# Distribuição Binomial

## Exemplo

Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre dez artigos é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho quatro contenha:

(a) Nenhum defeituoso?

(b) Exatamente um defeituoso?

(c) Exatamente dois defeitosos?

(d) Não mais do que dois defeituosos?

*Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica 5ª edição, pág 157.

# Distribuição Binomial

Cada exame de um artigo é um ensaio de Bernoulli(0,1), onde por "sucesso" definimos o item ser defeituoso. O número de artigos defeituosos em amostras de tamanho 4 tem, portanto, distribuição binomial com parâmetros $n = 4$ e $p = 0{,}1$. Seja $Y$ a variável aleatória "número de artigos defeituosos na amostra".

(a) $P(Y = 0) = \binom{4}{0} 0{,}9^4 = 0{,}6561$

(b) $P(Y = 1) = \binom{4}{1} 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916$

(c) $P(Y = 2) = \binom{4}{2} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486$

(d) $P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0{,}9963$

## Exemplo

Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá, no máximo, duas defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 5% de peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia?
*Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica 5ª edição, pág 157.

# Distribuição Binomial

A variável X = "número de peças defeituosas" tem distribuição binomial com parâmetros $n = 18$ e $p = 0{,}05$. Repare novamente que o "sucesso" dos ensaios de Bernoulli é encontrar uma peça defeituosa. A probabilidade de uma caixa satisfazer a promessa do fabricante (isto é, $X \leq 2$) é dada por:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$\binom{18}{0} 0{,}95^{18} + \binom{18}{1} 0{,}05 \cdot 0{,}95^{17} + \binom{18}{2} 0{,}05^{2} \cdot 0{,}95^{16} = 0{,}9419$$

Ou seja, a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia é de 94,19%.

# Distribuição Binomial

## Exemplo

Um industrial fabrica peças, das quais 1/5 são defeituosas. Dois compradores **A** e **B** classificaram um grande lote de peças adquiridas em categorias *I* e *II*, pagando $1,20 e $0,80 por peça, respectivamente, do seguinte modo:

> Comprador **A**: retira uma amostra de cinco peças; se encontrar mais que uma defeituosa, classifica como *II*.
>
> Comprador **B**: retira uma amostra de dez peças; se encontrar mais que duas defeituosas, classifica como *II*.

Em média, qual comprador oferece mais lucro?
*Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica 5ª edição, pág 159.

# Distribuição Binomial

Sabemos que $1/5$ das peças são defeituosas. Podemos nos concentrar na probabilidade dos vendedores julgarem um lote como tipo $I$ ou $II$. O experimento do comprador **A** tem distribuição $X_A \sim b(5, 1/5)$ enquanto o experimento do comprador **B** tem distribuição $X_B \sim b(10, 1/5)$. Para o comprador **A**, temos que

$$P(X_A > 1) = 1 - P(X_A = 0) - P(X_A = 1) =$$

$$= 1 - \binom{5}{0}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)^4 = 0{,}2627$$

# Distribuição Binomial

De modo similar,

$$P(X_B \geq 2) = 1 - \binom{10}{0}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{10} - \binom{10}{1}\frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{9} -$$

$$-\binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{8} = 0{,}3222$$

Como o segundo comprador irá classificar o lote como *II* com maior probabilidade que o primeiro, ele é o que oferece menor lucro para o fornecedor. Mas podemos verificar o lucro esperado do vendedor.

# Distribuição Binomial

Se o industrial decidir vender o lote para o comprador **A**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro } \mathbf{A}) = 1{,}20 \cdot 0{,}7373 + 0{,}80 \cdot 0{,}2627 \approx 1{,}09$$

ou seja, ele irá lucrar em média \$1,09 por peça. Já se ele vender para o comprador **B**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro } \mathbf{B}) = 1{,}20 \cdot 0{,}6778 + 0{,}80 \cdot 0{,}3222 \approx 1{,}07$$

que é um lucro dois centavos inferior. É mais interessante ao industrial, portanto, que o comprador examine menos peças.

# Distribuição Poisson

## Exemplo

Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com a média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que num minuto se tenha:

(a) dez ou mais chamadas;

(b) menos que nove chamadas;

(c) entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas.

*Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica 5ª edição, pág 152.

# Distribuição Poisson

Sabemos que se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então sua função de probabilidade é

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Além disso, $\mathbb{E}(X) = \lambda$. O enunciado diz "média de oito chamadas por minuto", então a variável aleatória $X$ = "número de chamadas por minuto" tem distribuição Poisson(8).

(a) A probabilidade de dez ou mais chamadas é dada por $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) =$

$$1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{e^{-8}8^k}{k!} = 1 - e^{-8} - \ldots - \frac{e^{-8}8^9}{9!} = 0{,}2833.$$

# Distribuição Poisson

(b) A probabilidade de termos menos que nove chamadas é dada por $P(X < 9) = P(X \leq 8) = e^{-8} + \ldots + \dfrac{e^{-8}8^8}{8!} = 0{,}5926$.

(c) Novamente é preciso tratar as desigualdades com cuidado no caso discreto. Desejamos calcular $P(7 \leq X < 9)$, que é igual a $P(7 \leq X \leq 8) = P(X = 7) + P(X = 8) =$

$$\frac{e^{-8}8^7}{7!} + \frac{e^{-8}8^8}{8!} = 0{,}2792$$

# Distribuição Geométrica

## Exemplo

Em sua autobiografia *A Sort of Life*, o autor inglês Graham Greene descreveu um período de grave depressão em que ele jogava roleta russa. Esse "jogo" consiste em colocar uma bala em uma das seis câmaras de um revólver, girar o tambor e disparar a arma contra a própria cabeça.

(a) Greene jogou seis partidas deste jogo, e teve a sorte da arma nunca ter disparado. Qual a probabilidade desse resultado?

(b) Suponha que ele continue jogando roleta russa até a arma finalmente disparar. Qual é a probabilidade de Greene morrer na $k$-ésima jogada?

*Fonte: A. Agresti*, Categorical Data Analysis.

# Distribuição Geométrica

(a) Ao girar o tambor, a arma disparar ou não é um ensaio de Bernoulli, com probabilidade $1/6$ de disparar. Como cada uma das jogadas é independente, a probabilidade da arma não ter disparado em nenhuma das seis vezes é

$$\left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}33489$$

## Distribuição Geométrica

(b) Ao efetuar a primeira jogada, o autor pode morrer com probabilidade $1/6$, ou continuar jogando. Se ele sobreviver à primeira, pode jogar pela segunda vez, e morrer com probabilidade $5/6 \cdot 1/6$, ou continuar jogando. Repetindo esse raciocínio, concluímos que a probabilidade de morte na $k$-ésima jogada é

$$P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

Chamamos essa distribuição de *Distribuição Geométrica*, com parâmetro $p = 1/6$.

# Distribuição Geométrica

### Exemplo

Um banco de sangue necessita sangue do tipo O negativo. Suponha que a probabilidade de uma pessoa ter este tipo de sangue seja 0,10. Doadores permanentes chegam ao hemocentro para fazer sua doação rotineira. Calcule as probabilidades de que o primeiro doador com sangue do tipo O negativo seja:

(a) o primeiro a chegar;

(b) o segundo;

(c) o sétimo.

(d) Quantos doadores esperamos passar pelo hospital até encontrarmos um com sangue O negativo?

*Fonte: Prof. Mario Gneri*, Notas de Aula.

# Distribuição Geométrica

Novamente temos um experimento com distribuição geométrica. Usando a fórmula para a função de probabilidade $p(x) = 0{,}9^{x-1}0{,}1$, temos que

(a) $P(X = 1) = 0{,}1$

(b) $P(X = 2) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$

(c) $P(X = 7) = 0{,}9^6 \cdot 0{,}1 = 0{,}053$

(d) Sabemos que se $X \sim \text{Geo}(p)$, então $\mathbb{E}(X) = p^{-1}$. Neste caso, esperamos que dez doadores passem pelo hospital, em média, para encontrarmos o primeiro com sangue O negativo.

# Distribuição Binomial, aproximação Poisson

**Exemplo**

Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a binomial e a distribuição de Poisson e compare os resultados.
*Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica 5ª edição, pág 152.

# Distribuição Binomial, aproximação Poisson

O evento "não mais do que 1 item defeituoso" é dado por $\{X = 0\} \cup \{X = 1\}$, onde X é o número de itens defeituosos. Sua probabilidade é $P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = P(X = 0) + P(X = 1)$.

Se utilizamos a distribuição binomial, $X \sim b(10, 0{,}2)$, então

$$P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0}(1-p)^{10} + \binom{10}{1}p(1-p)^{9}$$

$$= \binom{10}{0}0{,}8^{10} + \binom{10}{1}0{,}2 \cdot 0{,}8^{9} = 0{,}3758$$

# Distribuição Binomial, aproximação Poisson

Por outro lado, se utilizamos a distribuição Poisson para aproximar a binomial, temos que $X \sim \text{Poisson}(2)$ (onde $\lambda = n \cdot p$), e a probabilidade do evento $\{X = 0\} \cup \{X = 1\}$ é dada por:

$$P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = P(X = 0) + P(X = 1) =$$

$$= \frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} = 3 \cdot e^{-2} = 0{,}4060$$

As probabilidades diferem em 3 pontos percentuais, o que não é pouco. A diferença tende a diminuir, contudo, para valores maiores de $n$ e menores de $p$.

# Distribuição Hipergeométrica, aproximação Binomial

## Qualidade de Reagentes

O inspetor de qualidade de um laboratório clínico recebe um lote grande de reagentes que, segundo o fabricante, não contém mais do que 5% de produtos defeituosos. O inspetor toma uma amostra de 10 produtos e decide rejeitar o lote completo se a amostra tem pelo menos um reagente defeituoso. Qual a probabilidade de rejeitar um lote que esteja dentro das especificações do fabricante, por engano? E se o lote, ao invés de ser "grande", tiver apenas 80 reagentes?

# Distribuição Hipergeométrica, aproximação Binomial

Se o tamanho do lote é "grande" e a proporção de itens defeituosos é de 5%, então o número de reagentes defeituosos numa amostra aleatória simples de 10 reagentes tem distribuição binomial, com parâmetros $n = 10$ e $p = 0{,}05$.

Nesse caso, a probabilidade do inspetor rejeitar um lote dentro das especificações do fabricante é dada por

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}95^{10} = 0{,}4012$$

# Distribuição Hipergeométrica, aproximação Binomial

Se o tamanho do lote é de 80 unidades, então 5% de reagentes defeituosos representam 4 reagentes defeituosos no lote. O número de reagentes defeituosos numa amostra de $n = 10$ reagentes tem distribuição hipergeométrica, com parâmetros $n = 10$, $N = 80$ e $r = 4$. Nesse caso, a probabilidade de rejeitar um lote dentro das especificações do fabricante é dada por

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{76}{10}}{\binom{80}{10}} = 0{,}4202$$