ME323 - Introdução aos modelos probabilísticos

Tópico 1: Estatística Descritiva

Tipos de Variáveis

Problema Motivador:

Um pesquisador está interessado em fazer um levantamento sobre aspectos sócio-econômicos dos empregados da seção de orçamentos de uma companhia (vide tabela).

Algumas variáveis como sexo, escolaridade e estado civil, têm como possíveis respostas uma descrição ou qualidade do indivíduo, e portanto são chamadas de **variáveis qualitativas**. Já variáveis como número de filhos e salário têm como possíveis respostas um número, um valor, uma quantidade, e portanto são chamadas de **variáveis quantitativas**.

Variáveis

Qualitativa

- Nominal

  Não existe ordenação nas possíveis respostas (ex: sexo, estado civil)

- Ordinal

  Existe uma certa ordem nas possíveis respostas (ex: escolaridade)

Tipos de Variáveis

Quantitativa

- Discreta

  Os possíveis valores formam um conjunto finito ou enumerável de números, são variáveis de contagem (ex: número de filhos)

- Contínua

  Os possíveis valores estão dentro de um intervalo, aberto ou fechado, dos números reais (ex: peso de um indivíduo)

Distribuição de Frequências

- Objeto de estudo: variável (ex: peso)
- Elemento para montar o estudo: realizações (valores observados) da variável
- Objetivo conhecer a distribuição dessa variável aleatória

Distribuição de Frequências

- Exemplo: Grau de escolaridade (variável qualitativa ordinal)

  # total de empregados = 36

  # empregados com Ensino Fundamental = 12

  # empregados com Ensino Médio = 18

  # empregados com Ensino Superior = 6

Distribuição de Frequências

Grau de Instrução	Frequência (n_i)	Proporção (f_i)	% ($100 \times f_i$)
Ensino Fundamental	12	0.3333	33.33
Ensino Médio	18	0.5000	50.00
Ensino Superior	6	0.1667	16.67
Total	36	1.0000	100.00

$$f_i = \frac{n_i}{36}$$

Distribuição de Frequências

- Exemplo: Salário (variável quantitativa contínua)

  Agrupar os dados por faixas de valores

  # total de empregados = 36

  # empregados com salário na faixa [4.00, 8.00) = 10

  # empregados com salário na faixa [8.00,12.00) = 12

  # empregados com salário na faixa [12.00,16.00) = 8

  # empregados com salário na faixa [16.00, 20.00) = 5

  # empregados com salário na faixa [20.00, 24.00] = 1

Distribuição de Frequências

Faixa salarial	Frequência (n_i)	Proporção (f_i)	% ($100 \times f_i$)
$[4.00, 8.00)$	10	0.2778	27.78
$[8.00, 12.00)$	12	0.3333	33.33
$[12.00, 16.00)$	8	0.2222	22.22
$[16.00, 20.00)$	5	0.1389	13.89
$[20.00, 24.00]$	1	0.0278	2.78
Total	36	1.0000	100.00

$$f_i = \frac{n_i}{36}$$

Distribuição de Frequências

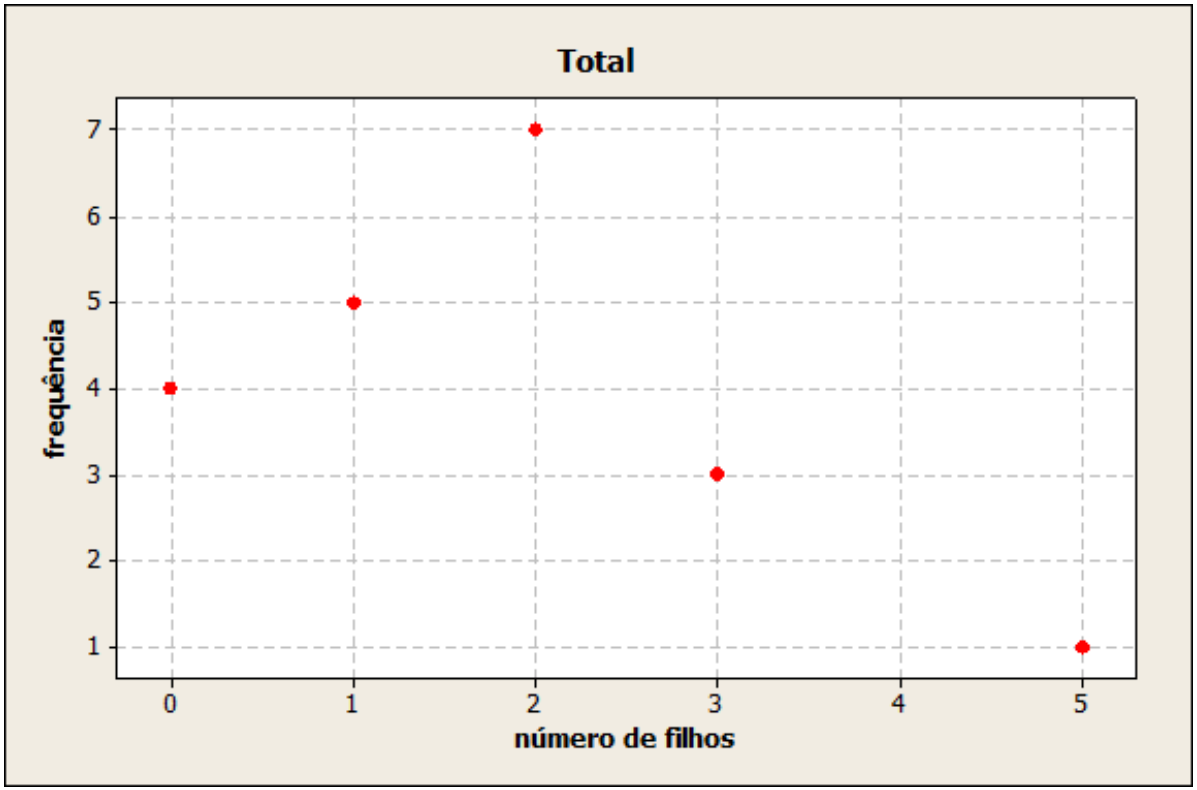
- Escolha dos intervalos: arbitrária seguindo os indicadores
  - um número pequeno de classes $\rightarrow$ perda de informação
  - um número grande de classes $\rightarrow$ perda da visão geral dos dados como um conjunto
  - sugestão: 5 a 15 classes com a mesma amplitude

Representação Gráfica das Variáveis Quantitativas

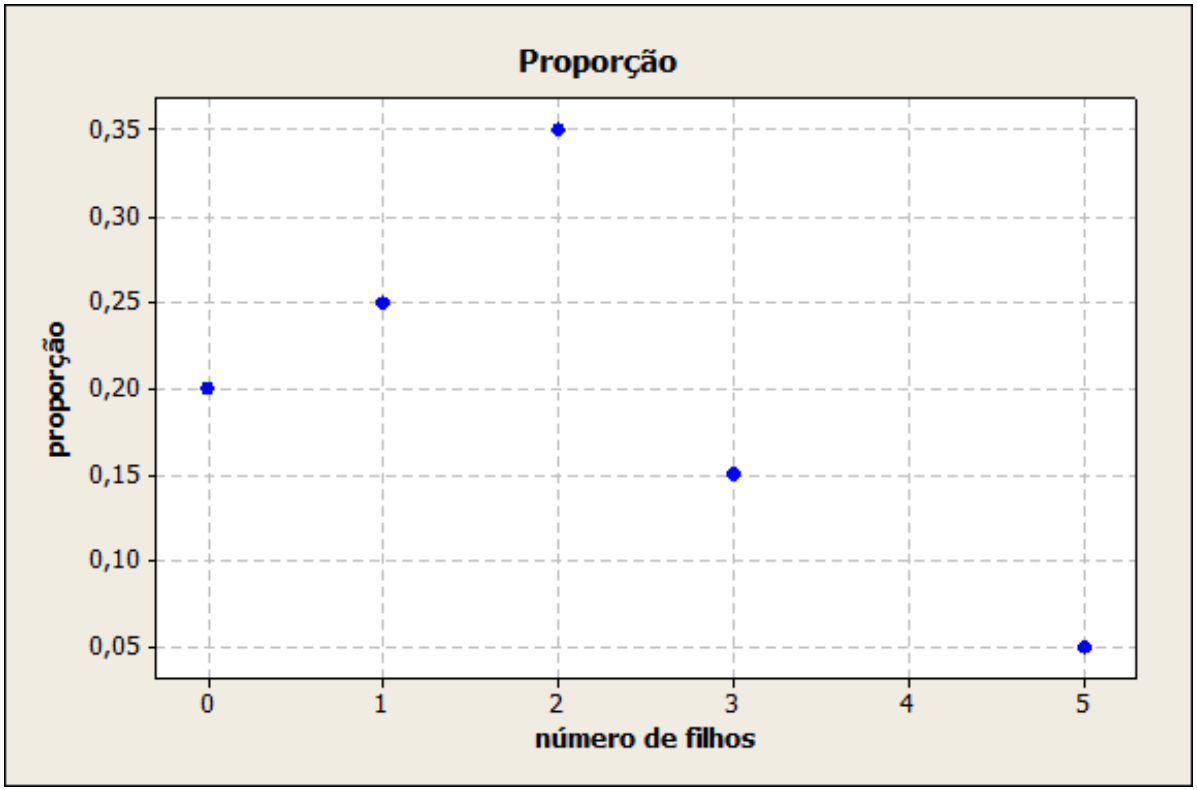
- Objetivo: estudar a distribuição de frequências de uma variável
- Exemplo: número de filhos dos empregados casados

Número de filhos (x_i)	Frequência (n_i)	Proporção (f_i)	% ($100 \times f_i$)
0	4	0.20	20
1	5	0.25	25
2	7	0.35	35
3	3	0.15	15
5	1	0.05	5
Total	20	1.0000	100.00

Representação Gráfica de Variáveis Quantitativas



Representação Gráfica de Variáveis Quantitativas

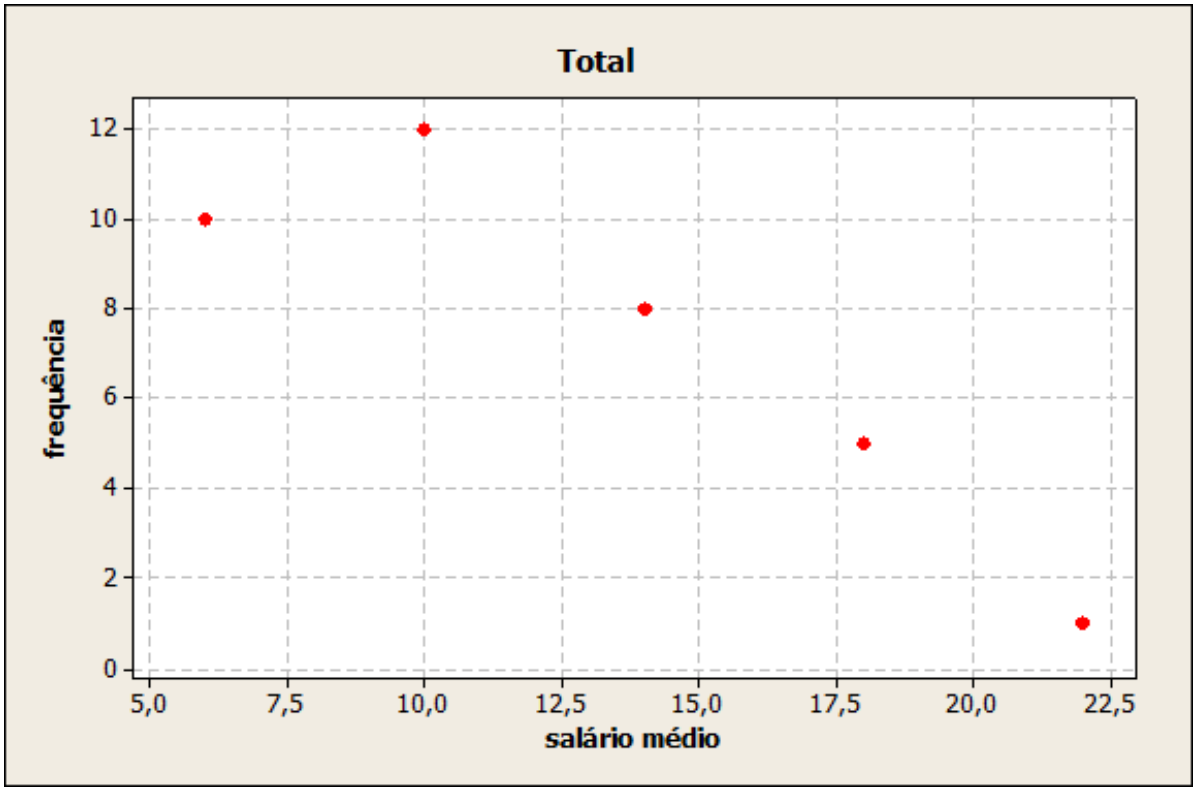


Representação Gráfica de Variáveis Contínuas

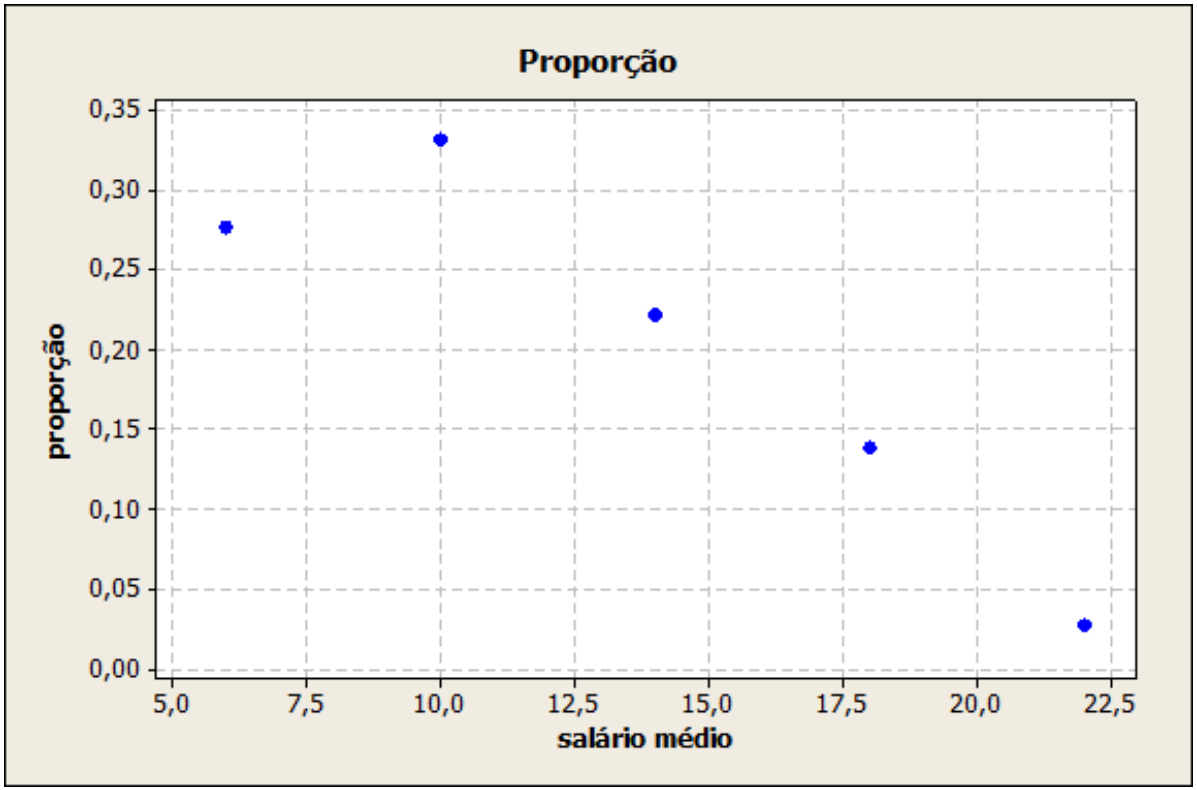
- Dados de salário: são utilizados os pontos médios das faixas salariais

Salário médio	Frequência (n_i)	Proporção (f_i)	% ($100 \times f_i$)
6.00	10	0.2778	27.78
10.00	12	0.3333	33.33
14.00	8	0.2222	22.22
18.00	5	0.1389	13.89
22.00	1	0.0278	2.78
Total	36	1.0000	100.00

Representação Gráfica de Variáveis Contínuas



Representação Gráfica de Variáveis Contínuas



Representação Gráfica de Variáveis Contínuas

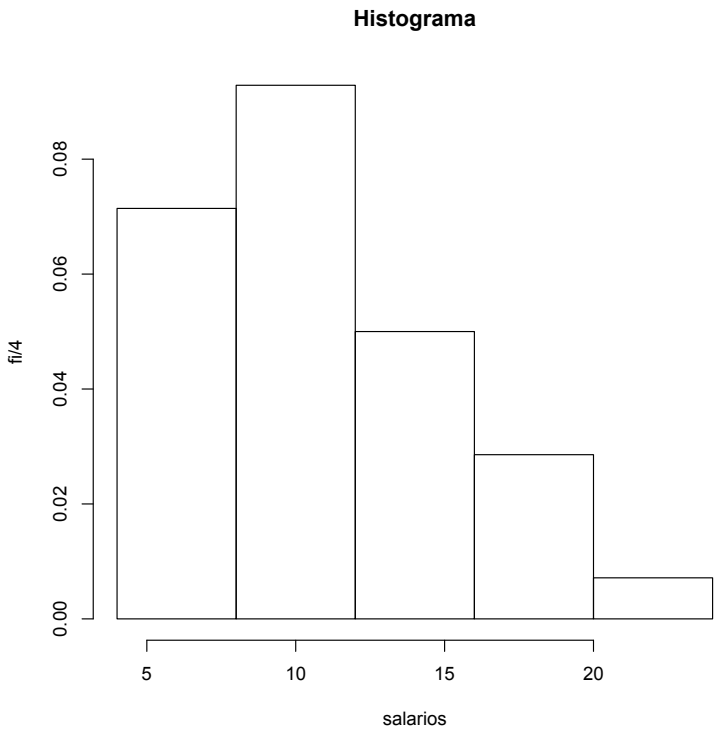


gráfico de barras contíguas, onde as bases são proporcionais aos intervalos de classe, e as alturas são dadas pela frequência relativa. Se um certo invervalo

Representação Gráfica de Variáveis Contínuas

- Ramo e Folhas
- Objetivo: obter informação da distribuição dos dados
- Característica: Não perde informação sobre os dados
- Cada informação é dividida em duas partes: a primeira (ramo) é colocada à esquerda da linha vertical, e a segunda (folhas) à direita

Representação Gráfica de Variáveis Contínuas

Tabela: Variável Salário

4	00	56		
5	25	73		
6	26	66	86	
7	39	44	59	
8	12	46	74	95
9	13	35	77	80
10	53	76		
11	06	59		
12	00	79		
13	23	60	85	
14	69	71		
15	99			
16	22		61	
17	26			
18	75			
19	40			
20				
21				
22				

Medidas de Posição

- Propósito: resumir os dados, através de valores que representam o conjunto
- Medidas de posição central
  - Média aritmética (Me)
  - Mediana (Md)
  - Moda (Mo)

Medidas de Posição

Moda

- Resultado mais frequente, obtido em um conjunto de dados observados
- No exemplo do número de filhos, $Mo = 2$
- É interessante notar que qualquer conjunto de dados pode apresentar mais de uma moda, sendo então denominado bimodal, trimodal, etc.

Medidas de Posição

Mediana

- Resultado que ocupa a posição central em um conjunto de dados ordenados de forma crescente
- Número ímpar de observações: utiliza-se a observação central
  - ex: 3, 4, 7, 8, 8
  - $Md = 7$
- Número par de observações: utiliza-se a média aritmética das duas observações centrais
  - ex: 3, 4, 7, 8, 8, 9
  - $Md = \frac{7+8}{2} = 7.5$

Medidas de Posição

Média

- Soma dos valores observados dividida pelo número total de observações
- ex: 3, 4, 7, 8, 8 $\rightarrow Me = \frac{3+4+7+8+8}{5} = \frac{30}{5} = 6$
- No exemplo do número de filhos $Me = 1.65$
- Expressão geral

$$Me\,(X) = \frac{x_1 + \ldots + x_k}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$$

$x_1, \ldots, x_k$ são os valores observados para uma variável de estudo X

Medidas de Posição

- Caso particular:

  n_1 observações são iguais a x_1

  n_2 observações são iguais a x_2

  $\vdots$

  n_k observações são iguais a x_k

  tal que: $n_1 + n_2 + ... + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = n$

$$Me(X) = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

Medidas de Posição

- No exemplo do número de filhos

$$\left.\begin{array}{ll} n_1 = 4, & x_1 = 0 \\ n_2 = 5, & x_2 = 1 \\ n_3 = 7, & x_3 = 2 \\ n_4 = 3, & x_4 = 3 \\ n_5 = 1, & x_5 = 5 \end{array}\right\} n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

então,

$$Me(X) = \frac{4 \times 0 + 5 \times 1 + 7 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 5}{20} = 1.65$$

Medidas de Posição, qual devemos utilizar ?

Situação 1

- Conjunto de dados $D_1 = \{2, 2.5, 3, 4.3, 2.9\}$
- Ordenando de forma crescente $D_1^{'} = \{2, 2.5, 2.9, 3, 4.3\}$
- $Md = 2.9$
- $Me = \frac{2+2.5+2.9+3+4.3}{5} = 2.94$

Medidas de Posição

Situação 2

- Conjunto de dados $D_2 = \{2, 7, 3, 4.3, 2.9\}$
- Ordenando de forma crescente $D_2^{'} = \{2, 2.9, 3, 4.3, 7\}$
- $Md = 3$
- $Me = \frac{2+2.9+3+4.3+7}{5} = 3.84$

Medidas de Posição

Situação 3

- Conjunto de dados $D_3 = \{2, 2.5, 3, 4.3, 2.9, 7\}$
- Ordenando de forma crescente $D_3^{'} = \{2, 2.5, 2.9, 3, 4.3, 7\}$
- $Md = \frac{2.9+3}{2} = 2.95$
- $Me = \frac{2+2.5+2.9+3+4.3+7}{6} = 3.62$

Medidas de Posição

Comparação entre as 3 situações

Dados	Md	Me
D_1	2.9	2.94
D_2	3	3.84
D_3	2.95	3.62

Medidas de Posição

Observação

- As medianas tem valores próximos (2.9, 3 e 2.95), no entanto, a média tem uma diferença de quase 1 unidade (2.94 e 3,84) quendo comparamos as situações 1 e 2.
- A mediana é uma medida mais robusta que a média, quando submetida a mudanças nos valores observados, ou a incorporação de mais observações no conjunto de dados original, como exemplificado.
- Se acha que houve erro de digitação, de unidade, etc no seu banco de dados, prefira a mediana.

Medidas de Dispersão

- Propósito: obter uma medida que quantifique a variabilidade, uma vez que conjuntos de dados diferentes podem apresentar uma mesma medida de posição.
- Por exemplo, $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{5, 5, 5, 5, 5\}$ têm a mesma média: $Me = 5$

Medidas de Dispersão

- Desvio: afastamento de uma observação de uma determinada medida de posição
  - ex: $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

    $Me = 5$

    $Desvios = \{3-5, 4-5, 5-5, 6-5, 7-5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
  - ex: $B = \{5, 5, 5, 5, 5\}$

    $Me = 5$

    $Desvios = \{5-5, 5-5, 5-5, 5-5, 5-5\} = \{0, 0, 0, 0, 0\}$

Medidas de Dispersão

- Medidas "globais"de desvio na amostra de dados:
  - $\sum_{i=1}^{5} |x_i - \bar{x}|$
  - $\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2$
- Ambas as medidas evitam que desvios iguais em módulo, mas com sinais opostos se anulem
- Desvio Médio

  $DM(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - \bar{x}|}{n}$
- Variância

  $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$

Medidas de Dispersão

- ex: $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

  $DM(A) = \frac{|-2|+|-1|+|0|+|1|+|2|}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$

  $Var(A) = \frac{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$

- ex: $B = \{5, 5, 5, 5, 5\}$

  $DM(A) = \frac{|0|+|0|+|0|+|0|+|0|}{5} = \frac{0}{5} = 0$

  $Var(A) = \frac{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2}{5} = \frac{0}{5} = 0$

Medidas de Dispersão

- Desvio Padrão

  $DP(X) = \sqrt{Var(X)}$

  - ex: $DP(A) = \sqrt{2} = 1.41$
  - ex: $DP(B) = \sqrt{0} = 0$

Medidas Complementares para Análise de Dados

- Extremos

  O menor e o maior valor do conjunto de dados

- Quartis (Q) ou Juntas (J)
  - 1° Quartil: deixa um quarto dos valores abaixo, e três quartos acima dele
  - 2° Quartil = Mediana: deixa metade dos valores abaixo, e metade acima dele
  - 3° Quartil: deixa três quartos dos valores abaixo, e um quarto acima dele

Medidas Complementares para Análise de Dados

- Exemplo: Variável Salário: 4.00 4.56 5.25 5.73 6.26 6.66 6.86 7.39 **7.44 7.59** 8.12 8.46 8.74 8.95 9.13 9.35 9.77 **9.80 10.53** 10.76 11.06 11.59 12.00 12.79 13.23 13.60 **13.85 14.69** 14.71 15.99 16.22 17.26 18.75 19.40 23.30
  - $Md = \frac{9.8+10.53}{2} = 10.17$
  - $Q_1 = J_1 = \frac{7.44+7.59}{2} = 7.52$
  - $Q_3 = J_3 = \frac{13.85+14.69}{2} = 14.27$
  - $E_i = 4.00$ (menor valor)
  - $E_s = 23.30$ (maior valor)

Medidas Complementares para Análise de Dados

Esquema dos Cinco Números

	36	
Md	10.17	
J	7.52	14.27
E	4.00	23.30

Cada uma das componentes do esquema dos cinco números é uma medida robusta de dados, e é também uma estatística de ordem.

Medidas Complementares para Análise de Dados

- Intervalo Interquartil: A medida de dispersão "intervalo interquartil"pode ser considerada uma medida robusta de dispersão. $d_J = J_3 - J_1 = Q_3 - Q_1$
  - No exemplo do salário: $d_J = 14.27 - 7.52 = 6.75$
- Dispersão Inferior: $J_2 - E_i$
- Dispersão Superior: $E_s - J_2$

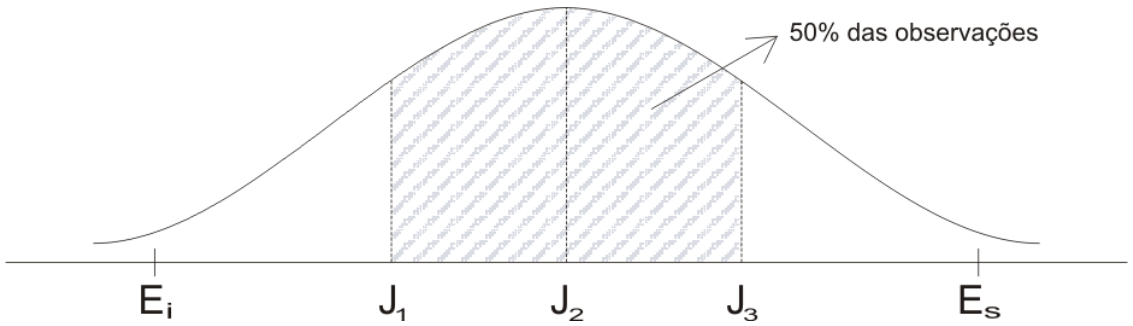
Inferência

Se a distribuição dos dados que estudamos é simétrica, esperamos que:

- a dispersão inferior seja aproximadamente igual à superior

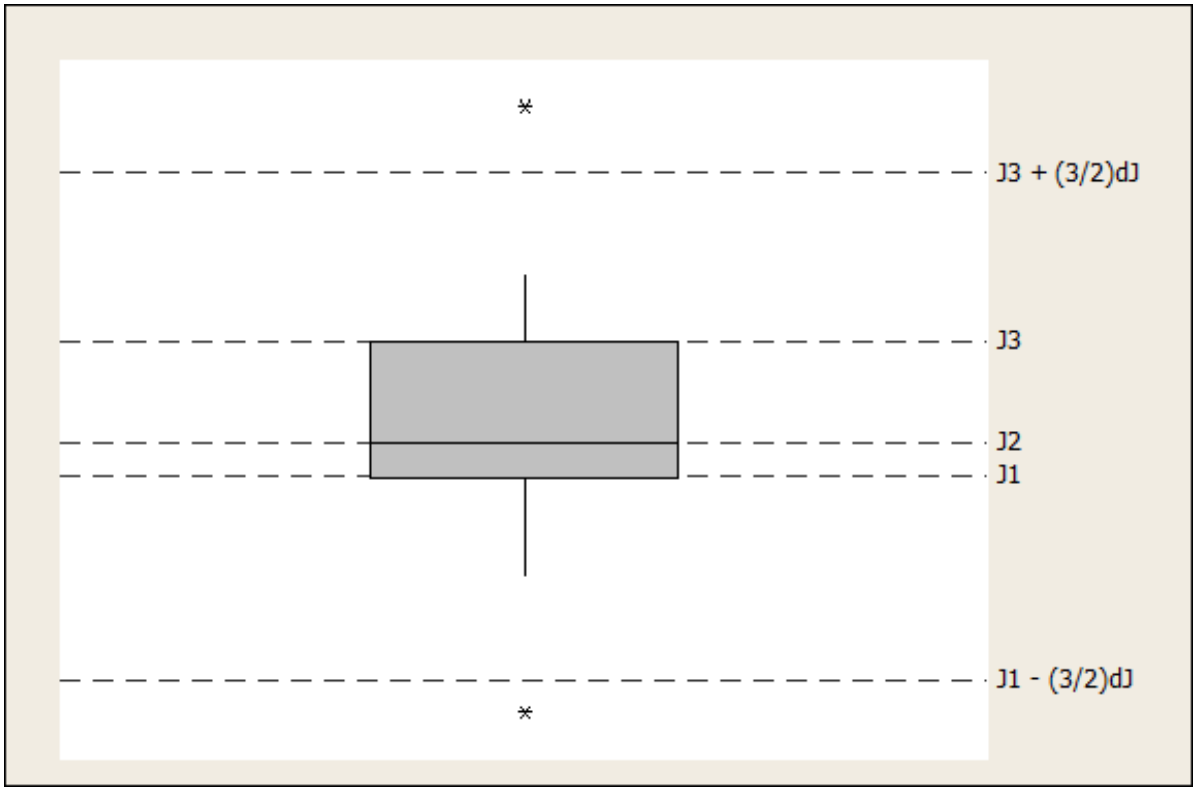
  $J_2 - E_i \approx E_s - J_2$

- $J_2 - J_1 \approx J_3 - J_2$
- $J_1 - E_i \approx E_s - J_3$



Inferência

Box Plot



Inferência

- Os valores que estão muito distantes do intervalo $[J_1, J_3]$ são chamados *outliers* (observações discrepantes)
  - observações menores que $J_1 - \frac{3}{2} d_J$
  - observações maiores que $J_3 + \frac{3}{2} d_J$
- A partir do retângulo, para cima e para baixo, seguem linhas até o ponto de observação mais remoto, que não seja outlier

Inferência

- O desenho dá uma idéia de:
  - posição: J_2
  - dispersão: d_J
  - assimetria: $J_3 - J_2$; $J_2 - J_1$
  - caudas: comprimento das linhas que seguem desde o retângulo
  - dados discrepantes: (*)

Inferência

- Exemplo

$$J_1 = 7.52 \qquad E_i = 4.00$$

$$J_2 = 10.17 \qquad E_s = 23.30$$

$$J_3 = 14.27 \qquad d_J = 6.75$$

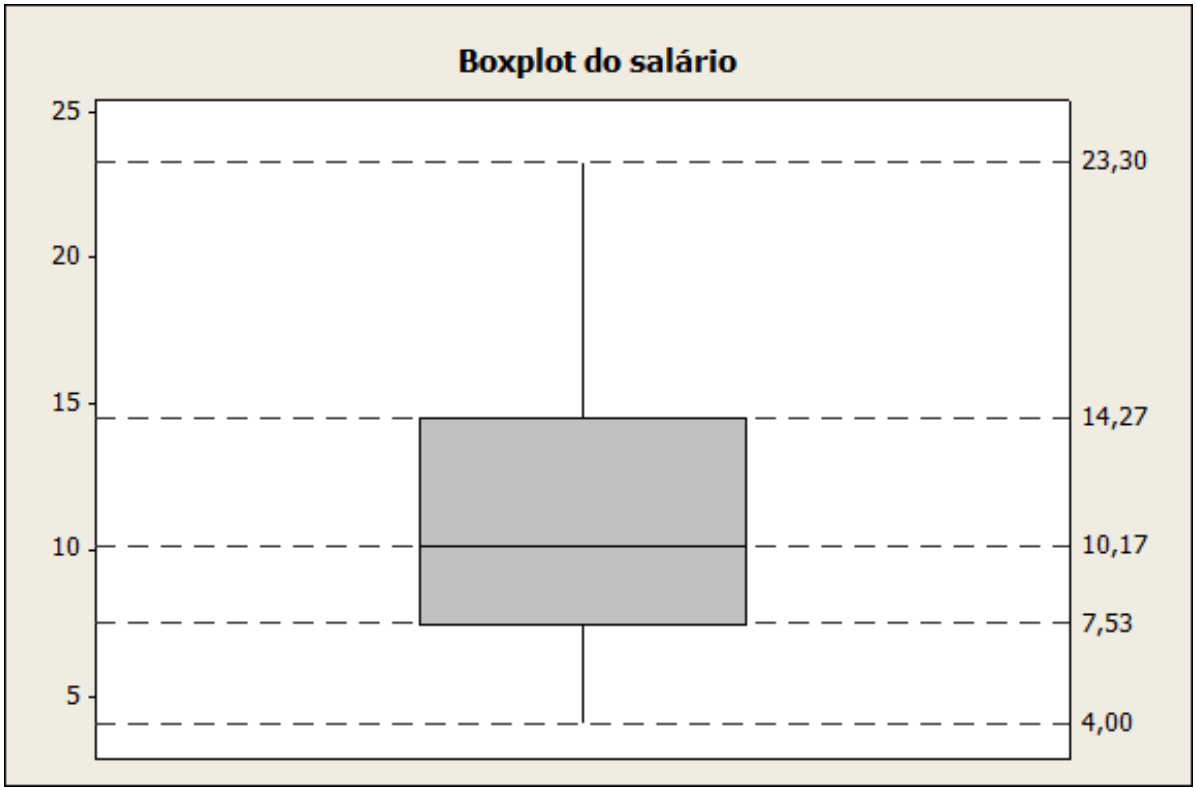
$$J_2 - J_1 = 2.65$$

$$J_3 - J_2 = 4.1$$

$$J_1 - \frac{3}{2} d_J = -2.605$$

$$J_3 + \frac{3}{2} d_J = 24.395$$

Inferência



A variável salário não apresenta observações discrepantes e mostra assimetria concentrando valores nas faixas inferiores de salário.