Modelo Uniforme

- Dizemos que a v.a. X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$, $a < b$ se a f.d.p. f_X é dada por:

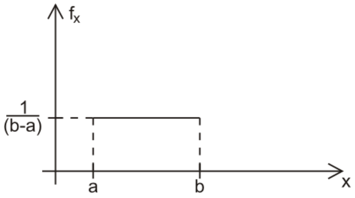
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

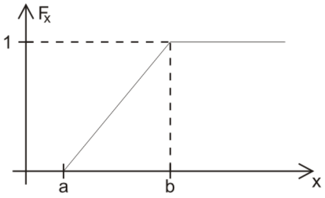
- Notação: $X \sim U[a, b]$ ou $X \sim U(a, b)$
- Cálculo da f.d.a.:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Modelo Uniforme

- Gráficos da f.d.p. e f.d.a.





Modelo Uniforme

- Cálculo da $E(X)$:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(b+a)}{2}$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(a^2+ab+b^2)}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(a^2+ab+b^2)}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Modelo Uniforme

- Exemplo: A temperatura T de destilação do petróleo é crucial na determinação da qualidade final do produto. T é considerada uma v.a. com distribuição $U[150^\circ, 300^\circ]$.

Modelo Exponencial

- Dizemos que uma v.a. X possui distribuição exponencial com parâmetro λ ($\lambda > 0$) se a f.d.p. f_X é dada por:

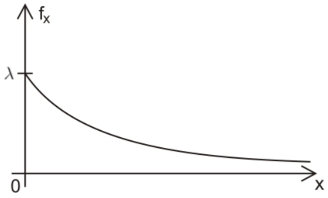
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Notação: $X \sim exp(\lambda)$
- Cálculo da f.d.a.:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Modelo Exponencial

- Gráfico da f.d.p.



Modelo Exponencial

- Introduzindo a função gamma:

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t} dt, \quad u > 0$$

- Propriedades:
  - $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$
  - $\Gamma(n) = (n-1)! \;\; \forall \; n \in \mathbb{N}$
  - $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- Essa função tem um papel importante na modelagem estatística e auxlia nos cálculo de esperança e variância da distribuição exponencial.

Modelo Exponencial

- Cálculo da $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Modelo Exponencial

- Exemplo: O tempo de vida (em horas) de um transistor é uma v.a. T com distribuição $exp(\lambda)$ em que $\lambda = \frac{1}{500}$
  - $E(T) = 500$ horas
  - $P(T \geq 500) = \int_{500}^{\infty} f_T(t)dt = 0.3678$ (EXERCÍCIO - verificar)

Modelo Normal

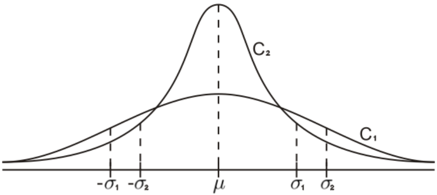
- Dizemos que uma v.a. X possui distribuição normal com parâmetros μ e σ^2, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$, se a f.d.p. f_X é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad -\infty < x < \infty$$

- Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Devido à impossibilidade de calcular a f.d.a. analiticamente, recorre-se à tabela da **Normal Padrão** $(N(0,1))$

Modelo Normal

- Gráfico da f.d.p.



$E(X) = \mu$: representa o ponto de simetria de f_X

$Var(X) = \sigma^2$: representa a dispersão de f_X

Modelo Normal

Afirmação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se, e somente se $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

- Φ denota a f.d.a. da Normal padrão:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} dx$$

- Temos então, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$F_X(a) = P(X \leq a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Modelo Normal

- Exercitando com a tabela da Normal:
  - $\Phi(0.2) = 0.5793$
  - $\Phi(0.45) = 0.6736$
  - $\Phi(1.98) = 0.9761$
  - $\Phi(-0.45) = 1 - \Phi(0.45) = 0.3264$

Modelo Normal

Exemplos

- $Z \sim N(0,1)$
- $Y \sim N(4,2^2)$
  - $F_Y(6) = P(Y \leq 6) = P\left(\frac{Y-4}{2} \leq \frac{6-4}{2}\right) = P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0.8413$
  - $P(2 < Y \leq 6) = P\left(\frac{2-4}{2} < \frac{Y-4}{2} \leq \frac{6-4}{2}\right) = P(-1 < Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1-\Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 = 2()0.8413 - 1 = 0.6826$

Modelo Normal

- Valor Esperado:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu$$

- Variância

$$\begin{aligned} Var(X) &= E([X - E(X)]^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma^2 \end{aligned}$$

Modelo Normal

- Exemplo: As alturas dos indivíduos de uma população têm distribuição Normal com média $\mu = 170cm$ e desvio padrão $\sigma = 5cm$.