Testes Qui-Quadrado - Teste de Aderência

- Consideremos uma tabela de frequências com k frequências, $k \geq 2$
  - k: total de categorias
  - frequências observadas: $O_1, ..., O_k$
  - seja $p_1 = p_{01}, ..., p_k = p_{0k}$ as probabilidades especificadas e associadas as k categorias
  - $\sum_{i=1}^{n} O_i = n$
  - frequências esperadas: $E_1, ..., E_k$, $E_i = np_{0i}$
  - $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} E_i = n$

Testes Qui-Quadrado - Teste de Aderência

- $H_0 : p_1 = p_{01}, ..., p_k = p_{0k}$ *vs* H_1 : ao menos uma é diferente
- Estatística do teste: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
- Resultado: assumindo H_0 como verdadeira, se as k categorias são mutuamente exclusivas e as E_i são suficientemente grandes, então χ^2 tem distribuição Qui-Quadrado com $k-1$ graus de liberdade.
- Rejeição do teste: se χ^2 assumir valores grandes $\Rightarrow$ O_i é muito diferente de E_i, logo H_0 não é verdadeira

$$R_c = \{\chi^2 \geq c\} \text{ onde c depende do nível de significância } \alpha$$

Testes Qui-Quadrado - Teste de Homogeneidade

- Suponha r subpopulações $S_1, ..., S_r$. De cada subpopulação é extraída uma amostra de n_i elementos, $i = 1, ..., r$, com $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. Em seguida, os n_i elementos de S_i são distribuídos segundo c categorias $A_1, ..., A_C$

	A_1	...	A_C	Total
S_1	n_{11}	...	n_{1C}	$n_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_r	n_{r1}	...	n_{rC}	$n_{r\cdot}$
Total	$n_{\cdot 1}$	...	$n_{\cdot C}$	n

Testes Qui-Quadrado - Teste de Homogeneidade

- Objetivo: verificar se as distribuições de probabilidade das categorias $A_1, ..., A_C$ são as mesmas para as r subpopulações
- $H_0 : P_1(A_1) = ... = P_r(A_1), ..., P_1(A_C) = ... = P_r(A_C) \quad vs \quad H_1 :$ ao menos uma é diferente
- $P_i(A_j) =$probabilidade de um elemento da subpopulação i ser classificado na categoria A_j
- Estatística do teste: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{C} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$

Testes Qui-Quadrado - Teste de Homogeneidade

- O_{ij}: frequência observada na subpopulação i, na categoria j
- E_{ij}: frequência esperada na subpopulação i, na categoria j
- sob H_0: $E_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n}$
- Região crítica do teste: $R_c = \{\chi^2 \geq c\}$
- χ^2 tem uma distribuição Qui-Quadrado com $(r-1)(C-1)$ graus de liberdade

Testes Qui-Quadrado - Exemplo 1

- Teste de Aderência: Conforme a herança mendeliana, a descendência de certo cruzamento deveria ser só vermelho, preta ou branca na seguinte proporção: $p_{01} = \frac{9}{16}$, $p_{02} = \frac{3}{16}$ e $p_{03} \frac{4}{16}$. Se um experimento mostrou $O_1 = 74$, $O_2 = 32$ e $O_3 = 38$ descendentes nessas categorias respectivamente, a teoria está afirmada?
  - $O_1 + O_2 + O_3 = n = 144$
  - $E_1 = np_{01} = 81$, $E_2 = np_{02} = 27$ e $E_3 = np_{03} = 36$
  - $\chi^2 = 0.60 + 0.93 + 0.11 = 1.64$
  - se $\alpha = 0.05$, o valor c da região de rejeição é $c = 5.9915$ (2 graus de liberdade) $\Rightarrow$ não rejeita H_0

Testes Qui-Quadrado - Exemplo 2

- Teste de Homogeneidade: considere 2 escolas diferentes, e seus estudantes são submetidos a um mesmo exame, em que A, B, C, D e E são as notas por eles obtidas

	A	B	C	D	E	Total
escola 1	18	39	129	48	66	300
escola 2	18	26	41	6	9	100
Total	36	65	170	54	75	400

Testes Qui-Quadrado - Exemplo 2

- A distribuição das notas obtidas pelos alunos é a mesma nas duas escolas?
  - $r = 2$
  - $C = 5$
  - $E_{11} = 27, \; E_{12} = 48.75, \; E_{13} = 127.5, \; E_{14} = 40.5, \; E_{15} = 56.25$
  - $E_{21} = 9, \; E_{22} = 16.25, \; E_{23} = 42.5, \; E_{24} = 13.5, \; E_5 = 18.75$
  - $\chi^2 = 32.186$
- se $\alpha = 0.05$, com $(r-1)(C-1) = 4$ graus de liberdade, $c = 9.4877$ $\Rightarrow$ rejeita H_0

Testes Qui-Quadrado - Teste de Independência

- Sejam n indivíduos selecionados aleatoriamente de uma população. Vamos classificar cada indivíduo segundo 2 variáveis A e B.
  - A tem r categorias
  - B tem c categorias

	A_1	...	A_r	Total
B_1	n_{11}	...	n_{1r}	$n_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_C	n_{C1}	...	n_{Cr}	$n_{C\cdot}$
Total	$n_{\cdot 1}$	...	$n_{\cdot r}$	n

Testes Qui-Quadrado - Teste de Independência

- Objetivo: testar se A e B são independentes
- $H_0 : P(A_i \text{ e } B_j) = P(A_i)P(B_j) \quad vs \quad H_1$: ao menos uma é diferente
- Observação: diferença entre os testes de homogeneidade e independência
  - Teste de homogeneidade: selecionamos uma amostra de elementos de cada uma das r subpopulações e distribuímos os elementos de cada uma dessas amostras segundo C categorias
  - Teste de independência: distribuímos uma amostra de n elementos de "uma" população segundo as categorias da variável A e as categorias da variável B.