

# Modelo Uniforme

- Exemplo: Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93. Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?
  - espalhar os números é a melhor forma de ganhar o sorteio?
  - assumindo honestidade da rifa, todos os números têm a mesma probabilidade de ocorrência, com  $\frac{1}{100}$  para cada um.
  - como eu e meu colega temos 5 bilhetes, temos a mesma probabilidade de ganhar a rifa:  $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
  - assim, a probabilidade de ganhar depende somente da quantidade de bilhetes que se tem na mão, independente da numeração.

# Modelo Uniforme

- Modelo Empírico

- $X$  é uma variável aleatória cujos possíveis valores são representados por  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$
- $X$  segue o modelo uniforme discreto se atribui a mesma probabilidade  $\frac{1}{k}$  a cada um desses possíveis valores
- $P(X = x_j) = \frac{1}{k} \quad \forall 1 \leq j \leq k$
- $E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$
- $Var(X) = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - E(X))^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2$

## Propriedade Geral da Variância

- Definição:  $Var(X) = E([X - E(X)]^2)$

$$\begin{aligned}E([X - E(X)]^2) &= E([X - \mu_X]^2) = E(X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2) \\&= E(X^2) - 2\mu_X E(X) + \mu_X^2 = \mu_{X^2} - 2\mu_X \mu_X + \mu_X^2 \\&= \mu_{X^2} - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = \mu_{X^2} - \mu_X^2 \\&= E(X^2) - [E(X)]^2\end{aligned}$$

- Então:  $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

# Modelo Uniforme

- Retomando o modelo da uniforme

- já sabemos que  $E(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$

- portanto  $[E(X)]^2 = \frac{1}{k^2} \left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^2$

- $E(X^2) = \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^2$

- finalmente  $Var(X) = \frac{1}{k} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 - \frac{1}{k} \left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^2 \right]$

# Modelo Uniforme

- Exemplo:  $X$  = resultado obtido no lançamento de um dado honesto

$x$	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- $E(X) = \frac{1}{6} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$
- $Var(X) = \frac{1}{6} [(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \frac{1}{6} \times (21)^2] = \frac{35}{2} = 17.5$

# Modelo Uniforme

- Cálculo da f.d.a. de uma variável uniforme discreta:

- $F(x) = P(X \leq x) = \frac{n(x)}{k}$

- $n(x) =$  número de  $x_i$ 's tais que  $x_i \leq x$

- Retomando o exemplo do dado:

- $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$

- $F(2.5) = P(X \leq 2.5) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$

# Modelo Bernoulli

- Consideremos um experimento  $E$  com espaço de resultados  $\Omega$  e o evento  $A$ .
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se se o evento  $A$  aconteceu. Se  $A$  não aconteceu ocorreu fracasso.
- Exemplo: Experimento lançar uma moeda e verificar se cai cara ou coroa. Consideramos como sucesso, a obtenção de cara.
- Este tipo de experimento se chama de ensaio Bernoulli.

# Modelo Bernoulli

- Ensaio tipo Bernoulli: estamos interessados na ocorrência de um sucesso ou fracasso.
- Exemplo: uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade, e é perguntado a ela se concorda com um projeto. As possíveis respostas são apenas "Sim" ou "Não".
- $\Omega = \{\text{Sim}, \text{Não}\}$
- $X = \begin{cases} 1, & \text{evento de interesse ocorre} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $P(X = 1) = P(\text{sucesso}) = p \Rightarrow P(X = 0) = P(\text{fracasso}) = 1 - p$



# Modelo Bernoulli

- Forma geral de escrever a probabilidade de uma variável Bernoulli:

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} \text{ em que } x = 0, 1$$

- $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$

- $E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$

- $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

- f.d.a.:  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

# Modelo Bernoulli

- Exemplo: lançamos um dado e consideramos como sucesso, a obtenção da face 5. Supondo que o dado é honesto:

$x$	0	1
$p(x)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

- $P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} = \left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}$  em que  $x = 0, 1$
- $E(X) = \frac{1}{6}$
- $E(X^2) = \frac{1}{6}$
- $Var(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6-1}{36} = \frac{5}{36}$

# Modelo Binomial

- Consideremos novamente um experimento  $E$  com espaço de resultados  $\Omega$  e o evento  $A$ .
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se se o evento  $A$  aconteceu. Se  $A$  não aconteceu ocorreu fracasso.
- Repetimos o experimento  $n$  vezes, de forma independente.
- $X$ =Número de sucessos nos  $n$  experimentos.
- Exemplo: lançar uma moeda 3 vezes e verificar se cai cara ou coroa. Consideramos como sucesso, a obtenção de cara.
- Os valores possíveis de  $X$  são  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

# Modelo Binomial

- A repetição de ensaios Bernoulli independentes dá origem a uma variável aleatória Binomial.
- Exemplo: Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%. Um grupo de 3 indivíduos é sorteado, dentre a população vacinada, e cada um submetido a testes para averiguar se está imunizado. Nesse caso, consideramos como sucesso, a imunização.
  - $X_i = \begin{cases} 1, & \text{indivíduo } i \text{ está imunizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
  - pelo enunciado, sabe-se que  $P(X_i = 1) = p = 0.8$

# Modelo Binomial

- Os indivíduos  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são independentes e cada um é uma variável Bernoulli
- Se o interesse está em estudar  $X =$  número de indivíduos imunizados no grupo,  $X$  poderá assumir valores em  $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$
- Note que  $X = X_1 + X_2 + X_3$

# Modelo Binomial

evento	P(evento)	X
$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$	$(0.2)^3$	0
$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$	$(0.8)^3$	3

# Modelo Binomial

- Assim, as probabilidades de cada valor possível de  $X$  são:

$x$	0	1	2	3
$p(x)$	$(0.2)^3$	$3 \times 0.8 \times (0.2)^2$	$3 \times (0.8)^2 \times 0.2$	$(0.8)^3$

- E o comportamento de  $X$  é completamente determinado pela função

$$P(X = x) = \binom{3}{x} (0.8)^x (0.2)^{3-x}$$

# Modelo Binomial

- Modelo Geral: Considere a repetição de  $n$  ensaios  $X_i$  Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso  $p$ . A variável aleatória  $X = X_1 + \dots + X_n$  que representa o total de sucessos pertence ao modelo Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ .

- A probabilidade de se observar  $x$  é dada pela expressão geral

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \forall x = 0, 1, \dots, n$$

- notação:  $X \sim \text{Bin}(n, p)$



# Propriedades da Esperança e Variância

- A esperança de uma soma de variáveis aleatórias é a soma das esperanças dessas variáveis

$$X \text{ e } Y \text{ variáveis aleatórias} \Rightarrow E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- A variância de uma soma de duas variáveis aleatórias independentes é a soma da variância dessas variáveis

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

- Lembrando que duas variáveis aleatórias são independentes  $\Leftrightarrow$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

# Modelo Binomial

- No exemplo da vacina, temos então  $n = 3$  e  $p = 0.8$ 
  - $X \sim Bin(3, 0.8)$
  - $E(X) = 3 \times 0.8$
  - $Var(X) = 3 \times 0.8 \times 0.2$
- Para o modelo Bernoulli em geral, se  $X \sim Bin(n, p)$ 
  - $E(X) = np$
  - $Var(X) = np(1 - p)$

## Modelo Geométrico

- Consideremos novamente um experimento  $E$  com espaço de resultados  $\Omega$  e o evento  $A$ .
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se se o evento  $A$  aconteceu.
- Repetimos o experimento até o primeiro sucesso.
- $Y$  = Número de repetições.
- Exemplo: lançar uma moeda repetidas vezes até a primeira cara.
- Os valores possíveis de  $Y$  são  $\{1, 2, 3, \dots\}$ .
- Repetimos um ensaio Bernoulli até o primeiro sucesso ( $p = P(\text{sucesso})$ ).
- $Y$  = Número de ensaios Bernoulli até o primeiro sucesso.

# Modelo Geométrico

- $P(Y = 1) = p.$
- $P(Y = 2) = (1 - p)p.$
- $P(Y = k) = (1 - p)^{k-1}p.$
- $Y \sim G(p).$
- $E(Y) = \frac{1}{p}.$
- $V(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$
- $P(Y \geq k + m | Y \geq m) = P(Y \geq k).$  (Perda de memoria)

# Distribuição Hipergeométrica

- População dividida em duas características
- Extrações casuais sem reposição
- Detalhes:
  - $N$  objetos
  - $r$  têm a característica A
  - $N - r$  têm a característica B
  - um grupo de  $n$  elementos é escolhido ao acaso, dentre os  $N$  possíveis, sem reposição
- Objetivo: calcular a probabilidade de que este grupo de  $n$  elementos contenha  $x$  elementos com a característica A

# Distribuição Hipergeométrica

- Modelo Geral:

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{para todo } 0 \leq x \leq \min\{r, n\}$$

- $X$  registra o número de elementos dentre os  $n$  sorteados, que possuem a característica  $A$
- $X$  tem distribuição Hipergeométrica

# Distribuição Hipergeométrica

- Notação:  $X \sim Hip(N, n, r)$
- $X$  tem distribuição Hipergeométrica com parâmetros  $N, n, r$ , então:
  - $E(X) = \frac{nr}{N}$
  - $Var(X) = \frac{nr}{N} \left(1 - \frac{r}{N}\right) \frac{(N-n)}{(N-1)}$

# Distribuição Hipergeométrica

- Aplicação: Controle de Qualidade

Suponha um lote com  $N = 100$  elementos a ser analisado. São escolhidas  $n = 5$  peças sem reposição. Sabendo que neste lote de 100 elementos,  $r = 10$  são defeituosos, a probabilidade de não se obter nenhuma peça defeituosa na amostra retirada é:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0} \binom{100-10}{5-0}}{\binom{100}{10}} = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{10}} \approx 0.584$$



# Distribuição Hipergeométrica

- A probabilidade de se obter pelo menos uma peça defeituosa é:

$$\sum_{i=1}^5 P(X = i) = 1 - P(X = 0) \approx 0.426$$

- $E(X) = \frac{nr}{N} = \frac{5 \times 10}{100}$

- $Var(X) = \frac{nr}{N} \left(1 - \frac{r}{N}\right) \frac{(N-n)}{(N-1)} = \frac{5 \times 10}{100} \left(1 - \frac{10}{100}\right) \frac{(100-10)}{(100-1)} \approx 0.409$

# Distribuição de Poisson

- Uma variável aleatória  $X$  tem distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda > 0$ , se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots$$

- $\lambda$  é chamado de taxa de ocorrência
- $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$
- Notação:  $X \sim P(\lambda)$

# Distribuição de Poisson

- Exemplo: A emissão de partículas radioativas tem sido modelada através de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada.

Supondo que o número de partículas alfa emitidas por minuto é uma variável aleatória seguindo o modelo Poisson com parâmetro  $\lambda = 5$ , ou seja, a taxa de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto.

Estamos interessados em calcular a probabilidade de haver mais de duas emissões por minuto.

# Distribuição de Poisson

- $X \sim P(5)$

- $P(X > 2) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-5}5^x}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^2 \frac{e^{-5}5^x}{x!} \approx 0.875$

- $E(X) = \lambda = 5$

- $Var(X) = \lambda = 5$

# Distribuição de Poisson

- Considerando a distribuição  $Bin(n, p)$ , quando temos grandes valores para  $n$  e  $p$  pequeno, podemos usar a seguinte aproximação para a probabilidade:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{e^{-np} (np)^x}{x!} \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots$$

- Geralmente considera-se o critério  $np \leq 7$  para usar essa aproximação

# Distribuição de Poisson

- Exemplo:  $X \sim \text{Bin}(100, 0.065)$ , deseja-se obter  $P(X = 10)$

- $\lambda = np = 100 \times 0.065 = 6.5 \leq 7$

- no modelo Binomial:

$$P(X = 10) = \binom{100}{10} (0.065)^{10} (0.935)^{100-10} = 0.055$$

- no modelo Poisson:  $P(X = 10) = \frac{e^{-6.5}(6.5)^{10}}{10!} \approx 0.056$