Distribuição Normal, exemplo I

Exemplo

Se $X \sim N(10, 4)$, calcular:

(a) $P(8 < X < 10)$

(b) $P(9 \leq X \leq 12)$

(c) $P(X > 10)$

(d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 182.

Distribuição Normal, exemplo I

Para calcular as probabilidades, é necessário integração numérica – e^{-x^2} não tem antiderivada. Contudo, os valores para $Z \sim N(0,1)$ encontram-se tabelados. Recomenda-se a tabela disponível na página do curso[1]. Tudo o que precisamos fazer é transformar a variável em $N(0,1)$.

Recorde que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$ e $(X - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$. Neste problema, sabemos que $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 4$, logo $\sigma = 2$. Então $(X - 10)/2 \sim N(0,1)$.

[1] `http://www.ime.unicamp.br/~veronica/Coordenadas2s/`

Distribuição Normal, exemplo I

(a) Devemos transformar X de modo que o evento $8 < X < 10$ permaneça inalterado. Fazemos isso transformando todos os lados da inequação:

$$8 < X < 10 \Leftrightarrow 8-10 < X-10 < 10-10 \Leftrightarrow -2 < X-10 < 0$$
$$\Leftrightarrow -2/2 < (X-10)/2 < 0/2 \Leftrightarrow -1 < Z < 0.$$

O valor $\Phi(0)$ está disponível na tabela, e é igual a 0,5. Para obtermos $\Phi(-1)$, devemos usar a simetria da função Φ em torno do zero, isto é, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. A tabela nos dá $\Phi(1) = 0{,}8413$, de onde deduzimos $\Phi(-1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$. Concluimos portanto que

$$P(8 < X < 10) = P(-1 < Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-1) = 0{,}3413$$

Distribuição Normal, exemplo I

Esta é a tabela da normal, com os valores de $\Phi(1)$ e $\Phi(0)$ destacados:

Tabela distribuição acumulada da Normal padrão

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt, \;\; Z \sim N(0,1)$$

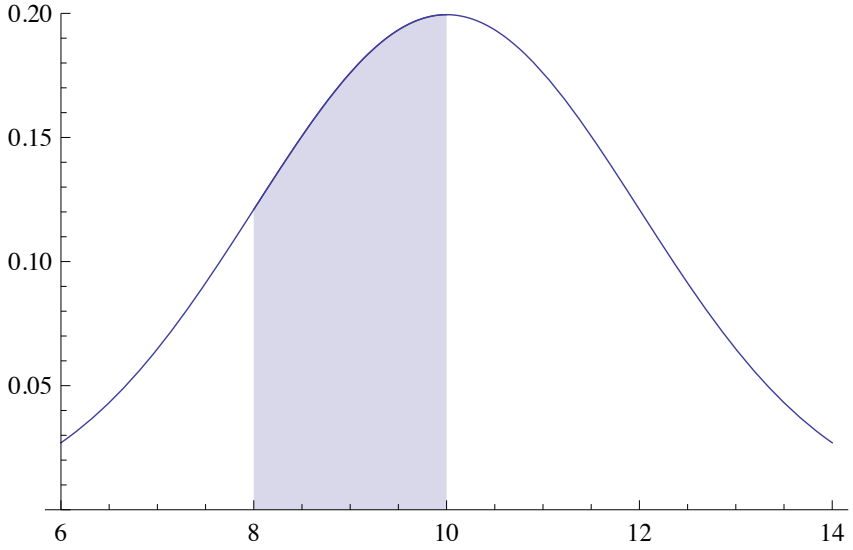
Turmas coordenadas ME203, ME180, ME480 e ME414

UNICAMP, 1º semestre 2010

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	$\boxed{0.5000}$	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	$\boxed{0.8413}$	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

Distribuição Normal, exemplo I

Este é o gráfico da curva N(10,4), com a região $(8, 10]$ correspondente ao item (a) em destaque:



Distribuição Normal, exemplo I

(b) $P(9 \leq X \leq 12) = P(9 - 10 \leq X - 10 \leq 12 - 10) =$
$P(-1/2 \leq Z \leq 1) = 0{,}5328$

(c) $P(X > 10) = P(Z > 0) = 0{,}5$

(d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11) = P(X < 8) + P(X > 11)$, pois
$\{X < 8\} \cap \{X > 11\} = \emptyset$.

$P(X < 8) = P(Z < -1) = 0{,}1586$ e
$P(X > 11) = P(Z > 1/2) = 0{,}3085$, logo
$P(X < 8 \text{ ou } X > 11) = 0{,}4671$

Distribuição Normal, exemplo II

Exemplo

Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos, D_1 e D_2, tenham distribuições $N(42, 36)$ e $N(45, 9)$, respectivamente. Se os aparelhos são feitos para ser usados por um período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 49 horas?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 183.

Distribuição Normal, exemplo II

(i) Para o caso de períodos de 45 horas, temos $P(D_1 > 45) = P(Z > [45 - 42]/6) = P(Z > 0.5) = 0{,}3085$, enquanto $P(D_2 > 45) = P(Z > [45 - 45]/3)$ $= P(Z > 0) = 0{,}5$. Note que a probabilidade do segundo aparelho durar mais que 45 horas é maior que a do primeiro e, portanto, ele é preferível.

(ii) Analogamente, $P(D_1 > 49) = P(Z > [49 - 42]/6) = P(Z > 1.1666) = 0{,}1216$, e $P(D_2 > 49) = P(Z > [49 - 45]/3) = P(Z > 1.3333) = 0{,}0912$. Neste cenário, é preferível o primeiro aparelho.

Distribuição Normal, exemplo III

Exemplo

Assumindo que X possui distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, calcule:

(a) $P(X \leq \mu + 2\sigma)$

(b) $P(|X - \mu| \leq \sigma)$

(c) O número a tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0{,}99$

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Distribuição Normal, exemplo III

Queremos transformar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ em $Z \sim N(0, 1)$, para poder consultar a tabela da normal padronizada[2].

(a) $P(X \leq \mu + 2\sigma) = P(X - \mu \leq 2\sigma) = P((X - \mu)/\sigma \leq 2) = P(Z \leq 2) = \Phi(2) = 0.9772$

(b) $P(|X - \mu| \leq \sigma) = P(|X - \mu|/\sigma \leq 1) = P(|(X - \mu)/\sigma| \leq 1) = P(|Z| \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6827$

[2] `http://www.ime.unicamp.br/~veronica/Coordenadas2s/`

Distribuição Normal, exemplo III

(c) Note que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = P(-a \leq (X - \mu)/\sigma \leq a) = P(-a \leq Z \leq a)$. Como X é simétrica, então sabemos que $2P(Z > a) = 2P(Z < -a) = 1 - P(-a \leq Z \leq a)$.

Basta então olhar qual a satisfaz $P(Z > a) = 0{,}005$, ou simplesmente $P(Z \leq a) = \Phi(a) = 0{,}995$. Consultando a tabela, vemos que $a = 2,5758$.