmulas podem ser provadas usando, por exemplo, a indução matemática.

6.2.2 Algumas áreas simples

Para vermos se existe uma relação entre a antiderivada de uma função e a área por baixo dela, vamos considerar algumas funções simples.

Exemplo 2. *Área por baixo da função $f_1(x) = 3$ entre 0 e x*
Área do retângulo: base (x) vezes altura (3), i.e., $A = x \cdot 3$ (veja Figura 6.3).
Em conclusão, podemos escrever a área por baixo da função constante como função do ponto final x, $A(x) = 3x$
Observação: Notamos que a derivada dessa função é $A'(x) = 3$.

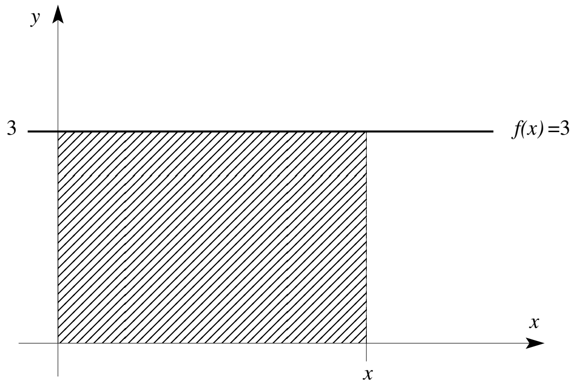


Figura 6.3: Área por baixo de $f_1(x) = 3$ entre 0 e x.

Exemplo 3. *Área por baixo da função $f_2(x) = 3x$ entre 0 e x*
Área do triângulo: metade de base (x) vezes altura ($3x$), i.e., $A = \frac{1}{2}x \cdot 3x$ (veja Figura 6.4). Portanto, $A(x) = \frac{3}{2}x^2$
Observação: Notamos que a derivada dessa função é $A'(x) = 3x$

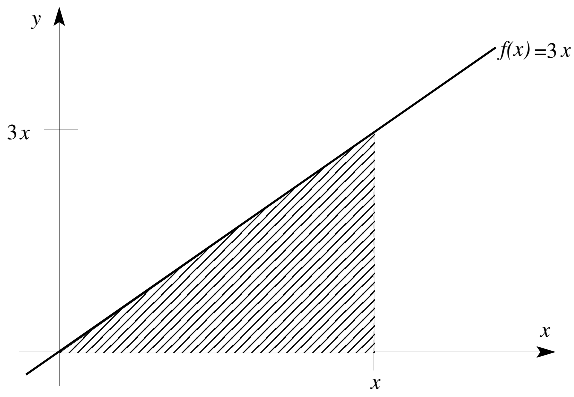


Figura 6.4: Área por baixo de $f_2(x) = 3x$.

Exemplo 4. *Área por baixo da função $f_3(x) = x^2$ entre 0 e x*

Neste caso, não podemos mais calcular a área por meio de alguma fórmula geométrica, pois ela é delimitada por uma linha curva (veja Figura 6.5).

Como devemos proceder para determinar áreas delimitadas por linhas curvas?

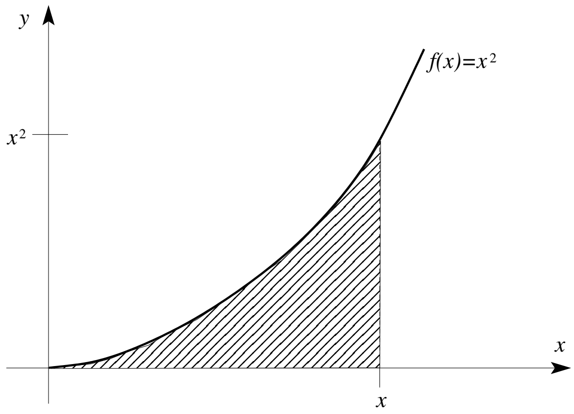


Figura 6.5: Área por baixo de $f_3(x) = x^2$.

6.2.3 Áreas delimitadas por funções curvilíneas

Uma região baixo de uma função delimitada por segmentos retos pode ser interpretada como um polígono. Notamos que a área de um polígono é facilmente obtida, pois todo polígono pode ser dividido em um número finito de triângulos (veja Figura 6.6).

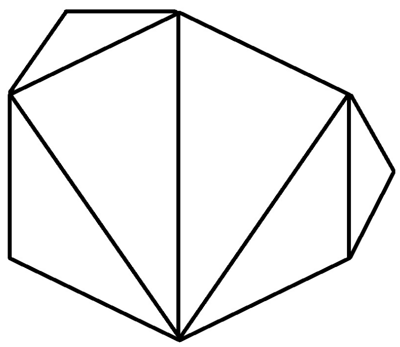


Figura 6.6: Subdivisão da área de um polígono em triângulos.

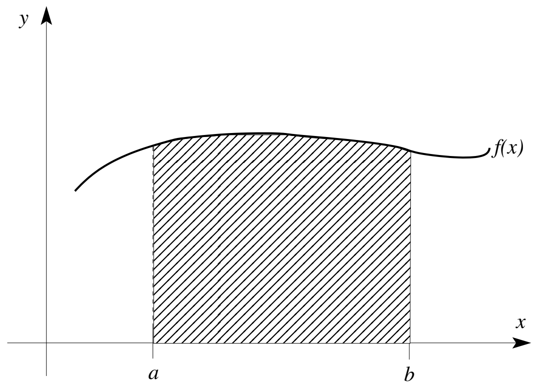


Figura 6.7: Área da região por baixo de uma função curvilínea $f(x)$.

Como podemos proceder para determinar a área de uma região delimitada por uma função curvilínea (Figura 6.7)?

A idéia é analoga à da determinação de área de uma circunferência.

Historicamente, não foi possível determinar a área de uma circunferência de forma precisa até o surgimento do conceito de limite. A impossibilidade de construir, geometricamente, um quadrado com a mesma área de uma circunferência dada, deu origem ao provérbio da "quadratura do círculo" para uma causa impossível.

A área de uma circunferência pode ser determinada como o limite das áreas dos polígonos regulares inscritos nela, quando o número de lados cresce ilimitadamente (veja Figura 6.8).

Para o nosso problema de determinar a área por baixo de uma função curva, devemos proceder de maneira análoga, definindo uma área poligonal contida na área a ser determinada (veja Figura 6.9).

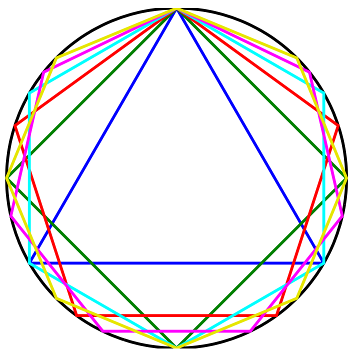


Figura 6.8: A área de uma circunferência é obtida pelo limite das áreas dos polígonos regulares inscritos.

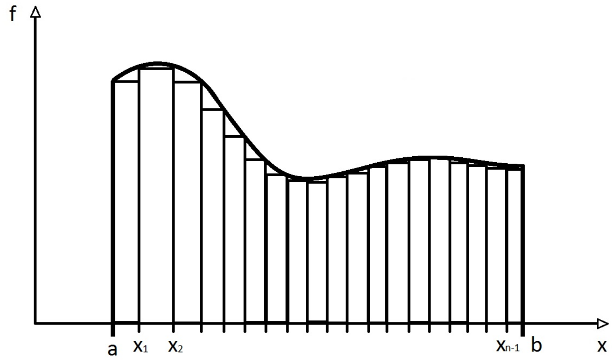


Figura 6.9: Substituição da área por baixo de uma curva por uma área aproximada que consiste de retângulos.

Com essa ideia, podemos voltar ao exemplo da ára por baixo da função $f_3(x) = x^2$.

Ideia: Divisão em intervalos menores e substituir a função por pequenos retângulos. Depois, observar o que acontece ao usar cada vez mais retângulos.

Primeiramente, usamos os retângulos com altura definida pelo valor da função à esquerda de cada subintervalo:

3 retângulos (veja Figura 6.10):
Dividimos o intervalo $(0, x)$ em 3 subintervalos (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), com os pontos:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{x}{3},\ x_2 = \frac{2x}{3},\ x_3 = \frac{3x}{3} = x$$

A área de cada retângulo será dada pelo produto do tamanho de sua base, $x_i - x_{i-1}$, multiplicado pela sua altura, $f_3(x_{i-1})$, i.e., $a_i = (x_i - x_{i-1}) \cdot f_3(x_{i-1})$.

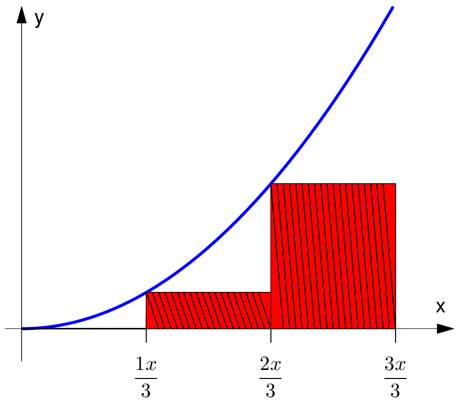


Figura 6.10: Área por baixo da função $f_3(x) = x^2$ aproximada por 3 retângulos (um de área zero!).

Assim, a soma das áreas dos retângulos é:

$$\begin{aligned}
A_3(x) = \sum_{i=1}^{3} a_i &= \frac{x}{3} \cdot f_3(0) + (\frac{2x}{3} - \frac{x}{3}) \cdot f_3(\frac{x}{3}) + (x - \frac{2x}{3}) f_3(\frac{2x}{3}) \\
&= \frac{x}{3} \cdot 0^2 + \frac{x}{3} \cdot (\frac{x}{3})^2 + \frac{x}{3} \cdot (\frac{2x}{3})^2 \\
&= 0 + \frac{x^3}{3^3} + \frac{4x^3}{3^3} = (0^2 + 1^2 + 2^2) \frac{x^3}{3^3}
\end{aligned}$$

4 retângulos (veja Figura 6.11):

Correspondentemente, os subintervalos são delimitados pelos pontos: $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{x}{4}$, $x_2 = \dfrac{2x}{4}$, $x_3 = \dfrac{3x}{4}$, $x_4 = \dfrac{4x}{4} = x$

A soma sobre 4 retângulos então é:

$$A_4(x) = \sum_{i=1}^{4} a_i = 0 + \frac{x}{4} \cdot (\frac{x}{4})^2 + \frac{x}{4} (\frac{2x}{4})^2 + \frac{x}{4} (\frac{3x}{4})^3$$

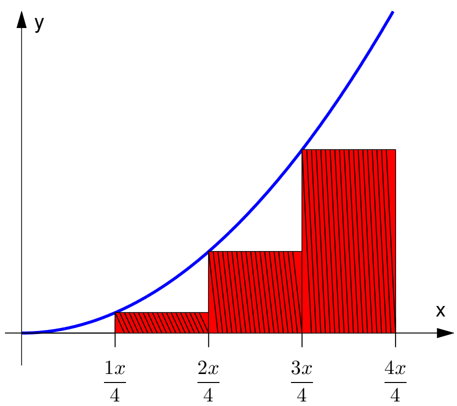


Figura 6.11: Área por baixo da função $f_3(x) = x^2$ aproximada por 4 retângulos (um de área zero!).

$$= 0 + \frac{x^3}{4^3} + \frac{2^2}{4^3}x^3 + \frac{3^3}{4^3}x^3 = (0^2+1^2+2^2+3^2)\frac{x^3}{4^3}$$

5 retângulos (veja Figura 6.12):

Os pontos são: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{x}{5}$, $x_2 = \frac{2x}{5}$, $x_3 = \frac{3x}{5}$, $x_4 = \frac{4x}{5}x$, $x_5 = \frac{5x}{5}x = x$

A área dos 5 retângulos é:

$A_5(x) = \sum_{i=1}^{5} a_i = 0 + \frac{x}{5}(\frac{x}{5})^2 + \frac{x}{5}(\frac{2x}{5})^2 + \frac{x}{5}(\frac{3x}{5})^2 + \frac{x}{5}(\frac{4x}{5})^2 = (0^2+1^2+2^2+3^2+4^2)\frac{x^3}{5^3}$

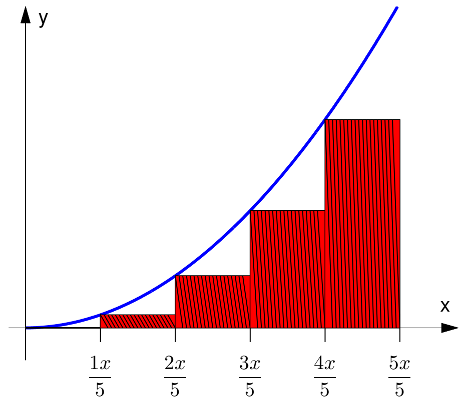


Figura 6.12: Área por baixo da função $f_3(x) = x^2$ aproximada por 5 retângulos (um de área zero!).

n retângulos

Podemos concluir facilmente que, para n retângulos, obtemos
$A_n = (0^2+1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2)\frac{x^3}{n^3}$

Notamos que $0^2+1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2n^3-3n^2+n}{6}$

Portanto, podemos escrever $A_n = \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}x^3$

No limite de um número de subintervalos n cada vez maior, temos

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}x^3 = x^3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{3}x^3$$

Esse limite é a nossa área procurada? Notamos que a nossa soma de áreas de retângulos sempre é menor do que a área procurada. Então o limite acima com certeza é menor ou igual à área procurada.

É importante observar que também podemos usar os retângulos cujas alturas são definidas pelos valores da função nas pontas de direita dos subintervalos, i.e.,
$\tilde{a}_i = (x_i - x_{i-1}) \cdot f_3(x_i)$.
Notamos que esses retângulos estão todos para fora do gráfico da função $f_3(x) = x^2$, i.e, a área estimada pela soma dessas áreas será sempre maior que a área procurada.

Com **3 retângulos**, obtemos (veja Figura 6.13):

$$\tilde{A}_3(x) = \sum_{i=1}^{3} \tilde{a}_i = \frac{x}{3}\cdot f_3(\frac{x}{3}) + \frac{x}{3}\cdot f_3(\frac{2x}{3}) + \frac{x}{3}\cdot f_3(\frac{3x}{3})$$
$$= \frac{x}{3}\cdot(\frac{x}{3})^2 + \frac{x}{3}\cdot(\frac{2x}{3})^2 + \frac{x}{3}\cdot(\frac{3x}{3})^2$$
$$= (1^2+2^2+3^2)\frac{x^3}{3^3}$$

Da mesma forma, o uso de **4 retângulos** fornece:

$$\tilde{A}_4(x) = \sum_{i=1}^{4} \tilde{a}_i \frac{x}{4}(\frac{x}{4})^2 + \frac{x}{4}(\frac{2x}{4})^2 + \frac{x}{4}(\frac{3x}{4})^3 + \frac{x}{4}(\frac{4x}{4})^3$$
$$= (1^2+2^2+3^2+4^2)\frac{x^3}{4^3}$$

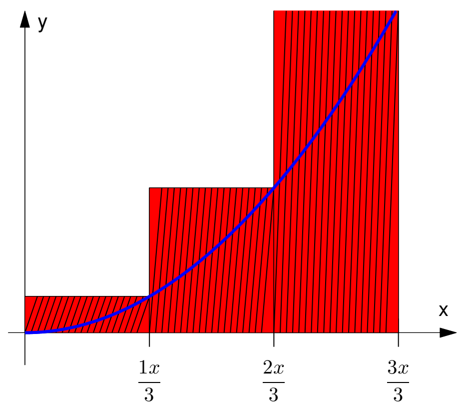


Figura 6.13: Área por baixo da função $f_3(x) = x^2$ aproximada por 3 retângulos circunscritos.

Para **n retângulos**, obtemos então $\tilde{A}_n = (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)\dfrac{x^3}{n^3}$

Notamos que $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$

No limite de um número cada vez maior de subintervalos, temos
$\lim_{n\to\infty} \tilde{A}_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} x^3 = x^3 \cdot \lim_{n\to\infty} \dfrac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n}}{6} = \dfrac{1}{3}x^3$

Notamos que a soma de áreas $\tilde{A}_n$ fornece uma estimativa para a área procurada que sempre é maior do que ela. Portanto, o limite acima com certeza será maior ou igual à área procurada.

Sendo assim, temos $A_n < A(x) < \tilde{A}_n$ com $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{A}_n = \dfrac{1}{3}x^3$ o que implica, pelo Teorema do Confronto que $\lim_{n\to\infty} A(x) = \dfrac{1}{3}x^3$.

Uma vez que a área procurada $A(x)$ não depende do número de subintervalos usado para estimá-la, temos $\lim_{n\to\infty} A(x) = A(x)$, i.e., obtemos para a área procurada: $A(x) = \dfrac{1}{3}x^3$

Observação: $A'(x) = x^2$

6.2.4 Área delimitada por uma curva

Para o nosso problema geral de determinar a área por baixo de uma função curva qualquer, podemos generalizar esse procedimento.

Para tal, supomos que f seja contínua em (a, b).

Dividimos (a, b) em n subintervalos, que, por simplicidade, escolhemos ser do mesmo tamanho $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = x_0 \\ a + \Delta x = x_1 \\ x_1 + \Delta x = a + 2\Delta x = x_2 \\ \dots \\ a + i\Delta x = x_i \\ \dots \\ a + (n-1)\Delta x = x_{n-1} \\ b = a + n\Delta x = x_n \end{array}}$$

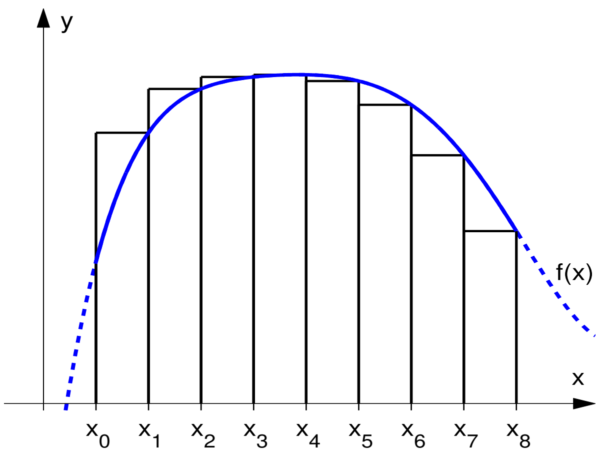


Figura 6.14: Soma de áreas de retângulos aproximando a área por baixo do gráfico da função ($n = 8$).

Então, temos uma aproximação para a área procurada, dada pela soma das áreas dos n retângulos com base Δx e altura $f(x_i)$, i.e.,

$$A_n = \Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + ... + \Delta x f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Porém, como vemos na Figura 6.14, não sabemos se essa área aproximada séra maior ou menor do que a área procurada. Mas podemos proceder um pouco diferente para garantir essa informação.

Pela hipótese da continuidade de f, temos que f é contínua em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Portanto, existe em cada intervalo um mínimo absoluto e um máximo absoluto.

Consideramos primeiramente os n pontos c_i tal que $f(c_i)$ é o valor do mínimo absoluto no intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Então, definimos a soma da área dos retangulos definidos pela base Δx e a altura $f(c_i)$ (esses são os retângulos inscritos na f) em cada intervalo:

$$s_n = \Delta x f(c_i) + \Delta x f(c_2) + ... + \Delta x f(c_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x$$

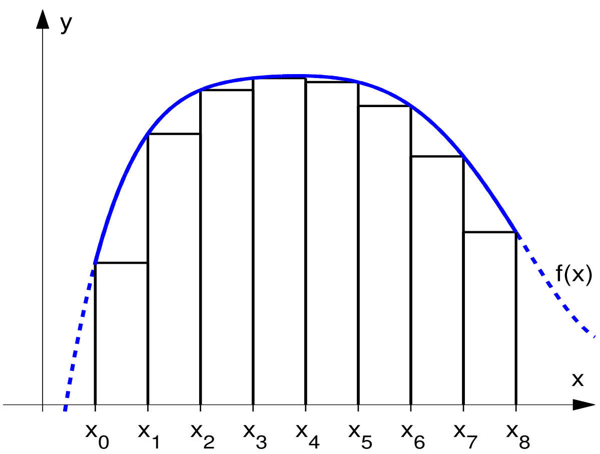


Figura 6.15: Soma inferior s_n: Soma das áreas dos retângulos inscritos, i.e, aqueles cuja altura, em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, é definida pelo mínimo absoluto da função no intervalo ($n = 8$). Temos $s_n \leq A_n$ e $s_n \leq A$.

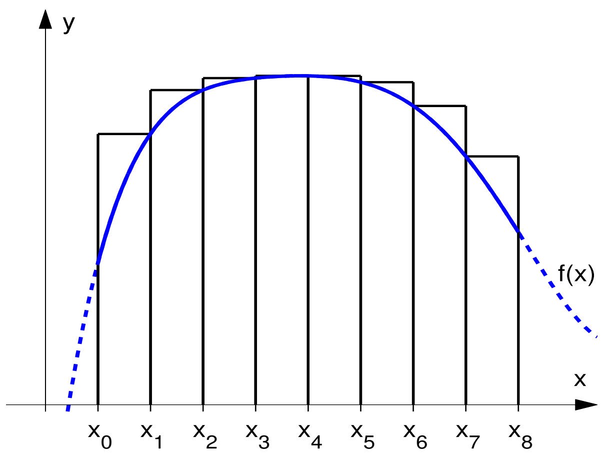


Figura 6.16: Soma superior S_n: Soma das áreas dos retângulos circunscritos, i.e, aqueles cuja altura, em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, é definida pelo máximo absoluto da função no intervalo ($n = 8$). Temos $S_n \geq A_n$ e $S_n \geq A$.

Assim tanto a área A abaixo da curva $f(x)$ como a aproximação A_n tem que ser maior (ou, no mínimo igual) a essa soma s_n: $A \geq s_n$ e $A_n \geq s_n$. A soma s_n é chamada de soma inferior.

Da mesma maneira podemos trabalhar com retângulos circunscritos. Assim temos uma soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x$, onde d_i é o máximo absoluto no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Assim tanto a área A abaixo da curva $f(x)$ como a aproximação A_n tem que ser menor (ou, no máximo igual) a essa soma S_n: $A \leq S_n$ e $A_n \leq S_n$. A soma S_n é chamada de soma superior.

Temos então que $s_n \leq A \leq S_n$ e $s_n \leq A_n \leq S_n$.

Agora admitimos que n cresce ilimitadamente, assim diminuindo cada vez mais o Δx. Obviamente, as somas s_n e S_n terão cada vez mais termos, porém cada vez menores por serem multiplicados por Δx. Uma vez que os intervalos ficam cada vez menores, as pontas de cada intervalo (x_{i-1} e x_i) e, portanto, também os extremos c_i e d_i se aproximam cada vez mais um ao outro. Assim, ambas as áreas s_n e S_n vão se aproximar cada vez mais ao mesmo valor. Vimos isso acontecer no exemplo da função $f(x) = x^2$.

Podemos concluir então que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Daí, concluímos pelo Teorema do Confronto que tanto o limite da área A abaixo da curva como da sua proximação A_n tem que ser iguais ao valor deste limite, i.e.,
$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n. = \lim\limits_{n\to\infty} A,$
onde temos, evidentemente, que $\lim\limits_{n\to\infty} A = A$, já que a área não depende de n.

Portanto, podemos calcular a àrea A da região R por baixo da função $f(x)$ como
$A = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ ou $A = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x$
ou ainda
$A = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ (onde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$).

Uma vez que o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ vai se reduzir a um único ponto no limite $n \to \infty$, podemos ainda escolher qualquer ponto ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$ para calcular as alturas dos retângulos, e sempre vai valer que: $s_n \leq \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x \leq S_n$, pois, obviamente, $\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(d_i)$.
Portanto, o Teorema do Confronto garante que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = A$.

6.2.5 A soma de Riemann

Para que este processo funcionar, nem é necessário que o tamanho Δx seja constante para todos os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Cada um deles pode ter um próprio comprimento $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, contanto que todos $\Delta x_i \to 0$ quando $n \to \infty$. Também não é necessário que a função seja contínua em $[a, b]$. Basta ser contínua em cada subintervalo, ou seja, seccionalmente contínua em $[a, b]$.

Definição: Uma função é seccionalmente contínua (contínua por partes), se possui, no máximo, um número finito de descontinuidades finitas em um intervalo finito.

A soma $\tilde{A}_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ é a chamada de <u>soma de Riemann</u> de $f(x)$. Observamos que $\tilde{A}_n$ e A também satisfazem $\tilde{s}_n \leq \tilde{A}_n \leq \tilde{S}_n$ e $\tilde{s}_n \leq A \leq \tilde{S}_n$ (onde as somas superior e inferior são calculadas com a mesma subdivisão em intervalos irregulares). No limite de $n \to \infty$ com todos os $\Delta x_i \to 0$, $\tilde{s}_n$ e $\tilde{S}_n$ também tendem ao mesmo valor, o que implica, pelo Teorema do Confronto, que $\lim\limits_{\Delta\to 0} \tilde{s}_n = \lim\limits_{\Delta\to 0} \tilde{S}_n = \lim\limits_{\Delta\to 0} \tilde{A}_n = \lim\limits_{\Delta\to 0} A = A,$
onde Δ denota o tamanho do maior dos intervalos, i.e., $\Delta = \max\limits_{1\leq i\leq n} |\Delta x_i|$.

Notação: Escrevemos

$$A = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx \tag{6.2.5}$$

e dizemos que A é dada pela integral definida de a até b sobre $f(x)$.

Ou seja, uma integral é definida como o limite da soma de Riemann de áreas de retângulos. O símbolo representa um S esticado, pois representa uma soma. O fato de termos usado esse mesmo símbolo para denotar a antiderivada se deve ao **Teorema Fundamental do Cálculo** que veremos na Seção 6.4.

6.2.6 Função integrável

A função $f(x)$ é integrável em $[a,b]$ se para todo x em $[a,b]$, a integral $\displaystyle\int_a^x f(x)dx$ existe, i.e., se o limite da soma de Riemann na equação 6.2.5 existe.

Note que a afirmação "a funçao f é integrável em $[a,b]$" é sinônimo de "a integral definida de f de a até x existe para todo x em $[a,b]$".

6.2.7 A integral definida

Vimos que a área por baixo de f em $[a,b]$ é: $\quad A = \displaystyle\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, sendo $x_0 = a$, e $x_n = b$ e ξ_i um ponto qualquer em $[x_{i-1}, x_i]$. Além disso, $\Delta = \displaystyle\max_{1 \le i \le n} \|\Delta x_i\|$. Note que $n \to \infty$ quando $\Delta \to 0$.

Escrevemos: $A = \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ e observamos que, para descobrir o valor da área, não importa a letra usada para representar o eixo (veja Figura 6.17).

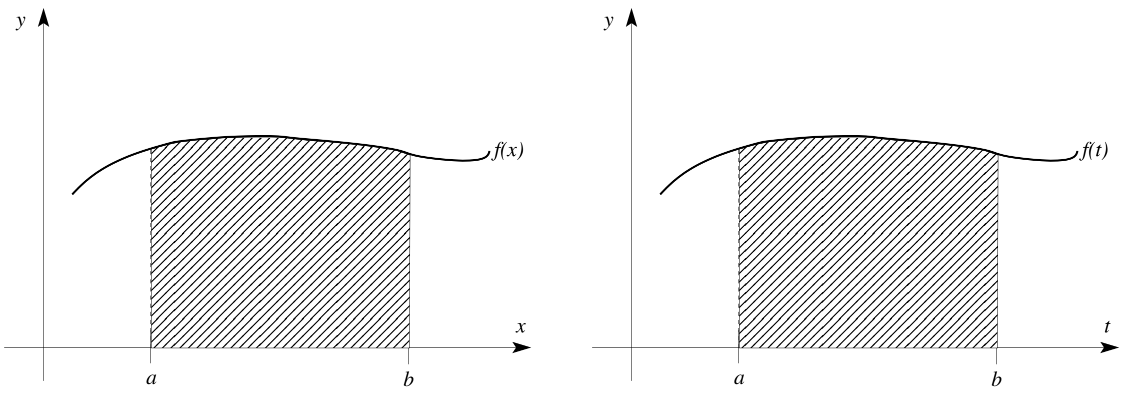


Figura 6.17: A letra usada para variável de intergração é irrelevante.

Podemos trocar o nome da variável de integração se isso for cômodo. (Como o índice da soma, a variável de integração é muda.)

6.2.7.1 Propriedades da integral definida

Pela definição da integral definida como limite da soma de Riemann, podemos concluir imediatamente as seguintes propriedades:

1. $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ (pois se $x_0 > x_n$, temos $\Delta x_i < 0 \; \forall \; i$)

2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ (pois, se $b = a$, $\Delta x_i = 0 \; \forall \; i$)

3. $\displaystyle\int_a^b c dx = c(b-a)$ (pois $f(\xi_i) = c$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$)

4. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (pois $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{k} + \sum_{i=k+1}^{n}$)

Observação: Essa propriedade vale para $c \in (a,b)$, mas também para $c \notin (a,b)$, contanto que f seja contínua em todos os intervalos envolvidos (veja Figura 6.18).

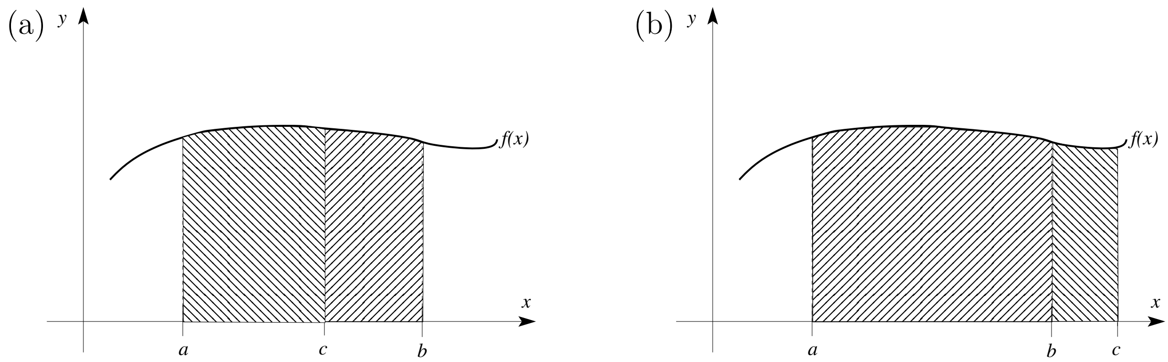


Figura 6.18: Ilustração da propriedade 4. (a) $c \in (a,b)$; (b) $c \notin (a,b)$. Note que nesse caso, a área no intervalo (b,c) contribui negativamente, de acordo com a propriedade 1.

5. $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (pela propriedade 2 do somatório)

6. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ (pela propriedade 3 do somatório)

As propriedades 5 e 6 juntas implicam que a integral definida é uma operação linear, i.e.,
$\displaystyle\int_a^b a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x)]dx = a_1\int_a^b f_1(x)dx + a_2\int_a^b f_2(x)dx + \ldots a_n \int_a^b f_n(x)dx.$

Além disso, temos (pelos valores somados na soma de Riemann):

7. Se $f(x) \geq 0 \; \forall x \in (a,b)$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$

8. Se $f(x) \geq g(x) \; \forall x \in (a,b)$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ (veja Figura 6.19a).

9. Se $m \leq f(x) \leq M \; \forall x \in (a,b)$ então $\displaystyle m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ (veja Figura 6.19b).

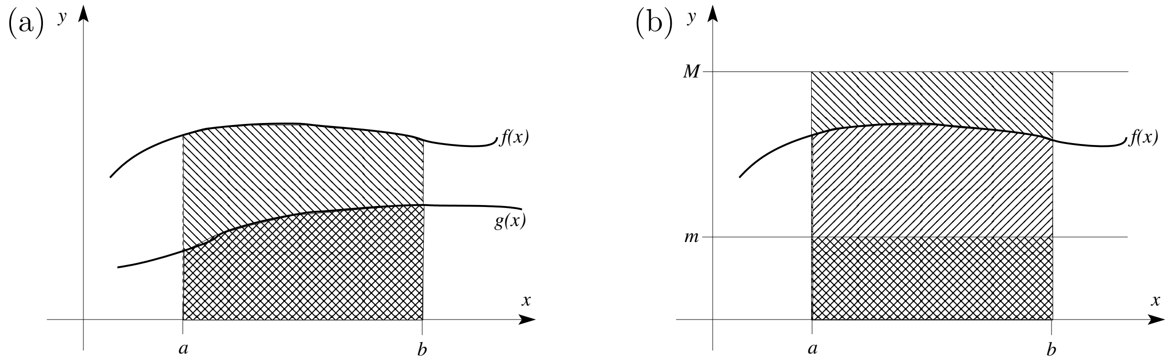


Figura 6.19: (a) Ilustração da propriedade 8. (b) Ilustração da propriedade 9.

6.3 Teorema do valor médio para integrais

Teorema do valor médio para integrais: Se f for uma função contínua em $[a, b]$, então existe um número X em $[a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(X)(b - a)$.

Veja a prova gráfica na Figura 6.20.

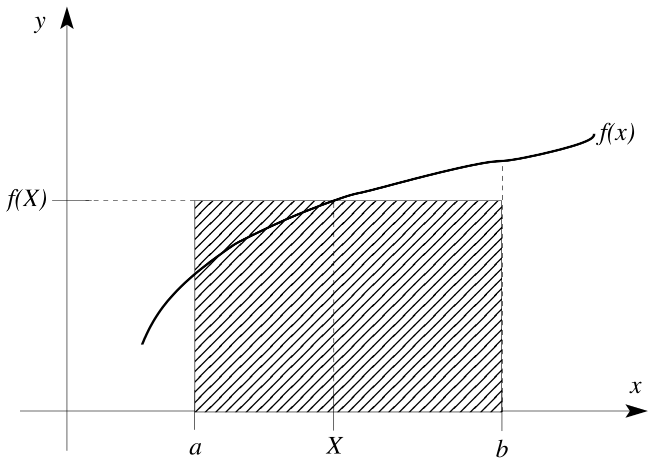


Figura 6.20: Prova gráfica do Teorema do Valor Médio para Integrais: Se f for contínua em $[a, b]$, a reta que define um retângulo com área igual a $\int_a^b f(x)\,dx$ por baixo da função tem que cruzar a função em algum ponto X, pois as partes do retângulo acima e a baixo da função tem que se compensar.

Definição: O valor $f(X) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ chama-se de valor médio de f em $[a, b]$.

6.4 Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Com a notação da integral definida, podemos reescrever as áreas por baixo das funções simples $f_1(x) = 3$, $f_2(x) = 3x$ e $f_3(x = x^2$, calculadas acima, por

$$A_1(x) = \int_0^x f_1(x)dx = \int_0^x 3dx = 3x \qquad \text{com } A_1'(x) = f_1(x)$$
$$A_2(x) = \int_0^x f_2(x)dx = \int_0^x 3xdx = \frac{3}{2}x^2 \qquad \text{com } A_2'(x) = f_2(x)$$
$$A_3(x) = \int_0^x f_3(x)dx = \int_0^x x^2dx = \frac{1}{3}x^3 \qquad \text{com } A_3'(x) = f_3(x)$$

O seguinte teorema generaliza essa observação.

6.4.1 Teorema Fundamental do Cálculo, parte I

Teorema: Se f for uma função <u>contínua</u> em um intervalo <u>aberto</u> (a, b), então a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua e diferenciável em (a, b) e $F'(x) = f(x) \; \forall \; x \in (a, b)$.

Prova: $F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right]$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Por f ser contínua em (a, b) sabemos que f é contínua em $[x, x + \Delta x]$ para todo $x \in (a, b)$.

Portanto, pelo Teorema do Valor Médio para Integrais existe $X \in [x, x+\Delta x]$ tal que $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(X) \cdot \Delta x$.

Substituíndo acima, obtemos
$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} [f(X) \cdot \Delta x] = \lim_{\Delta x \to 0} f(X) = f(x)$,
onde usamos a continuidade de f e que $\lim_{\Delta x \to 0} X = x$, pois X fica dentro do intervalo delimitado por x e $x + \Delta x$.

Esta parte I do Teorema Fundamental do Cálculo conecta a antiderivada à área por baixo de uma função.

Interpretação de $A'(x) = f(x)$: A área varia de acordo com o valora da função no ponto final (veja Figura 6.21).

6.4.2 Teorema Fundamental do Cálculo, parte II

Teorema: Seja f <u>contínua</u> em um intervalo <u>fechado</u> $[a, b]$. Então, se $f(x) = g'(x) \; \forall \; x \in (a, b)$ (i.e., se g for uma antiderivada particular de f) então $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

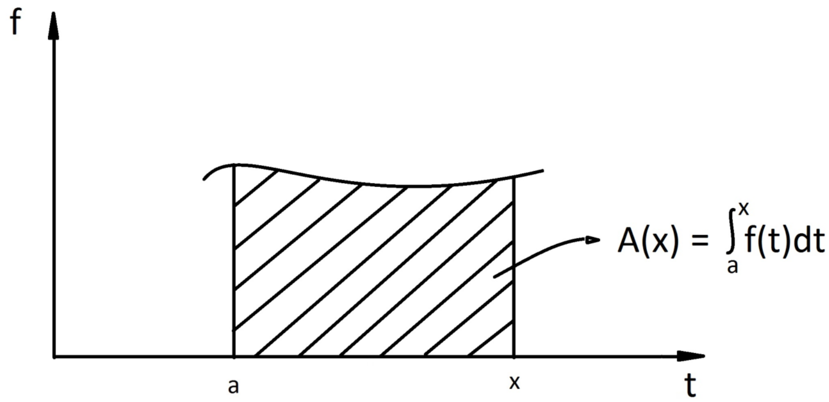


Figura 6.21: Teorema Fundamental do Cálculo, parte I: A variação da área por baixo da função $f(t)$ devido à variação do ponto final x é dada pelo valor da função f no ponto x. Em outras palavras, a função $A(x)$ que descreve a área por baixo da função $f(t)$ no intervalo $[a, x]$ é dada por uma antiderivada de $f(t)$.

Prova: f é contínua em $[a, b]$, portanto existe a integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para todo x em (a, b) (TFC, p I) e segue ainda que $F'(x) = f(x)$. Portanto $g'(x) = F'(x)$, o que implica $g(x) = F(x) + k = \int_a^x f(t)dt + k$. Portanto, pela continuidade lateral de f nas pontas do intervalo,

$$g(b) = \int_a^b f(t)dt + k \quad \text{e} \quad g(a) = \underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{=0} + k = k$$

Assim $g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)dt + k - k$, ou seja, $\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$.

Observação: Embora a integral definida exista para funções descontínuas contanto que sejam seccionalmente contínuas, o TFC exige **continuidade** da função no intervalo de integração. Assim, quando tivermos que calcular a integral de uma função descontínua, temos que fazer uso da decomposição $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ em cada ponto c onde a função for descontínua! Desse modo, o TFC sempre será aplicado em intervalos em que f será contínua. Essa situação será tratada mais detalhadamente mais adiante (ver Seção 6.12 Integrais Impróprias).

Exemplo 1. *Calcule* $\int_1^4 x^2dx$

Usando a antiderivada particular $\int x^2dx = g(x) = \frac{x^3}{3}$, obtemos

$g(3) - g(1) = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21 \Rightarrow \int_1^4 x^2dx = 21$ u.a. (unidades de área).

Notação: $g(b) - g(a) = g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = g(x)\Big|_a^b$ (Lemos: $g(x)$ entre a e b.)

Assim, escrevemos: $\int_1^4 x^2dx = \frac{x^4}{3}\Big|_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$ u.a.

E a constante de integração? Ela não atrapalha essa conta?

Vejamos. Temos

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Daí

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ou

$$\int_a^b f(x)dx = (F(x) + c)\Big|_a^b = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

Observamos que a constante não importa. Portanto, qualquer antiderivada da função integrada serve.

Exemplo 2. *Calcule* $\int_2^4 1dx$

$$\int_2^4 1dx = x\Big|_2^4 = 4 - 2 = 2 \text{ u.a.}$$

$$\int_2^4 1dx = (x+7)\Big|_2^4 = 11 - 9 = 2 \text{ u.a.}$$

Em geral: $\int_a^b dx = x\Big|_a^b = b - a$

Exemplo 3. *Calcule* $\int_a^b x^n dx$

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = \frac{b-a}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a^{n-i}b^i$$

Exemplo 4. $\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx = ?$

$\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_2^4 = (\frac{256}{4} - 2 \cdot 64 + 9\frac{16}{2} + 4) - \left(\frac{16}{4} - 2 \cdot 8 + 9\frac{4}{2} + 2\right) = (64 - 128 + 72 + 4) - (4 - 16 + 18 + 2) = 12 - 8 = 4$ u.a.

6.4.3 Teorema da Variação Total

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$, contanto que f é contínua em $[a, b]$ e $g'(x) = f(x)$. Substituindo esta última relação na integral, obtemos o **Teorema da Variação Total:** A integral de uma taxa de variação de uma função fornece a variação total, i.e.,

$$\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a).$$

Exemplo 5. *Se $D'(t)$ é a taxa de variação do valor do dinheiro aplicado em função do tempo, calcule o rendimento total.*
Temos que $\int_{t_0}^{t_f} D'(t)dt = D(t_f) - D(t_0)$ é a variação total, i.e., o rendimento, no intervalo $[t_0, t_f]$.

Exemplo 6. *Se $v(t)$ descreve a velocidade variável ao longo de um percurso, calculoe o deslocamento total.*
Temos que $\int_{t_0}^{t_f} v(t)dt = s(t_f) - s(t_0)$ descreve o deslocamento total, i.e., a distância entre os pontos inicial $s(t_0)$ e final $s(t_f)$.

Observação: A integral acima não descreve o caminho total percorrido. Se a função $v(t)$ for positiva entre t_0 e t_1, negativa entre t_1 e t_2 e novamente positiva entre t_2 e t_f, então temos
$\int_{t_0}^{t_f} v(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt + \int_{t_2}^{t_f} v(t)dt = \overset{>0}{s_1} + \overset{<0}{s_2} + \overset{>0}{s_3}.$
O caminho percorrido é dado pela soma do valor absoluto de cada trecho, i.e.
$|s_1|+|s_2|+|s_3| = s_1 - s_2 + s_3 = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt + \int_{t_2}^{t_f} v(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)|dt + \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|dt + \int_{t_2}^{t_f} |v(t)|dt = \int_{t_0}^{t_f} |v(t)|dt.$
Qual das duas integrais precisa ser resolvida, depende do problema sob consideração. Enquanto numa prova de natação, o que interessa é o caminho total percorrido, na tentativa de atravessar um rio contra a correnteza, o importante é o deslocamento total.

6.5 Técnicas de Integração

A seguir, estudaremos as duas técnicas de integração básicas, sendo a Substituição (que deriva da Regra da Cadeia) e a Integração por Partes (que deriva da Regra do Produto).

Cabe observar que, enquanto as regras de diferenciação (Regra da Soma, Regra do Produto, Regra do Quociente, Regra da Cadeia) são gerais e permitem o cálculo da derivada de qualquer função elementar (i.e., combinação algébrica das funções polinomiais, trigonométricas, hiperbólicas, exponenciais e logarítmicas), o mesmo não pode ser afirmado sobre a antiderivada. Nem toda função elementar tem uma antiderivada elementar. Mesmo quando tal função existe, pode ser necessário um caminho longo com a aplicação múltipla de técnicas de integração para encontrá-la.

6.5.1 Substituição

6.5.1.1 Regra da cadeia da integração

A técnica da substituição é a regra da cadeia da integração. Ela é deduzida a partir da regra da cadeia da derivada:

$$\frac{dF(g(x))}{dx} = \frac{dF}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Integrando essa relação, i.e., igualando as antiderivadas, obtemos

$$\int \frac{dF(g(x))}{dx} dx = \int \frac{dF}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} dx$$

a menos uma constante de integração, que não precisa ser explicitada, pois sabemos que antiderivadas sempre possuem essa não unicidade.

Sendo a integral do lado esquerdo a antiderivada aplicada a derivada, podemos concluir que

$$F(g(x)) = \int \frac{dF}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} dx$$

a menos uma constante de integração, que não precisa ser explicitada, pois está embutida na integral do lado direito. Iremos explicitá-la quando resolvermos a integral.

Pelo outro lado, ignorando temporariamente a dependência de g da variável independente x, podemos obter F ao integrar a sua derivada com respeito a g, i.e.,

$$F(g) = \int \frac{dF}{dg} dg$$

(novamente a menos uma constante). Igualando as últimas duas expressões, encontramos

$$F(g(x)) = \int \frac{dF}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} dx = \int \frac{dF}{dg} dg$$

ou seja, dentro de uma integral, podemos igualar

$$\boxed{\frac{dg}{dx} dx = dg}$$

Formalizando, podemos afirma o seguinte

Teorema: Seja g uma função derivável de x, e seja $\mathbb{V}$ a imagem de g. Suponhamos ainda que f seja uma função definida em $\mathbb{V}$ e que F seja uma antiderivada de f em $\mathbb{V}$. Então, se $u = g(x)$, temos

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

6.5.1.2 Interpretação geométrica de $du = g'(x)dx$

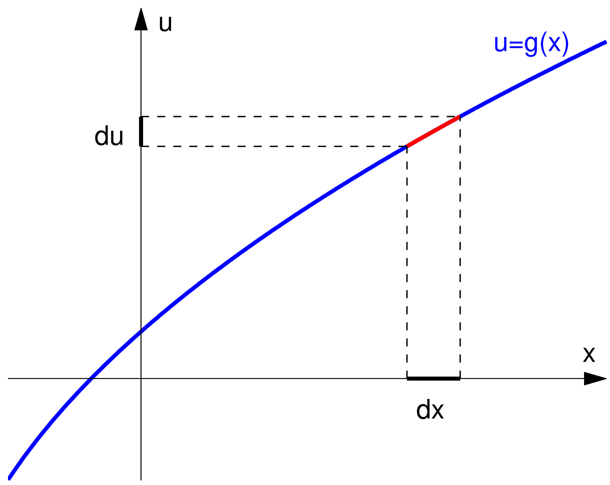


Figura 6.22: Interpretação geométrica de $du = g'(x)dx$: um pequeno intervalo du é relacionado a um pequeno intervalo dx pela inclinação da curva $u = g(x)$.

6.5.1.3 Cálculo de integrais por substituição

Em consequência, temos a técnica da **Substituição**: Podemos mudar a variável de integração substituindo $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$. Note que a variável substituída não pode mais aparecer na integral após a substituição.

Observação: Na forma mais simples da substituição, a usamos para reduzir a expressão envolvendo uma função composta a uma função simples. Porém, é importante lembrar que a substituição pode ser aplicada em ambas as direções, i.e., não só eliminando uma função composta mas também introduzindo uma. Isso pode ser vantajoso para a manipulação algébrica da expressão resultante.

Exemplo 1. *Calcule* $I(x) = \int (x+1)^2 dx$.

Caminho convencional: $I(x) = \int (x+1)^2 dx = \int (x^2 + 2x + 1)dx = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x + c$.
Por outro lado, queremos integrar uma função composta $f(g(x)) = (x+1)^2$.
Identificamos $u = g(x) = x + 1$ e obtemos $f(g(x)) = f(x+1) = f(u) = u^2$.
Pela regra da substituição, precisamos de $g'(x) = 1$ para determinarmos $du = g'(x)dx$.
Obtemos $du = 1 \cdot dx = dx$.
Assim, $I(x) = \int u^2 du = \dfrac{u^3}{3} + C = \dfrac{1}{3}(x+1)^3 + C$
onde fizemos uso de $u = x + 1$ no último passo.
Estes resultados são iguais?
Para fins de comparação, escrevemos $\frac{1}{3}(x+1)^3 + C = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} + C$.
Notamos que o formato da curva é o mesmo, já que é determinado pela parte que depende de x, i.e., $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$. A posição na vertical, determinada pela constante, é desconhecida, fato expressado pelo valor desconhecido da constante de integração. Sendo assim, a forma exata da expressão da constante é livre. Assim, podemos concluir que as expressões são equivalentes, uma vez que podemos escrever $\frac{1}{3} + C = c$ (i.e., o valor da expressão $\frac{1}{3} + C$ é uma constante desconhecida, o mesmo que vale para c).

A equivalência das duas expressões pode ser observada também pelo fado de que com uma condição inicial, ambas as expressões fornecem a mesma solução particular:
Suponha que procuremos aquela solução da integral que passa pelo ponto $(3, 2)$.
Pela primeira forma da solução, temos $I(3) = \frac{1}{3}3^3 + 3^2 + 3 + c = 2$ o que implica $c = 2 - 9 - 9 - 3 = -19$. Assim, $I(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 19$.
Pela segunda forma da solução, temos $I(3) = \frac{1}{3}(3 + 1)^3 + C = 2$ o que implica $C = 2 - \frac{64}{3} = -\frac{58}{3}$. Assim, $I(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{58}{3} = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} - \frac{58}{3} = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 19$.
Encontramos a mesma solução particular.

Exemplo 2. *Calcule* $J(x) = \int (2x + 5)^{70} dx$

Substituição: $v = g(x) = 2x + 5$, $g'(x) = 2$, $\Rightarrow$ $dv = g'(x)dx = 2dx$. Temos a relação entre dv e dx, mas não temos $2dx$ na integral. Podemos manipular essa relação para isolar dx, obtendo $dx = \frac{1}{2}dv$. Assim, $J(x) = \int v^{70}\frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}\int v^{70}dv = \frac{1}{2}\frac{v^{71}}{71} + C = \frac{1}{142}(2x + 5)^{71} + C$.

Exemplo 3. *Determine a área da região entre a curva* $y = x\sqrt{x^2 + 5}$ *e o eixo* x *entre as retas verticais* $x = 0$ *e* $x = 2$ *(veja Figura 6.23).*

A área procurada é dada pela integral
$A = \int_0^2 x\sqrt{x^2 + 5}dx = \int_0^2 \sqrt{x^2 + 5}\, xdx.$
Substituição: A nova variável de integração será
$w = g(x) = x^2 + 5$, com $g'(x) = 2x$
$\Rightarrow$ $dw = g'(x)dx = 2xdx$, portanto $xdx = \frac{1}{2}dw$.
Além disso, temos limites de integração que definem os valores inicial e final de x. Eles também definem os valores inicial e final da nova variável w pela relação que define w em termos de x, i.e., os novos limites inferior e superior da integral em w serão: $w(0) = 0^2 + 5 = 5$ e $w(2) = 2^2 + 5 = 9$.

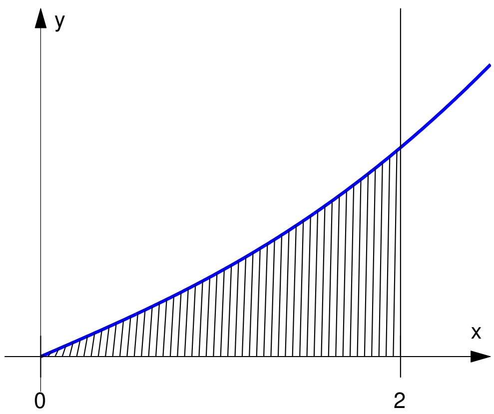


Figura 6.23: Área da região entre $y = x\sqrt{x^2 + 5}$, $x = 0$ e $x = 2$.

Desta forma,
$$A = \int_5^9 \sqrt{w}\frac{1}{2}dw = \frac{1}{2}\int_5^9 w^{1/2}dw = \frac{1}{2}\frac{w^{3/2}}{3/2}\Big|_5^9 = \frac{1}{3}(9^{3/2} - 5^{3/2}) = \frac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5}) \text{ u.a.}$$

Observação: Notamos que a substituição demonstra a equivalência de uma determinada área com uma área por baixo de outra função Pela conta acima, vemos que a área grafada da Figura 6.23 é igual à metade da área grafada da Figura 6.24.

Observação: Podemos concluir que a forma geral da Substituição em uma integal definida é:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \\ &= F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(x))\Big|_a^b \\ &= F(g(b)) - F(g(a))\end{aligned}$$

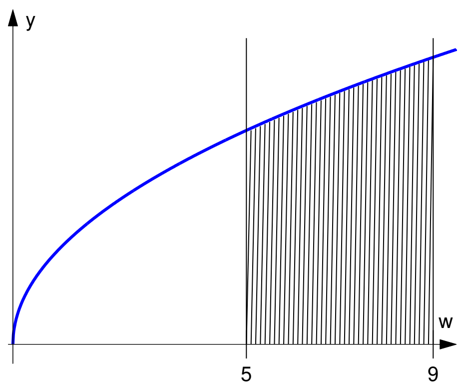


Figura 6.24: Área da região entre $y = \sqrt{w}$, $w = 5$ e $w = 9$.

Exemplo 4. *Calcule* $K = \int_0^2 9x^5\sqrt{x^6+36}dx$

$K = 9\int_0^2 \sqrt{x^6+36}\,x^5dx$

Substituição: $t = g(x) = x^6+36$, $g'(x) = 6x^5$, $dt = 6x^5dx$, $x^5dx = \frac{1}{6}dt$, $t(0) = 36$, $t(2) = 100$.

Assim, $K = 9\int_{36}^{100}\sqrt{t}\frac{1}{6}dt = \frac{3}{2}\int_{36}^{100} t^{1/2}dt = \frac{3}{2}\left.\frac{t^{3/2}}{3/2}\right|_{36}^{100} = 100^{3/2} - 36^{3/2} = 1000 - 216 = 784$ u.a.

Exemplo 5. *Calcule* $R(x) = \int x^2\sqrt{x+1}dx.$

Substituição: $s = g(x) = x+1$, $g'(x) = 1$, $ds = dx$.

$R(x) = \int \underbrace{x^2}_{??}\sqrt{s}ds$. Como substituímos a variável, a integral não pode mais depender de x.

Sabemos que $x+1 = s$. Portanto, $x = s-1 \Rightarrow x^2 = (s-1)^2$.

Assim, $R(x) = \int (s-1)^2\sqrt{s}ds = \int (s^2-2s+1)s^{1/2}ds = \int (s^{5/2} - 2s^{3/2} + s^{1/2})ds = \frac{s^{7/2}}{7/2} - 2\frac{s^{5/2}}{5/2} + \frac{s^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{7}s^{7/2} - \frac{4}{5}s^{5/2} + \frac{2}{3}s^{3/2} + C = \frac{2s^{3/2}}{105}(15s^2 - 42s + 35) + C = \frac{2(x+1)^{3/2}}{105}(15(x+1)^2 - 42(x+1) + 35) + C = \frac{2}{105}\sqrt{(x+1)^3}(15(x^2+2x+1) - 42x - 42 + 35) + C = \frac{2}{105}\sqrt{(x+1)^3}(15x^2 - 12x + 8) + C.$

Será que acertamos?

Teste (como integrar é mais complicado que derivar, sempre é bom fazer esse teste): derivamos o resultado da integração para obter

$$\begin{aligned}
R'(x) &= \frac{2}{105}\left[\frac{3}{2}(x+1)^{1/2}(15x^2 - 12x + 8) + (x+1)^{3/2}(30x - 12)\right] \\
&= \frac{1}{105}\sqrt{x+1}\left[3(15x^2 - 12x + 8) + 2(x+1)(30x - 12)\right] \\
&= \frac{1}{105}\sqrt{x+1}\left[45x^2 - 36x + 24 + 2(30x^2 + 30x - 12x - 12)\right] \\
&= \frac{1}{105}\sqrt{x+1}\underbrace{\left[45x^2 - \cancel{36x}^{1} + \cancel{24}^{2} + 60x^2 + \cancel{36x}^{1} - \cancel{24}^{2}\right]}_{=105x^2} = x^2\sqrt{x+1} \checkmark
\end{aligned}$$

Observação: A substituição é bem-definida somente se a relação entre as variáveis de integração velha e nova é inversível, i.e., se $g'(x) \neq 0$ para todo x dentro do intervalo de integração.

6.5.1.4 Fórmulas úteis

Vimos que podemos aplicar a técnica da substituição para simplificar integrais da forma

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

com a substituição $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$.

Especificamente, podemos demonstrar a seguinte fórmula útil:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx \quad = \quad \ln|f(x)| + C$$

Para demonstrar essa fórmula, usamos a substituição $u = f(x)$ que fornece $u' = f'(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$. Obtemos

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx \quad = \quad \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$$

onde desfizemos a substituição no último passo, usando $u = f(x)$.

Em outras palavras, quando precisamos integrar frações, a integração fica fácil se conseguirmos deixar a fração na forma em que o numerador representa a derivada do denominador.

Correspondemente (exercício), podemos demonstrar

$$\begin{aligned}
\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx &= 2\sqrt{f(x)} + C \\
\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}\, dx &= \arctan[f(x)] + C \\
\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}\, dx &= \text{arcsen}[f(x)] + C
\end{aligned}$$

e fórmulas análogas envolvendo outras funções compostas.

6.5.1.5 Integrais simétricas de funções simétricas

Integrais simétricas de funções pares e ímpares:
Para fazer uso da simetria, observamos que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$.
Na primeira parte da integral, fazemos a substituição
$t = g(x) = -x$, $g'(x) = -1$, $dt = -dx$, $t(-a) = a$, $t(0) = 0$.
Assim, $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx$.
Deste modo, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx$.

Agora, podemos usar a simetria de f:

Caso 1: f é uma função par: Daí, $f(-x) = f(x)$ e, portanto, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Caso 2: f é uma função ímpar: Daí, $f(-x) = -f(x)$ e, portanto, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Observação: Integrais simétricas de funções ímpares são nulas!

6.5.2 Integração por Partes

6.5.2.1 Regra do Produto da Integração

A integração por partes é a regra do produto da integração. Ela pode ser deduzida a partir da regra do produto da derivada:

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}$$

Integrando esta relação, obtemos

$$\int \frac{d(f \cdot g)}{dx} dx = \int \frac{df}{dx} \cdot g \, dx + \int f \cdot \frac{dg}{dx} dx$$

Sendo a primeira integral a antiderivada aplicada a derivada, podemos concluir que

$$f \cdot g = \int \frac{df}{dx} \cdot g \, dx + \int f \cdot \frac{dg}{dx} dx$$

(a menos uma constante de integração, que está embutida nas integrais do lado direito). Isolando a última integral do lado direito, obtemos

$$\boxed{\int f \cdot \frac{dg}{dx} \, dx = f \cdot g - \int \frac{df}{dx} \cdot g \, dx} \quad \text{ou} \quad \boxed{\int f \, g' \, dx = f \, g - \int g \, f' \, dx}$$

Usando a regra de substituição nesta expressão, ela pode ser escrita de forma alternativa como

$$\boxed{\int f dg = f \, g - \int g \, df}$$

6.5.2.2 Cálculo de integrais por integração por partes

A fórmula da integração por partes permite que, ao integrar produtos de funções, identificar um fator como f e outro como g', derivar o primeiro e integrar somente o segundo, com o intuito de que a integral resultante do lado direito seja mais facilmente resolvível.

Exemplo 6. *Calcule* $I(x) = \int x\sqrt{x+1}dx$.
Identificamos $f = x$ e $g' = \sqrt{x+1}$.

Derivando f e integrando g', obtemos, respectivamente, $f' = 1$ e $g = \int \sqrt{x+1}dx = \int u^{1/2} du = \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$, onde usamos $u = x+1$, $dx = du$.

Observação: Ao integrarmos $g'(x)$, somente precisamos de uma antiderivada particular. Não há necessidade de usar a antiderivada geral. A constante de integração será considerada ao resolver a última integral remanescente.

Assim, por integração por partes,
$I(x) = f \cdot g - \int \frac{df}{dx} \cdot g \, dx = x \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1 \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2} dx =$

$\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int u^{3/2}du = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\frac{u^{5/2}}{5/2} + C = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C =$
$\frac{2}{15}(x+1)^{3/2}[5x - 2(x+1)] + C = \frac{2}{15}(x+1)^{3/2}(3x-2) + C$
onde usamos a mesma substituição da integração de $g'(x)$.

Teste: $I'(x) = \frac{2}{15}\left[\frac{3}{2}(x+1)^{1/2}(3x-2) + (x+1)^{3/2}3\right] = \frac{1}{5}(x+1)^{1/2}\underbrace{[3x-2+2(x+1)]}_{5x} =$
$x\sqrt{x+1}\checkmark$.

Observação: Integrais que envolvem fatores de potências de x são candidatas naturais à aplicação da integração por partes.

Exemplo 7. *Calcule* $F(x) = \int x^2\sqrt{2x+1}dx$.
Identificamos $f = x^2$ e $g' = \sqrt{2x+1}$.
Derviando f e integrando g', obtemos $f' = 2x$ e
$g = \int (2x+1)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}$, onde usamos $u = 2x+1$, $du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$.
Substituindo na fórmula da integração por partes, obtemos
$F(x) = x^2 \cdot \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} - \int 2x \cdot \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}dx = \frac{1}{3}x^2(2x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int x(2x+1)^{3/2}dx.$
A esta integral, aplicamos integração por partes mais uma vez, identificando
$f = x$ e $g' = (2x+1)^{3/2}$. Ao derivar e integrar, obtemos
$f' = 1$ e $g = \int (2x+1)^{3/2}dx = \frac{1}{2}\int u^{3/2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{5/2}}{5/2} = \frac{1}{5}(2x+1)^{5/2}$, onde usamos novamente $u = 2x+1$, $du = 2dx$.
Assim, obtemos $F(x) = \frac{1}{3}x^2(2x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\left[x \cdot \frac{1}{5}(2x+1)^{5/2} - \int 1 \cdot \frac{1}{5}(2x+1)^{5/2}dx\right] =$
$\frac{1}{3}x^2(2x+1)^{3/2} - \frac{2}{15}x(2x+1)^{5/2} + \frac{2}{15}\int (2x+1)^{5/2}dx.$
Pela mesma substituição de antes, $u = 2x+1$, $du = 2dx$, podemos integrar a última integral, obtendo
$\int (2x+1)^{5/2}dx = \frac{1}{2}\int u^{5/2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{7/2}}{7/2} + C = \frac{1}{7}(2x+1)^{7/2} + C,$
o que fornece

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{3}x^2(2x+1)^{3/2} - \frac{2}{15}x(2x+1)^{5/2} + \frac{2}{105}(2x+1)^{7/2} + C \\
&= \frac{1}{105}(2x+1)^{3/2}\left[35x^2 - 14x(2x+1) + 2(2x+1)^2\right] + C \\
&= \frac{1}{105}(2x+1)^{3/2}\left[35x^2 - 28x^2 - 14x + 2(4x^2+4x+1)\right] + C \\
&= \frac{1}{105}(2x+1)^{3/2}\left(15x^2 - 6x + 2\right) + C
\end{aligned}$$

Teste:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{105}\left[\frac{3}{2}(2x+1)^{1/2}2\cdot(15x^2-6x+2)+(2x+1)^{3/2}(30x-6)\right]\\
&= \frac{1}{35}(2x+1)^{1/2}\cdot\left[(15x^2-6x+2)+(2x+1)(10x-2)\right]\\
&= \frac{1}{35}(2x+1)^{1/2}\underbrace{\left[15x^2-6x+2+20x^2+10x-4x-2\right]}_{35x^2}=x^2\sqrt{2x+1}\checkmark
\end{aligned}$$

Exemplo 8. *Calcule a integral* $I(x)=\int \ln x\,dx$.
Truque: Integração por partes com o fator 1:
Identificando $f=\ln x$ e $g'=1$, obtemos
$f'=\frac{1}{x}$ e $g=x$.
Assim, $I(x)=f\cdot g-\int f'\cdot g dx=\ln x\cdot x-\int \frac{1}{x}\cdot x dx=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+C.$

Teste: $I'(x)=1\cdot\ln x+x\frac{1}{x}-1=\ln x\checkmark$

Observação: Essa ideia é sempre útil quando integrais envolvem logaritmos ou funções trigonométricas ou hiperbólicas inversas, já que derivar essas funções faz com que apareçam funções algébricas ou racionais.

Exerício: Cálcule $\int x\ln x\,dx$.

Exemplo 9. *Calcule* $G(x)=\int \arctan x dx$.
Identificando $f=\arctan x$ e $g'=1$, obtemos
$f'=\dfrac{1}{1+x^2}$ e $g=x$.
Assim, $G(x)=x\arctan x-\int \dfrac{x}{1+x^2}dx$.
Nessa integral, podemos substituir $v=1+x^2$, $dv=2xdx\Rightarrow xdx=\frac{1}{2}dv$, obtendo
$G(x)=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{v}dv=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln|v|+C=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$
onde podemos deixar de escrever o módulo na última expressão, porque o termo $1+x^2$ é sempre positivo.

Note que a integral $\int\dfrac{x}{1+x^2}dx$ pode ser transformada em uma integral da forma $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$, da qual demonstramos na Seção 6.5.1.4 que fornece $\ln|f(x)|+C$. Basta escrever $\int\dfrac{x}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{2x}{1+x^2}dx$ para reconhecermos que a derivada da função no denominador é o numerador, o que implica que o resultado é $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

Observação: É importante notar que a fórmula da integração por partes,

$$\int f\cdot\frac{dg}{dx}dx=f\cdot g-\int\frac{df}{dx}\cdot g\,dx$$

vale a menos uma constante (porque ela foi obtida integrando a Regra do Produto).

Exemplo 10. *Vamos calcular a integral* $\int \frac{1}{x}dx$ *por integração por partes.*
Identificamos $f = \frac{1}{x}$ e $g' = 1$.
Derivando f e integrando g', obtemos, respectivamente,
$$f' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad g = x.$$
Assim, $\int \frac{1}{x}dx = x\frac{1}{x} - \int x\frac{-1}{x^2}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx,$
o que parece ser uma contradição. Não é, pois as duas integrais dois dois lados desta equação são "iguais a menos uma constante de integração", i.e., as constantes de integração dos dois lados diferem por 1.

Exemplo 11. *Calcule* $S(x) = \int x^2 \operatorname{sen} x dx.$
Identificando $f = x^2$ e $g' = \operatorname{sen} x$, obtemos
$$f' = 2x \quad \text{e} \quad g = -\cos x.$$
Assim, $S(x) = -x^2 \cos x - \int 2x \cdot (-\cos x)dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx.$
Integrando novamente por partes com $f = x$ e $g' = \cos x$, i.e.,
$f' = 1$ e $g = \operatorname{sen} x$, obtemos
$$\begin{aligned} S(x) &= -x^2 \cos x + 2\left[x \operatorname{sen} x - \int 1 \operatorname{sen} x dx\right] \\ &= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C = (2 - x^2)\cos x + 2x \operatorname{sen} x + C. \end{aligned}$$
Teste: $S'(x) = -2x \cos x + (2 - x^2)(-\operatorname{sen} x) + 2\operatorname{sen} x + 2x \cos x$
$= \cos x(-2x + 2x) + \operatorname{sen} x(-2 + x^2 + 2) = x^2 \operatorname{sen} x$✓

Exemplo 12. *Calcule* $E(x) = \int e^x \operatorname{sen} x dx.$
Identificando $f = e^x$ e $g' = \operatorname{sen} x$, temos
$$f' = e^x \quad \text{e} \quad g = -\cos x.$$
Assim, $E(x) = -e^x \cos x - \int e^x(-\cos x)dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$
Novamente integrando por partes com $f = e^x$ e $g' = \cos x$, ,
$f' = e^x$ e $g = \operatorname{sen} x$, obtemos
$E(x) = \int e^x \operatorname{sen} x dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x dx.$
Voltamos à mesma integral que queremos resolver, mas com sinal oposto. Consequentemente, podemos escrever
$E(x) = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - E(x) + C,$
onde observamos que as duas integrais $\int e^x \operatorname{sen} x dx$ podem ser diferentes por uma constante. Isso nos permite a resolver esta equação algebricamente. Passando a integral para o outro lado, obtemos então:
$2E(x) = 2\int e^x \operatorname{sen} x dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x + C$, ou seja,
$E(x) = \int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{1}{2}e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$

Teste: $E'(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + \frac{1}{2}e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$
$= \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x + \cos x + \operatorname{sen} x) = e^x \operatorname{sen} x \checkmark$

Observação: Ao aplicar a integração por partes mais que uma vez, temos que proceder, nas vezes subsequentes, derivando a f' da vez anterior e integrando a g da vez anterior, para não simplesmente desfazer o passo anterior.

6.6 Áreas entre funções

Dadas duas funções f e g, é frequente que precisamos calcular a área inclusa entre elas (vide Figura 6.25).

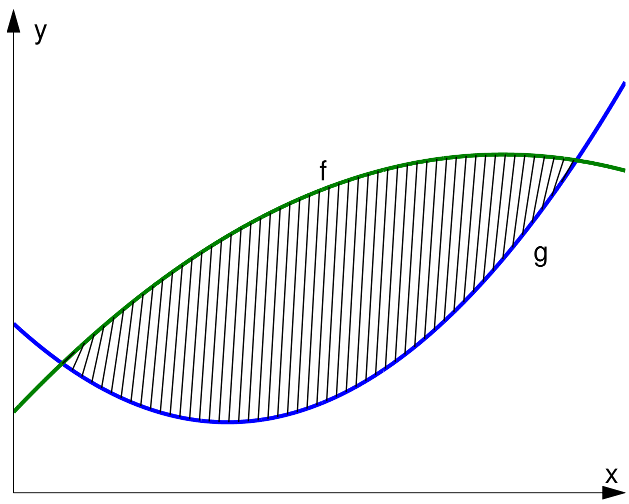


Figura 6.25: Área entre duas funções

Como proceder?

6.6.1 Diferença de áreas

Como é visível na Figura 6.25, a área é fechada somente entre pontos onde as funções se cruzam. Como primeiro passo, temos que determinar então os pontos onde isso acontece, i.e., onde $f(x) = g(x)$.

Denominamos os dois pontos de corte de x_1 e x_2 (veja Figura 6.26).

Encontrados esses pontos, podemos restringir o problema ao intervalo entre tais pontos. Se forem mais que dois, repetimos o procedimento entre cada dois pontos sucessivos entre eles.

Observamos ainda que no intervalo em questão, a área procurada é dada pela diferença das áreas abaixo das duas funções. Portanto, para subtrair essas áreas, é necessário avaliar qual das duas funções é maior neste intervalo. No exemplo da Figura 6.26 temos $f(x) > g(x) \forall x \in$

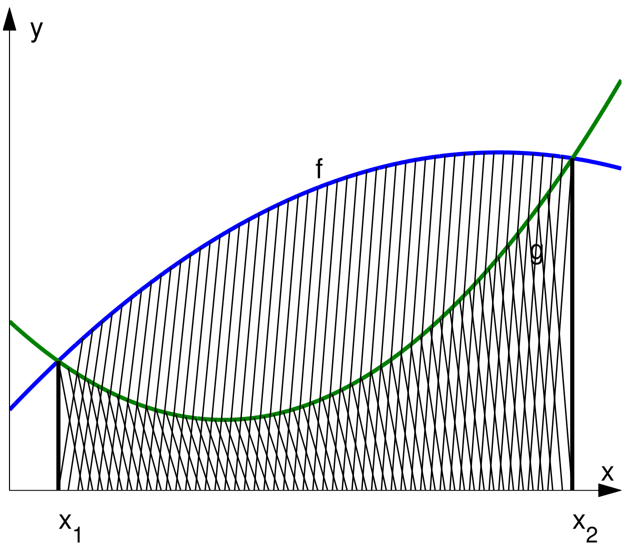


Figura 6.26: A área entre duas funções entre os pontos de crusamento x_1 e x_2 é dada pela diferença das áreas por baixo das funções.

(x_1, x_2). Portanto, a área será dada por

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]dx$$

Exemplo 1. *Determine a área entre* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = 8 - x^2$.

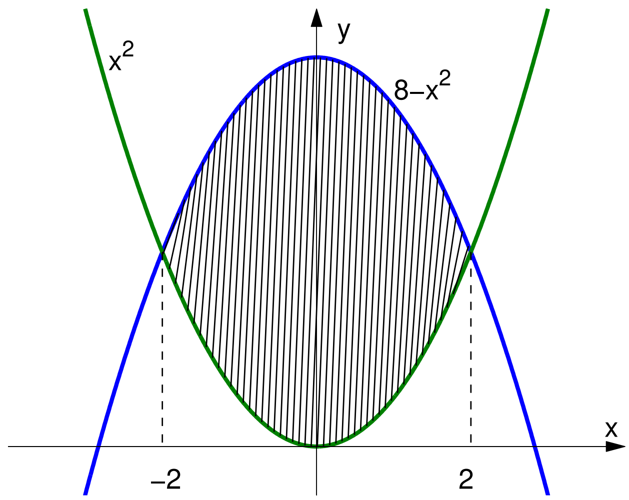


Figura 6.27: Área entre $f(x) = x^2$ e $g(x) = 8 - x^2$.

As duas funções se cortam onde $x^2 = 8 - x^2$, ou seja, $2x^2 = 8$, i.e., $x^2 = 4$, que implica $x = \pm 2$ (veja Figura 6.27). Portanto, no interior do intervalo $(-2, 2)$, as duas funções não se cruzam. Assim, como ambas são contínuas, se uma for maior que a outra em algum ponto do intervalo, será maior no intervalo todo. Uma vez que $f(0) = 0 < 8 = g(0)$, temos $f(x) < g(x)\ \forall\ x \in (-2, 2)$.

Portanto, $A = \int_{-2}^{2} [(8 - x^2) - x^2]dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)dx = 8x - \frac{2}{3}x^3 \Big|_{-2}^{2} =$

$$8 \cdot 2 - \frac{2}{3}2^3 - \left(8 \cdot (-2) - \frac{2}{3}(-2)^3\right) = 16 - \frac{16}{3} - \left(-16 - \frac{-16}{3}\right) = 32 - \frac{32}{3} = 2 \cdot \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \text{ u.a.}$$

Observação: Para essa análise, não importa se as funções envolvidas são positivas ou negativas.

Exemplo 2. *Calcule a ára entre as funções* $f(x) = 3x$ *e* $g(x) = 4 - x^2$.

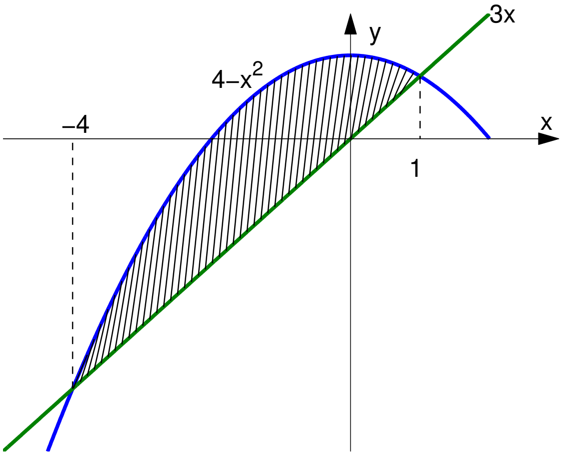


Figura 6.28: Área entre as funções $f(x) = 3x$ e $g(x) = 4 - x^2$.

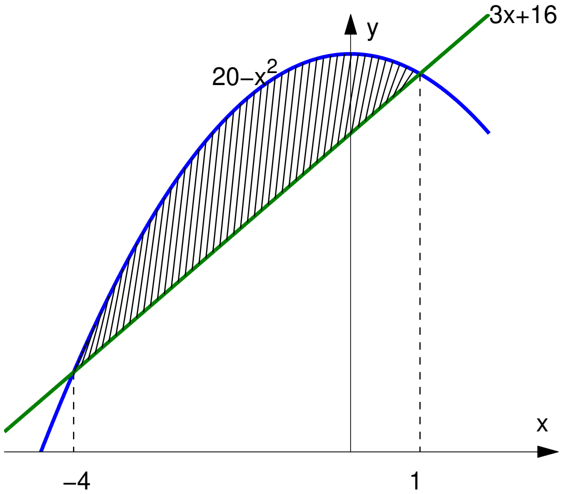


Figura 6.29: Área entre as funções $f(x) = 3x + 16$ e $g(x) = 20 - x^2$.

As funções se intersecionam onde $3x = 4 - x^2$, i.e., $x^2 + 3x - 4 = 0$, que tem as soluções $x = 1$ e $x = -4$ (veja Figura 6.28). No intervalo $(-4, 1)$, temos $g(x) > f(x)$, pois $f(-1) = -3 < 3 = g(-1)$. Assim, $A = \int_{-4}^{1}(4 - x^2 - 3x)dx = 4x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\Big|_{-4}^{1} = 4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - \left(4(-4) - \frac{1}{3}(-4)^3 - \frac{3}{2}(-4)^2\right) = 20 + \frac{1}{3}(-1 - 64) - \frac{3}{2} + 24 = 44 - \frac{65 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{264 - 130 - 9}{6} = \frac{125}{6}$ u.a.
Obtemos o mesmo resultado se calcularmos a área entre as curvas deslocadas 16 unidades para cima, i.e., $f(x) = 3x + 16$ e $g(x) = 20 - x^2$ (veja Figura 6.29).

Exemplo 3. *Determine a área entre* $\operatorname{sen} x$ *e* $\cos x$ *no intervalo* $[0, 2\pi]$.
Sabemos que no intervalo dado, $\operatorname{sen} x = \cos x$ em $x = \pi/4$ e $x = 5\pi/4$. Nos intervalos $(0, \pi/4)$ e $(5\pi/4, 2\pi)$, temos $\operatorname{sen} x < \cos x$, enquanto no intervalo $(\pi/4, 5\pi/4)$, temos $\operatorname{sen} x > \cos x$ (veja Figura 6.30). Desta forma, a área procurada terá de ser calculada por

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/4}(\cos x - \operatorname{sen} x)dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\operatorname{sen} x - \cos x)dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi}(\cos x - \operatorname{sen} x)dx \\
&= (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} + (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_{5\pi/4}^{2\pi} \\
&= \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 - 0 - 1 - (-\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2) + 0 + 1 - (-\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2) \\
&= 8 \cdot \sqrt{2}/2 = 4\sqrt{2} \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

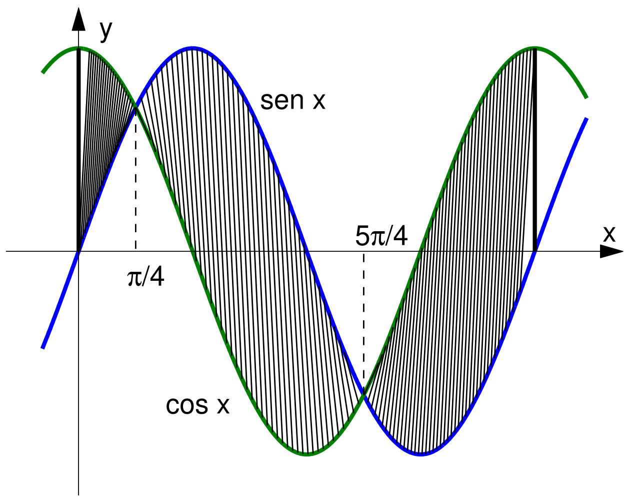


Figura 6.30: Área entre $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

6.6.2 Integração ao longo do eixo y

Quando for vantajoso, pode se integrar ao longo do eixo y.

Exemplo 4. *Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $x = y^2$.*
Para resolver isso da forma convencional, temos que isolar y na segunda curva, obtendo

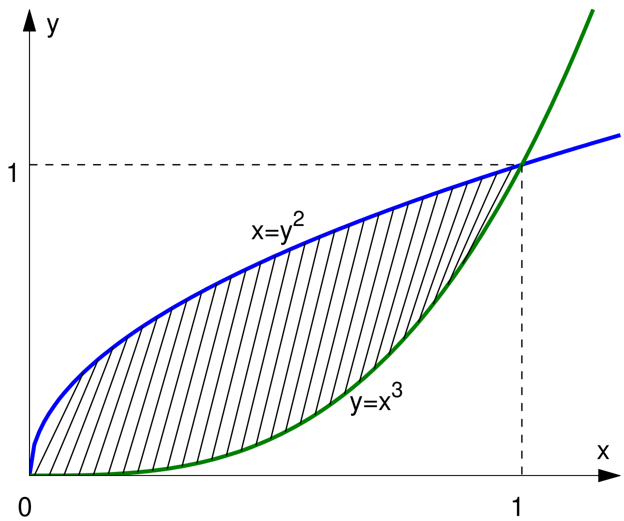


Figura 6.31: Área entre as curvas $y = x^3$ e $x = y^2$.

os dois ramos $y = \pm\sqrt{x}$. Como $x \geq 0$ para esta função ser real, e como $x^3 \geq 0$ para $x \geq 0$, sabemos que precisamos usar o ramo positivo. Veja a área procurada na Figura 6.31. Notamos que a interseção das curvas ocorre quando $x^3 = \sqrt{x}$, ou seja, $x^6 = x$ em $x = 0$ e $x^5 = 1 \;\Rightarrow\; x = 1$ e que, sendo as funções contínuas, $\sqrt{0.5} > 0.5^3 \;\Rightarrow\; \sqrt{x} > x^3\ \forall\, x \in (0, 1)$.
Assim, $A = \displaystyle\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ u.a.

Podemos também inverter a curva $y = x^3$ (que é uma função injetora em $\mathbb{R}$ e, portanto, não necessita de considerações de ramo) e usar as funções de y, $x = y^2$ e $x = y^{1/3}$. Estas

funções se cortam onde $y^2 = y^{1/3}$, ou seja, $y^6 = y$, i.e., em $y = 0$ e $y = 1$ e temos $0.5^2 < 0.5^{1/3} \Rightarrow y^2 < y^{1/3}\ \forall\, y \in (0,1)$.
Assim, a área pode ser calculado com a seguinte integral ao longo do eixo y:
$A = \displaystyle\int_0^1 (y^{1/3} - y^2)dy = \frac{y^{4/3}}{4/3} - \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ u.a.

Exemplo 5. *Determine a área da região delimitada pelas curvas $x + y = y^3$ e $x + y^4 = 1$.*
Notamos que neste caso, é mais simples isolar x do que y (veja Figura 6.32). Consideramos

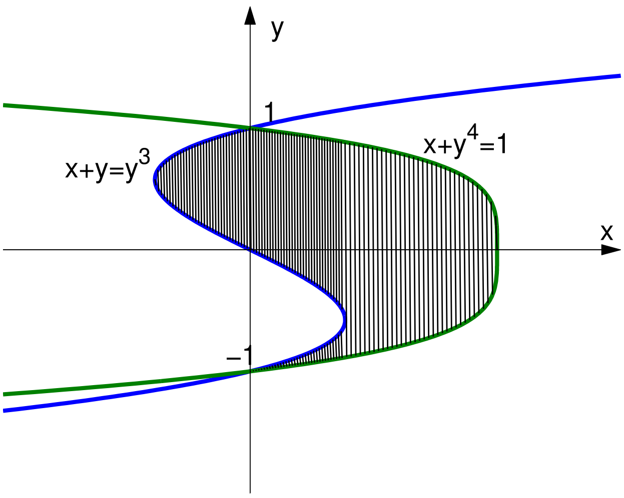


Figura 6.32: Área entre as curvas $x + y = y^3$ e $x + y^4 = 1$.

então as funções $x = y^3 - y$ e $x = 1 - y^4$. Estas funções se interseccionam onde $y^3 - y = 1 - y^4$, ou seja $y(y^2 - 1) = (1 - y^2)(1 + y^2)$. Notamos que ambos os lados zeram em $y = \pm 1$ e que $-y \neq 1 + y^2\ \forall\, y \in \mathbb{R}$. Além disso, $1 - y^4 > y^3 - y\ \forall\, y \in (-1,1)$ pois $f(0) = 1 > 0 = g(0)$.
Portanto, a área procurada é $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} [(1 - y^4) - (y^3 - y)]dy = y - \frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{1} =$ $1 - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} - \left(-1 - \dfrac{-1}{5} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{-1}{2}\right) = 2 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{5}$ u.a.

Exemplo 6. *Calcule a área da região entre a reta $y = x - 1$ e a parábola $y^2 = 2x + 6$.*
Notamos que a parábola $y^2 = 2x + 6$ não é uma função inversível no domínio do problema (veja Figura 6.33). Se integrarmos ao longo do eixo x temos que dividir a área em pedaços. As interseções dessas duas curvas acontecem onde $(x-1)^2 = 2x+6$, ou seja, $x^2 - 4x - 5 = 0$, i.e., em $x = -1$ e $x = 5$. Porém, a parábola se estende até o ponto $x = -3$. Portanto, no intervalo $(-3,-1)$, a área é delimitada pelos dois ramos da parábola e no intervalo $(-1,5)$, pelo ramo positivo da parábola e a reta. Assim, a área é: $A = \displaystyle\int_{-3}^{-1} \left[\sqrt{2x+6} - (-\sqrt{2x+6})\right] dx +$ $\displaystyle\int_{-1}^{5} \left[\sqrt{2x+6} - (x-1)\right] dx = 2\int_{-3}^{-1} \sqrt{2x+6}dx + \int_{-1}^{5} \sqrt{2x+6}dx - \int_{-1}^{5}(x-1)dx$. Nas primeiras duas integais, fazemos a substituição $u = 2x + 6$, $du = 2dx$, $u(-3) = 0$, $u(-1) = 4$, $u(5) = 16$. Obtemos $A = \displaystyle\int_0^4 \sqrt{u}du + \frac{1}{2}\int_4^{16} \sqrt{u}du - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{-1}^{5} = \frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_0^4 + \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_4^{16} -$ $\left[\left(\dfrac{25}{2} - 5\right) - \left(\dfrac{1}{2} - (-1)\right)\right] = \dfrac{2}{3}4^{3/2} - 0 + \dfrac{1}{3}\left(16^{3/2} - 4^{3/2}\right) - \left(\dfrac{24}{2} - 6\right) = \dfrac{16}{3} + \dfrac{1}{3}(64-8) - 6 =$

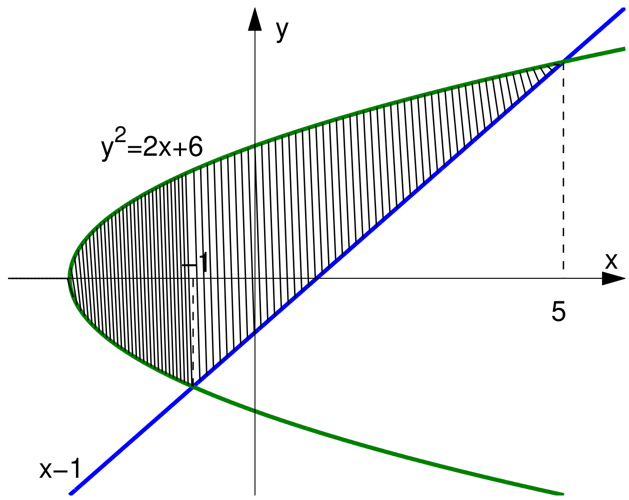


Figura 6.33: Área entre a reta $y = x - 1$ e a parábola $y^2 = 2x + 6$.

$\dfrac{72}{3} - 6 = 24 - 6 = 18$ u.a.

Caminho Alternativo: Se integrarmos ao longo do eixo y, tudo fica mais fácil. Isolando x nas duas igualdades, obtemos $x = y + 1$ e $x = \frac{1}{2}(y^2 - 6) = \frac{1}{2}y^2 - 3$. Portanto, a interseção das curvas acontece onde $y + 1 = \frac{1}{2}y^2 - 3$, ou seja, $y^2 - 2y - 8 = 0$, i.e., em $y = -2$ e $y = 4$. Como a reta fica acima da parábola, já que em $y = 0$ temos $y + 1 = 1 > \frac{1}{2}y^2 - 3 = -3$, podemos então escrever: $A = \displaystyle\int_{-2}^{4} \left[y + 1 - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right) \right] dy = \int_{-2}^{4} \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4 \right) dy = -\frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 4y \Big|_{-2}^{4} = -\frac{1}{6}[4^3 - (-2)^3] + \frac{1}{2}[4^2 - (-2)^2] + 4[4 - (-2)] = -\frac{1}{6}[64 + 8] + \frac{1}{2}[16 - 4] + 4[4 + 2] = -12 + 6 + 24 = 18$ u.a.

6.7 Volumes

6.7.1 Aproximando volumes

Queremos determinar o volume de um corpo geométrico.

Idéia: Igual à ideia do cálculo de uma área:
Subdividimos o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos. Em cada um deles, calculamos um volume de um corpo pequeno (por exemplo, o prisma de largura Δx_i e de área específica, determinada pelo formato do corpo). O volume é obtido por multiplicação da área transversal do corpo $A(\xi_i)$ em algum ponto ξ_i no intervalo $[x_i, x_i + \Delta x_i]$ por Δx_i (veja Figura 6.34).

Depois somamos sobre os volumes individuais em cada subintervalo e obtemos o volume aproximado

$$V_N = \sum_{i=1}^{N} A(\xi_i) \Delta x_i.$$

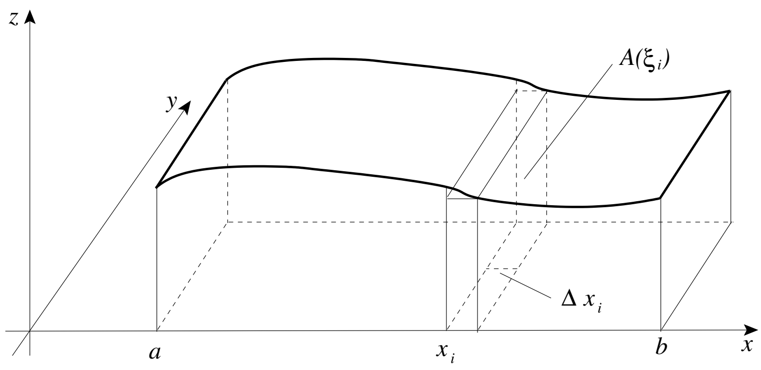


Figura 6.34: Aproximação do volume por pequenos prismas.

6.7.2 Integrando sobre áreas

Notamos que a equação acima é uma soma de Riemann e fazemos o limite em que somamos sobre cada vez mais pedaços cada vez menores. Desta forma, obtemos uma integral, somando agora volumes infinitesimais. Escrevemos

$$V = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{N} A(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b A(x)dx \qquad (\Delta = \max_{1\le i\le N} \Delta x_i) \ ,$$

onde $A(x)$ denota a área transversal do corpo em x.

Observação: Caso a área $A(x)$ não for regular, pode ser necessário expressá-la por uma integral. Isso será assunto do Cálculo II.

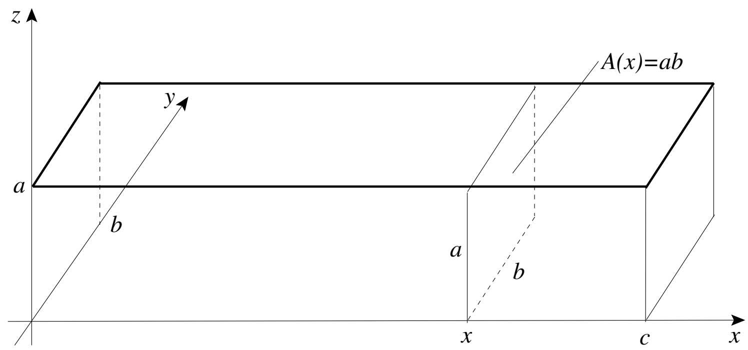


Figura 6.35: Paralelepípedo com laterais a, b e c.

Exemplo 1. *Determine o volume do paralelepípedo com laterais a, b e c.*
Observamos na Figura 6.35 que a área perpendicular ao eixo x é dada em todo ponto x por $A(x) = ab$. Portanto,
$V = \int_0^c ab\, dx = ab \int_0^c dx = abx\Big|_0^c = abc - ab0 = abc$

Exemplo 2. *Determine o volume de uma pirâmide cuja base é um triangulo retângulo com lados* $3, 4$ *e* 5*, respectivamente, cuja altura é* h *e cujo topo fica verticalmente acima do ponto do ângulo reto.*
A pirâmide é desenhada na Figura 6.36. O corte horizontal na altura z é um triângulo, cuja área é dada por $A = \frac{1}{2}x \cdot y$ onde, pelo Teorema de Tales (teorema da interseção), temos

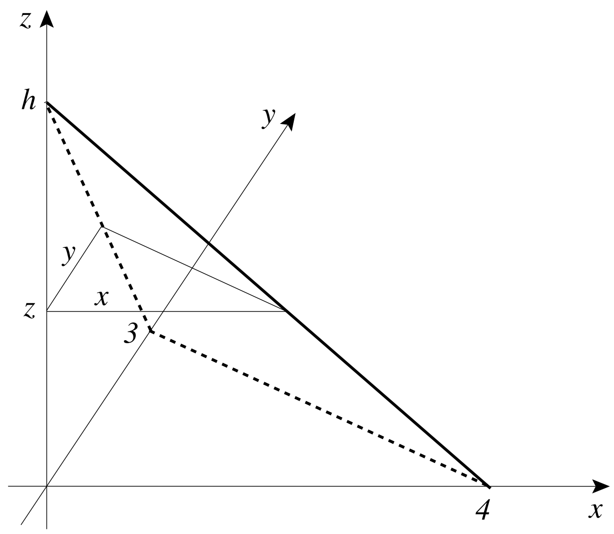


Figura 6.36: Pirâmide com base de um triângulo retângulo.

$\dfrac{h-z}{h} = \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} \Rightarrow x = 4\dfrac{h-z}{h}$ e $y = 3\dfrac{h-z}{h}$.
Substituindo, temos a seguinte expressão para a área na altura z:
$A(z) = \dfrac{4 \cdot 3}{2} \cdot (\dfrac{h-z}{h})^2 = \dfrac{6}{h^2}(h-z)^2$.
Assim, o volume desejado é dada pela integral $V = \displaystyle\int_0^h A(z)dz = \dfrac{6}{h^2}\int_0^h (h-z)^2 dz$.
Integramos por substituição: $u = h - z$, $-dz = du$, $u(0) = h$, $u(h) = 0$.
Portanto, $V = -\dfrac{6}{h^2}\displaystyle\int_h^0 u^2 du = \dfrac{6}{h^2}\int_0^h u^2 du = \dfrac{6}{h^2}\dfrac{u^3}{3}\Bigg|_0^h = \dfrac{2}{h^2}(h^3 - 0) = 2h$ u.v. (unidades de volume).

Exemplo 3. *Encontre o volume de uma cunha cortada de um cilíndro circular de raio* $r = 4$ *por dois planos, sendo um horizontal e o outro inclinado a* $30°$, *atravessando o diâmetro do cilindro.*
A cunha pode ser visualizada na Figura 6.37.

Um corte perpendicular à cunha em qualquer posição y tem comprimento $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ (veja Figura 6.38a) e seu formato é triângular (veja Figura 6.38b).

Sendo assim, a área transversal na posição y será
$A(y) = \dfrac{1}{2}x \cdot h = \dfrac{1}{2}x \cdot x\tan(30°) = \dfrac{1}{2}x^2\dfrac{\text{sen}(30°)}{\cos(30°)} = \dfrac{1}{2}x^2\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(r^2 - y^2) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}(16 - y^2)$.

Precisamos integrar essa área transversal de $y = -r$ até $y = r$ (veja Figura 6.38a). Com $r = 4$, obtemos

$$\begin{aligned} V &= \int_{-4}^{4} \frac{\sqrt{3}}{6}(16 - y^2)dy = \frac{2\sqrt{3}}{6}\int_0^4 (16 - y^2)dy \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}(16y - \frac{y^3}{3})\Bigg|_0^4 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(64 - \frac{64}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2 \cdot 64}{3} = \frac{128}{9}\sqrt{3} \text{ u.v.} \end{aligned}$$

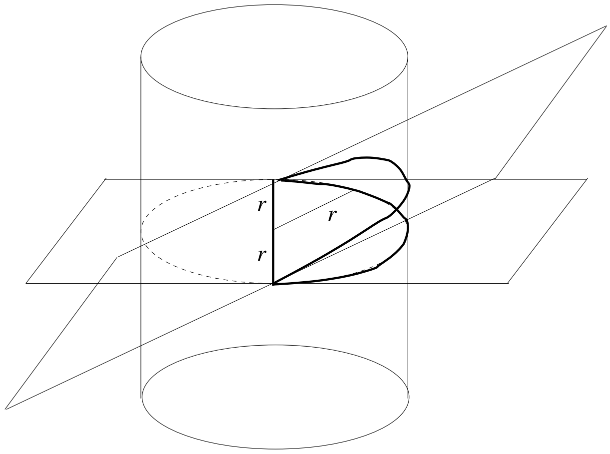


Figura 6.37: Cunha resultante do corte de um cilíndro circular por dois planos.

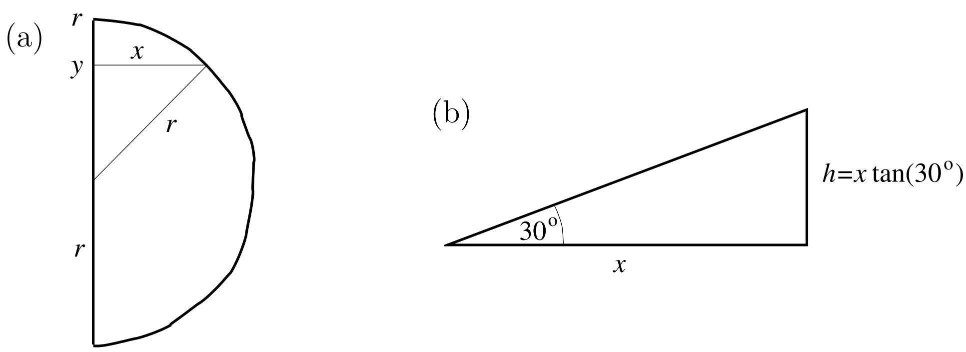


Figura 6.38: (a) Semicírculo no plano horizontal. (b) Triangulo formado pelo corte vertical na posição y.

Observação: No caso geral, pode ser necessário calcular a área transversal $A(x)$ por meio de integração e os limites de integração das integrais para o cálculo de $A(x)$ podem depender de x. Isso será assunto de Cálculo II.

6.7.3 Volumes rotacionais (corpos de revolução)

6.7.3.1 Integração por minidiscos

Agora queremos determinar o volume de um corpo que é o resultado da rotação de uma função $f(x)$ em torno de um eixo eixo de rotação $y = c$ (veja Figura 6.39).

Idéia: Igual à ideia do cálculo de um volume geral:
Subdividimos o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos, calculando volumes de corpos menores, sendo eles neste caso pequenos minidiscos. Depois fazemos o limite que os pedaços somados fiquem cada vez menores.

Cada disco destes tem um volume, dado por $V_i = A(\xi_i)\Delta x_i = \pi \cdot r_i^2 \Delta x_i$, onde o raio do disco é o raio de rotação local (veja Figura 6.40). Notamos que esse raio de rotação é dado pela a distância entre o valor da função no ponto ξ_i dentro do i-ésimo intervalo e o eixo de rotação,

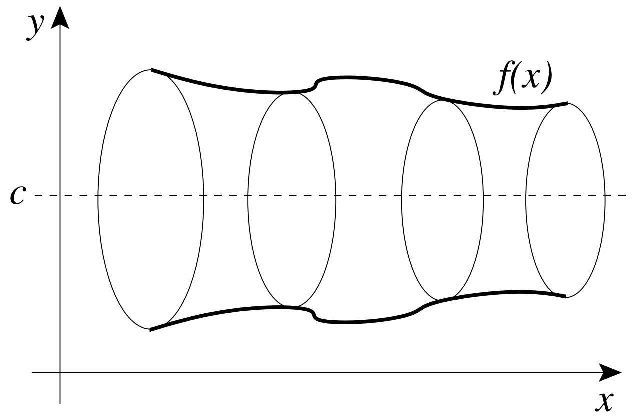


Figura 6.39: Rotação de uma função $f(x)$ em torno de um eixo de rotação $y = c$.

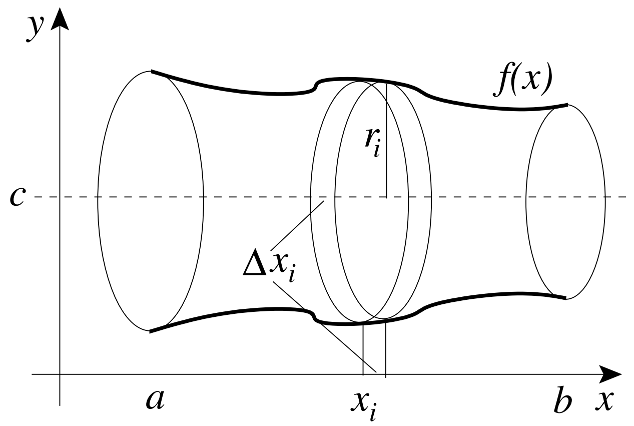


Figura 6.40: Volume de rotação de uma função $f(x)$ em torno de um eixo de rotação $y = c$, aproximado por minidiscos.

i.e., $r_i = f(\xi_i) - c$, Ainda, Δx_i é a largura do i-ésimo intervalo, de forma análoga ao que foi feito para calcular áreas, usando a área de um retângulo pequeno $A_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

Agora soma-se sobre todos os discos, e obtém-se $V_N = \sum_{i=1}^{N} \pi \cdot [f(\xi_i) - c]^2 \Delta x_i$.

Podemos reconhecer que isso é uma soma de Riemann. No limite $N \to \infty$, quando todos os subintervalos Δx_i tendem a tamanho zero, podemos escrever

$V = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{N} \pi \cdot [f(\xi_i) - c]^2 \Delta x_i$, onde $\Delta = \max_{1 \leq i \leq N} \Delta x_i$.

Podemos escrever então:

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - c]^2 dx$$

Esta expressão vale para um volume rotacional formado pela rotação de uma função $f(x)$ em torno de um eixo de rotação $y = c$ horizontal, i.e., paralelo ao eixo x.

Observação: Notamos que a fórmula acima representa o caso especial da fórmula geral

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

quando a área transversal é a área de uma circunferência $A(x) = \pi r(x)^2$, onde o raio de rotação é dado pela distância da função rotacionada ao eixo de rotação, i.e., $r(x) = f(x) - c$.

Observação: Podemos usar essa fórmula de forma análoga para uma função de y rotacionada em torno de um eixo vertical, i.e., paralelo ao eixo y.

Exemplo 4. *Calcule o volume do cilindro circular com raio r e altura h.*
A função que limita o cilindro é a reta $x = r$ (veja Figura 6.41). A rotação acontece em torno do eixo y. Portanto:

$$V = \int_0^h \pi \cdot [f(y) - 0]^2 dy = \int_0^h \pi \cdot r^2 dy = \pi r^2 \int_0^h dy$$
$$= \pi r^2 y\Big|_0^h = \pi r^2 h - 0 = \pi r^2 h$$

Observação: Somente podemos usar a integração por minidiscos se o eixo de rotação for paralelo ao eixo de integração!

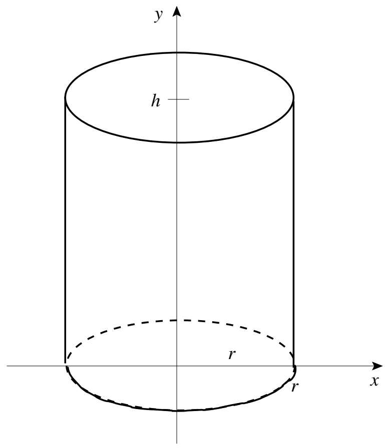


Figura 6.41: Cilindro de raio r e altura h.

6.7.3.2 Toros

O que acontece quando temos um corpo que é formado pela rotação de uma região limitada por duas funções, formando um toro?

Exemplo 5. *Determine o volume do corpo formado pela rotação em torno do eixo x da região limitada pelas funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 4x^2/\pi^2$.*
Da mesma forma que a área entre estas funções é determinada pela diferença das áreas por baixo das duas funções, o volume é determinado pela diferença dos volumes obtidos pela rotação das duas funções: Os limites de integração são os dois pontos onde as funções se interseccionam, aqui claramente $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ (veja Figura 6.42).

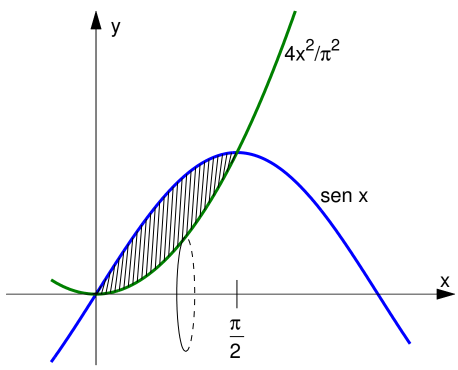


Figura 6.42: Regão entre as funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 4x^2/\pi^2$.

Temos então:

$$V_f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \operatorname{sen}^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx$$
$$= \frac{\pi}{2}(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 - (0 - \frac{1}{2} \cdot 0)] = \frac{\pi^2}{4} \text{ u.v.}$$

$$V_g = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cdot (\frac{4x^2}{\pi^2})^2 dx = \frac{16}{\pi^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 dx = \frac{16}{\pi^3}\frac{x^5}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{5\pi^3} \cdot (\frac{\pi}{2})^5 - 0 = \frac{\pi^2}{10} \text{ u.v.}$$

A diferença dos dois volumes fornece:

$$V = V_f - V_g = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{10} = \frac{5\pi^2}{20} - \frac{2\pi^2}{20} = \frac{3\pi^2}{20} \text{ u.v.}$$

Em geral: O volume do corpo obtido por rotação em torno de um eixo de rotação horizontal $y = c$ de uma área limitada por duas funções f e g que se interseccionam nos pontos $x = a$ e $x = b$ é dado por

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [(f - c)^2 - (g - c)^2] dx}$$

onde supomos que $f > g$ em (a, b).

Observação: A fórmula correspondente vale para a rotação em torno de um eixo vertical de uma região delimitada por funções de y.

Exemplo 6. *Encontre o volume do corpo obtido pela rotação em torno do eixo $x = -3$ da região entre as funções $f(y) = y^3 - y^2 + y$ e $g(y) = y^3 + y - 1$.*
Obs: Minidiscos horizontais.

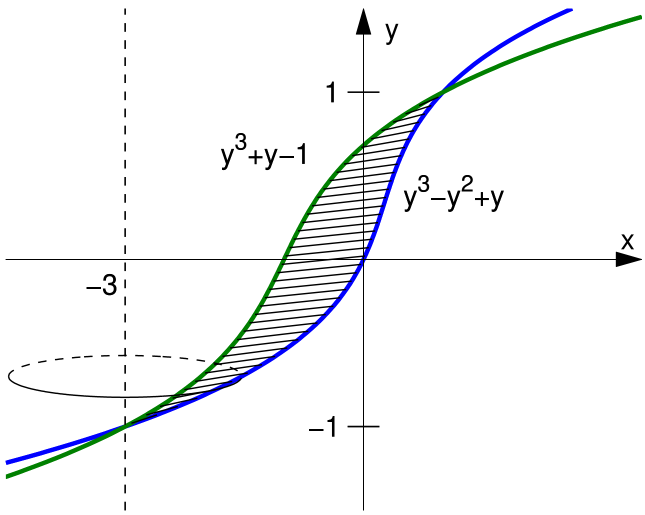


Figura 6.43: A região entre as funções $f(y) = y^3 - y^2 + y$ e $g(y) = y^3 + y - 1$ é rotacionada em torno da reta $x = -3$.

A interseção das funções ocorre quando $y^3 - y^2 + y = y^3 + y - 1 \to -y^2 = -1 \to y = \pm 1$ (veja Figura 6.43).

Em $y = 0$ temos $f = 0$ e $g = -1 \Rightarrow f > g \; \forall \, y \in (-1, 1)$

$\Rightarrow V = \pi \int_{-1}^{1} \{[f(y) - (-3)]^2 - [g(y) - (-3)]^2\} dy = \pi \int_{-1}^{1} [(y^3 - y^2 + y + 3)^2 - (y^3 + y + 2)^2] dy =$
$\pi \int_{-1}^{1} [(y^3 - y^2 + y + 3) + (y^3 + y + 2)][(y^3 - y^2 + y + 3) - (y^3 + y + 2)] dy = \pi \int_{-1}^{1} [2y^3 - y^2 + 2y + 5][-y^2 +$
$1] dy = \pi \int_{-1}^{1} [(-2y^5 + y^4 - 2y^3 - 5y^2) + (2y^3 - y^2 + 2y + 5)] dy = \pi \int_{-1}^{1} (-2y^5 + y^4 - 6y^2 + 2y + 5) dy =$
$2\pi \int_0^1 (y^4 - 6y^2 + 5) dy = 2\pi \left(\frac{y^5}{5} - 2y^3 + 5y \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{5} - 2 + 5 \right) - 0 = \frac{32}{5} \pi$ u.v.
onde foram usadas a terceira fórmula dos produtos notáveis, bem como as propriedades de integrais simétricas sobre funções pares e ímpares.

6.7.3.3 Integração paralela ao eixo de rotação

Sabemos calcular volumes rotacionais por somar minidiscos nas seguintes situações:

A) Curvas dadas como função de x e rotação por uma reta $y = c$ paralela ao eixo x:

$$V = \pi \int_a^b [(g(x) - c)^2 - (f(x) - c)^2]dx \qquad (g > f)$$

B) Curvas dadas como funçoes de y e rotação por uma reta $x = a$ paralela ao eixo y:

$$V = \pi \int_c^d [(g(y) - a)^2 - (f(y) - a)^2]dy \qquad (g > f)$$

Mas o que podemos fazer se a situação for diferente?

6.7.3.4 Integração perpendicular ao eixo de rotação: Cascas cilíndricas

O que podemos fazer se for mais fácil expressar a área em função da variável cujo eixo é perpendicular ao eixo de rotação?

C) Curvas dadas como funções de y e rotação por uma reta $y = c$ paralela ao eixo x.

D) Curvas dadas como funções de x e rotação por uma reta $x = a$ paralela ao eixo y.

Lembramos que em casos de área entre funções, as vezes é mais cômodo integrar ao longo do eixo y, para não ter que inverter funções complicadas (ou impossíveis) de inverter.

Porém, este tipo de situação fica complicado se tivermos que determinar o volume de rotação de um objeto desta natureza obtida por rotação pelo eixo x. Sabemos que neste caso, a formula $V = \pi \int_a^b ([f(y) - c]^2 - [g(y) - c]^2)dy$ do volume rotacional necessita de integração ao longo do eixo y. Para podermos calcular o volume deste objeto com essa fórmula, a inversão das funções é necessária.

Existe, porém, uma outra maneira de calcular o volume de um corpo rotacional, chamada de integração por cascas cilíndricas.

Princípio:

Ao invés do sistema de somar minidiscos para determinar o volume de um corpo de revolução, podemos proceder de outra forma. Isto pode ser interessante em casos onde o procedimento por discos envolve algum complicador, tal como a inversa de uma função difícil (ou impossível) de inverter.

Queremos o volume do corpo criado pela rotação da área entre as funções $f(x)$ e $g(x)$ em torno de um eixo vertical em $x = c$.

Sabemos que deveríamos inverter as funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$ calcular os volumes rotacionais $V_f = \pi \int_a^b [f^{-1}(y) - c]^2 dy$ e $V_g = \pi \int_a^b [g^{-1}(y) - c]^2 dy$ e subtraí-los. Mas se for impossível inverter f ou g (ou ambos)?

Então podemos montar o volume por uma soma de cascas cilíndricas. Para entender o princípio da integração por casas cilíndicas, consideramos a Figura 6.44.

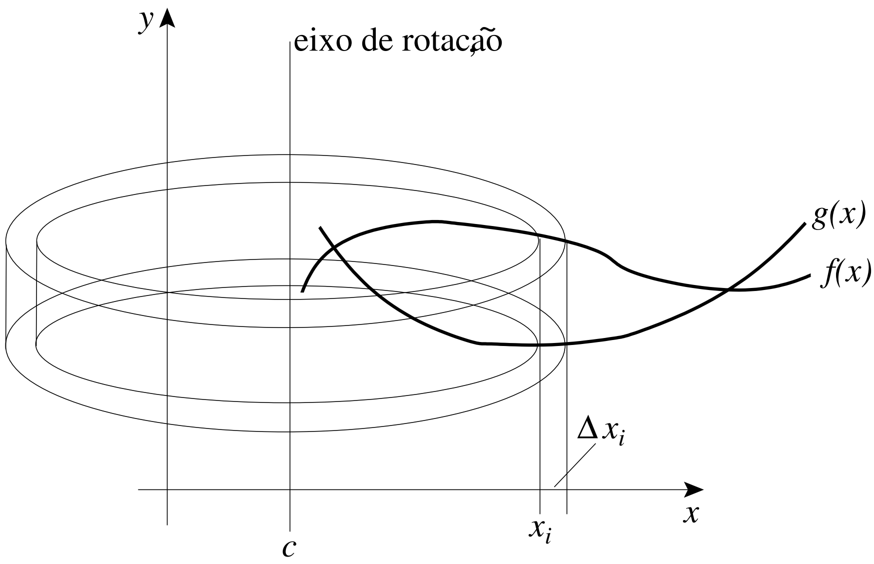


Figura 6.44: Integração por cascas cilíndricas.

Para construir uma casca cilíndrica, tomamos um intervalo de tamanho Δx_i e giramos o pequeno retângulo com a altura $h = f(\xi_i) - g(\xi_i)$ e largura Δx_i em torno do eixo de rotação vertical $x = c$. Aqui ξ_i é um ponto qualquer no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Assim, formamos um anel (veja Figura 6.44) que, no limite de Δx_i tender a zero, se tornará uma casca clíndrica.

A soma sobre esses anéis formará uma soma de Riemann que no limite se tornará uma integral sobre cascas cilíndricas.

Qual é o volume de uma destas cascas cilíndricas?

Observamos que o anel é formado pela diferença de dois discos, com altura h e raios $r_1 = x_i - c$ e $r_2 = x_i + \Delta x_i - c$. Assim, volume do anel é

$V_i = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h = 2\pi \cdot \dfrac{r_2 + r_1}{2} \cdot (r_2 - r_1) \cdot h$

Usando que $r_2 - r_1 = \Delta x_i$, $h = f(\xi_i) - g(\xi_i)$ e definindo o raio médio $\overline{r} = \dfrac{r_2 + r_1}{2}$, podemos escrever:

$V_i = 2\pi \cdot \overline{r} \cdot [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \cdot \Delta x_i$

A soma sobre todos os volumes dos anéis individuais no trecho entre os pontos de intersecção das funções, tomando o limite para o número de subintervalos tender a infinito, como todos os subintervalos tendendo a tamanho zero, fornece

$$V = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{N} 2\pi \cdot \overline{r} \cdot [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \cdot \Delta x_i = 2\pi \int_a^b r[f(x) - g(x)]dx$$

onde, como antes, $\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta_i|$.

Note que $r = \lim_{\Delta \to 0} \overline{r} = \lim_{\Delta \to 0} \dfrac{r_2 + r_1}{2} = \lim_{\Delta \to 0} \dfrac{x_i + \Delta x_i - c + x_i - c}{2} = \lim_{\Delta \to 0} \dfrac{2x_i + \Delta x_i - 2c}{2} = \lim_{\Delta \to 0} \left(x_i - c + \dfrac{\Delta x_i}{2} \right) = x - c$ denota a distância do ponto x até o eixo de rotação. Obtemos a expressão final $V = 2\pi \int_a^b (x-c)[f(x) - g(x)]dx$

Exemplo 7. *Determine o volume do corpo obtido pela rotação da região entre $x = 0$ e $x = 2$ abaixo da função $f(x) = x^3 - x + 1$ pela reta $x = 3$.*

Como o eixo de rotação fica à direita da região a ser rotacionada, notamos que o raio da casca é dado por $r = 3 - x$.

A altura da casca é dada pela própria função $f(x)$.

Portanto, $V = 2\pi \int_0^2 (3-x)f(x)dx$.

Substituindo $f(x) = x^3 - x + 1$ e integrando, obtemos

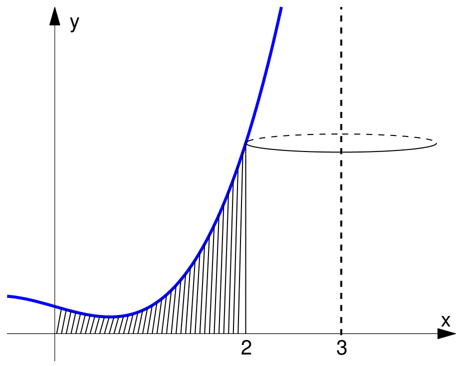


Figura 6.45: Região por baixo de $f(x) = x^3 - x + 1$ entre $x = 0$ e $x = 2$, girada em torno de $x = 3$.

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^2 (3-x)(x^3 - x + 1)dx \\
&= 2\pi \int_0^2 (3x^3 - x^4 - 3x + x^2 + 3 - x)dx \\
&= 2\pi \int_0^2 (-x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x + 3)dx \\
&= 2\pi \left(-\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_0^2 \\
&= 2\pi \left(-\frac{2^5}{5} + 3\frac{2^4}{4} + \frac{2^3}{3} - 4\frac{2^2}{2} + 3\cdot 2\right) - 0 = 2\pi\left(-\frac{32}{5} + 3\frac{16}{4} + \frac{8}{3} - 4\frac{4}{2} + 6\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{32\cdot 3}{15} + 12 + \frac{5\cdot 8}{15} - 8 + 6\right) = 2\pi\left(10 - \frac{96-40}{15}\right) = 2\pi\frac{150-56}{15} = \frac{188}{15}\pi \text{ u.v.}
\end{aligned}$$

Exemplo 8. *Encontre o volume do objeto obtido pela rotação em torno do eixo y de região entre as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ entre as suas primeiras duas intersecções para $x > 0$.*

Notamos que as duas primeiras duas intersecções entre o seno e o cosseno acontecem em $x = \pi/4$ e $x = 5\pi/4$ (veja Figura 6.46). Como o eixo de rotação é o próprio eixo y, i.e., $x = 0$, temos que o raio de rotação é $r = x$.

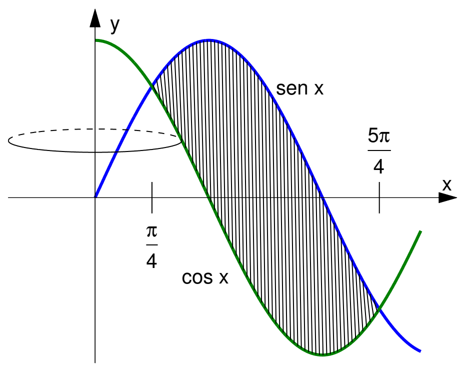


Figura 6.46: Região entre as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ entre as suas primeiras duas intersecções para $x > 0$.

Dessa forma, podemos escrever:

$V = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} x \cdot (\operatorname{sen} x - \cos x)dx$

Integração por partes com $f = x$, $f' = 1$ e $g' = \operatorname{sen} x - \cos x$, $g = -\cos x - \operatorname{sen} x$ fornece:

$V = 2\pi[x(-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (-\cos x - \operatorname{sen} x)dx]$

$$= 2\pi\Bigg[\underbrace{\frac{5\pi}{4}\underbrace{\left(-\frac{-1}{2}\sqrt{2}-\frac{-1}{2}\sqrt{2}\right)}_{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}_{-\sqrt{2}}}_{\frac{6\pi}{4}\sqrt{2}} + \underbrace{\operatorname{sen} x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} - \cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}}_{0}\Bigg] = 3\pi^2\sqrt{2} \text{ u.v.}$$

Exemplo 9. *Calcule o volume obtido pela rotação da região entre as funções $f(y) = y^2+2$ e $g(y) = -y^2-2y+6$ pelo eixo $y = 1$.*

Neste caso, temos funções de y e um eixo de rotação horizontal (veja Figura 6.47). Podemos aplicar a integração por cascas cilíndricas de forma análoga com integrção ao longo do eixo y.

Primeiramente, notamos que as funções se cruzam onde $f(y) = g(y)$, i.e., onde $y^2+2 = -y^2-2y+6$, ou seja, $2y^2+2y-4 = 0 \;\Rightarrow\; y^2+y-2 = 0$, que fornece $y = 1$ e $y = -2$.
No intervalo $(-2,1)$, temos $g(y) > f(y)$ pois
$f(0) = 2 < g(0) = 6$.
O raio da rotação é $r = 1-y$, uma vez que todos os valores y do domínio de integração são menores que 1.

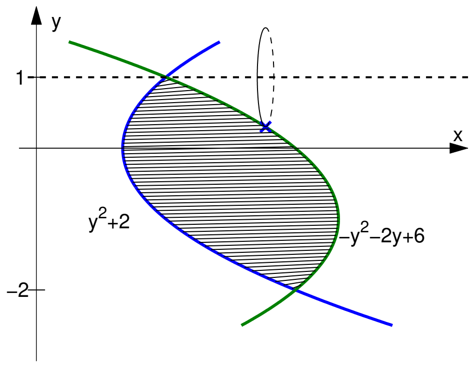


Figura 6.47: Região entre as funções $f(y) = y^2+2$ e $g(y) = -y^2-2y+6$.

Assim,

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_{-2}^{1}(1-y)[-y^2-2y+6-(y^2+2)]dy = 2\pi\int_{-2}^{1}(1-y)[-2y^2-2y+4]dy\\
&= 2\pi\int_{-2}^{1}[-2y^2-2y+4-(-2y^3-2y^2+4y)]dy = 2\pi\int_{-2}^{1}(2y^3-6y+4)dy\\
&= 2\pi\left(\frac{2}{4}y^4-\frac{6}{2}y^2+4y\right)\Big|_{-2}^{1} = 2\pi\left[\left(\frac{1}{2}-3+4\right)-\left(\frac{1}{2}16-3\cdot 4+4(-2)\right)\right]\\
&= 2\pi\left[\frac{1}{2}+1-(8-12-8)\right] = 2\pi\left(\frac{1}{2}+13\right) = 27\pi \text{ u.v.}
\end{aligned}$$

6.7.3.5 Resumo de volumes rotacionais

Para calcular volumes rotacionais, obtidas pela rotação de uma região entre duas funções f e g em torno de um eixo de rotação horizontal ou vertical, temos ao nosso dispor dois métodos de integração:

- por minidiscos, com a área transversal de cada minidisco dada por $A(x) = \pi r^2$ (onde o raio de rotação r é a distância da função até o eixo de rotação, veja Figura 6.39 na página 237), e

- por cascas cilíndricas, com a área transversal dada por $A(x) = 2\pi rh$ (onde o raio de rotação r é a distância do ponto de integração x até o eixo de rotação e a altura h é dada pela altura da região rotacionada, veja Figura 6.44 na página 241).

Explicitamente, temos os seguintes quatro casos com as integrais da forma:

A) Curvas dadas como função de x e rotação por uma reta $y = c$ paralela ao eixo x:

$$\text{Minidiscos: } V = \pi \int_a^b [(g(x) - c)^2 - (f(x) - c)^2]dx \qquad (g > f)$$

B) Curvas dadas como funçoes de y e rotação por uma reta $x = a$ paralela ao eixo y:

$$\text{Minidiscos: } V = \pi \int_c^d [(g(y) - a)^2 - (f(y) - a)^2]dy \qquad (g > f)$$

C) Curvas dadas como funções de y e rotação por uma reta $y = c$ paralela ao eixo x.

$$\text{Cascas cilíndrias: } V = 2\pi \int_a^b |y - c| \cdot [g(y) - f(y)]dy \qquad (g > f)$$

D) Curvas dadas como funções de x e rotação por uma reta $x = a$ paralela ao eixo y.

$$\text{Cascas cilíndrias: } V = 2\pi \int_c^d |x - a| \cdot [g(x) - f(x)]dx \qquad (g > f)$$

Observação: O módulo nas últimas duas formas é necessário porque o raio de rotação sempre deve ser positivo.

6.8 O logaritmo definido como integral

6.8.1 Definição

Ao definir a função exponencial, $f(x) = a^x$, para argumentos não racionais, usamos a exigência de que a monotonia da função, conhecida para os racionais, também é válida para os irracionais, i.e.,

$$a^p < a^x < a^q \qquad \text{sempre que} \qquad p < x < q$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{Q}$. Embora esta definição seja válida, ela não é muito prática porque não permite o cálculo exato do valor da função em números irracionais, por mais que esteja bem-definido.

Uma definição mais útil nesse sentido define a função exponencial como inversa da função logarítmica que por sua vez pode ser definida de forma exata.

Definição: A função do logaritmo natural é definida pela integral

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \qquad (\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} = \mathbb{R}^+)$$

Essa função é bem definida pelo Teorema Fundamental do Cálculo (parte I), já que a função $1/x$ é contínua para $x > 0$.

Todas as propriedades das funções logarítmicas e exponenciais se deduzem naturalmente a partir desta definição (veja também a Figura 6.48).

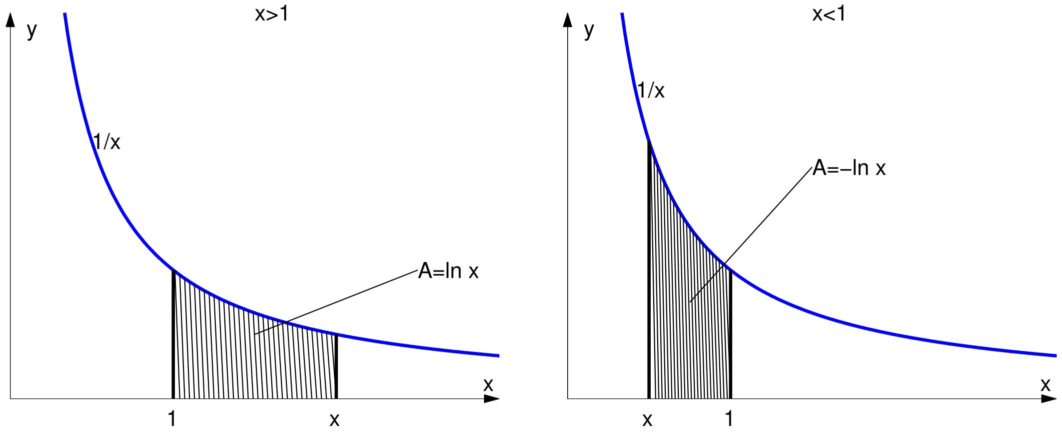


Figura 6.48: Definição do logaritmo natural ($x > 0$).

6.8.2 Propriedades

- O fato de que $\dfrac{d \ln x}{dx} = \dfrac{1}{x}$ segue imediatamente da definição junto com o Teorema Fundamental do Cálculo (parte I).

- Também segue imediatamente pela definição e pelas propriedades da integral definida que
$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0$$
e
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt$$
Embora essa relação seja válido para qualquer $x > 0$, ela mostra que o valor de $\ln x$ é negativo quando $0 < x < 1$. A situação é graficamente explicada na Figura 6.48.

- Por substituição $s = 1/t$, $ds = -1/t^2\, dt \Rightarrow dt = -1/s^2\, ds$, $s(x) = 1/x$, $s(1) = 1$ segue ainda que
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \int_1^{1/x} s \frac{-1}{s^2}\, ds = -\int_1^{1/x} \frac{1}{s}\, ds = -\ln(1/x)$$
(veja novamente a Figura 6.48).

- As regras de cálculo com logaritmos podem ser provadas usando a definição. Por exemplo, temos que
$$\frac{d \ln xy}{dx} = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x} = \frac{d \ln x}{dx}$$
Pela igualdade das derivadas dessas duas funções logarítmicas, conclui-se que elas são iguais a menos uma constante, i.e., $\ln xy = \ln x + C$.
(Note que C é constante em relação a x, mas pode depender de y.)
Em $x = 1$ temos: $\ln 1 \cdot y = \underbrace{\ln 1}_{=0} + C = C$.
Assim, $\ln xy = \ln x + \ln y$.

- De maneira análoga, se prova que $\ln x/y = \ln x - \ln y$.

- Da mesma forma, da igualdade

$$\frac{d\ln x^r}{dx} = \frac{1}{x^r}\cdot r x^{r-1} = \frac{r}{x} = r\frac{d\ln x}{dx} = \frac{d(r\ln x)}{dx}$$

  segue que $\ln x^r = r\ln x + C$. Em $x = 1$, temos: $\ln 1 = r\ln 1 + C$, o que implica $C = 0$. Dessa forma, notamos que $\ln x^r = r\ln x$.

6.8.3 O número de Euler

Com a definição do logaritmo natural acima, define-se o número de Euler como tal número e que satisfaz

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1$$

6.8.4 A função exponencial

A definição do logaritmo natural implica que o logaritmo natural é uma função crescente. Portanto a função $f(x) = \ln x$ possui uma função inversa em todo o seu domínio. Denotaremos esta função temporariamente por $f^{-1}(x) = \exp(x)$ e observamos que o seu domínio é $\mathbb{D}_{-1} = \mathbb{R}$.

Propriedades:

- Pelo fato de que $f(1) = \ln 1 = 0$, concluímos que o valor da função inversa em $x = 0$ tem que ser 1, i.e., $f^{-1}(0) = \exp(0) = 1$.

- Além disso, pela definição do número de Euler acima, temos $f(e) = \ln e = 1$, do qual concluímos que $f^{-1}(1) = \exp(1) = e$

- Ainda, $f(e^r) = \ln(e^r) = r\underbrace{\ln e}_{=1} = r$ implica $\exp(r) = e^r$.

  Desta forma, o valor da função exponencial e^x é definido pela função inversa do logaritmo natural.

- Pelas propriedades já provadas do logaritmo natural, temos a identidade

$$\ln(e^x\cdot e^y) = \ln e^x + \ln e^y = x + y = \ln e^{x+y}$$

  Pela monotonia do logaritmo natural, a igualdade de dois valores dessa função implica na igualdade dos argumentos, ou seja,

$$e^x\cdot e^y = e^{x+y}$$

- De maneira análoga se prova que $e^x/e^y = e^{x-y}$ e que $(e^x)^r = e^{rx}$.

6.8.5 Funções exponenciais gerais

As propriedades acima provadas implicam que para qualquer $a \in \mathbb{R}^+$, vale $a = e^{\ln a}$. Desta forma, podemos concluir que

$$a^r = \left(e^{\ln a}\right)^r = e^{r \ln a}$$

Esta relação, que iguala a antiga definição desta expressão, junto com as propriedades da função exponencial acima, implicam imediatamente nas correspondentes propriedades das funções exponenciais gerais:

- $a^x a^y = \left(e^{\ln a}\right)^x \left(e^{\ln a}\right)^y = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{\ln a^x + \ln a^y} = e^{\ln a^x a^y} = e^{\ln a^{x+y}}$
  $= a^{x+y}$,
- $a^x / a^y = a^{x-y}$,
- $(a^x)^r = a^{rx}$,
- $(ab)^x = a^x b^x$.

6.8.6 Funções logarítmicas gerais

Uma vez definicas as funções exponenciais gerais, definem-se as funções logaritmicas gerais como suas inversas. As suas propriedades seguem então da mesma forma como antes das propriedades das funções exponenciais gerais. Por completude, segue a lista das propriedades:

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,
- $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ e
- $\log_a(x^r) = r \log_a x$.
- Além disso, temos $\ln x = \ln a^{\log_a x} = \log_a x \ln a$, o que implica que $\log_a x = \ln x / \ln a$.
- Ainda temos $\log_a x = \log_a e^{\ln x} = \ln x \log_a e$.
- Das duas últimas relações podemos concluir que $log_a e = 1/\ln a$.

6.9 Alguns tipos de Integrais

Embora nem todas as expressões de funções elementares possuam primitivas que possam ser escritas em termos de funções elementares — "a integral não pode ser resolvida" — para alguns tipos de integrais existem sempre tais primitivas, e temos ao nosso dispor determinadas formas de procedimento que permitem a sua solução.

Por exemplo, sempre podem ser resolvidas (a) integrais de funções racionais, (b) integrais de expressões racionais das funções trigonométricas, (c) integrais que envolvem, além de expressões racionais, uma ou mais instantes da mesma raiz quadrada de uma expressão quadrática e (d) expressões racionais de potências racionais da variável de integração. Veremos a seguir como proceder para resolver integrais assim.

6.9.1 Integrais de funções racionais

Para integrais de funções racionais, sempre existe um caminho para a sua solução. A ideia é representar a função racional por uma soma de funções racionais mais simples.

6.9.1.1 Ideia: Soma de frações

Para entender o princípio, vamos fazer uso da seguinte propriedade das funções logarítmicas.

Sabemos que a função

$$f(x) = \ln\left|\frac{x+2}{2x-1}\right|$$

tem a derivada

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{2x-1}} \cdot \frac{1(2x-1)-(x+2)2}{(2x-1)^2} = \frac{-5}{(x+2)(2x-1)} = \frac{-5}{2x^2+3x-2}$$

Mas também podemos escrever a função como

$$f(x) = \ln|x+2| - \ln|2x-1|$$

que tem a derivada

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} \cdot 1 - \frac{1}{2x-1} \cdot 2 = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-1}$$

Isto nos dá uma ideia de como resolver a integral $\int \frac{-5}{2x^2+3x-2}dx$, sendo pelo caminho inverso, i.e., escrevendo $\int \frac{-5}{2x^2+3x-2}dx = \int \frac{-5}{(x+2)(2x-1)}dx$, expressando a fração $\frac{-5}{(x+2)(2x-1)}$ como diferença de duas frações $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-1}$ e integrando as duas separadamente, encontrando a diferença de funções logarítmicas, $\ln|x+2| - \ln|2x-1| + C$ (em ambas as frações, o numerador é a derivada do denominador).

Como podemos generalizar esta ideia para usá-la para resolver qualquer integral de uma função racional, i.e., do tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ onde $P(x)$ e $Q(x)$ são dois polinômios?

Queremos o caminho inverso dos seguintes tipos de somas de frações:

A) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{1(x+1)+1(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1+x-1}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}$

B) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{x-1+2}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x^2-2x+1}$

C) $\frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1+2(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{2x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}$

D) $\frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{(2x+1)(x-1)+2(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{4x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}$

Em outras palavras, queremos encontrar a soma das frações mais simples possíveis que fornece uma dada expressão racional.

1ª observação: Para podermos escrever uma função racional como soma de duas (ou mais) frações, o polinômio $Q(x)$ no denominador tem que ser fatorável.

Teorema: Todo polinômio pode ser fatorado em fatores polinomiais de grau um e dois.

(Pode ser difícil achar, mas em princípio dá!)

2ª observação: Pelo grau do polinômio do numerador da soma, não dá para saber quais eram os graus dos numeradores das frações somadas.

Como devemos proceder então?

Exemplo 1. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}dx$

Podemos fatorar o denominador em $x^2-1=(x+1)(x-1)$. Portanto, a fração na integral pode ser escrita como soma de duas frações que tem esses fatores como denominador, i.e., $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}$, onde A e B são números a serem descobertos. Somando as frações, obtemos $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}=\dfrac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$.

Esta fração deve ser igual à fração original, i.e., $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{(A+B)x-A+B}{(x+1)(x-1)}$. Os denominadores são iguais, o que implica que temos que exigir igualdade dos numeradores para todo x, i.e., $2=(A+B)x-A+B$.

Essa condição tem que ser satisfeito idependentemente do valor de x. Uma vez que o lado esquerdo não depende de x, isso será possível somente se o lado direito também não depende de x. Por este motivo, o fator de x tem que ser nulo, i.e., $A+B=0$. Em consequência, a parte constante da expressão deve ser igual a 2, i.e., $-A+B=2$.

Essa observação pode ser generalizada para formular o seguinte

Teorema: Dois polinômio são iguais para todo x se e somente se todos os seus coeficientes são iguais, i.e., $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots a_nx^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots b_nx^n \iff a_i=b_i\ \forall\ i=0,1,2,\dots n$

Aplicando esse teorema, obtemos duas equações para as duas incógnitas:
Coeficiente de x^1: $\quad 0=A+B \Rightarrow B=-A$.
Coeficiente de x^0: $\quad 2=-A+B \Rightarrow 2=-2A \Rightarrow A=-1 \Rightarrow B=1$.

Alternativamente, podemos usar o fato de que a relação tem que ser satisfeita para qualquer x e substituir valores de x na equação. Por exemplo:
$x=3$: $\quad 2=(A+B)\cdot 3-A+B=3A+3B-A+B=2A+4B \Rightarrow A=1-2B$.
$x=4$: $\quad 2=(A+B)\cdot 4-A+B=4A+4B-A+B=3A+5B$
Assim, $\quad 2=3(1-2B)+5B=3-B \Rightarrow B=3-2=1 \Rightarrow A=-1$.

Ainda, se olharmos a igualdade original dos numeradores, $2=A(x-1)+B(x+1)$, podemos perceber que existem alguns valores de x que simplificam a expressão:
$x=\ \ 1$: $\quad 2=A(1-1)+B(1+1)=2B \Rightarrow B=1$.
$x=-1$: $\quad 2=A(-1-1)+B(1-1)=-2A \Rightarrow A=-1$.

Usando os valores das constantes A e B encontrados, temos então
$\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$. $\left(\text{Teste: } \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{(-1)\cdot(x-1)+1\cdot(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2}{x^2-1}\right)$

Esse procedimento é conhecido como *Método das Frações Parciais.*

Para saber quando e como aplicá-lo, vamos ainda ver mais alguns exemplos. Depois, formalizaremos o método na próxima seção.

Com a expressão acima, a integral a ser resolvida fica
$$\int \frac{2}{x^2-1}dx = -\int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx = -\ln|x+1| + \ln|x-1| + C = \ln\left|c\frac{x-1}{x+1}\right|$$

3ª observação: Em todos os exemplos acima, o grau do polinômio do numerador era menor do que o grau do polinômio do denominador.

O que fazer se for o contrário?

Se o grau do polinômio do numerador for maior ou igual ao do denominador, devemos aplicar a divisão polinomial para separar uma parte polinomial e reduzir o resto da divisão da chamada "fração imprópria" a uma "fração própria" (onde o grau do numerador é menor do que o do denominador).

6.9.1.2 Divisão polinomial

Exemplo 2. *Vamos separar a expressão racional* $\dfrac{x^4-10x^2+3x+2}{x^2-4}$ *em termos facilmente integráveis.*

Queremos dividir o polinômio x^4-10x^2+3x+2 pelo polinômio x^2-4. O primeiro passo consiste em dividir os termos de maior potência, obtendo $x^4/x^2 = x^2$. Depois, multiplicamos o denominador x^2-4 por este termo obtido, i.e., $(x^2-4)\cdot x^2 = x^4-4x^2$ e subtraímos o resultado do polinômio do numerador, obtendo $-6x^2+3x+2$. Seguindo com o mesmo procedimento com o polinômio restante, obtemos $-6x^2/x^2 = -6$, que multiplicado com x^2-4 fornece $-6x^2+24$.Subtração do polinômio restante resulta em $3x-22$. Tabelado:

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
 & x^4 & - & 10x^2 & + & 3x & + & 2 \qquad \underline{|x^2-4} \;=\; x^2-6+\dfrac{3x-22}{x^2-4} \\
-(& x^4 & - & 4x^2) & & & & \\
\hline
 & & - & 6x^2 & + & 3x & + & 2 \\
 & -(& - & 6x^2 & & & + & 24) \\
\hline
 & & & & & 3x & - & 22
\end{array}$$

Aqui termina a divisão polinomial, porque o resto da divisão tem grau menor do que o divisor. Concluímos que
$$\frac{x^4-10x^2+3x+2}{x^2-4} = x^2-6+\frac{3x-22}{x^2-4}$$

Assim, a integral dessa expressão poderá ser simplificada para
$$\int \frac{x^4-10x^2+3x+2}{x^2-4}dx = \int\left(x^2-6+\frac{3x-22}{x^2-4}\right)dx = \frac{x^3}{3} - 6x + \int\frac{3x-22}{x^2-4}dx$$

4º observação: Sempre será possível separar uma parte polinimial se a fração for imprópria. Dessa forma, somente teremos que aplicar a separação pelo métdo das frações parciais em frações próprias.

Notamos que as frações a serem somadas também serão frações próprias, i.e., os graus dos seus numeradores também sempre serão menores que os dos seus denominadores! Porém, não há como saber se é um grau a menos ou se é menor ainda! Portanto, a candidata para a separação sempre tem que levar em consideração que a diferença entre os graus dos denominadores e dos numeradores pode ser somente um.

Vamos então separar o resto da divisão polinomial acima, i.e., $\dfrac{3x-22}{x^2-4}$, em suas frações parciais:
Primeiramente, notamos que o denominador pode ser fatorado em $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Assim,

$$\frac{3x-22}{x^2-4}=\frac{3x-22}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow 3x-22=A(x+2)+B(x-2)=(A+B)x+2A-2B$$

Coeficiente de x^1 : $\quad 3=A+B$
Coeficiente de x^0 : $\quad -22=2A-2B\to -11=A-B$

Somando essas duas equações, obtemos $-8=2A$, o que implica $A=-4$. Substituindo em $B=3-A$, obtemos $B=7$.

Como vimos acima, podemos também substituir valores convenientes na igualdade dos polinômios, já que ela tem que valer para todos os x. Por exemplo, usando $x=2$ na igualdade $3x-22=A(x+2)+B(x-2)$, obtemos $6-22=4A+0B$, ou seja, $-16=4A$, o que implica $A=-4$. Pelo outro lado, substituindo $x=-2$, temos $-6-22=0A-4B$, ou seja, $-28=-4B$, o que implica $B=7$.

Também é possível determinar somente uma parte dos coeficientes dessa forma, reduzindo assim o tamanho do sistema restante. Por exemplo, poderíamos ter usado o valor de $A=-4$, obtido pela substituição de $x=2$, junto com a equação $3=A+B$ do coeficiente de x^1 para determinar o valor de $B=7$.

Obtemos então: $\dfrac{3x-22}{x^2-4}=\dfrac{-4}{x-2}+\dfrac{7}{x+2}$

Observação: Um erro frequente é usar os coeficientes obtidos na fração errada. É importante lembrar qual das frações na candidata foi estabelecida com qual coeficiente. Por segurança, é sempre bom fazer o teste somando as frações parciais para garantir que a soma é a fração original. Aqui:

$$\frac{-4}{x-2}+\frac{7}{x+2}=\frac{-4(x+2)+7(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{-4x-8+7x-14}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x-22}{x^2-4}\checkmark.$$

Com a separação finalizada, podemos então encontrar a integral da expressão racional do Exemplo 2,

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4-10x^2+3x+2}{x^2-4}dx&=\frac{x^3}{3}-6x+\int\frac{-4}{x-2}dx+\int\frac{7}{x+2}dx\\&=\frac{x^3}{3}-6x-4\ln|x-2|+7\ln|x+2|+C=\ln\left|c\frac{(x+2)^7}{(x-2)^4}e^{\frac{x^3}{3}-6x}\right|\end{aligned}$$

6.9.1.3 Método das Frações Parciais

Vamos agora ver o procedimento geral do Método das Frações Parciais para uma expressão racional qualquer.

Começamos considerando uma expressão racional

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

onde $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ são dois polinômios de grau n e m, respecticamente.

6.9.1.4 Grau do numerador maior ou igual ao do denominador

Se $n \geq m$, iniciamos o desenvolvimento com divisão polinomial. Obteremos uma expressão da forma

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{\tilde{P}_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$$

onde $R_{n-m}(x)$ e $\tilde{P}_{m-1}(x)$ são outros dois polinômios. O grau de $R_{n-m}(x)$ sempre será $n-m$. Já o grau de $\tilde{P}_{m-1}(x)$ será no máximo $m-1$, mas pode ser menor.

Portanto, podemos seguir com a separação do resto da divisão polinomial com o caso $n < m$. É importante observar que o procedimento a seguir não depende do grau de $\tilde{P}_{m-1}(x)$.

6.9.1.5 Grau do numerador menor do que o do denominador

Agora vamos continuar o desenvolvimento considerando o grau do numerador menor do que o do denominador.

Como próximo passo, fatoramos o denominador.

A candidata para as frações parciais será então composta por termos definidos pelas seguintes regras:

- Para cada fator de grau um, tipo $ax+b$, a candidata terá um termo da forma $\dfrac{C}{ax+b}$, onde C é um coeficiente constante a ser determinado.
- Para cada fator de grau dois, tipo ax^2+bx+c, a candidata terá um termo da forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, onde A e B são coeficientes constantes a serem determinados.
- Para cada fator de grau um com multiplicidade n, tipo $(ax+b)^n$, a candidata terá n termos da forma $\dfrac{C_1}{ax+b}, \dfrac{C_2}{(ax+b)^2}, \ldots, \dfrac{C_n}{(ax+b)^n}$, onde C_i $(i = 1, ..., n)$ são coeficientes constantes a serem determinados.
- Para cada fator de grau dois com multiplicidade n, tipo $(ax^2+bx+c)^n$, a candidata terá um termo da forma $\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}, \dfrac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}, \ldots, \dfrac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$, onde A_i e B_i $(i = 1, ..., n)$ são coeficientes constantes a serem determinados.

Note que os coeficientes constantes devem ser diferentes para cada novo fator.

Notamos que a expressão geral de um polinômio fatorado é dado por k fatores lineares e l fatores quadráticos, possivelmente cada um dos fatores com multiplicidade, de modo que a expressão geral fatorada para o denominador possa ser escrita como

$$Q_m(x) = (a_1x + b_1)^{n_1} \cdots (a_kx + b_k)^{n_k} \;\cdot\; (c_1x^2 + d_1x + e_1)^{m_1} \cdots (c_lx^2 + d_lx + e_l)^{m_l}$$

com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k + 2m_1 + 2m_2 + \cdots 2m_l = m$. A candidata para o método das frações parciais será

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad = \quad & \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \cdots + \frac{A_{n_1}}{(a_1x+b_1)^{n_1}} \\
& + \frac{B_1}{a_2x+b_2} + \frac{B_2}{(a_2x+b_2)^2} + \cdots + \frac{B_{n_2}}{(a_2x+b_2)^{n_2}} + \cdots + \frac{K_{n_k}}{(a_kx+b_k)^{n_k}} \\
& + \frac{L_1x+M_1}{c_1x^2+d_1x+e_1} + \frac{L_2x+M_2}{(c_1x^2+d_1x+e_1)^2} + \cdots + \frac{L_{m_1}x+M_{m_1}}{(c_1x^2+d_1x+e_1)^{m_1}} + \cdots \\
& + \frac{N_1x+R_1}{c_lx^2+d_lx+e_l} + \frac{N_2x+R_2}{(c_lx^2+d_lx+e_l)^2} + \cdots + \frac{N_{m_l}x+R_{m_l}}{(c_lx^2+d_lx+e_l)^{m_l}}
\end{aligned}$$

ou seja, cada fator linear com multiplicidade n_i $(i = 1, \ldots, k)$ gera n_i termos fracionários com numeradores constantes desconhecidos e os denominadores sendo o termo linear em questão com todas as multiplicidades de 1 até n_i, enquanto cada termo quadrático com multiplicidade m_j $(j = 1, \ldots, l)$ gera m_j termos fracionários com numeradores sendo termos lineares com coeficientes desconhecidos e os denominadores sendo o termo quadrático em questão com todas as multiplicidades de 1 até m_j.

Alguns exemplos para candidatas de frações parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{2x+5}{(x-2)(x+3)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \\
\frac{7x^2-3}{(x-2)(x^2+3)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3} \\
\frac{6x^2-3}{x^2(x-9)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-9} \left(= \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x-9} \right) \\
\frac{2x^4-7}{(x+4)^5} &= \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x+4)^2} + \frac{C}{(x+4)^3} + \frac{D}{(x+4)^4} + \frac{E}{(x+4)^5} \\
\frac{x^5+3x^2-1}{(x-1)^2(2x^2+1)(x^2+6)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{2x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2+6} + \frac{Gx+H}{(x^2+6)^2} + \frac{Jx+K}{(x^2+6)^3}
\end{aligned}$$

Observação: O número de constantes indeterminados na candidata das frações parciais é $n_1 + n_2 + \cdots + n_k + 2m_1 + 2m_2 + \cdots 2m_l = m$, ou seja, esse número é **sempre** igual ao grau do polinômio do denominador.

Em consequência desta forma geral da candidata do método das frações parciais, notamos que vamos ter que integrar, além de frações com numeradores constantes e denominadores lineares (como nos exemplos anteriores), também frações com numeradores constantes e denominadores lineares com potências maiores que 1, além de termos com numeradores lineares e denominadores quadráticas com ou sem potências.

6.9.1.6 Denominadores lineares com potências

Exemplo 3. $\int \frac{x+1}{(x-2)^2}dx$

Pela expressão geral da candidata para frações parciais, notamos que temos que ter dois termos, um com denominador $x-2$ e outro com $(x-2)^2$:

$$\frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2} \;\Rightarrow\; x+1 = A(x-2)+B = Ax-2A+B.$$

O coeficiente de x mostra imediatamente que $A = 1$ e a substituição de $x = 2$ fornece $2+1 = A\cdot 0 + B \;\Rightarrow\; B = 3$.

Portanto,

$$\int \frac{x+1}{(x-2)^2}dx = \int \frac{1}{(x-2)}dx + \int \frac{3}{(x-2)^2}dx.$$

Alternativamente, para uma fração relativamente simples como esta, podemos reconhecer que existe uma relação entre o numerador e o termo linear do denominador: $x+1 = x-2+3$ e, portanto,

$$\int \frac{x-2+3}{(x-2)^2}dx = \int \frac{x-2}{(x-2)^2}dx + \int \frac{3}{(x-2)^2}dx = \int \frac{1}{x-2}dx + 3\int \frac{1}{(x-2)^2}dx.$$

O primeiro termo é facilmente integrado, fornecendo o logaritmo natural do denominador (o numerador é a derivada do denominador). Para o segundo termo, fazemos a substituição $x-2 = u$, $dx = du$ para obter $\int \frac{1}{(x-2)^2}dx = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-2} + C$

Portanto, $\int \frac{x+1}{(x-2)^2}dx = \ln|x-2| - 3\frac{1}{x-2} + C$

Exemplo 4. $\int \frac{3x+1}{x^2(x+1)^2}dx$

Neste exemplo, temos no denominador os dois fatores lineares x e $x+1$, ambos com multiplicidade 2. Sendo assim, a candidata do método das frações parciais é

$$\frac{3x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2} = \frac{(Ax+B)(x+1)^2 + [C(x+1)+D]x^2}{x^2(x+1)^2}$$

Igualdade dos numeradores fornece:

$$\begin{aligned} 3x+1 &= Ax^3 + Bx^2 + 2Ax^2 + 2Bx + Ax + B + Cx^3 + Cx^2 + Dx^2 \\ &= (A+C)x^3 + (B+2A+C)x^2 + (2B+A)x + B \end{aligned}$$

Comparação dos coeficientes:

$x^0 : 1 = B$

$x^1 : 3 = 2B + A \Rightarrow A = 3 - 2B = 3 - 2\cdot 1 = 1$

$x^2 : 0 = B + 2A + C + D \Rightarrow C + D = -B - 2A = -1 - 2\cdot 1 = -3$

$x^3 : 0 = A + C \Rightarrow C = -A = -1 \qquad \Rightarrow D = -3 - C = -2$

Assim, temos $\frac{3x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2}$

A integral pode então ser resolvida por

$\int \frac{3x+1}{x^2(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x+1}dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x+1| +$
$2\frac{1}{x+1} + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{2x-(x+1)}{x(x+1)} + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{x-1}{x(x+1)} + C$

Teste:

$$\begin{aligned} I'(x) &= \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} + \frac{1x(x+1) - (x-1)[1(x+1) + x\cdot 1]}{x^2(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} + \frac{x^2+x-(2x^2-2x+x-1)}{x^2(x+1)^2} = \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)^2} + \frac{x^2+x-2x^2+x+1}{x^2(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+x-x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{3x+1}{x^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

6.9.1.7 Denominadores quadráticos

Notamos que para integrais com denominadores quadráticos, o numerador sempre será linear ou constante (senão teríamos feito uma divisão polinomial).

Temos então dois casos:

Caso 1: O numerador é a derivada do denominador

Exemplo 5. $\int \frac{2x+4}{x^2+4x-7}dx$

Notamos que $(x^2+4x-7)' = 2x+4$, ou seja, temos uma integral da forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$. Já sabemos que nesse caso, o resultado da integral é o logaritmo natural do denominador:
$\int \frac{2x+4}{x^2+4x-7}dx = \ln|x^2+4x-7| + C$

Caso 2: O numerador não é a derivada do denominador

Caso 2a: O numerador tem um termo linear

Exemplo 6. $\int \frac{x+1}{x^2+6x+13}dx$

Gostaríamos que a derivada de denominador aparecesse no numerador, para encontrarmos uma expressão da forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$.

Observamos que a derivada do denominador é $(x^2+6x+10)' = 2x+6$ que também é linear. Podemos então escrever o numerador como um múltiplo da derivada do denominador mais uma constante:
$x+1 = \frac{1}{2}2x+1 = \frac{1}{2}(2x+6) - 3 + 1 = \frac{1}{2}(2x+6) - 2.$
Isso sempre será possível se o numerador tem um termo linear.

Substituindo essa expressão para o numerador na integral, obtemos

$$\int \frac{x+1}{x^2+6x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}dx - 2\underbrace{\int \frac{1}{x^2+6x+13}dx}_{J} = \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+13) - 2J$$

onde J é uma integral com um numerador constante e um denominador quadrático que será tratado no Caso 2b.

Caso 2b: O numerador é uma constante

Para resolver esse tipo de integral, completamos o quadrado no denominador:

$$J = \int \frac{1}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{1}{\underbrace{x^2+6x+9}_{(x+3)^2}+4}dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+2^2}dx$$

Com a substituição $2u = x+3$, $2du = dx$, obtemos

$$J = \int \frac{1}{(2u)^2+4}2du = 2\int \frac{1}{4(u^2+1)}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\arctan u + C$$
$$= \frac{1}{2}\arctan \frac{x+3}{2} + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+1}{x^2+6x+13}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+13) - 2J = \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+13) - \arctan \frac{x+3}{2} + C$$

Observação: Integrais desse tipo (constante dividido por um termo quadrático irredutível) sempre fornecem um arco-tangente.

Algumas integrais de funções racionais

Exemplo 7. $\int \frac{2x^2+6x-2}{(x^2+1)(2x+3)}dx$

Primeiramente, notamos que o denominador é fatorável. Portanto, faremos uso do método das Frações Parciais:

Exemplo de Candidata **Errada**:

$$\frac{2x^2+6x-2}{(x^2+1)(2x+3)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{2x+3} = \frac{A(2x+3)+B(x^2+1)}{(x^2+1)(2x+3)}$$

$\Rightarrow 2x^2+6x-2 = Bx^2+2Ax+3A+B$

$\Rightarrow$ Três equações para dois coeficientes:

$x^2 : B = 2$, $x^1 : 2A = 6 \Rightarrow A = 3$ e $x^0 : 3A+B = -2$, $9+2 = -2 \Rightarrow 11 = -2$

Contradição!! (Todas as três equações precisam ser satisfeitas!)

Onde está o erro?

O numerador de $\frac{A}{x^2+1}$ deve ter um termo linear!

Candidata correta:

$$\frac{2x^2+6x-2}{(x^2+1)(2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{2x+3} = \frac{(Ax+B)(2x+3)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(2x+3)}$$

$$\Rightarrow 2x^2+6x-2 = (2A+C)x^2 + (3A+2B)x + 3B + C$$

As três equações corretas são: $x^2 : 2 = 2A+C$, $x^1 : 6 = 3A+2B$, $x^0 : -2 = 3B+C$.

A diferença da primeira com a última equação fornece $4 = 2A-3B$. Somando duas vezes essa equação a três vezes a segunda resulta em $26 = 13A$, ou seja, $A = 2$. Substuindo esse resultado nas primeira e quarta equações, encontramos $2 = 4 + C$, ou seja $C = -2$ e $4 = 4 - 3B$, ou seja, $B = 0$. Dessa forma, $\dfrac{2x^2+6x-2}{(x^2+1)(2x+3)} = \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2}{2x+3}$.

Integrando essa igualdade, encontramos

$$\int \frac{2x^2+6x-2}{(x^2+1)(2x+3)}dx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx - \int \frac{2}{2x+3}dx = \ln(x^2+1) - \ln|2x+3| + C = \ln\left|c\frac{x^2+1}{2x+3}\right|$$

Exemplo 8. $I = \displaystyle\int \frac{x^4+4x^3+7x^2-10x-10}{x^2+2x-3}dx$

1º Passo : Divisão polinomial (sempre necessário se o grau do numerador for maior que o grau do denominador)

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
 & x^4 & + & 4x^3 & + & 7x^2 & - & 10x & - & 10 \\
-(& x^4 & + & 2x^3 & - & 3x^2) & & & & \\
\hline
 & & & 2x^3 & + & 10x^2 & - & 10x & - & 10 \\
 & & -(& 2x^3 & + & 4x^2 & - & 6x) & & \\
\hline
 & & & & & 6x^2 & - & 4x & - & 10 \\
 & & & & -(& 6x^2 & + & 12x & - & 18) \\
\hline
 & & & & & & - & 16x & + & 8
\end{array}
\quad \underline{|x^2+2x-3} = x^2+2x+6+\frac{-16x+8}{x^2+2x-3}$$

$$\Rightarrow I = \int (x^2+2x+6+\frac{-16x+8}{x^2+2x-3})dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x + \int \frac{-16x+8}{x^2+2x-3}dx$$

2º Passo: completar o quadrado do denominador:

$x^2+2x-3 = x^2+2x+1-1-3 = (x+1)^2-4$

Resto negativo: portanto fatorável. Pela terceira fórmula binomial, podemos escrever:
$(x+1)^2-4 = (x+1-2)(x+1+2) = (x-1)(x+3)$

$\Rightarrow$ Frações Parciais

$$\frac{-16x+8}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Pela igualdade dos numeradores, obtemos as equações
$A+B=-16$, $3A-B=8 \;\Rightarrow\; 4A=-8$, i.e., $A=-2$ e $B=-14$

Portanto $\dfrac{-16x+8}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{-2}{x-1} + \dfrac{-14}{x+3}$

$$\begin{aligned}
\text{Assim, } I &= \frac{1}{3}x^3+x^2+6x+\int(\frac{-2}{x-1}+\frac{-14}{x+3})dx = \frac{1}{3}x^3+x^2+6x-2\int\frac{1}{x-1}dx-14\int\frac{1}{x+3}dx \\
&= \frac{1}{3}x^3+x^2+6x-2\ln|x-1|-14\ln|x+3|+C = \frac{1}{3}x^3+x^2+6x-\ln[(x-1)^2(x+3)^{14}]+C
\end{aligned}$$

Exemplo 9. $I = \displaystyle\int \frac{-16x+8}{x^2+2x+5}dx$

Completando o quadrado do denominador, encontramos
$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4 = (x+1)^2+4$

Resto Positivo $\Rightarrow$ Não fatorável.

Próximo passo: Separar a parte de x no numerador:
a derivada do denominador é: $(x^2 + 2x + 5)' = 2x + 2$

Numerador: $-16x + 8 = -8 \cdot 2x + 8 = -8(2x + 2) + 16 + 8 = -8(2x + 2) + 24$

$$\Rightarrow \; I = \int \frac{-8(2x+2)}{x^2+2x+5}dx + \int \frac{24}{(x+1)^2+4}dx = -8\ln|x^2+2x+5| + 24\int \frac{1}{4[(\frac{x+1}{2})^2+1]}dx$$

Substituição: $\dfrac{x+1}{2} = u$, $\frac{1}{2}dx = du$, $dx = 2du$

$$I = -8\ln|x^2+2x+5| + 6\int \frac{1}{u^2+1}2du = -8\ln(x^2+2x+5) + 12\arctan u + C$$
$$= -8\ln(x^2+2x+5) + 12\arctan\tfrac{x+1}{2} + C$$
onde usamos que $x^2 + 2x + 5 > 0$.

Outros exemplos de integrais com denominadores quadráticos

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + C$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x}dx = \int \frac{1}{x(x+2)}dx$

   Frações parciais: $\dfrac{1}{x(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{(x+2)} = \dfrac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}$

   $\Rightarrow 1 = (A+B)x + 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$

   $$\int \frac{1}{x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C = \ln\sqrt{\left|\frac{cx}{x+2}\right|}$$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+1} = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{x+1} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = ?$

   $x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 1 = (x+1)^2 + 1$

   Substituição $x + 1 = u$, $dx = du$

   $$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{1+u^2}du = \arctan u + C = \arctan(x+1) + C$$

Resumo
Esta parte resume o procedimento de uma integral do tipo “constante sobre quadrática”. Note que é mais fácil guardar o procedimento do que tentar lembrar as fórmulas que aqui encontraremos.

Queremos resolver a integral $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$

Observamos que sempre podemos completar o quadrado seguindo

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left[(x+d)^2 \pm k^2\right]$$

onde $\frac{b}{2a} = d$ e o resto constante $-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$ pode ser um número positivo, denotado por k^2, ou negativo, denotado por $-k^2$.

Caso 1: $\dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2} = k^2 > 0.$

Neste caso, substituímos $ax^2+bx+c = a[(x+d)^2+k^2]$ na integral, obtendo

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{a[(x+d)^2+k^2]}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{k^2[(\frac{x+d}{k})^2+1]}dx = \frac{1}{ak^2}\int \frac{1}{[1+(\frac{x+d}{k})^2]}dx$$

Substituição: $\frac{x+d}{k} = u$, $\frac{1}{k}dx = du \to dx = kdu$ fornece:

$$I = \frac{1}{ak^2}\int \frac{1}{1+u^2}kdu = \frac{1}{ak}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{ak}\arctan u + C = \frac{1}{ak}\arctan\frac{x+d}{k} + C$$

onde $d = \dfrac{b}{2a}$ e $k = \sqrt{\dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2}}$

Caso 2: $\dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2} = -k^2 < 0.$

Neste caso, temos $ax^2+bx+c = a[(x+d)^2-k^2] = a(x+d+k)(x+d-k)$.

Separamos então a fração na integral em dois frações com denominadores lineares,

$\dfrac{1}{ax^2+bx+c} = \dfrac{A}{x+d+k} + \dfrac{B}{x+d-k}$ e resolvemos o sistema por A e B.

Em seguida, podemos integrar as duas frações individuais, obtendo

$I = A\ln|x+d+k| + B\ln|x+d-k| + C$ onde $d = \dfrac{b}{2a}$ e $k = \sqrt{\dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a}}$

Caso 3: $\dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2} = 0.$

Neste caso, temos $ax^2+bx+c = a(x+d)^2$.

Portanto, a integral é $I = \displaystyle\int \frac{1}{a(x+d)^2}dx = -\frac{1}{a}\frac{1}{x+d} + C$ onde $d = \dfrac{b}{2a}$

Exemplo 10. $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+8x+16}dx = ?$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+2)^2+4}dx = \frac{1}{2\cdot 4}\int \frac{1}{(\frac{x+2}{2})^2+1}dx$$

Substituição: $\dfrac{(x+2)}{2} = u$, $\frac{1}{2}dx = du$, $dx = 2du$

$$I = \frac{1}{8}\int \frac{1}{1+u^2}2du = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{4}\arctan u + C = \frac{1}{4}\arctan\frac{(x+2)}{2} + C$$

Exemplo 11. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+4x+10}dx = ?$

$I = \displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^2+9}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{3})^2+1}dx$

Substituição: $\dfrac{2x+1}{3} = u$, $\frac{2}{3}dx = du$, $dx = \frac{3}{2}du$

$I = \displaystyle\frac{1}{9}\int \frac{1}{u^2+1}\frac{3}{2}du = \frac{1}{6}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{6}\arctan u + C = \frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3} + C$

6.9.1.8 Denominador com termos quadráticos com multiplicidade

A partir da candidata das frações parciais no caso geral, vemos que podem aparecer integras com termos quadráticos com multiplicidade no denominador com ou sem um fator linear no numerador. Essas duas formas de integrais são simplificados por compleção do quadrado e substituição para que termo quadrático no denominador assuma a forma $u^2 + a^2$. Daí, teremos que resolver as seguintes duas integrais:

Com termo linear no numerador:

$\displaystyle\int \frac{u}{(u^2+a^2)^m}du$: Substituição: $u^2 + a^2 = v$, $2udu = dv$.

Assim, $\displaystyle\int \frac{u}{(u^2+a^2)^m}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{v^m}dv = \frac{1}{2}\frac{1}{-m+1}v^{-m+1} + C = \frac{-1}{2(m-1)(u^2+a^2)^{m-1}} + C$

Para a integral sem o termo linear no numerador, i.e., com numerador constante, temos a seguinte equação de recorrência:

$\displaystyle\int \frac{du}{(u^2+a^2)^m} = \frac{1}{2a^2(m-1)}\cdot\frac{u}{(u^2+a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2a^2(m-1)}\int\frac{du}{(u^2+a^2)^{m-1}}$, com $m > 1$

que permite reduzir a multiplicidade. Aplicação repetida resolve a integral.

A fórmula acima pode ser deduzida por meio de integração por partes da integral

$\displaystyle\int 1\frac{1}{(u^2+a^2)^{m-1}}du = ...$

com a escolha $f' = 1$, $f = u$, $g = \dfrac{1}{(u^2+a^2)^{m-1}}$, $g' = \dfrac{-(m-1)2u}{(u^2+a^2)^m}$

e isolando, na expressão resultante, a integral desejada, usando que

$$\frac{u^2}{(u^2+a^2)^m} = \frac{u^2-a^2}{(u^2+a^2)^m} + \frac{a^2}{(u^2+a^2)^m} = \frac{1}{(u^2+a^2)^{m-1}} + \frac{a^2}{(u^2+a^2)^m}$$

Exemplo 12. $\displaystyle\int \frac{2x+2}{(2x^2+2x+5)^2}\,dx$

Completando o quadrado do termo no denominador, temos

$2x^2+2x+5 = 2\left[x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}\right] = 2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$

Assim, com a substituição $u = x + \frac{1}{2}$, $du = dx$, obtemos

$I = \displaystyle\frac{1}{2^2}\int\frac{2u+1}{(u^2+\frac{9}{4})^2}du = \frac{1}{4}\underbrace{\int\frac{2u}{(u^2+\frac{9}{4})^2}du}_{I_1} + \frac{1}{4}\underbrace{\int\frac{1}{(u^2+\frac{9}{4})^2}du}_{I_2}$

Na primeira integral, reconhecemos que o numerador é a derivada do quadrado no denominador, de modo que a substituição $v = u^2 + \frac{9}{4}$, $dv = 2udu$ forneça

$$I_1 = \int \frac{1}{v^2} dv = -\frac{1}{v} + C = -\frac{1}{u^2 + \frac{9}{4}} + C = -\frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}} + C = -\frac{2}{2x^2 + 2x + 5} + C.$$

Na segunda integral, utilizamos a equação de recorrência acima com $m = 2$ e $a^2 = \frac{9}{4}$, fornecendo

$$I_2 = \frac{1}{2\frac{9}{4}} \cdot \frac{u}{u^2 + \frac{9}{4}} + \frac{2 \cdot 2 - 3}{2\frac{9}{4}} \int \frac{1}{u^2 + \frac{9}{4}} du = \frac{2}{9} \cdot \frac{u}{u^2 + \frac{9}{4}} + \frac{2}{9} \int \frac{1}{u^2 + \frac{9}{4}} du.$$

Na integral remanescente, fazemos a substituição $u = \frac{3}{2}v$, $du = \frac{3}{2}dv$, obtendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{9} \frac{u}{u^2 + \frac{9}{4}} + \frac{2}{9} \int \frac{1}{\frac{9}{4}(v^2 + 1)} \frac{3}{2} dv = \frac{2}{9} \frac{x + \frac{1}{2}}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}} + \frac{4}{27} \arctan v + C \\ &= \frac{2}{9} \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 5} + \frac{4}{27} \arctan \frac{2x + 1}{3} + C \qquad \text{onde } v = \frac{2}{3}u = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2x + 1}{3} \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{4} I_2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{2x^2 + 2x + 5} + \frac{1}{18} \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 5} + \frac{1}{27} \arctan \frac{2x + 1}{3} + C \\ &= \frac{1}{9} \frac{x - 4}{2x^2 + 2x + 5} + \frac{1}{27} \arctan \frac{2x + 1}{3} + C \end{aligned}$$

Teste:

$$\begin{aligned} I' &= \frac{1}{9} \frac{1(2x^2 + 2x + 5) - (x - 4)(4x + 2)}{(2x^2 + 2x + 5)^2} + \frac{1}{27} \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+1}{3}\right)^2} \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{2x^2 + 2x + 5 - (4x^2 + 2x - 16x - 8)}{(2x^2 + 2x + 5)^2} + \frac{2}{9(1 + \frac{4x^2 + 4x + 1}{9})} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{-2x^2 + 16x + 13}{(2x^2 + 2x + 5)^2} + \frac{2}{4x^2 + 4x + 10} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{-2x^2 + 16x + 13}{(2x^2 + 2x + 5)^2} + \frac{2x^2 + 2x + 5}{(2x^2 + 2x + 5)^2} \right) \\ &= \frac{1}{9} \frac{18x + 18}{(2x^2 + 2x + 5)^2} = \frac{2x + 2}{(2x^2 + 2x + 5)^2} \checkmark \end{aligned}$$

6.9.1.9 Guia prático da integração de funções racionais

Quando queremos calcular a integral de uma função racional, podemos seguir o seguinte roteiro.

1. Se o grau do polinômio no numerador for maior ou igual ao do denominador: Divisão polinomial.

2. Manter sempre em mente que, caso o numerador da expressão for igual à derivada do denominador, usar que $\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + C$.

3. Fatorar o denominador

4. Separar em frações menores pelo método das frações parciais.

   (a) Para cada fator linear $ax + b$, adicionar uma fração do tipo $\dfrac{A}{ax + b}$ à candidata.

(b) Para cada fator quadrático ax^2+bx+c, adicionar uma fração do tipo $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ à candidata.

(c) Se houver esse tipo de fatores com potência n, correspondentes frações com os mesmos tipos de numeradores e denominadores com todas as potências até n deverão ser adicionadas à candidata.

5. Termos quadráticos no denominador: Completar o quadrado.

   (a) Se o resto for negativo ou nulo: Fatorar usando a terceira fórmula dos produtos notáveis: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

   (b) Se o resto for positivo: dará um logaritmo natural e/ou um arco-tangente.

6. Resolver as integrais individuais que podem ser dos seguintes tipos:

   (a) $\displaystyle\int \frac{A}{ax+b}dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + C$

   (b) $\displaystyle\int \frac{A}{(ax+b)^n}dx = \frac{A}{a(1-n)}\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C$

   (c) $$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx &= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + r\int \frac{1}{u^2+1}du \\ &= \frac{A}{2a}\ln(ax^2+bx+c) + r\arctan\frac{x-\ell}{k} + C\end{aligned}$$
   onde r, k, e ℓ são valores determinados pelos coeficientes a, b, c e A e B.

   (d) $\displaystyle\int \frac{u}{(u^2+a^2)^m}du = \frac{-1}{2(m-1)(u^2+a^2)^{m-1}} + C$

   (e) Para integrais com constantes no numerador e termos quadráticos com potência no denominador, usar a equação de recorrência acima.

Notamos que integrais de funções racionais sempre tem um caminho para sua resolução. Ele é, basicamente, um exercício de álgebra, uma vez que as integrais a serem efetimavemente resolvidas sempre serão desses tipos básicos listados acima.

6.9.2 Integrais de expressões racionais de funções trigonométricas

Além de funções racionais, outro conjunto de funções cuja integral sempre pode ser determinada são expressões racionais de funções trigonométricas. Existe uma substituição que permite transformar qualquer expressão assim em uma função racional. Porém, esta frequentemente resulta em integrais de funções racionais complicadas. Por este motivo, veremos a seguir algumas ideias de como resolver integrais envolvendo algumas expressões mais simples das funções trigonométricas, antes de tratar da maneira geral.

6.9.2.1 Integrais de potências naturais de seno e cosseno

Começamos com integrais que envolvam potências naturais das funções seno e cosseno. Trataremos, por simplicidade, somente as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, mas lembramos que as funções $\operatorname{sen} ax$ e $\cos ax$ podem ser tratadas de forma análoga.

Caso 1: $\int \cos^n x\,dx$ ou $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$, com potências n ímpar

Neste caso, separamos um dos n fatores seno ou cosseno para fins de uma substituição. Por exemplo, para uma integral de uma potência do cosseno, temos
$\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos x\,dx = \int (1-...+\operatorname{sen}^{n-1} x)\cos x\,dx$
onde usamos que $n-1$ é par, i.e., a potência $\frac{n-1}{2}$ é um número natural.

Substituição com $\operatorname{sen} x = u \;\Rightarrow\; \cos x dx = du$ transforma a função no integrando em um polinômio:
$I = \int (1 - ... + u^{n-1})du = u - ... + \frac{1}{n}u^n = \operatorname{sen} x - ... + \frac{1}{n}\operatorname{sen}^n x + C$

Exemplo 13. $I = \int \operatorname{sen}^5 x dx$
Para resolver essa integral, separamos um dos fatores seno:
$I = \int \operatorname{sen}^4 x \cdot \operatorname{sen} x dx.$
Agora, usamos que $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2$ para escrevermos
$I = \int (1-\cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x dx = \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\operatorname{sen} x dx$

Substituição $\cos x = u$, $-\operatorname{sen} x dx = du$, i.e., $\operatorname{sen} x dx = -du$ fornece:
$I = -\int (1 - 2u^2 + u^4)du = -u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{u^5}{5} + C = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

Caso 2: $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx$, com ao menos uma das potências m ou n ímpar.

Integrais desse tipo funcionam da mesma forma:

Exemplo 14. $I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx$
Como a potência do seno é impar, separamos um fator $\operatorname{sen} x$:

$I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \operatorname{sen} x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^4 x \operatorname{sen} x dx = \int (\cos^4 x - \cos^6 x)\operatorname{sen} x dx$

Substituição: $\cos x = u$, $-\operatorname{sen} x dx = du$

$I = -\int (u^4 - u^6)du = \frac{-1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

Caso 3: $\int \cos^n dx$ ou $\int \operatorname{sen}^n x dx$ com n par.

Identidade geométrica: $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

Ao substituir essas relações na integral, reduzimos a potência por um fator 2.

Exemplo 15. $I = \int \operatorname{sen}^2 x dx$
$I = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$

Caso 4: $\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x dx$ com ambas as potências m e n pares.

Integrais desse tipo funcionam da mesma forma:

Exemplo 16. $I = \int \cos^4 x \operatorname{sen}^4 x dx$

$$I = \int \left(\cos^2 x\right)^2 \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos^2 2x)^2 dx$$
$$= \frac{1}{16}\int (1 - 2\cos^2 2x + \cos^4 2x)dx = \frac{1}{16}\int dx - \frac{2}{16}\int \cos^2 2x dx + \frac{1}{16}\int \cos^4 2x dx$$

As potências pares dos cossenos remanescentes com argumento $2x$ são tratadas de forma análoga: $\cos^2 2x = \dfrac{1+\cos(2\cdot 2x)}{2} = \dfrac{1+\cos 4x}{2}$. Assim, obtemos:

$$I = \frac{1}{16}x - \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx + \frac{1}{64}\int (1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x)dx$$
$$= -\frac{1}{16}\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{x}{64} + \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{64}\int \cos^2 4x dx = \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{1}{64}\int \frac{1+\cos 8x}{2} dx$$
$$= \frac{x}{64} + \frac{x}{128} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C = \frac{3x}{128} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C$$

Teste:

$$I'(x) = \frac{3}{128} - \frac{\cos 4x}{128}\cdot 4 + \frac{\cos 8x}{1024}\cdot 8 = \frac{3}{128} - \frac{4}{128}\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 2x\right) + \frac{1}{128}\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 4x\right)$$
$$= \underbrace{\frac{3}{128} - \frac{4}{128} + \frac{1}{128}}_{=0} + \frac{4\cdot 2}{128}(2\operatorname{sen} x\cos x)^2 - \frac{2}{128}(2\operatorname{sen} 2x\cos 2x)^2$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x - \frac{1}{16}(2\operatorname{sen} x\cos x)^2(1-2\operatorname{sen}^2 x)^2$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\left[1 - (1 - 4\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen}^4 x)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x[4\operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{sen}^2 x)] = \operatorname{sen}^4 x\cos^4 x$$

Caso 5: $\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\, dx, \quad \int \cos ax \cos bx\, dx, \quad \int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx \qquad (a, b \in \mathbb{R})$

Para resolver essas integrais, fazemos uso das somas e diferenças das identidades:
$\operatorname{sen}(a+b)x = \operatorname{sen} ax\cos bx + \cos ax\operatorname{sen} bx$
$\cos(a+b)x = \cos ax\cos bx - \operatorname{sen} ax\operatorname{sen} bx$
e correspondentemente com os sinais trocados. Assim, podemos escrever
$\operatorname{sen} ax\operatorname{sen} bx = \frac{1}{2}\cos(a-b)x - \frac{1}{2}\cos(a+b)x$
$\cos ax\cos bx = \frac{1}{2}\cos(a-b)x + \frac{1}{2}\cos(a+b)x$
$\operatorname{sen} ax\cos bx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(a-b)x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(a+b)x$

Portanto, as integrais acima ficam

$$\int \operatorname{sen} ax\operatorname{sen} bx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(a-b)x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(a+b)x\, dx$$
$$\int \cos ax\cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(a-b)x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos(a+b)x\, dx$$

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(a-b)x \, dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(a+b)x \, dx$$

Exemplo 17. $I = \int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \, dx$

$I = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(3-2)x \, dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(3+2)x \, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x \, dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 5x \, dx$

$= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C$

Caso for desejável expressar o resultado em termos de senos e cossenos com os argumentos originais, podemos usar as mesmas identidades acima, por exemplo:
$\cos x = \cos(3-2)x = \cos 3x \cos 2x + \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x$.
Assm, podemos escrever
$I = -\frac{1}{2}(\cos 3x \cos 2x + \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{10}(\cos 3x \cos 2x - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x) + C$

$= -\frac{3}{5}\cos 3x \cos 2x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x + C$

6.9.2.2 Integrais de potências naturais de tangente ou co-tangente

Também existe um caminho para integrais de potências naturais de tangente ou co-tangente:
$\int \tan^n x \, dx$ ou $\int \cot^n x \, dx$

$n = 1$:
$I = \int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$

$n = 2$:
Usamos $\tan^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

Assim, $I = \int \tan^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \tan x - x + C.$

$n = 3$:
Separamos um fator $\tan^2 x$ e usamos a mesma fórmula do caso $n = 2$:
$I = \int \tan^3 x \, dx = \int \tan x \tan^2 x \, dx = \int \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \tan x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \tan x \, dx$

A segunda integral resolvemos no caso $n = 1$ acima. Na primeira integral, fazemos a substituição $u = \tan x$, $du = \sec^2 x dx$, para obter

$$I = \int u du + \ln|\cos x| = \frac{u^2}{2} + \ln|\cos x| + C = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$$

$n = 4$:
Separamos um fator $\tan^2 x$ e usamos a mesma fórmula do caso $n = 2$:
$I = \int \tan^4 x \, dx = \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx = \int \tan^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \tan^2 x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \tan^2 dx$

A segunda integral é o caso $n = 2$ e na primeira integral, fazemos a substituição $u = \tan x$, $du = \sec^2 x dx$, para obter

$$I=\int u^2du-(\tan x-x)=\frac{u^3}{3}-\tan x+x+C=\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+C$$

Geral:

$$\int \tan^n x dx=\int \tan^{n-2} x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int \tan^{n-2} x\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int \tan^{n-2} x dx$$

Na segunda integral, temos a potência reduzida por 2 e na primeira integral, fazemos a substituição $u=\tan x$, $du=\sec^2 x dx$, para obter

$$\int u^{n-2}du-\int \tan^{n-2} x\,dx=\frac{1}{n-1}u^{n-1}-\int \tan^{n-2} x\,dx=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x-\int \tan^{n-2} x\,dx$$

Na segunda integral, $\int \tan^{n-2} x dx$, continuamos esse procedimento até reduzir a potência a $n=1$ ou $n=0$.

Correspondentemente, para a co-tangente, usamos $\cot^2 x=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-1$ e a substituição $u=\cot x$, $du=-\csc^2 x dx$.

Exemplo 18. $I=\int \cot^5 2x dx$

$$I=\int \cot^3 2x\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 2x}-1\right)dx=\int \cot^3 2x\frac{1}{\operatorname{sen}^2 2x}dx-\int \cot^3 2x\,dx$$

Substituição: $\cot 2x=u$, $\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 2x}\cdot 2dx=du$, i.e., $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 2x}dx=-\frac{1}{2}du$

$$\begin{aligned}I&=-\frac{1}{2}\int u^3du-\int \cot 2x\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 2x}-1\right)dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}-\int \cot 2x\frac{1}{\operatorname{sen}^2 2x}dx+\int \cot 2x dx\\&=-\frac{1}{8}\cot^4 2x+\frac{1}{2}\int u du+\int\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}dx=-\frac{1}{8}\cot^4 2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{2\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}dx\\&=-\frac{1}{8}\cot^4 2x+\frac{1}{4}\cot^2 2x+\frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} 2x|+C\end{aligned}$$

6.9.2.3 Integrais envolvendo potências de secante e cossecante

Ainda, podemos tratar as integrais envolvendo potências de secante e cossecante:
Caso 1: $\int \sec^n x\,dx$ ou $\int \csc^n x\,dx$ com n par

Escrevemos a integral como $\int\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}dx$ ou $\int\frac{1}{\cos^n x}dx$

e usamos

$1=(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)^{\frac{n}{2}}\Rightarrow$ integrais em tangente ou cotangente

$$\int\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}dx=\int\frac{(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)^{\frac{n}{2}}}{\operatorname{sen}^n x}dx=\int\left(1+\frac{n}{2}\cot^2 x+\ldots+\cot^n x\right)dx$$

Exemplo 19. $I=\int \sec^4 x\,dx=\int\frac{1}{\cos^4 x}dx$

$$I=\int\frac{(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x)^2}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\cos^4 x+2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x+\operatorname{sen}^4 x}{\cos^4 x}dx$$

$$= \int (1+2\tan^2 x+\tan^4 x)dx = x + 2\int \tan^2 x\, dx + \int \tan^2 x(\frac{1}{\cos^2 x}-1)dx$$
$$= x + \int \tan^2 x\, dx + \int \tan^2 x \frac{1}{\cos^2 x} dx = x + \int (\frac{1}{\cos^2 x}-1)dx + \frac{1}{3}\tan^3 x$$
$$= x - \int dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \frac{1}{3}\tan^3 x + C = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

Caso 2: $\int \sec^n x\, dx$ ou $\int \csc^n x\, dx$ com n ímpar

Como n é ímpar, $n+1 = 2m$ é par. Podemos escrever a integral como
$$\int \frac{1}{\cos^n x} dx = \int \frac{1}{\cos^{n+1} x}\cos x dx = \int \frac{1}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^m}\cos x dx$$
Aqui fazemos a substituição $\operatorname{sen} x = u$, $\cos x dx = du$, para encontrar uma função racional em u.

Exemplo 20. $I = \int \sec^3 x\, dx$
$$I = \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1}{\cos^4 x}\cos x\, dx = \int \frac{1}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2}\cos x\, dx$$
Substituição $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x dx$
$$I = \int \frac{1}{(1-u^2)^2} du$$
Frações parciais:
$$\frac{1}{(1-u^2)^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{(1-u)^2} + \frac{C}{1+u} + \frac{D}{(1+u)^2}$$
$$= \frac{A(1-u)(1+u)^2 + B(1+u)^2 + C(1+u)(1-u)^2 + D(1-u)^2}{(1-u)^2(1+u)^2}$$
$$\Rightarrow\ A(1-u)(1+u)^2 + B(1+u)^2 + C(1+u)(1-u)^2 + D(1+u)^2 = 1$$
$u = 0 : A + B + C + D = 1$

$u = 1 : 0 + B\cdot 2^2 + 0 + 0 = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$u = -1 : 0 + 0 + 0 + D\cdot 2^2 = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{4}$

$u^3 : -A + C = 0 \Rightarrow A = C$

$A + \frac{1}{4} + C + \frac{1}{4} = 1\ \Rightarrow\ A + C = \frac{1}{2}\ \Rightarrow\ A = C = \frac{1}{4}$.

Assim, $I = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-u}du + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1-u)^2}du + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+u}du + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1+u)^2}du$
$$= -\frac{1}{4}\ln|1-u| + \frac{1}{4}\frac{1}{1-u} + \frac{1}{4}\ln|1+u| - \frac{1}{4}\frac{1}{1+u} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{1}{2}\frac{u}{1-u^2} + C$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{1-\operatorname{sen}^2 x}\right| + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right| + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + C = \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + \frac{1}{2}\sec x \tan x + C$$

Exemplo 21. $I = \int \sec x\, dx = \int \frac{1}{\cos x} dx$
$I = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cos x\, dx = \int \frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \cos x\, dx$

Substituição $\operatorname{sen} x = u$, $\cos x dx = du$: $I = \int \frac{1}{1-u^2} du$

Frações parciais: $\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A(1+u)+B(1-u)}{1-u^2} = \frac{A+B+(A-B)u}{1-u^2}$
Portanto, $A + B = 1$, $A - B = 0 \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$

Assim, $I = \int \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u} du + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u} du = \frac{1}{2} \ln|1+u| - \frac{1}{2} \ln|1-u| + C$
$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + C$

Caminho alternativo:
$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

Substituição $u = \sec x + \tan x$ e $du = (\sec x \cdot \tan x + \sec^2 x)dx$

$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$

6.9.2.4 Integrais de potencias naturais de tangente e secante ou co-tangente e co-secante

Estes últimos dois casos podem ser generalizados quando temos tangentes e secantes presentes na integral:
$\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ ou $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$

Caso 1: $\int \tan^n x \sec^{2m} x\, dx$ ou $\int \cot^n x \csc^{2m} x\, dx$, i.e., potência par da secante ou co-secante:

Neste caso, podemos usar $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ($\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$) para obter
$\int \tan^n x \sec^{2m} x\, dx = \int \tan^n x \sec^{2m-2} x \sec^2 x\, dx = \int \tan^n x(1 + \tan^2 x)^{m-1} \sec^2 x\, dx$
que, com a substituição $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\, dx$ discutida anteriormente, vira uma integração de um polinômio, $\int u^n(1+u^2)^{m-1} du$

Exemplo 22. $I = \int \tan^5 x \sec^4 x\, dx$
$I = \int \tan^5 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx = \int \tan^5 x(1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx = \int (\tan^5 x + \tan^7 x) \sec^2 x dx$
$= \int (u^5 + u^7) du = \frac{u^6}{6} + \frac{u^8}{8} + C = \frac{1}{6} \tan^6 x + \frac{1}{8} \tan^8 x + C$

Caso 2: $\int \tan^{2m} x \sec^n x\, dx$ ou $\int \cot^{2m} x \csc^n x\, dx$, i.e., potência par da tangente ou cotangente:

Neste caso, podemos usar $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ($\cot^2 x = \csc^2 x - 1$) para obter
$\displaystyle\int \tan^{2m} x \sec^n x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)^m \sec^n x\, dx$
que é uma soma de integrais de potências de secantes (veja Seção 6.9.2.3).

Caso 3: $\displaystyle\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ ou $\displaystyle\int \cot^m x \csc^n x\, dx$ com m ímpar

Podemos separar um fator $\sec x \tan x$ que é a derivada de $\sec x$, ou seja

$$\int \tan^m x \sec^n x\, dx = \int \tan^m x \sec^n x\, dx = \int \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x\, dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}} \sec^{n-1} x \sec x \tan x\, dx,$$

onde usamos novamente que $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

Assim, essa expressão admite a substituição $u = \sec x$, $du = \sec x \tan x dx$ para obtermos

$$I = \int (u^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u^{n-1}\, du$$

que é uma integral polinomial.

Alternativa para $\displaystyle\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ ou $\displaystyle\int \cot^m x \csc^n x\, dx$ com m ímpar

Podemos representar as funções trigonométricas usando senos e cossenos, ou seja,

$$\int \tan^m x \sec^n x\, dx = \int \tan^m x \sec^n x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^{n+m} x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^{m-1} x}{\cos^{n+m} x} \operatorname{sen} x\, dx$$

Como m é ímpar, $m-1$ é par. Podemos então voltar a usar $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ no numerador dessa expressão. Assim, a substituição $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x dx$ fornece

$$I = -\int \frac{(1-u^2)^{\frac{m-1}{2}}}{u^{m+n}} du$$

que é uma integral de uma soma de potências inteiras de u.

6.9.2.5 Integrais de frações de potências de seno e cosseno

Nas últimas duas subseções, tratamos integrais que também podem ser representadas da forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{-n} x dx = \int \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^n x} dx \text{ ou } \int \cos^m x \operatorname{sen}^{-n} x dx = \int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} dx \text{ com } n \geq m.$$

Como podemos proceder se em uma expressão como essas tivermos $n < m$?

Caso 1: $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^n x} dx$ ou $\displaystyle\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} dx$ com m par:

Neste caso, podemos escrever

$$\int \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^n x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^{\frac{m}{2}}}{\cos^n x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^n x} + \frac{m}{2} \frac{1}{\cos^{n-2} x} + \cdots + \cos^{m-n} x \right) dx$$

que é uma soma de potências de cossenos e secantes.

Exemplo 23. $I = \int \tan^3 x \operatorname{sen} x dx = \int \tan^4 x \cos x dx = \int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x} dx$

$$I = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^3 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} + \cos x \right) dx$$
$$= \int \sec^3 x dx - 2\int \sec x dx + \int \cos x dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \right| + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} - \ln \left| \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \right| + \operatorname{sen} x + C$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} - \frac{3}{4} \ln \left| \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \right| + \operatorname{sen} x + C$$

onde foram usados os resultados dos Exemplos 20 e 21 nas páginas 267 e 268.

Caso 2: $\int \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^n x} dx$ ou $\int \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} dx$ com pelo menos uma das potências n ou m ímpar:

Neste caso, podemos generalizar o procedimento do Caso 4 da Subseção 6.9.2.4 para

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^n x} dx = \underbrace{\int \frac{\operatorname{sen}^{m-1} x}{\cos^n x} \operatorname{sen} x dx}_{m \text{ ímpar}} = \underbrace{\int \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^{n+1} x} \cos x dx}_{n \text{ ímpar}}$$

para usar uma das substituições $u = \cos x$ ou $u = \operatorname{sen} x$, obtendo uma das integrais racionais

$$I = \underbrace{-\int \frac{(1-u^2)^{\frac{m-1}{2}} x}{u^n} du}_{m \text{ ímpar}} = \underbrace{\int \frac{u^m}{(1-u^2)^{\frac{n+1}{2}}} du}_{n \text{ ímpar}}$$

6.9.2.6 Integração de outras funções racionais de seno e cosseno

Procedimento geral: Se a função no integrando for uma função racional das funções trigonométricas, ela sempre pode ser reduzida a uma função racional mediante a substituição $z = \tan \frac{x}{2}$

Uma vez que $1 + z^2 = 1 + \tan^2 \frac{x}{2} = \dfrac{\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$

temos $\cos^2 \frac{x}{2} = \dfrac{1}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \dfrac{1}{1+z^2}$,

Com esta igualdade, obtemos $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \dfrac{2}{1+z^2} - 1 = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$

e $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \dfrac{2z}{1+z^2}$

Além disso, $z = \tan \frac{x}{2}$ implica $x = 2 \arctan z$ o que fornece $dx = 2\dfrac{1}{1+z^2} dz = \dfrac{2}{1+z^2} dz$

Assim, com essa substituição, a função racional nas trigonométricas se torna uma função racional em z.

Exemplo 24. $I = \int \csc x\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx$
$z = \tan \frac{x}{2}$, $dx = \frac{2}{1+z^2} dz$, $\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}$

$$I = \int \frac{1+z^2}{2z} \cdot \frac{2}{1+z^2} dz = \int \frac{1}{z} dz = \ln|z| + C = \ln|\tan \frac{x}{2}| + C$$

Teste $I' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

Exemplo 25. $I = \int \sec x\, dx = \int \frac{1}{\cos x} dx$
$z = \tan \frac{x}{2}$, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

$$I = \int \frac{1+z^2}{1-z^2} \cdot \frac{2}{1+z^2} dz = 2 \int \frac{1}{1-z^2} dz$$

Frações parciais: $\frac{1}{1-z^2} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} = \frac{A(1+z)+B(1-z)}{1-z^2} = \frac{A+B+(A-B)z}{1-z^2}$
Portanto, $A+B=1$, $A-B=0 \Rightarrow A=B=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{1-z} dz + \int \frac{1}{1+z} dz = -\ln|1-z| + \ln|1+z| + C = \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\tan \frac{x}{2}}{1-\tan \frac{x}{2}}\right| + C$$

Expressões alternativas:

Temos $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

Usando $\beta = \frac{\pi}{4}$ e $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, temos $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\alpha}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$

$\Rightarrow$ Identificando $\alpha = \frac{x}{2}$, temos $I = \ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$

Essa expresão pode ser obtida ao fazer a substituição $x = u - \frac{\pi}{2}$ e usar que $\cos(u - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(u)$, assim transformando a integral da secante na integral da cossecante.

Mostradas anteriormente:

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln|\sec x + \tan x| + C = \ln\sqrt{\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right|} + C$$

A equivalência dessas expressões pode ser demonstrada usando teoremas de adição.

Observação: Note que a substituição $z = \tan\frac{x}{2}$ sempre fornece um caminho para a solução de uma integral de uma expressão racional de funções trigonométricas. Porém, esse caminho pode ser bem mais trabalhoso do que um dos procedimentos sugeridos anteriormente.

Exemplo 26. $I = \int \tan^3 x \sec^5 x dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^8 x} dx$
Usando a substituição $z = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan z$ e $dx = 2\frac{1}{1+z^2} dz$

com $\quad \cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2} \quad$ e $\quad \operatorname{sen} x = \dfrac{2z}{1+z^2}$

obtemos a integral

$$I = \int \frac{[2z/(1+z^2)]^3}{[(1-z^2)/(1+z^2)]^8} \frac{2}{1+z^2} dz = 16 \int \frac{z^3(1+z^2)^4}{(1-z^2)^8} dz$$

cuja solução exige frações parciais com 16 coeficientes desconhecidos ...

Mas o caminho sugerido anteriormente (veja o Caso 2 da Subseção 6.9.2.5) fornece uma integral mais simples:

$$I = \int \tan^3 x \sec^5 x dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^8 x} \operatorname{sen} x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^8 x} \operatorname{sen} x dx$$

Substituição $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x \ dx$ fornece

$$I = -\int \frac{1-u^2}{u^8} du = -\int \left(u^{-8} - u^{-6}\right) du = -\frac{u^{-7}}{-7} + \frac{u^{-5}}{-5} + C = \frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{1}{5\cos^5 x} + C$$

6.9.3 Substituição trigonométrica

A técnica de substituição trigonométrica é aplicável a integrais que contém uma ou mais instantes de uma raiz quadrada de uma expressão quadrática, i.e., do tipo $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

6.9.3.1 Simplificação dos termos quadráticos

Para aplicação dos conceitos apresentados abaixo, faremos primeiramente uma compleção do quadrado:

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right].$$

Com $u = x + \dfrac{b}{2a}$ e $d^2 = \pm\left[\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{c}{a}\right]$ obtemos a expressão desejada $a(u^2 \mp d^2)$.

Exemplos:

A) $$3x^2+5x+8 = 3\left[x^2 + 2\frac{5}{2\cdot 3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{8}{3}\right] = 3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{8\cdot 12 - 25}{36}\right]$$
$$= 3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{71}{36}\right] = 3(u^2+d^2)$$

com $u = x + \frac{5}{6}$ e $d = \sqrt{\frac{71}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{71}$.

B) $$-4x^2+3x+6 = 4\left[-x^2 + 2\frac{3}{2\cdot 4}x - \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{6}{4}\right] = 4\left[-\left(x-\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{9+6\cdot 16}{64}\right]$$
$$= 4\left[-\left(x-\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{105}{64}\right] = 4(d^2-u^2)$$

com $u = x - \frac{3}{8}$ e $d = \sqrt{\frac{105}{64}} = \frac{1}{8}\sqrt{105}$.

Por este motivo, serão tratadas a seguir somente os casos de raízes quadráticas de expressões quadráticas sem o termo linear, i.e., expressões do tipo $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, ou $\sqrt{x^2-a^2}$.

6.9.3.2 Integrais com $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, ou $\sqrt{x^2-a^2}$

Integrais que envolvem expressões do tipo $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, ou $\sqrt{x^2-a^2}$ frequentemente podem ser resolvidas por substituição trigonométrica, que permite transformar a expressão dentro da raiz em um quadrato completo. Sendo assim, a função no integrando pode se tornar uma função racional de funções trigonométricas, o que permite a sua resolução.

Temos ao nosso dispor os seguintes três tipos de substituições trigonométricas:

Caso 1: Integrais que envolvem $\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad(|x| \leq a,\ a>0)$:
Substituição: $\quad x = a \operatorname{sen} u$ para $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$

Neste caso, a raiz fica $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2 u} = \sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2 u)} = a\sqrt{\cos^2 u} = a\cos u$
(O resultado da raiz é não negativo pois para $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, temos $\cos u \geq 0$.)

Exemplo 27. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = I \ (x>0)$
Poderíamos tentar a substituição: $u = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)dx = -\dfrac{x}{u}dx$, ou seja, $dx = -\dfrac{u}{x}du$
Precisaríamos isolar x: $u^2 = 9-x^2 \ \Rightarrow\ x^2 = 9-u^2 \ \Rightarrow\ x = \sqrt{9-u^2}$.

$I = -\displaystyle\int \frac{u}{x^2}\frac{u}{x}du = -\int \frac{u^2}{(9-u^2)^{\frac{3}{2}}}du$ (essa integral não é mais simples do que a integral original)

Mas substituição trigonométrica $x = 3\operatorname{sen} u$ com $dx = 3\cos u du$ fornece $\sqrt{9-x^2} = 3\cos u$. Não precisamos nos preocupar com o sinal, pois o domínio para o qual fazemos essa substituição será no máximo $x \in [-3,3]$ o que corresponde a $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, onde o cosseno é positivo.

$$\Rightarrow I = \int \frac{3\cos u}{(3\operatorname{sen} u)^2}3\cos u du = \int \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u}du = \int \frac{1-\operatorname{sen}^2 u}{\operatorname{sen}^2 u}du$$
$$= \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}du - \int du = -\cot u - u + C$$

Como $x = 3\operatorname{sen} u$, temos $u = \operatorname{arcsen}\frac{x}{3}$ (é inversível por causa da restrição do domínio em u escolhida), o que implica
$I = -\cot(\operatorname{arcsen}\frac{x}{3}) - \operatorname{arcsen}\frac{x}{3} + C$
Uma função trigonométrica aplicada a uma outra trigonométrica inversa precisa ser simplificada, pois representa na verdade uma relação algébrica disfarçada. Podemos escrever

$$I = -\frac{\cos(\operatorname{arcsen}\frac{x}{3})}{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}\frac{x}{3})} - \operatorname{arcsen}\frac{x}{3} + C = -\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen}\frac{x}{3})}}{\frac{x}{3}} - \operatorname{arcsen}\frac{x}{3} + C$$
$$= -\frac{3}{x}\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2} - \operatorname{arcsen}\frac{x}{3} + C = -\frac{1}{x}\sqrt{9-x^2} - \operatorname{arcsen}\frac{x}{3} + C$$

Outra forma de proceder é usar que $\sqrt{9-x^2} = 3\cos u$:
$$I = -\cot u - u + C = -\frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} - u + C = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\frac{x}{3} + C$$

Teste: $I'(x) = -\dfrac{-1}{x^2}\sqrt{9-x^2} - \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x) - \dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}\dfrac{1}{3}$

$$= \frac{1}{x^2}\sqrt{9-x^2} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{x^2}\sqrt{9-x^2}$$

Caso 2: Integrais que envolvem $\sqrt{a^2+x^2}$ $(a>0)$:
Substituição: $x = a\tan u$ para $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$

Neste caso, a raiz fica $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(\tan^2 u + 1)} = a\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}{\cos^2 u}} = a\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 u}} = \dfrac{a}{\cos u}$

Exemplo 28. $I = \displaystyle\int x\sqrt{x^2+4}dx$

Substituição trigonométrica $x = 2\tan u$, $dx = \dfrac{2}{\cos^2 u}du$;

$I = \displaystyle\int x\sqrt{x^2+4}dx = 2\int \tan u \cdot \frac{2}{\cos u} \cdot \frac{2}{\cos^2 u}du = 8\int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos^4 u}du$

Substitutição: $\cos u = t$, $-\operatorname{sen} u du = dt$

Logo:
$I = -8\displaystyle\int \frac{1}{t^4}dt = \frac{8}{3}t^{-3} + C = \frac{8}{3}\cos^{-3} u + C$

Para desfazer a substituição trigonométrica, podemos também transformar a função trigonométrica no resultado de volta para aquela usada na substituição:

$I = \dfrac{8}{3}\left(\cos^{-2} u\right)^{3/2} + C = \dfrac{8}{3}\left[1+\tan^2 u\right]^{3/2} + C = \dfrac{4^{3/2}}{3}\left[1+(\dfrac{x}{2})^2\right]^{3/2} + C = \dfrac{1}{3}(x^2+4)^{3/2} + C$

onde foi usado que $\cos^{-2} u = 1 + \tan^2 u$.

(Obs: Essa integral teria sido mais facilmente resolvida pela substituição $u = x^2+4$.)

Exemplo 29. $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}dx$

Substituição trigonométrica $x = 2\tan u$, $dx = \dfrac{2}{\cos^2 u}du$;

$$I = \int x^{-4}\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{1}{16}\int \tan^{-4} u \cdot \frac{2}{\cos u} \cdot \frac{2}{\cos^2 u}du = \frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 u}{\operatorname{sen}^4 u}\frac{1}{\cos^3 u}du$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^4 u}du = \frac{1}{4}\int t^{-4}dt = \frac{1}{4}\frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{12t^3} + C$$

onde foi usada a substituição: $\operatorname{sen} u = t$, $\cos u\, du = dt$
Desfazendo as substituições, obtemos

$$I = -\frac{1}{12\operatorname{sen}^3 u} + C = -\frac{1}{12}\left(\frac{1+\tan^2 u}{\tan^2 u}\right)^{3/2} + C = -\frac{1}{12}\left(\frac{4+4\tan^2 u}{4\tan^2 u}\right)^{3/2} + C$$
$$= -\frac{1}{12}\left(\frac{4+x^2}{x^2}\right)^{3/2} + C = -\frac{1}{12x^3}\left(4+x^2\right)^{3/2} + C$$

Exemplo 30. $I = \int x^2\sqrt{x^2+4}dx$

Substituição trigonométrica $x = 2\tan u$, $dx = \dfrac{2}{\cos^2 u}du$;

$$\begin{aligned}
I &= \int x^2\sqrt{x^2+4}dx = 4\int \tan^2 u\cdot\frac{2}{\cos u}\cdot\frac{2}{\cos^2 u}du = 16\int \tan^2 u\sec^3 u\,du\\
&= 16\int(\sec^2 u - 1)\sec^3 u\,du = 16\int \sec^5 u\,du - \int \sec^3 u\,du\\
&= 16\int\frac{1}{\cos^6 u}\cos u\,du - 16\int\frac{1}{\cos^4 u}\cos u\,du = 16\int\frac{1}{(1-t^2)^3}dt - 16\int\frac{1}{(1-t^2)^2}dt
\end{aligned}$$

onde foi usada a substituição: $\quad \operatorname{sen} u = t,\ \cos u\,du = dt$

A segunda integral foi calculada no exemplo 20 na página 267. A primeira se determina de forma análoga, obtendo

$$I = \frac{10t-6t^3}{(1-t^2)^2} + 3\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 4\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 8\frac{t}{1-t^2} + C = \frac{2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} - \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

Desfazendo as substituições, usando $t = \operatorname{sen} u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ (onde a última relação foi obtida no exemplo anterior), temos

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}(1+\frac{x^2}{x^2+4})}{(1-\frac{x^2}{x^2+4})^2} - \ln\left|\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}\right| + C = \frac{2\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\frac{2x^2+4}{x^2+4}}{(\frac{4}{x^2+4})^2} - \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}-x}\right| + C\\
&= \frac{x}{8}(2x^2+4)\sqrt{x^2+4} - \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}-x}\right| + C
\end{aligned}$$

Caso 3: Integrais que envolvem $\sqrt{x^2-a^2}$ ($|x| \geq a$, $a > 0$):

Substituição: $\quad x = a\cdot\sec u = \dfrac{a}{\cos u}$

$x > 0 : 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}; \qquad x < 0 : \frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi$

Neste caso, a raiz fica $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{\cos^2 u} - a^2} = a\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 u} - 1} = a\cdot\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 u}{\cos^2 u}} = a\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}} = a\sqrt{\tan^2 u} = a\tan u$

Exemplo 31. $I = \displaystyle\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$

$x = \dfrac{3}{\cos u}$, $dx = \dfrac{3}{\cos^2 u}\cdot\operatorname{sen} u du$

$$I = \int\frac{1}{(\frac{3}{\cos u})^3\cdot 3\tan u}\frac{3\operatorname{sen} u}{\cos^2 u}du = \frac{1}{27}\int\cos^2 u\,du = \frac{1}{27}\int(1-\operatorname{sen}^2 u)du = \frac{1}{27}u - \frac{1}{27}\int\operatorname{sen}^2 u du$$

Integração por partes com $f = \operatorname{sen} u$, $f' = \cos u$; $g' = \operatorname{sen} u$, $g = -\cos u$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{27}u - \frac{1}{27}(-\operatorname{sen} u\cos u + \int\cos^2 u du) = \frac{1}{27}u + \frac{1}{27}\operatorname{sen} u\cos u - \frac{1}{27}\int\cos^2 u du\\
&= \frac{1}{27}u + \frac{1}{27}\operatorname{sen} u\cos u - I
\end{aligned}$$

$\Rightarrow 2I = \frac{1}{27}(u + \operatorname{sen} u \cos u) + C$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{27}\int \cos^2 u du = \frac{1}{54}(u + \cos u \operatorname{sen} u) + C$$

$u = \arccos \frac{3}{x}$

$$I = \frac{1}{54}\left(\arccos\frac{3}{x} + \cos(\arccos\frac{3}{x})\operatorname{sen}(\arccos\frac{3}{x})\right) + C$$
$$= \frac{1}{54}\left(\arccos\frac{3}{x} + \frac{3}{x}\sqrt{1-\cos^2(\arccos\frac{3}{x})]}\right) + C = \frac{1}{54}\left(\arccos\frac{3}{x} + \frac{3}{x}\sqrt{1-(\frac{3}{x})^2}\right) + C$$
$$= \frac{1}{54}\arccos\frac{3}{x} + \frac{1}{18x^2}\sqrt{x^2-9} + C$$

Observação: As primitivas das funções que envolvem raízes do tipo $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, ou $\sqrt{x^2-a^2}$ geralmente envolvem as mesmas raízes, porém disfarçadas de funções trigonométricas aplicadas a inversas de outras funções trigonométricas. Para voltar a expressões envolvendo a raiz original, temos que fazer uso de teoremas de adição.

6.9.3.3 Integrações que geram as funções hiperbólicas inversas

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \operatorname{arsenh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcosh} x + C,\ x > 1!!$$

$$\int \frac{1}{1^2-x^2}dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C, & |x| < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C, & |x| > 1 \end{cases}$$

Ou: Frações parciais: $I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

Lembremos também:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \arcsen x + C, & |x| < 1 \\ -\arccos x + C, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \begin{cases} \arctan x + C, & |x| < 1 \\ -\operatorname{arccot} x + C, & |x| > 1 \end{cases}$$

Como lembrar qual dessas integrais é qual função?

Teste: Digamos que queremos verificar se $I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ realmente fornece o $\operatorname{arcsen} x$!

Substituição: $u = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} u$, $dx = \cos u du$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \cos x$

$$I = \int \frac{1}{\cos u} \cdot \cos u du = \int du = u + C = \operatorname{arcsen} x + C$$

Para todos os tipos de integrais, se desconfiarmos da resposta certa, a integral virá por esta substituição $\int du$. Se acharmos algo errado, não dá certo:

$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$ fornece $\operatorname{arcsen} x$?

$u = \operatorname{arcsen} x$, $x = \operatorname{sen} u$, $dx = \cos u du \ \Rightarrow \ x^2 - 1 = -\cos^2 u$

$I = \int \frac{\cos u}{\sqrt{-\cos^2 u}} du$? Não existe $\Rightarrow$ Não é o $\operatorname{arcsen} x$!

É o $\operatorname{arcosh} x$? Testando com a substituição
$u = \operatorname{arccos} hx$, $x = \cosh u$, $dx = \operatorname{senh} udu$, $x^2 - 1 = \cosh^2 u - 1 = \operatorname{senh}^2 u$,
obtemos:
$I = \int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 u}} \operatorname{senh} udu = \int du = u + C = \operatorname{arccos} hx + C$. Sim!

6.9.3.4 Área entre a reta $y = Tx$ e a hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$

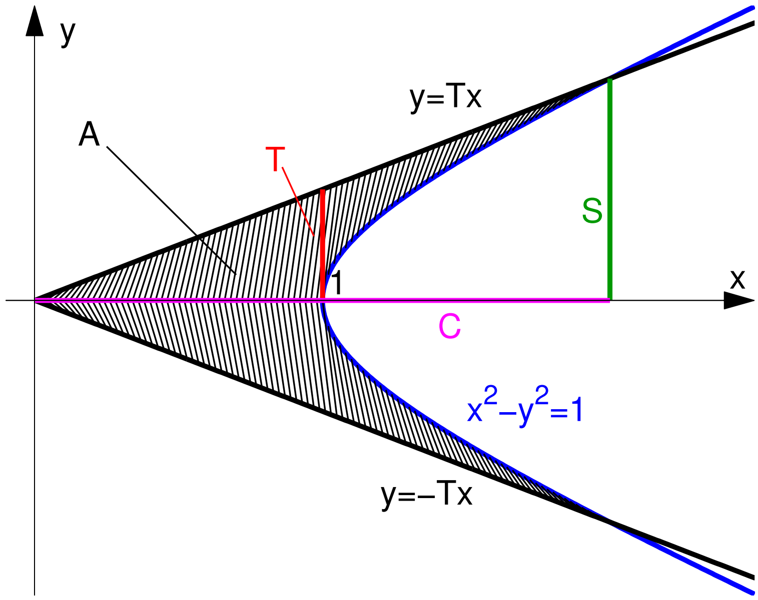


Figura 6.49: A área A entre as retas $y = Tx$ e $y = -Tx$ e a hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$ é o valor obtido pelas funções hiperbólicas inversas, justificando os nomes com o prefixo "área".

Em analogia à definição de seno, cosseno e tangente na circunferência unitária, definimos os valores S, C e T para um ponto na hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$ (veja Figura 6.49). Notamos inicialmente que $T/1 = S/C$ e $S = \sqrt{C^2 - 1}$.

Ao calcularmos a área entre a reta $y = Tx$ e a hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$, i.e., a metade da área A grafada na Figura 6.49), obtemos:
$\frac{1}{2}A = \int_0^C Txdx - \int_1^C \sqrt{x^2-1}dx = I_1 - I_2$
onde a primeira integral fornece
$I_1 = T \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^C = T\frac{C^2}{2} - 0 = \frac{CS}{2}$ (que também pode ser obtido geometricamente pela área do triângulo envolvido).

Na segunda integral, multiplicamos numerador e denominador com $\sqrt{x^2-1}$, obtendo

$$I_2 = \int_1^C \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int_1^C \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int_1^C \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = I_{2a} - I_{2b}$$

O integrando da última integral é a derivada de $\operatorname{arcosh} x$, ou seja,

$I_{2b} = \operatorname{arcosh} x\Big|_1^C = \operatorname{arcosh} C - \operatorname{arcosh} 1 = \operatorname{arcosh} C.$

Resta resolvermos a integral I_{2a}. Nela, fazemos integração por partes com

$f = x,\ f' = 1;\ g' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}},\ g = \sqrt{x^2-1}$, obtendo

$$I_{2a} = x\sqrt{x^2-1}\Big|_1^C - \int_1^C \sqrt{x^2-1}dx = C\sqrt{C^2-1} - 0 - \int_1^C \sqrt{x^2-1}dx = CS - \underbrace{\int_1^C \sqrt{x^2-1}dx}_{I_2}$$

onde reconhecemos a integral I_2. Substituindo então o último resultado na expressão para I_2, podemos escrever

$I_2 = \underbrace{CS - I_2}_{I_{2a}} - \underbrace{\operatorname{arcosh} C}_{I_{2b}} \ \Rightarrow\ 2I_2 = CS - \operatorname{arcosh} C$

Portanto, obtemos $I_2 = \dfrac{CS}{2} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arcosh} C$

Subtraindo essa expressão de $I_1 = CS/2$, encontramos o valor da área

$\dfrac{1}{2}A = I_1 - I_2 = \dfrac{CS}{2} - \left(\dfrac{CS}{2} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arcosh} C\right) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arcosh} C,$

o que implica $A = \operatorname{arcosh} C$

Em consequência, pelas relações entre S, C e T, concluímos que

$A = \operatorname{arsenh} S = \operatorname{arcosh} C = \operatorname{artanh} T$ ou, alternativamente

$S = \operatorname{senh} A$, $C = \cosh A$ e $T = \tanh A$.

Observação: Este resultado justifica a escolha do nome das funções hiperbólicas inversas.

6.9.4 Potências racionais de x

Se a integral envolve potências fracionárias de x, o integrando pode ser simplificado pela substituição $x = z^n$, onde n e o menor múltiplo comum dos denominadores de todos os expoentes envolvidos.

Exemplo 32. $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = I = \int \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/3}}dx$

Expoentes $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3} \Rightarrow 6$ e o menor múltiplo comum dos denominadores.

Substituição: $x = z^6$, $dx = 6z^5dz$

$$I = \int \frac{\sqrt{z^6}}{1+\sqrt[3]{z^6}}6z^5dz = 6\int \frac{z^3}{1+z^2}\cdot z^5dz = 6\int \frac{z^8}{1+z^2}dz$$

Divisão polinomial:

$$z^8 : z^2+1 = z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2}$$

$$I = 6\int\left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2}\right)dz = \frac{6}{7}z^7 - \frac{6}{5}z^5 + \frac{6}{3}z^3 - 6z + 6\arctan z + C$$
$$= \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6}\arctan x^{1/6} + C$$

6.10 Outras ideias de integração

6.10.1 Outras expressões algébricas

Muitas as vezes ajuda tentar fazer o integrando racional, substituindo a raiz inteira.

Exemplo 1. $\int x^5\sqrt{x^2+4}dx = I$

$u = \sqrt{x^2+4}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2xdx = \frac{x}{u}dx$, i.e., $xdx = udu$ e $x^2 = u^2 - 4$

$$I = \int x^4 u \cdot udu = \int (u^2-4)^2 u^2 du = \int (u^4 - 8u^2 + 16)u^2 du$$
$$= \int (u^6 - 8u^4 + 16u^2)du = \frac{1}{7}u^7 - \frac{8}{5}u^5 + \frac{16}{3}u^3 + C$$
$$= \frac{1}{7}(x^2+4)^{7/2} - \frac{8}{5}(x^2+4)^{5/2} + \frac{16}{3}(x^2+4)^{3/2} + C = (x^2+4)^{3/2}\left[\frac{1}{7}(x^2+4)^2 - \frac{8}{5}(x^2+4) + \frac{16}{3}\right] + C$$
$$= (x^2+4)^{3/2}\left[\frac{1}{7}x^4 + (\frac{8}{7} - \frac{8}{5})x^2 + \frac{16}{7} - \frac{32}{5} + \frac{16}{3}\right] + C = (x^2+4)^{3/2}\left(\frac{1}{7}x^4 - \frac{16}{35}x^2 + \frac{128}{105}\right) + C$$
$$= \frac{(x^2+4)^{3/2}}{105}(15x^4 - 48x^2 + 128) + C$$

Teste: $I' = \frac{1}{105}\left[\frac{3}{2}(x^2+4)^{1/2} \cdot 2x(15x^4 - 48x^2 + 128) + (x^2+4)^{3/2}(60x^3 - 96x)\right]$
$$= \frac{(x^2+4)^{1/2}}{105}\Big(3x(15x^4 - 48x^2 + 128) + (x^2+4)(60x^3 - 96x)\Big]$$
$$= \frac{(x^2+4)^{1/2}}{105}\Big(45x^5 - 144x^3 + 384x + 60x^5 - 96x^3 + 240x^3 - 384x\Big] = x^5\sqrt{x^2+4}\checkmark$$

6.10.2 Raízes quadráticas de termos quadráticos

Exemplo 2. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}}dx = I$

Tentando a substituição $\sqrt{27x^2+6x-1} = u$, $27x^2 + 6x - 1 = u^2$

$$x = -\frac{6 \pm \sqrt{36 + 4\cdot 27(1+u^2)}}{2\cdot 27} = x = -\frac{6 \pm 6\sqrt{1+3+3u^2}}{2\cdot 27}$$

$x = -\frac{1 \pm \sqrt{4+3u^2}}{9}$ Não vai melhorar a expressão

As vezes, uma substituição não óbvia resolve o problema:
$x = \frac{1}{z}$, $dx = -\frac{1}{z^2}dz$, $dz = -\frac{1}{x^2}dx$

$$I=\int\frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z^2}\sqrt{\frac{27}{z^2}+\frac{6}{z}-1}}=-\int\frac{|z|dz}{\sqrt{27+6z-z^2}}=\begin{cases}-\int\frac{zdz}{\sqrt{27+6z-z^2}}, & \text{se} \quad z>0,\\ \int\frac{zdz}{\sqrt{27+6z-z^2}}, & \text{se} \quad z<0.\end{cases}$$

Nessa integral, queremos fazer a substituição $u=27+6z-z^2$, $du=(6-2z)dz$. Para tal, escrevemos a integral em duas partes,

$$\int\frac{zdz}{\sqrt{27+6z-z^2}}=-\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{6-2z}{\sqrt{27+6z-z^2}}dz}_{I_1}+3\underbrace{\int\frac{1}{\sqrt{27+6z-z^2}}dz}_{I_2}=-\frac{1}{2}I_1+3I_2$$

Na primeira integral, I_1, podemos fazer a substituição desejada, obtendo

$$\begin{aligned}I_1&=\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=2\sqrt{u}+C=2\sqrt{27+6z-z^2}+C=2\sqrt{27+6x^{-1}-x^{-2}}+C\\&=\frac{2}{|x|}\sqrt{27x^2+6x-1}+C\end{aligned}$$

Na segunda integral, I_2, observamos que

$$27+6z-z^2=-(\underbrace{z^2-2\cdot 3z+3^2}_{=(z-3)^2}\underbrace{-3^2-27}_{=-36})=36-(z-3)^2=36\left[1-\left(\frac{z-3}{6}\right)^2\right].$$

Assim, a substituição $\frac{z-3}{6}=u$, $\frac{dz}{6}=du$, $dz=6du$ resulta em

$$\begin{aligned}I_2&=\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\operatorname{arcsen} u+C=\operatorname{arcsen}\frac{z-3}{6}+C=\operatorname{arcsen}\frac{x^{-1}-3}{6}+C\\&=\operatorname{arcsen}\frac{1-3x}{6x}+C\end{aligned}$$

Consequentemente, encontramos

$$I=\begin{cases}\frac{1}{x}\sqrt{27x^2+6x-1}-3\operatorname{arcsen}\frac{1-3x}{6x}+C, & \text{se} \quad x>0,\\ \frac{1}{x}\sqrt{27x^2+6x-1}+3\operatorname{arcsen}\frac{1-3x}{6x}+C, & \text{se} \quad x<0.\end{cases}$$

6.10.3 Outra forma de racionalizar

Integrais da forma $\int\frac{x^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Uma possibilidade é substituir a raiz pela diferença entre a variável nova e um múltiplo conveniente da variável velha, i.e., fazer a substituição:
$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-\sqrt{a}\cdot x$.

Exemplo 3. $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+2x-1}}dx$
$\sqrt{x^2+2x-1}=z-x \iff z=x+\sqrt{x^2+2x-1}$.

Obtemos

$$dz=\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-1}}(2x+2)\right)dx=\left(1+\frac{x+1}{z-x}\right)dx=\frac{z-x+x+1}{z-x}dx=\frac{z+1}{z-x}dx$$

Portanto, $dx=\frac{z-x}{z+1}dz$.

Assim, $I = \int \frac{1}{x(z-x)} \frac{z-x}{z+1} dz = \int \frac{1}{x(z+1)} dz$

Precisamos ainda eliminar o x. Para tal elevamos a relação original entre x e z ao quadrado, obtendo $x^2 + 2x - 1 = (z-x)^2 = z^2 - 2xz + x^2$, o que implica $2x - 1 = z^2 - 2xz$, ou seja $2x(z+1) = z^2 + 1$ que fornece $x = \frac{z^2+1}{2(z+1)}$

Assim, obtemos

$I = \int \frac{2(z+1)}{z^2+1} \frac{1}{z+1} dz = 2 \int \frac{1}{1+z^2} dz = 2 \arctan z + C = 2 \arctan\left(x + \sqrt{x^2+2x-1}\right) + C.$

Teste:

$$
\begin{aligned}
I' &= 2\frac{1}{1+(x+\sqrt{x^2+2x-1})^2}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-1}}(2x+2)\right) \\
&= 2\frac{1}{1+(x^2+2x\sqrt{x^2+2x-1}+x^2+2x-1)} \frac{\sqrt{x^2+2x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}} \\
&= 2\frac{1}{2x^2+2x+2x\sqrt{x^2+2x-1}} \frac{\sqrt{x^2+2x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}} \\
&= 2\frac{1}{2x(x+1+\sqrt{x^2+2x-1})} \frac{\sqrt{x^2+2x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x-1}}
\end{aligned}
$$

6.11 Estratégias de integração

Ao nos depararmos com uma integral, temos uma grande variedade de possibilidades que talvez possam ser usadas para resolvê-la.

Sendo assim, precisamos organizar a nossa abordagem para descobrir se algum dos caminhos possíveis fornece uma solução. Segue uma sequência de passos que pode ser útil nesse sentido.

1. Verificar se a função no integrando é a derivada de uma função conhecida.
   Exemplos: $\int \frac{1}{x} dx$, $\int \frac{1}{1+x^2} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $\int \sec^2 x \, dx$
2. Verificar se a função no integrando pode ser transformada em uma derivada de uma função conhecida por uma modificação algébrica ou uma substituição simples.
   Exemplos: $\int \frac{1}{x-7} dx$, $\int \frac{1}{4+x^2} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$, $\int \sec^2 2x \, dx$
   $(u = x - 7)$ $(x = 2u)$ $(x = 3u)$ $(u = 2x)$
3. Verificar se a função no integrando pode ser manipulada algebricamente para deixá-la na forma $f'(x)/f(x)$, pois o resultado da integração, obtido pela substituição $u = f(x)$, será $\ln |f(x)| + C$
   Exemplos: $\int \frac{1}{x-7} dx$, $\int \frac{x}{4+x^2} dx$, $\int \tan x \, dx$, $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} dx$, $\int \sec x \, dx$
   $(f = x-7)$ $(f = 4+x^2)$ $(f = \cos x)$ $(f = \tan x)$ $(f = \sec x + \tan x)$
4. Verificar se a função no integrando pode ser manipulada algebricamente para deixá-la na forma $f'(x)[f(x)]^r$, pois o resultado da integração, obtido pela substituição $u = f(x)$,

será $[f(x)]^{r+1}/(r+1)+C$

Exemplos: $\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}}dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$, $\int \operatorname{sen} x \sqrt[3]{\cos x+1}\,dx$
$(f=4+x^3)$ $(f=9-x^2)$ $(f=\cos x+1)$

5. Verificar se substituições simples removem dificuldades com funções compostas.

   Exemplos: $\int x\operatorname{sen}(x^2)dx$, $\int \cos x e^{\operatorname{sen} x}dx$, $\int \frac{x^5}{4+x^{12}}dx$, $\int xe^{2x^2}\operatorname{sen}(e^{2x^2})dx$
   $(u=x^2)$ $(u=\operatorname{sen} x)$ $(x^6=2u)$ $(u=e^{2x^2})$
   e todos os exemplos do item 4.

6. Se a função no integrando possuir fatores que simplificam muito ao serem derivados (ou ao menos não complicam), aplicar integração por partes.

   Exemplos: $\int \ln x\,dx$, $\int x\arctan x\,dx$, $\int e^x\operatorname{sen} 2x\,dx$, $\int x^2\cos x\,dx$

7. Se a função no integrando for uma função racional: Divisão polinomial (se necessário) e frações parciais, seguido da integração de um ou mais dos quatro tipos básicos de integrais.

   Exemplos para os tipos básicos de integrais que podem ser necessários a serem resolvidas:
   $$\int \frac{1}{x-7}dx,\quad \int \frac{3x+5}{4+x^2}dx,\quad \int \frac{1}{(x-7)^3}dx,\quad \int \frac{3x+5}{(4+x^2)^2}dx$$

8. Se a função no integrando for uma expressão racional das funções trigonométricas, lembrar do procedimento oportuno para o caso em questão ou seguir pelo caminho geral usando a substituição $z=\tan\frac{x}{2}$ (vai caír em uma integral de uma função racional).

   Exemplos: $\int \sec x\,dx$, $\int \tan^4 x\sec^3 x\,dx$, $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^4 x\,dx$

9. Se a função no integrando envolve raízes quadradas de termos quadráticas: reduzir para a forma $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ ou $\sqrt{x^2-a^2}$ e usar substituição trigonométrica (pode caír em uma integral de uma expressão racional das funções trigonométricas).

   Exemplos: $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}dx$, $\int \frac{x^4}{\sqrt{9-x^2}}dx$, $\int \frac{x^2}{(x^2-16)^{3/2}}dx$
   $(x=3\tan u)$ $(x=3\operatorname{sen} u)$ $(x=4\sec u)$

10. Se a função no integrando for uma expressão racional de termos de x com potências racionais, fazer a substituição $x=z^n$, onde n é o mmc de todas as potências presentes na função.

    Exemplos: $\int \frac{x^{1/2}}{x^{1/3}+x^{1/5}}dx$, $\int \frac{2-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx$, $\int \frac{x}{x^{-1/2}+x^{1/2}}dx$
    $(x=u^{30})$, $(x=u^6)$ $(x=u^2)$

11. Procurar outras substituições que possam permitir simplificação algébrica da função no integrando. Ideias: $z=1/x$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=u-x\sqrt{a}$, etc.

6.12 Integrais impróprias

Vimos pelo Teorema Fundamental do Cálculo na Seção 6.4 que, se f for contínua em $[a, b]$, então a área por baixo de uma função f em $[a, b]$ é dada por

$$A = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

onde $F(x)$ é uma primitiva (antiderivada) de $f(x)$ i.e., $F'(x) = f(x)$.

Porém, o que acontece se a função f for descontínua nas pontas do invervalo, no interior do intervalo, ou se $F(b)$ ou $F(a)$ não existir?

6.12.1 Inexistência da primitiva

Existem duas situações em que a primitiva nas pontas do intervalo não pode ser calculada: (1) A primitiva não está definida na ponta do intervalo e (2) a ponta do intervalo não existe, i.e., a integral se estende até infinito.

6.12.1.1 Inexistência da primitiva nas pontas do intervalo

Em caso de inexistência da primitiva nas pontas do intervalo, definimos:

Definição: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad$ se $F(a)\nexists$.

Definição: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad$ se $F(b)\nexists$.

Definição: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \lim\limits_{\delta\to 0^+} \int\limits_{c}^{b-\delta} f(x)dx,\ c \in (a, b) \quad$ se $F(a)\nexists$ e $F(b)\nexists$.

Observação: É importante observar que esses dois limites devem ser calculados independentemente um do outro.

Dizemos que a integral *converge* se o(s) limite(s) existir(em). Caso contrário, dizemos que a integral *diverge*.

Exemplo 1. $I = \int\limits_0^1 \ln x\, dx$

A primitiva do logaritmo natural é a função $F(x) = x\ln x - x$ (veja Exemplo 8 na página 226) que não existe em $x = 0$. Portanto, temos uma integral imprópria. Fazendo o limite da ponta inferior do intervalo se aproximando a zero, obtemos

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_\varepsilon^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 dx \right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(1\underbrace{\ln 1}_{=0} - \varepsilon\ln\varepsilon - x\Big|_\varepsilon^1 \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon_{\searrow 0} \right) = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon} \overset{\text{L'H}}{=} -1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2}}_{=-\varepsilon\to 0} = -1$$

Portanto, essa integal *converge.*

6.12.1.2 Limites de integração infinitos

Agora, como devemos fazer para resolver a integral abaixo?

$$A = \int_a^\infty f(t)dt$$

Temos inexistência da primitiva no ponto final da integração (porque esse ponto não existe). Portanto, definimos por analogia com as definições da Seção 6.12.1.1:

<u>**Definição:**</u> $A = \int_a^\infty f(t)dt = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(t)dt$

Exemplo 2. *Calcule a área entre $x = 0$ e infinito por baixo da função exponencial decaindo $f(x) = e^{-x}$*

$$\int_0^\infty e^{-x}dx - \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b dx = \lim_{b\to\infty} (-e^{-x})|_0^b = \lim_{b\to\infty} [-e^{-b} - (-e^{-0})] = \lim_{b\to\infty} 1 - \underbrace{e^{\overbrace{-b}^{\nearrow -\infty}}}_{\searrow 0} = 1$$

Dizemos que essa integral *converge* para 1.

Exemplo 3. $I = \int\limits_1^\infty \ln x dx$

$$I = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \ln x dx = \lim_{b\to\infty} \left(x \ln x\Big|_1^b - \int\limits_1^b dx \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(b\ln b - 1 \underbrace{\ln 1}_{=0} - x\Big|_1^b \right) = \lim_{b\to\infty} (b\ln b - b + 1) = 1 + \lim_{b\to\infty} b_{\searrow\infty} \underbrace{(\ln b - 1)}_{\searrow\infty} = \infty$$

Portanto, essa integal *diverge.*

Para a ponta inferior em menos infinito procedemos de forma análoga.

<u>**Definição:**</u> $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$

Finalmente, para integrais de menos infinito a infinito, separamos a integral em duas.

<u>**Definição:**</u> $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx + \int\limits_c^\infty f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_c^b f(x)dx$

onde o ponto c pode ser escolhido arbitrariamente.

Observação: É importante observar que os dois limites devem ser calculados independentemente um do outro, salvo que exista informação do problema original que mostra uma dependência entre os limites de integração.

Exemplo 4. $I = \int\limits_{-\infty}^{2} \frac{1}{(4-x)^2}dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{2} \frac{1}{(4-x)^2}dx$

$4-x=u$, $-dx=du$, $u(x=2)=2$, $u(x=a)=4-a$

$$I = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{4-a}^{2} \frac{-1}{u^2}du = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{u}\bigg|_{4-a}^{2} = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4-a}\right] = \frac{1}{2} - \lim_{a\to-\infty} \underbrace{\frac{1}{4-a}}_{\searrow 0} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xdx = ?$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} xdx + \lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b} xdx = \lim_{a\to-\infty}\frac{x^2}{2}\bigg|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty}\frac{x^2}{2}\bigg|_{0}^{b}$$

$= \lim\limits_{a\to-\infty}\left(\cancelto{-\infty}{0-\frac{a^2}{2}}\right) + \lim\limits_{b\to\infty}\left(\cancelto{\infty}{\frac{b^2}{2}-0}\right) \Rightarrow$ a integral diverge, porque os dois limites envolvidos não existem e desconhecemos qualquer relação entre eles.

Mas se o problema de onde a integral surgiu garante que os limites tem que se estender ao infinito de forma simétrica, temos:

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^{r} xdx = \lim_{r\to\infty}\frac{x^2}{2}\bigg|_{-r}^{r} = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^2}{2}\right) = \lim_{r\to\infty} 0 = 0$$

Esta integral é identicamente zero.

Porém, a integral também pode ter surgido de um problema onde os limites de integração tem outra relação, por exemplo,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{2r} xdx = \lim_{r\to\infty}\frac{x^2}{2}\bigg|_{-r}^{2r} = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{4r^2}{2}-\frac{r^2}{2}\right) = \lim_{r\to\infty}\frac{3r^2}{2} = \infty$$

ou

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-2r}^{r} xdx = \lim_{r\to\infty}\frac{x^2}{2}\bigg|_{-2r}^{r} = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{4r^2}{2}\right) = \lim_{r\to\infty}\frac{-3r^2}{2} = -\infty$$

Estas integrais divergem.

Conclusão: Ao resolver uma integral de $-\infty$ a ∞, é importantíssimo observar se existe informação sobre uma possível relação entre os limites da integração. Geralmente, o resultado vai depender disso. Se não houver essa informação, temos que calcular os limites separadamente.

Exemplo 6. *Calcule* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+13}$ *se convergir.*

Completando o quadrado do denominador, temos:

$$x^2+6x+13=\underbrace{x^2+2\cdot 3x+3^2}_{(x+3)^2}\underbrace{-3^2+13}_{=4}=4(1+(\tfrac{x+3}{2})^2)$$

Vemos que o resto é positivo, portanto essa expressão não é fatorável. Sendo assim, escrevemos a integral da forma

$$I=\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+(\frac{x+3}{2})^2}=\frac{1}{4}\left(\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{-3}\frac{dx}{1+(\frac{x+3}{2})^2}+\lim_{b\to\infty}\int\limits_{-3}^{b}\frac{dx}{1+(\frac{x+3}{2})^2}\right)$$

Substitutição: $\dfrac{x+3}{2}=u$, $\dfrac{dx}{2}=du$, $dx=2du$, $u(a)=\dfrac{a+3}{2}$, $u(-3)=0$, $u(b)=\dfrac{b+3}{2}$

$$I=\frac{1}{4}\left[\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{\frac{a+3}{2}}^{0}\frac{2}{1+u^2}du+\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{\frac{b+3}{2}}\frac{2}{1+u^2}du\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{a\to-\infty}(\underbrace{\arctan 0}_{=0}-\underbrace{\arctan\frac{a+3}{2}}_{\to-\frac{\pi}{2}})+\lim_{b\to\infty}(\underbrace{\arctan\frac{b+3}{2}}_{\to\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\arctan 0}_{=0})\right]=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$$

Neste caso, cada um dos limites existe, o que garante que a integral convirja independentemente do comportamento específico dos limites de integração.

6.12.2 Descontinuidade no intervalo de integração

Sabemos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ onde $F(x)$ é a primitiva (antiderivada) de $f(x)$ i.é., $F'(x)=f(x)$ e se f é contínua em $[a,b]$.

Porém, o que acontece se a função f for descontínua nas pontas do invervalo ou então no interior do intervalo?

6.12.2.1 Descontinuidade nas pontas do intervalo de integração

Em caso de descontinuidade nas pontas do intervalo, procedemos da mesma forma como no caso da inexistência da primitiva nas pontas do intervalo, i.e., definimos:

Definição: $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ se f for descontínua em a

Definição: $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ se f for descontínua em b

Definição: $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx+\lim\limits_{\delta\to 0^+}\int\limits_{c}^{b-\delta} f(x)dx,$ com $c\in(a,b)$
se f for descontínua em a e b.

Observação: Novamente, é importante observar que os dois limites devem ser calculados independentemente um do outro.

6.12.2.2 Descontinuidade no interior do intervalo de integração

Se existe um ponto de descontinuidade d de f no interior do intervalo, i.e., em (a, b), fazemos uso da propriedade de integrais que podemos dividir a integral em duas. Aplicamos essa propriedade em d, de modo que a descontinuidade fique nas pontas dos intervalos de integração das integrais obtidas, i.e.,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

Sendo assim, podemos definir

<u>**Definição:**</u> $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{d-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{d+\delta}^b f(x)dx$

Observação: Novamente, é importante observar que, de modo geral, os dois limites devem ser calculados independentemente um do outro. Quando os dois limites são calculados juntos, chamamos isso o Valor Principal de Cauchy da integral, denotado por

$$\mathbf{PV}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_a^{d-\varepsilon} f(x)dx + \int_{d+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

Exemplo 7. $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)dx \ com \ f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x < 1, \\ 2x+1, & se \quad x \geq 1. \end{cases}$

$$I = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} xdx + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{1+\delta}^2 (2x+1)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0^+} (x^2+x)\Big|_{1+\delta}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (\frac{1-\varepsilon}{2})^2 - 0 + \lim_{\delta\to 0} [4 + 2 - [(1+\delta)^2 + (1+\delta)]] = \frac{1}{2} + 6 - [1+1] = \frac{9}{2}$$

Observação: Se a função for contínua lateralmente em d em uma das subintegrais (como no exemplo a segunda integral), podemos nela aplicar o TFC diretamente, não sendo necessário o cálculo do limite. A forma apresentada no exemplo é geral e também estaria válida se o valor de $f(1)$ fosse diferente de 3.

Observação: Integrais com descontinuidades no integrando são fáceis de errar, se não notamos a presença da descontinuidade.

Exemplo 8. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = ?$

Temos: $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \frac{-1}{(x-1)} + C$

Assim, parece que temos que calcular $\displaystyle\left.\frac{-1}{(x-1)}\right|_0^2 = \frac{-1}{1} - \left(\frac{-1}{-1}\right) = -2$

Porém, a função é positiva, o que implica que área esteja completamente por cima do eixo. Portanto, a integral tem que dar um valor positivo. Onde erramos?

Erramos ao aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Não podia ser aplicado, porque a função $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ tem uma descontinuidade em $x = 1 \in [0,2] \;\Rightarrow\;$ temos que separar a integral em duas duas. Como $f(1)$ não existe, aplica-se a última definição acima:

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^2}dx + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{1+\delta}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left.\frac{-1}{(x-1)}\right|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0^+} \left.\frac{-1}{(x-1)}\right|_{1+\delta}^{2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{-1}{-\varepsilon} - \frac{-1}{-1}\right) + \lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{-1}{1} - \frac{-1}{\delta}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^{\nearrow\infty} + \lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{1}{\delta} - 1\right)^{\nearrow\infty} = \infty$$

Nenhum dos dois limites existe $\Rightarrow$ a integral diverge.

Exemplo 9. *Determine o valor principal de Cauchy da integral* $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx$

$$\mathbf{PV}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|X|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 0 = 0$$

Note que formas assimétricas de interromper a integral resultam em outros valores ou até em divergência da integral. Por exemplo,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-2\varepsilon} \frac{1}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-2\varepsilon} + \ln|X|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln 2\varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln 2 = \ln 2$$

ou

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon^2} \frac{1}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon^2} + \ln|X|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln\varepsilon^2 - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln\varepsilon = -\infty$$

6.13 Comprimento de arco

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Então, o trecho nesse intervalo da curva representada por f no plano é chamado de **arco** da função nesse intervalo.

Definição: O comprimento de arco ℓ da função f no intervalo $[a,b]$ é a distância medida ao longo dela.

Sabemos que, se f for uma reta, o comprimento de arco entre dois pontos A com coordenadas $(x_A = a, y_A = f(a))$ e B com coordenadas $(x_B = b, y_B = f(b))$ será dado por $\ell = \sqrt{[b-a]^2 + [f(b) - f(a)]^2}$ (veja a linha azul na Figura 6.50).

Queremos agora determinar o comprimento de um arco curvo, por exemplo ao longo da linha vermelha na Figura 6.50. Podemos imaginar que a função f representa uma corda que poderíamos esticar para medir o seu comprimento como se fosse uma reta. Notamos imediatamente que o comprimento de uma conexão curva como a linha vermelha entre A e

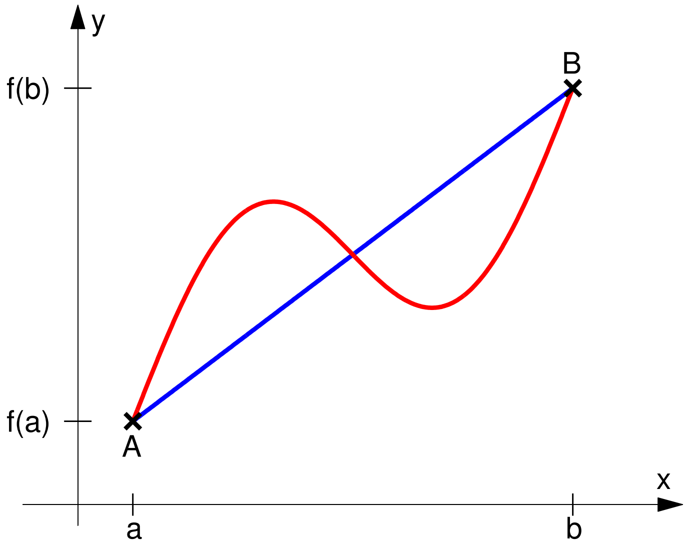


Figura 6.50: Comprimento de arco ao longo de uma curva entre dois pontos A e B.

B sempre será maior do que o da reta azul.

Como podemos obter uma medida desse comprimento?

Podemos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos e aproximar o comprimento em cada subintervalo pela distância ente os pontos inicial e final nesse intervalo. Obtemos

$$\ell \approx \ell_n = \sum_{i=1}^{n} d_i \quad \text{onde} \quad d_i = \sqrt{[x_i - x_{i-1}]^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

A Figura 6.51 mostra a linha obtida pela subdivisão em 5 intervalos. Notamos novamente que o comprimento ℓ da curva vermelha sempre será maior do que o da soma das linhas retas pretas ℓ_n, mas a diferença diminui quando usamos mais subintervalos.

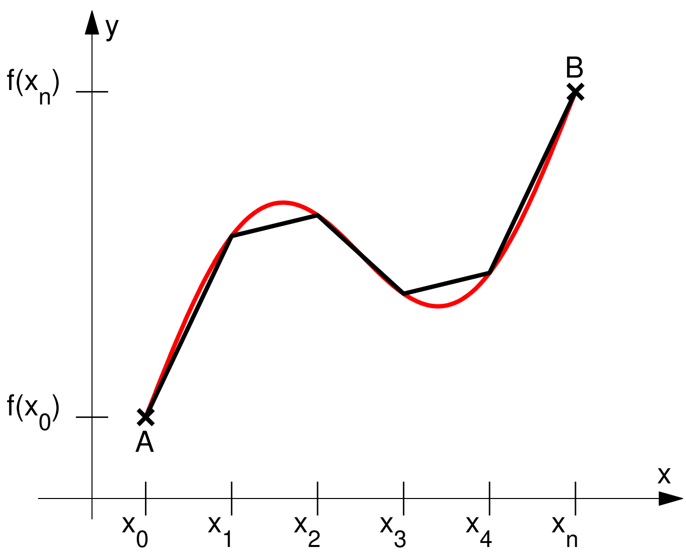


Figura 6.51: Aproximação do comprimento de arco ao longo de uma curva entre dois pontos A e B por subdivisão em 5 intervalos.

Admitindo que a subdivisão seja não uniforme, i.e., cada subintervalo pode ter o seu tamanho individual $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, podemos escrever

$$\ell_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i$$

onde foi usado a notação $\Delta f_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Além disso, supõe-se que os $\Delta x_i > 0$.

Ao considerarmos cada vez mais subintervalos (ou seja, considerando o limite para $n \to \infty$), de tal modo que todos os subintervalos tendam a tamanho nulo, esta soma dos comprimentos dos trechos retos vai ficar cada vez mais próximo ao verdadeiro comprimento do arco da f em $[a, b]$. Podemos escrever

$$\ell = \lim_{\Delta \to 0} \ell_n = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i \quad \text{onde} \quad \Delta = \max_{1 \le i \le n} |\Delta x_i|.$$

Para avaliar este limite, notamos que, pela continuidade de f, podemos fazer uso do TVM (página 142), que afirma que existe, em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, um ponto ξ_i tal que

$$\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i)$$

Assim, podemos concluir que

$$\ell = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\, \Delta x_i = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta x_i$$

Notamos que esta equação representa uma soma de Riemann (veja página 211) para a área por baixo da função

$$g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Portanto, podemos concluir que o o limite acima existe e que seu valor pode ser representado pela integral definida

$$\ell = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Observação: Note que, como no caso de uma área, o comprimento de arco de uma curva não depende do eixo ao longo do qual calculamos a integral. Sendo assim, se for mais interessante representar a função em dependência da variável y, i.e., $x = F(y)$, podemos calcular o comprimento de arco por meio de

$$\ell = \int_c^d \sqrt{1 + F'(y)^2}\, dy$$

onde c e d denotam as coordenadas y dos pontos inicial e final da curva.

Exemplo 1. *Determine o comprimento de arco da circunferência com raio r.*
A circunferência com raio r tem a expressão $x^2 + y^2 = r^2$. Podemos explicitar y para obter a parte superior dela,

$$y = f_s(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

cuja derivada é

$$f_s'(x) = \frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Assim, o comprimento de arco da parte superior da circunferência é dado por

$$\ell_s = \int_{-r}^{r} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = r\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$$

Substituição trigonométrica $x = r\,\mathrm{sen}\,u$, $dx = r\cos u\,du$, com $u(-r) = -\pi/2$ e $u(r) = \pi/2$ fornece $\sqrt{r^2-x^2} = r\cos u$ e, portanto,

$$\ell_s = r\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{r\cos u} r\cos u\,du = r\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du = ru\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = r\pi$$

Para a parte inferior, podemos fazer a conta análoga para $f_i(x) = -\sqrt{r^2-x^2}$, obtendo também $\ell_i = r\pi$ (como deve ser, por causa da simetria). Dessa forma, concluímos que a circunferência toda tem o comprimento de $\ell = \ell_i + \ell_s = 2\pi r$.

Exemplo 2. *Calcule o comprimento de arco de da curva dada pela relação $y = x^{2/3}$ entre os pontos (1,1) e (8,4).*
A derivada da função $f(x) = x^{2/3}$ é $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Portanto,

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_1^8 \sqrt{1+\left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)^2}\,dx = \int_1^8 \sqrt{1+\frac{4}{9}x^{-2/3}}\,dx$$

Para resolver esta integral, tentamos primeiramente eliminar o expoente racional da variável de integração, substituindo $x = u^3$, $dx = 3u^2du$ com $u(1) = 1$ e $u(8) = 2$. Assim,

$$\ell = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{4}{9}u^{-2}}\,3u^2du = 3\int_1^2 \sqrt{u^2+\frac{4}{9}}\,u\,du$$

onde usamos que $u > 0$ para $u \in [1,2]$. Agora fazendo a substituição racionalizadora $v = \sqrt{u^2+\frac{4}{9}}$, $dv = \frac{1}{2v}2udu \Rightarrow udu = vdv$ com $v(1) = \sqrt{\frac{9+4}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{13}$ e $v(2) = \sqrt{\frac{36+4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$, obtemos

$$\ell = 3\int_{\sqrt{13}/3}^{2\sqrt{10}/3} v\,vdv = 3\int_{\sqrt{13}/3}^{2\sqrt{10}/3} v^2\,dv = 3\,\frac{v^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{13}/3}^{2\sqrt{10}/3} = \left(\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{13}\right)^3$$

$$= \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}) \approx 7{,}6337$$

Alternativa: Se considerarmos a função $x = F(y) = y^{3/2}$, com derivada $F'(y) = \frac{3}{2}y^{1/2}$, podemos escrever o comprimento de arco da curva dada como

$$\ell = \int_1^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}y^{1/2}\right)^2}\,dy = \int_1^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}y}\,dy$$

Substituição $t = 1+\frac{9}{4}y$, $dt = \frac{9}{4}dy \Rightarrow dy = \frac{4}{9}dt$ com $t(1) = \frac{13}{4}$ e $t(4) = 10$ fornece

$$\ell = \int_{13/4}^{10} \sqrt{t}\,\frac{4}{9}dt = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} t^{1/2}\,dt = \frac{4}{9}\frac{t^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{13/4}^{10} = \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - (\frac{13}{4})^{3/2}\right)$$

$$= \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - \frac{13}{4}\sqrt{\frac{13}{4}}\right) = \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}) \approx 7{,}6337$$

Exemplo 3. *Determine o comprimento de arco da curva dada por* $(3+y)^2 = 4x$ *entre os pontos (1,1) e (9,3).*
Usamos a função $x = F(y) = \frac{1}{4}(3+y)^2$, cuja derivada é $F'(y) = \frac{1}{2}(3+y)$. Assim,

$$\ell = \int_1^3 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}(3+y)\right]^2} dy = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(3+y)^2} dy$$

Com a substituição trigonométrica $\frac{1}{2}(3+y) = \tan\theta$, $\frac{1}{2}dy = \sec^2\theta\, d\theta$ com $\theta(1) = \arctan(2)$ e $\theta(3) = \arctan(3)$ obtemos

$$\ell = \int_{\arctan(2)}^{\arctan(3)} \sqrt{1+\tan^2\theta} 2\sec^2\theta\, d\theta = 2\int_{\arctan(2)}^{\arctan(3)} \sec^3\theta\, d\theta$$

Resolvemos esta integral no Exemplo 20 na página 267. Usando aquele resultado, obtemos então

$$\ell = (\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \sec\theta\tan\theta)\Big|_{\arctan(2)}^{\arctan(3)}$$

Usando que $\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}$, podemos reescrever esse resultado em termos de $\tan\theta$ como

$$\begin{aligned}
\ell &= \left(\ln\left|\sqrt{1+\tan^2\theta} + \tan\theta\right| + \tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}\right)\Big|_{\tan\theta=2}^{\tan\theta=3} \\
&= \ln(\sqrt{1+9}+3) + 3\sqrt{1+9} - [\ln(\sqrt{1+4}+2) + 2\sqrt{1+4}] \\
&= \ln\frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}} + 3\sqrt{10} - 2\sqrt{5} \approx 5{,}3895
\end{aligned}$$