

# Técnicas de Contagem

Podemos fazer permutações e combinações.

- *Permutações* são os arranjos de elementos em que se tem em conta a ordem com que são tomados. Com a permutação sabemos de quantas formas podemos obter uma amostra de tamanho  $n$ , de uma população com tamanho  $N$ .

$${}_N P_n = \frac{N!}{(N - n)!}$$

Se temos sub-populações  $n_1, n_2, \dots, n_k$  tal que  $\sum_{i=1}^k n_i = N$ , então

$${}_N P_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

# Técnicas de Contagem

- *Combinações* são arranjos que não consideram a ordem dos elementos. Se queremos ter amostras sem repetição, temos:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$\binom{n}{r}$  também pode ser denotado por  $C(n, k)$  ou  $C_k^n$ .

Podemos fazer combinações com elementos repetidos, também. Nesse caso,  $C_r(n, k) = C(m + k - 1, k)$ .

# Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Suponha que temos uma população com  $N = 6$  elementos e queremos sortear amostras de tamanho 2. Vamos considerar as seguintes maneiras de sorteio:

- 1 Com ordem e repetição
- 2 Com ordem e sem repetição
- 3 Sem ordem e com repetição
- 4 Sem ordem e sem repetição
- 5 Só repetição

# Técnicas de Contagem - Um Exemplo

*Caso 1:* Com ordem e com repetição é quando sorteamos, por exemplo, duas vezes seguidas. Temos  $6 * 6 = 36$  possibilidades.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

## Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 2: Se queremos a amostra com ordem e repetições, temos  ${}_6P_4 = \frac{6!}{4!} = 30$  possibilidades.

	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)		(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)		(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)		(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)		(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	

# Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 3: Se queremos a amostra sem ordem, mas com repetições, temos  $C_r(6, 2) = \binom{6+2-1}{2} = 21$  possibilidades.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,4)	(4,5)	(4,6)
				(5,5)	(5,6)
					(6,6)

# Técnicas de Contagem - Um Exemplo

*Caso 4:* Se queremos a amostra sem ordem e sem repetições, temos  $C(6, 2) = \binom{6}{2} = 15$  possibilidades.

(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,5)	(4,6)
				(5,6)

# Técnicas de Contagem - Um Exemplo

*Caso 5:* Se só queremos repetições, temos somente 6 possibilidades.

(1,1)  
(2,2)  
(3,3)  
(4,4)  
(5,5)  
(6,6)



# Probabilidade - Probabilidade condicional

## Exemplo

Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens. Considere os seguintes eventos:

**H**: freguês é homem      **A**: prefere salada

**M**: freguês é mulher      **B**: prefere carne

*Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.*

# Probabilidade - Probabilidade condicional

Devemos “traduzir” os dados do enunciado em eventos:

- (i) “20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada” diz que o evento  $A|H$  tem probabilidade  $P(A|H) = 0,20$ . Observe que então  $P(A^c|H) = P(B|H) = 0,80 = 1 - P(A|H)$ , ou seja, 80% dos homens preferem carne.
- (ii) De modo análogo, “30% das mulheres escolhem carne” diz que o evento  $B|M$  tem probabilidade  $P(B|M) = 0,30$ .
- (iii) “75% dos fregueses são homens” nos diz que o evento  $H$  tem  $P(H) = 0,75$ .

# Probabilidade - Probabilidade condicional

Podemos colocar os dados em uma tabela, e completá-la evocando as seguintes propriedades:

- (i) Se  $P(A|H) = P(A \cap H)/P(H)$ , então  $P(A \cap H) = P(A|H)P(H)$ . Isso quer dizer que a probabilidade da intersecção dos eventos “cliente gosta de salada” com “cliente é homem” tem probabilidade igual a  $20\% * 75\% = 15\%$ .
- (ii)  $P(A) = P(A|H)P(H) + P(A|M)P(M)$ . Ou seja,  $P(A) = 20\% * 75\% + 70\% * 25\% = 32,5\%$ . A probabilidade de um cliente gostar de salada é de 32,5%.

# Probabilidade - Probabilidade condicional

Completando a tabela...

	Salada	Carne	Total
Homem	15%	60%	75%
Mulher	17,5%	7,5%	25%
Total	32,5%	67,5%	

# Probabilidade - Probabilidade condicional

Basta agora consultar a tabela:

(a) Calcular  $P(H)$ ,  $P(A|H)$  e  $P(B|M)$

$P(H) = 75\%$ ,  $P(A|H) = 20\%$  e  $P(B|M) = 30\%$ . Todas essas são probabilidades informadas no enunciado.

(b) Calcular  $P(A \cap H)$  e  $P(A \cup H)$

$$P(A \cap H) = P(A|H)P(H) = 20\% * 75\% = 15\%,$$

$$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) = \\ 32,5\% + 75\% - 15\% = 62,5\%$$

(c) Calcular  $P(M|A)$

$$P(M|A) = P(A|M) \frac{P(M)}{P(A)} = 70\% \frac{25\%}{32,5\%} = 53,84\%.$$

# Probabilidade - Probabilidade condicional

## Exemplo

As probabilidades de três motoristas serem capazes de guiar até em casa com segurança, depois de beber, são de  $1/3$ ,  $1/4$  e  $1/5$ , respectivamente. Se decidirem guiar até em casa, depois de beber numa festa, qual a probabilidade de todos os três motoristas sofrerem acidentes? Qual a probabilidade de pelo menos um dos motoristas guiar até em casa a salvo?

*Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.*

# Probabilidade - Probabilidade condicional

Considere os eventos:

**A:** Primeiro Motorista sofre acidente

**B:** Segundo Motorista sofre acidente

**C:** Terceiro Motorista sofre acidente

Com  $P(A) = 2/3$ ,  $P(B) = 3/4$  e  $P(C) = 4/5$ , respectivamente.

Assuma também que eles são independentes entre si.

Então  $P(\text{todos sofrerem acidentes}) = P(A \cap B \cap C)$ , mas pela independência,  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$  que é igual a  $2/5$ .

## Probabilidade - Probabilidade condicional

Finalmente, qual a probabilidade de pelo menos um deles não sofrer acidente? Seja  $E$  o evento *todos os três sofrem acidente*. Então *pelo menos um não sofre acidente* é  $E^c$ . Além disso,  $E = A \cap B \cap C$ , e sabemos que  $P(E) = 2/5$ . Portanto  $P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 2/5 = 3/5$ .



# Probabilidade - Probabilidade condicional

## Exemplo

Duas lâmpadas queimadas foram misturadas acidentalmente com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

*Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.*

# Probabilidade - Probabilidade condicional

Seja Q uma lâmpada queimada e B uma lâmpada boa. Sabendo que são duas queimadas, encerramos os testes quando a segunda for encontrada. Então, o nosso espaço amostral é

$$\Omega = \{QQ, QBQ, BQQ, QBBQ, BQBQ, BBQQ, QBBBQ, BQBBQ, BBQBQ, BBBQQ, \dots, BBBBBBQQ\}$$

O evento *última defeituosa encontrada no quarto teste* corresponde aos eventos  $\{QBBQ, BQBQ, BBQQ\}$ .

## Probabilidade - Probabilidade condicional

$P(QBBQ \text{ ou } BQBQ \text{ ou } BBQQ) = P(QBBQ \cup BQBQ \cup BBQQ) = P(QBBQ \cup BQBQ \cup BBQQ) = P(QBBQ) + P(BQBQ) + P(BBQQ)$   
pois os eventos do tipo  $QBBQ \cap BQBQ$  são impossíveis (vazios).

$$P(QBBQ) = \frac{2}{8} \frac{6}{7} \frac{5}{6} \frac{1}{5} = \frac{1}{28}$$

$$P(BQBQ) = \frac{6}{8} \frac{2}{7} \frac{5}{6} \frac{1}{5} = \frac{1}{28}$$

$$P(BBQQ) = \frac{6}{8} \frac{5}{7} \frac{2}{6} \frac{1}{5} = \frac{1}{28}$$

Ou seja,  $P(\text{última defeituosa encontrada no quarto teste}) = \frac{3}{28}$

# Probabilidade - Probabilidade condicional

## Exercício

Uma pessoa é submetida a uma cirurgia e morre a causa de uma reação alérgica à anestesia. Os familiares e o cirurgião entram numa disputa quanto à escolha da anestesia.

O cirurgião afirma que tinha duas opções: anestesia tipo 1 (A1) e anestesia tipo 2 (A2). Ele afirma ter escolhido a A1 pois as estatísticas mostram que apenas 1 pessoa em 10000 apresenta reação alérgica à A1, salientando que não existem testes prévios válidos. O cirurgião acrescenta que a A2 é de eliminação lenta, o que dificultaria a recuperação pós-operatória.

# Probabilidade - Probabilidade condicional

## Exercício (cont.)

Os familiares alegam que o médico fez a escolha errada, pois o paciente era hemofílico e que as estatísticas mostram que 20% dos hemofílicos reagem muito mal à A1 e que portanto o cirurgião deveria ter utilizado a A2.

Se ambas as informações atribuídas às estatísticas forem verdadeiras, quem tem razão? Quem utiliza argumento falacioso? Em que consiste a falácia? Utilize a notação probabilística em sua argumentação.

*Fonte: Prof. Mario Gneri, Notas de aula.*