Tópico 9 - Redes Neurais Artificiais

João B. Florindo

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas - Brasil
jbflorindo@ime.unicamp.br

Outline

Redes Neurais Artificiais

Neurônio animal recebe estímulo (impulso elétrico) de órgãos sensoriais e podem repassar ou não para que outros neurônios tratem.

Presença ou ausência de conexões dependem da experiência passada (memória/aprendizado).

RNAs possuem um grande número de elementos simples de processamento (*neurônios*) interconectados (*conexões sinápticas/axônios*).

Caracterizadas pelo padrão de conectividade, pesos das conexões, características de cada elemento de processamento e por regras de treinamento e aprendizado.

Estas regras referem-se a um conjunto de pesos iniciais e estratégias que adaptam estes pesos ao longo do aprendizado.

Redes Neurais Artificiais

Em geral, toda RNA possui os seguintes elementos:

1. Conjunto finito de neurônios $a(1), a(2), \ldots, a(n)$, sendo que cada neurônio $a(i)$ vai possuir um valor (estado) associado $a_t(i)$ no tempo t;
2. Conjunto finito de conexões $W = w_{ij}$, em que w_{ij} denota o peso da conexão entre os neurônios $a(i)$ e $a(j)$;
3. Regra de propagação $\tau_t(i) = \sum_{j=1}^{n} a_t(j) \cdot w_{ij}$;
4. Função de ativação f que determina o próximo estado do neurônio a partir de τ e de um limiar θ:

$$a_{t+1}(i) = f(\tau_t(i) - \theta).$$

Esta função introduz não-linearidade no modelo e costuma ser uma função de limiarização simples ou uma sigmoide.

Outline

Rede de Hopfield

Na rede de Hopfield, um padrão é representado por um vetor N-dimensional assumindo valores -1 ou 1, ou seja:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N), \text{ tal que } \mathbf{p} \in \mathbf{P} = \{-1, 1\}^N.$$

O aprendizado é *supervisionado*, de modo que a rede deve ser apresentada a um subconjunto especial $\mathbf{E} \subset \mathbf{P}$ contendo K padrões de exemplo:

$$\mathbf{E} = \{e^k : 1 \leq k \leq K\}, \text{ sendo que } e^k = (e_1^k, e_2^k, \ldots, e_N^k).$$

Para cada novo padrão $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ que possa então ser apresentado à rede, esta vai associar com algum padrão de exemplo em $\mathbf{E}$ por similaridade.

Temos assim um processo de classificação baseada em aprendizado.

Vamos analisar agora cada elemento da rede de Hopfield.

Rede de Hopfield

Neurônio

Conjunto finito de neurônios $\mathbf{a}(i), 1 \leq i \leq N$. No tempo t, temos $\mathbf{a}_t(i) \in \{-1, +1\}$.

Conexões

Exige-se que $w_{ij} = w_{ji}$ e $w_{ii} = 0$.

Regra de propagação

$$\tau_t(i) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{a}_t(j) w_{ij}.$$

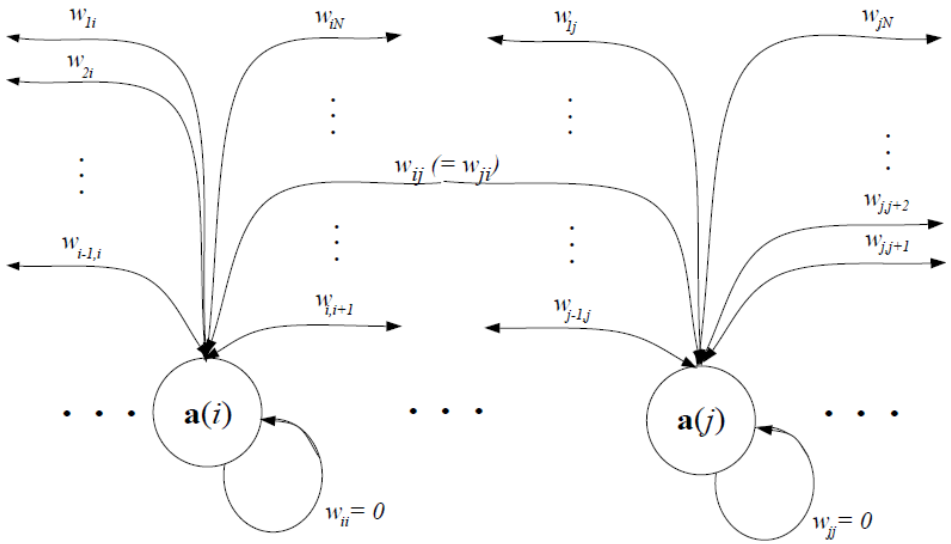
Rede de Hopfield

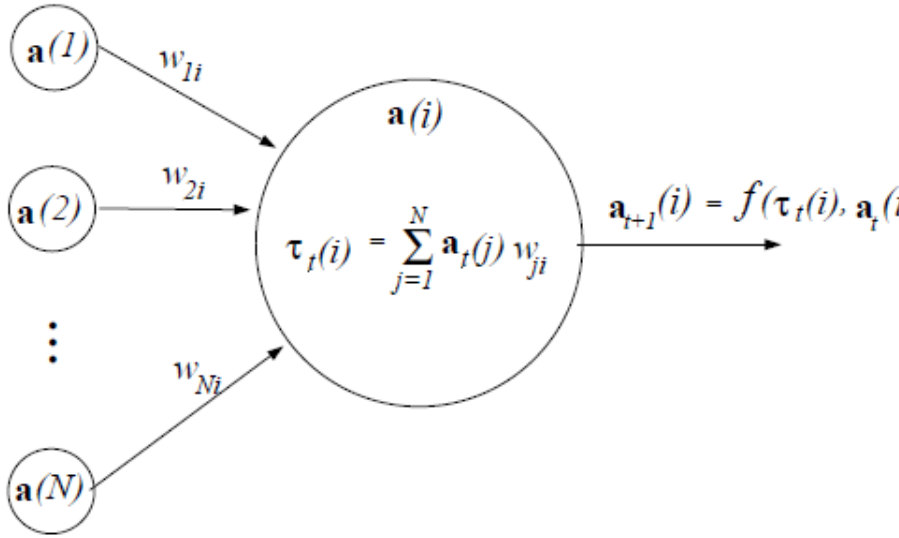
Função de ativação

Limiar simples ("duro"):

$$\mathbf{a}_{t+1}(i) = f(\tau_t(i), \mathbf{a}_t(i)) = \begin{cases} \mathbf{a}_t(i) & \text{se } \tau_t(i) = 0 \\ 1 & \text{se } \tau_t(i) > 0 \\ -1 & \text{se } \tau_t(i) < 0. \end{cases}$$

A rede vai ter N nós no total.





Rede de Hopfield

Passos do método:

1. Atribuir pesos a partir dos padrões de exemplo:

$$w_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} e_i^k e_j^k & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

   Como $w_{ij} = w_{ji}$, este cálculo só precisa ser feito para $i < j$.

2. Para cada novo padrão a ser classificado, inicializam-se os neurônios com este padrão:

$$\mathbf{a}_0(i) = p_i, 1 \leq i \leq N.$$

3. Calcular próximo estado:

$$\mathbf{a}_{t+1}(i) = f\left(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{a}_t(j) w_{ij}, \mathbf{a}_t(i)\right).$$

   Repete-se esta iteração até convergir (os estados dos neurônios não mudarem mais). Os estados finais são os mesmos do padrão de exemplo que melhor corresponde ao padrão introduzido.

Rede de Hopfield - Exemplo

Seja um meio que transmite 6 tipos de símbolos (1, 2, 3, 4, 9 e X) por imagens binárias 12×10. Padrões de exemplo abaixo.

Uma imagem binária $\mathbf{b} \in \{0,1\}^{\mathbf{X}}$, em que $\mathbf{X} = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{10}$ pode ser mapeada para o padrão $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_{120})$ por:

$$p_{10(i-1)+j} = \begin{cases} -1 & \text{se } \mathbf{b}(i,j) = 0 \\ 1 & \text{se } \mathbf{b}(i,j) = 1 \end{cases}$$

e vice-versa:

$$\mathbf{b}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } p_{10(i-1)+j} = -1 \\ 1 & \text{se } p_{10(i-1)+j} = 1. \end{cases}$$

Rede de Hopfield - Exemplo

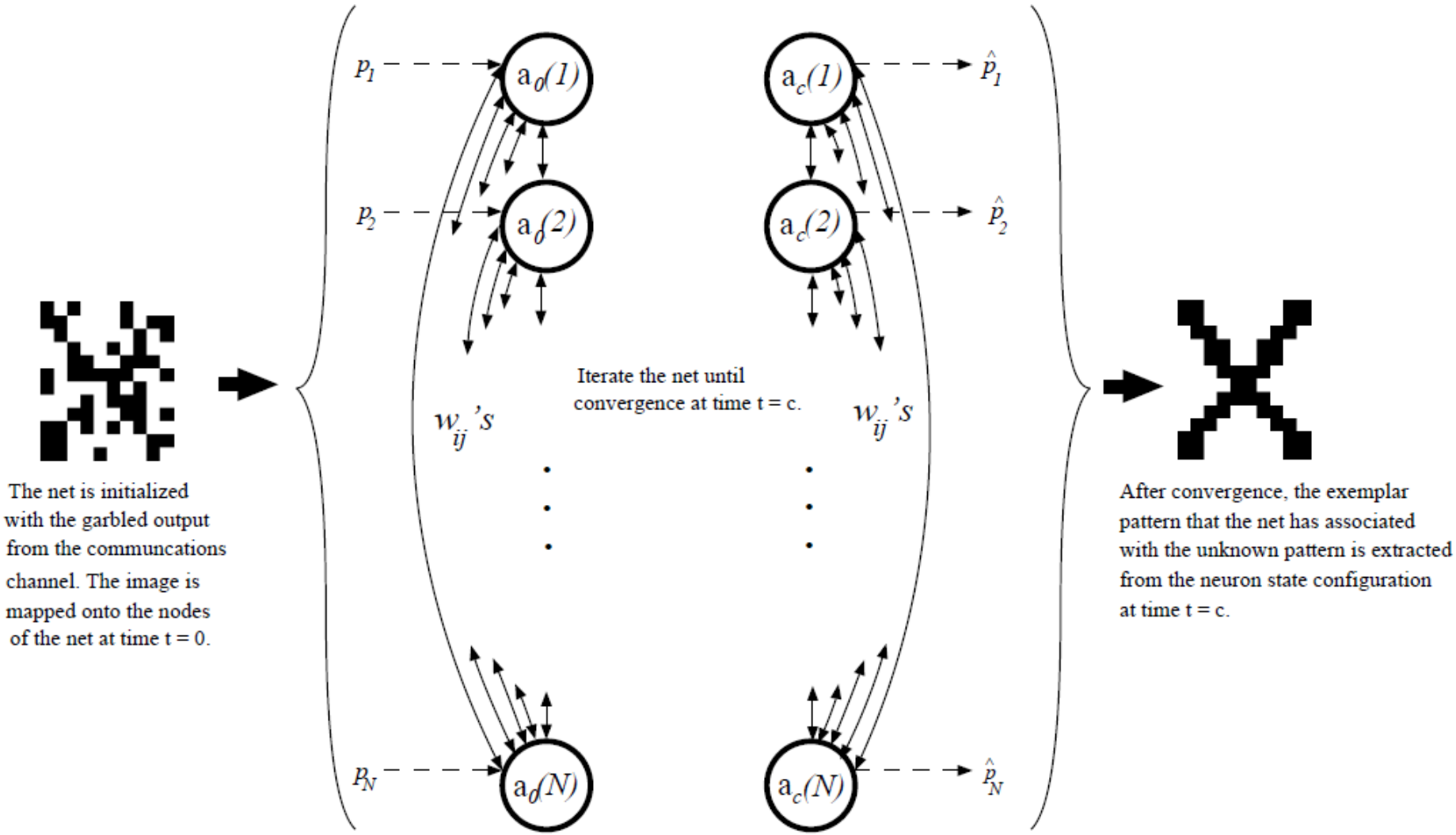
A rede terá portanto 120 nós.

Pode-se receber um símbolo em uma imagem binária com ruído.

Se há convergência para algum padrão de exemplo, este é considerado como sendo o símbolo correto (sem ruído) representado pela imagem de entrada.

A figura seguinte resume o processo.

Rede de Hopfield - Exemplo



Outline

Rede de Hopfield-Álgebra

Os estados dos neurônios podem ser armazenados em uma imagem $\mathbf{a} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}_N}$.

$\mathbf{a}$ é inicializada com o padrão desconhecido a ser classificado.

Os pesos das conexões são expressos por um *template* $\mathbf{t} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_N})^{\mathbb{Z}_N}$:

$$\mathbf{t}_i(j) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} e_j^k e_i^k & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Temos então o seguinte algoritmo geral:

$\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{0}$;
enquanto $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ **faça**
  $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{a}$;
  $\mathbf{a} \leftarrow f(\mathbf{a} \oplus \mathbf{t}, \mathbf{a})$;
fim

Rede de Hopfield-Álgebra

O algoritmo anterior permite paralelismo mas não atualiza os neurônios assincronamente, o que é um requisito para que se garanta convergência.

Uma implementação assíncrona seria a seguinte:

---

b $\leftarrow$ **0**;
enquanto a $\neq$ **b faça**
  Y $\leftarrow$ *domain*(**a**);
  enquanto Y $\neq \emptyset$ **faça**
    $i \leftarrow$ *choice*(**Y**);
    $\mathbf{a}(i) \leftarrow f(\mathbf{a} \oplus \mathbf{t}|_i, \mathbf{a}(i))$;
    $\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{Y} \backslash \{i\}$;
  fim
fim

Rede de Hopfield-Observações

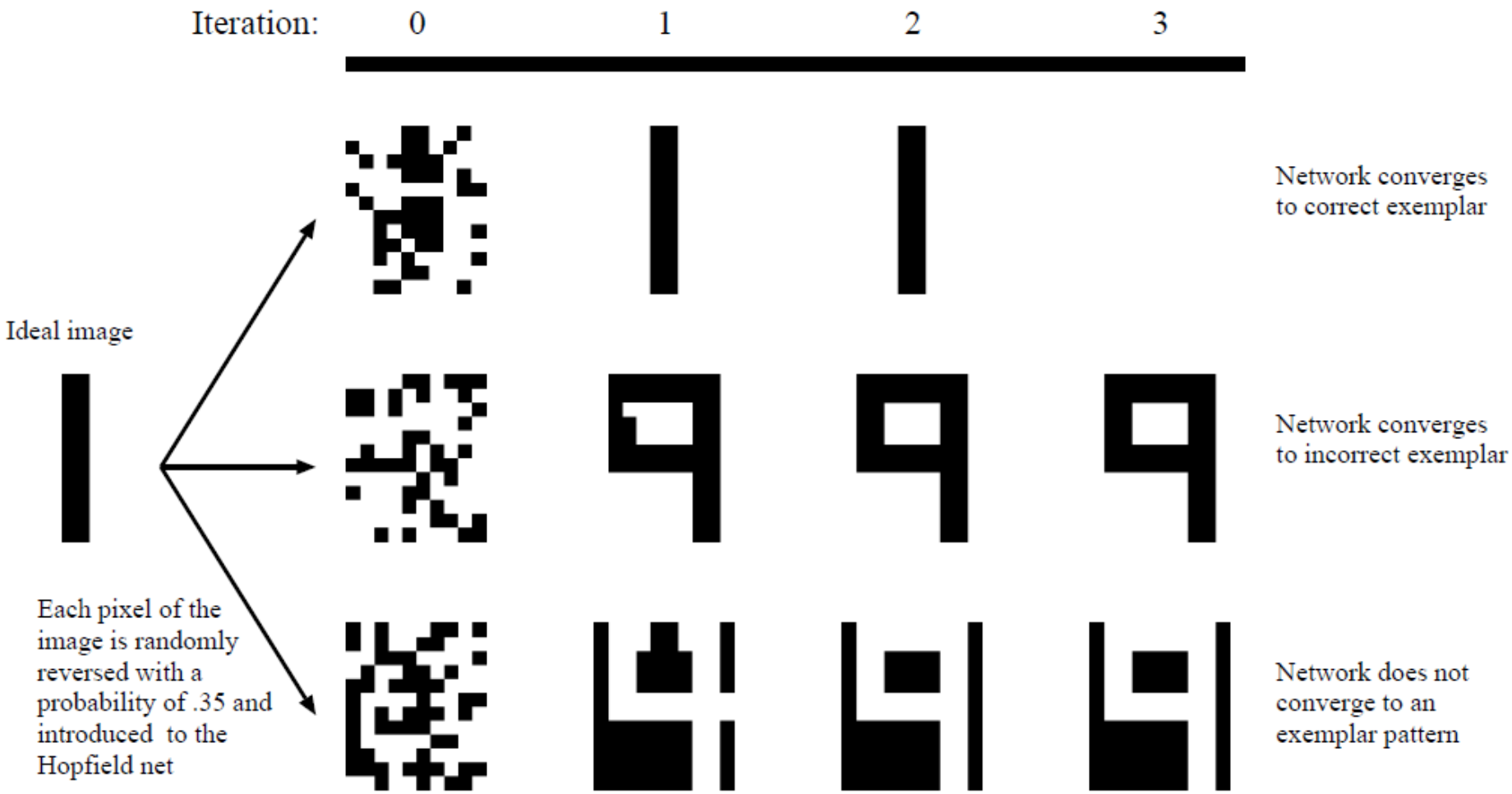
A convergência é garantida se os neurônios forem atualizados assincronamente e $w_{ij} = w_{ji}$.

Porém pode convergir para padrão incorreto ou que não seja exemplo (figura com imagens corrompidas com probabilidade 0.35).

A convergência para um padrão que não é exemplo geralmente é associada a um número de padrões exemplares muito grande em relação ao número de nós.

Já a convergência para padrão incorreto costuma estar associada à presença de padrões de exemplo muito similares.

Rede de Hopfield-Observações



Outline

Memória Associativa Birecional

Uma *memória associativa* é uma transformação, não necessariamente linear, entre espaços vetoriais

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

Uma rede de Hopfield é um caso especial de memória associativa $\mathcal{H} : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ que idealmente se comporta como a identidade quando restrita aos padrões de exemplo:

$$\mathcal{H}|_{\mathbf{E}} = \mathcal{I}_{\mathbf{E}}$$

e devolve o padrão de exemplo mais similar ao de entrada quando este último não faz parte de $\mathbf{E}$.

Memória Associativa Birecional

Uma *memória associativa birecional (MAB)* é uma generalização da rede de Hopfield em que a temos um conjunto de associações

$$\mathbf{A} = \{(\mathbf{a}^k, \mathbf{b}^k) : \mathbf{a}^k \in \mathbb{R}^M \text{ e } \mathbf{b}^k \in \mathbb{R}^N, 1 \leq k \leq K\}$$

e a transformação $\mathcal{B}$ satisfaz

$$\mathcal{B}|_{\{\mathbf{a}^k : 1 \leq k \leq K\}} \equiv \mathbf{A},$$

ou seja,

$$\mathcal{B}(\mathbf{a}^k) = \mathbf{b}^k, 1 \leq k \leq K.$$

Se o padrão de entrada $\mathbf{a}$ não fizer parte de $\{\mathbf{a}^k : 1 \leq k \leq K\}$, a MAB deve convergir para o par $(\mathbf{a}^k, \mathbf{b}^k)$ que possua $\mathbf{a}^k$ mais similar a $\mathbf{a}$.

Veremos os componentes a seguir.

Memória Associativa Birecional

Neurônios

Como domínio e contradomínio podem ter dimensões diferentes, temos agora um conjunto $\mathbf{S_a}$ para as entradas e outro $\mathbf{S_b}$ para as saídas:

$$\mathbf{S_a} = \{\mathbf{a}(m) : 1 \leq m \leq M\}$$
$$\mathbf{S_b} = \{\mathbf{b}(n) : 1 \leq n \leq N\}.$$

Os estados no tempo t são denotados $\mathbf{a}_t(m)$ e $\mathbf{b}_t(m)$ e aqui só poderão assumir valor 1 ou -1.

Memória Associativa Birecional

Conexões

As associações $(\mathbf{a}^k, \mathbf{b}^k)$, tais que $\mathbf{a}^k = (a_1^k, a_2^k, \ldots, a_M^k)$ e $\mathbf{b}^k = (b_1^k, b_2^k, \ldots, b_N^k)$, são armazenados na memória permanente da MAB, representada por uma matriz $M \times N$ em cada elemento é

$$w_{mn} = \sum_{k=1}^{K} a_m^k b_n^k.$$

Função de Ativação

Novamente, usa-se limiarização "dura":

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Memória Associativa Birecional

O próximo estado de um neurônio em $\mathbf{S_b}$ é dado por

$$\mathbf{b}_{t+1}(n) = f(\mathbf{a}_t w_{.n}, \mathbf{b}_t(n)) = \begin{cases} \mathbf{b}_t(n) & \text{se } \mathbf{a}_t w_{.n} = 0 \\ 1 & \text{se } \mathbf{a}_t w_{.n} > 0 \\ -1 & \text{se } \mathbf{a}_t w_{.n} < 0, \end{cases}$$

considerando-se que $\mathbf{a}_t = (\mathbf{a}_t(1), \mathbf{a}_t(2), \ldots, \mathbf{a}_t(M))$ e $w_{.n}$ é a n-ésima coluna de w.

Usando notação similar, o próximo estado de um neurônio em $\mathbf{S_a}$ é dado por

$$\mathbf{a}_{t+1}(m) = f(\mathbf{b}_t w'_{.n}, \mathbf{a}_t(m)) = \begin{cases} \mathbf{a}_t(m) & \text{se } \mathbf{a}_t w'_{.m} = 0 \\ 1 & \text{se } \mathbf{a}_t w'_{.m} > 0 \\ -1 & \text{se } \mathbf{a}_t w'_{.m} < 0, \end{cases}$$

em que w' denota transposta de w.

Memória Associativa Birecional

Passos do algoritmo:

1. Gerar matriz de conexões: $w_{ij} = \sum_{k=1}^{K} a_m^k b_n^k$.
2. Dado o padrão desconhecido de entrada $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_M)$, iniciar os neurônios de $\mathbf{S_a}$ por

$$\mathbf{a}_0(m) = p_m, 1 \leq m \leq M$$

   e os de $\mathbf{S_b}$ aleatoriamente com valores 1 ou -1:

$$\mathbf{b}_0(n) = choice(\{-1, 1\}), 1 \leq n \leq N.$$

3. Calcular próximo estado de neurônio em $\mathbf{S_a}$ por

$$\mathbf{b}_{t+1}(n) = f(\mathbf{a}_t w_{.n}, \mathbf{b}_t(n)), 1 \leq n \leq N$$

   e em $\mathbf{S_a}$ por

$$\mathbf{a}_{t+1}(m) = f(\mathbf{b}_t w'_{.m}, \mathbf{a}_t), 1 \leq m \leq M.$$

Memória Associativa Birecional

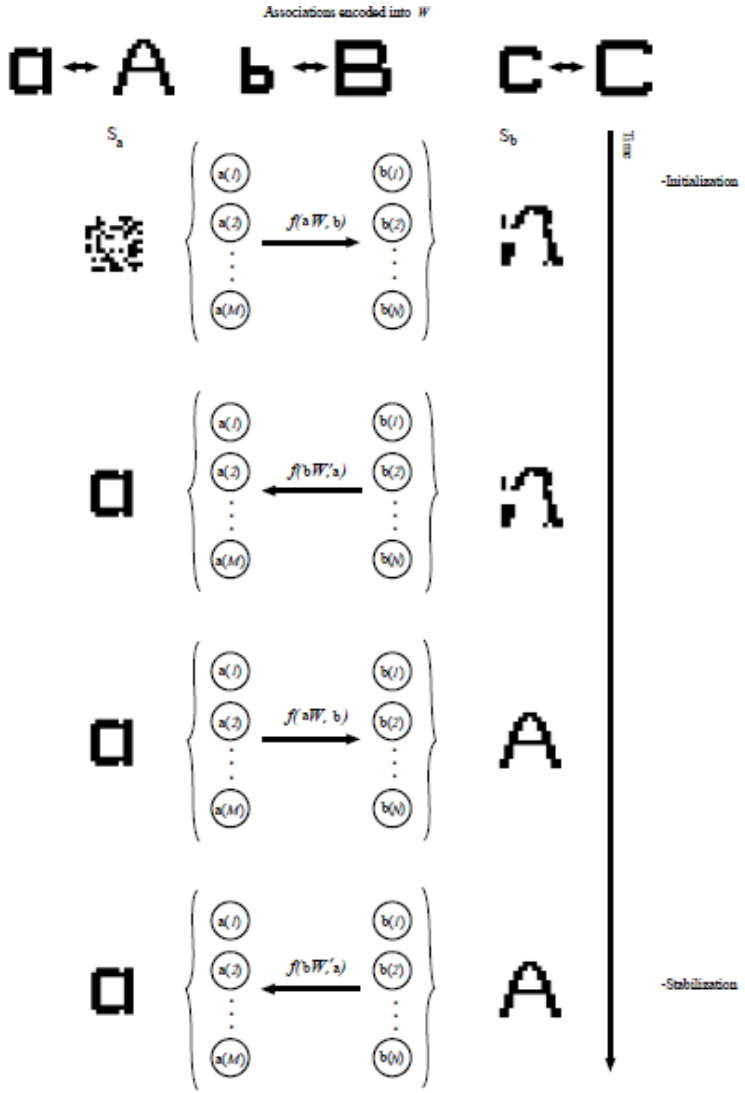
O nome *bidirecional* vem desta retro-alimentação na atualização dos estados em $\mathbf{S_a}$ e $\mathbf{S_b}$.

A iteração se repete até que nenhum neurônio mude mais de estado (convergência). A figura seguinte ilustra o processo.

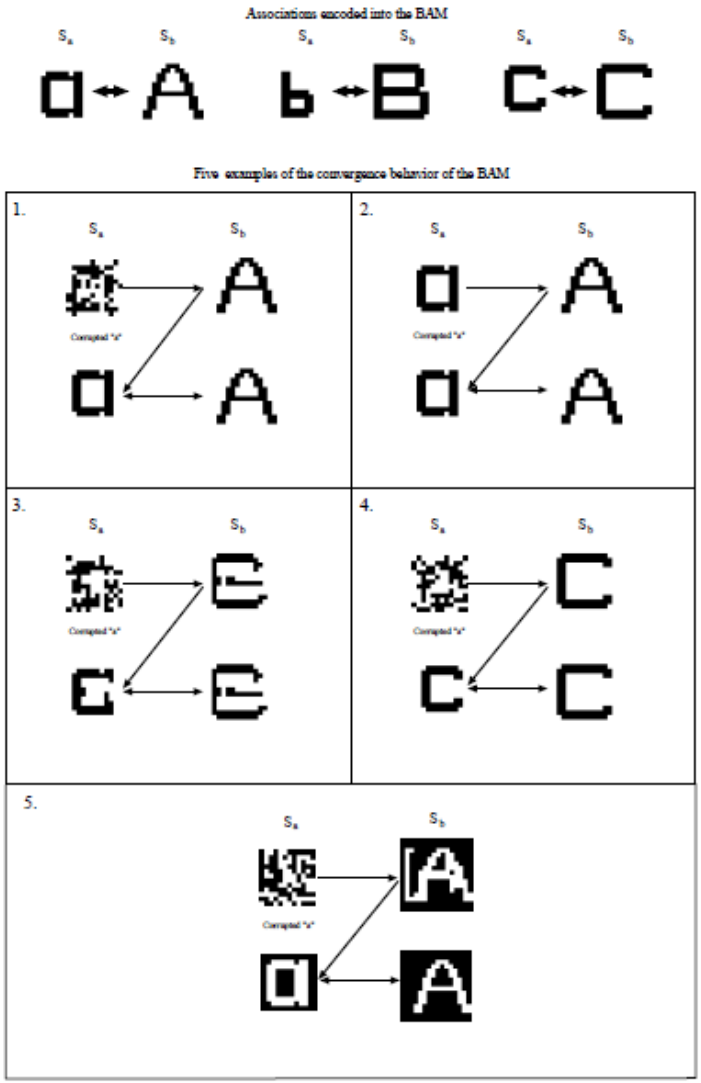
MABs possuem limitações semelhantes às redes de Hopfield: número limitado de associações armazenadas, tendência de convergir para uma associação incorreta se existem pares de associação que compartilham muitos *pixels* em comum, etc. (figura a seguir)

Pode haver convergência para o complemento de um padrão já que a associação complementar também é armazenada na memória (bloco 5 da figura de convergência).

Memória Associativa Birecional



Memória Associativa Birecional



Outline

Memória Associativa Birecional - Álgebra

Os estados dos neurônios em $\mathbf{S_a}$ e $\mathbf{S_b}$ são armazenados em variáveis de imagens $\mathbf{a} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}_M}$ e $\mathbf{b} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}_N}$.

$\mathbf{a}$ é iniciado com o padrão desconhecido e $\mathbf{S_b}$ randomicamente com -1 ou 1.

Matriz de pesos W representada pelo *template* $\mathbf{t} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_N})^{\mathbb{Z}_M}$:

$$\mathbf{t}_m(n) = \sum_{k=1}^{K} a_m^k b_n^k$$

em que a_m^k representa o m-ésimo componente de $\mathbf{a}^k$ na associação $(\mathbf{a}^k, \mathbf{b}^k)$.

Memória Associativa Birecional

$\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{0}$;
enquanto $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$ **faça**
    $\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{a}$;
    $\mathbf{b} \leftarrow f(\mathbf{a} \oplus \mathbf{t}, \mathbf{b})$;
    $\mathbf{a} \leftarrow f(\mathbf{b} \oplus \mathbf{t}', \mathbf{a})$;
fim

Outline

Perceptron Camada Única

Um *perceptron de camada única* (SLP em inglês) classifica um padrão $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in \mathbf{P} \subset \mathbb{R}^m$ em duas classes.

Um SLP deve conter um conjunto de pesos

$$\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}, w_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq m$$

e uma função limitante $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \rightarrow \{0, 1\}$:

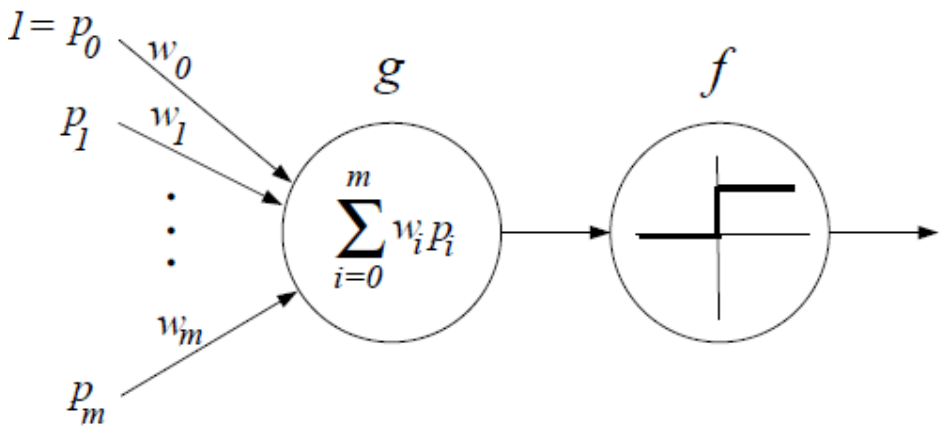
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Em geral, dado $\mathbf{p}$, calcula-se

$$g(\mathbf{p}) = w_0 + w_1 p_1 + \cdots + w_m p_m$$

seguido da aplicação da função limitante. Se $f \circ g(\mathbf{p}) < 0$, atribui-se $\mathbf{p}$ à classe C_0 e se $f \circ g(\mathbf{p}) > 0$, atribui-se à classe C_1.

Perceptron Camada Única



O gráfico de $g(\mathbf{x}) = 0$ forma um hiperplano, chamado de *superfície de decisão* que divide $\mathbb{R}^m$ em duas partes.

Dois modos de operação: classificação (acima) e aprendizado (ajuste dos pesos e da superfície de decisão consequentemente).

Vamos ver um exemplo de algoritmo de aprendizado.

Perceptron Camada Única

Seja $\{(\mathbf{p}_k, y_k)\}_{k=1}^{n}$ um conjunto de treinamento, tal que $\mathbf{p}_k = (p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots, p_{k_m}) \in \mathbf{P}$ e $y_k \in \{0, 1\}$ é a classe associada ao padrão. Seja ainda $w_i(t)$ o i-ésimo peso após o t-ésimo padrão de treinamento ter sido introduzido no SLP.

1. Iniciar cada $w_i(0), 0 \leq i \leq m$ randomicamente;
2. Apresentar $\mathbf{p}_k$ ao SLP e calcular sua classe y'_k:

$$y'_k(t) = f\left(w_0(t-1) + \sum_{i=1}^{m} p_{k_i} \cdot w_i(t-1)\right).$$

3. Ajustar os pesos

$$w_i(t) = w_i(t-1) + \eta \cdot (y_k - y'_k(t)) \cdot p_{k_i}.$$

4. Repetir passos 2 e 3 até convergência ou um número máximo de iterações.

Perceptron Camada Única

A constante $0 < \eta \leq 1$ regula a taxa de ajuste de pesos. Se for muito pequena o aprendizado fica lento, se for muito grande os pesos não se ajustam adequadamente.

Se $\mathbf{p}_k$ é classificado corretamente, $y_k - y'_k(t) = 0$ e não há mais nenhum ajuste de peso. Se $y_k - y'_k(t) \neq 0$ a alteração no peso é proporcional ao padrão de entrada.

Outline

Perceptron Camada Única - Álgebra

Guardamos os pesos na variável imagem $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m+1}$.

O padrão a ser classificado é $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$.

Definimos também $\mathbf{p}$ aumentado com um 1:

$$\tilde{\mathbf{p}} = (1, p_1, \ldots, p_m) \in \{1\} \times \mathbb{R}^m.$$

A classe de $\mathbf{p}$ é obtida por

$$y := f(\sum(\mathbf{w} \cdot \mathbf{p})).$$

O conjunto de treinamento será denotado por

$$\{(\mathbf{p}_k, y_k)\}_{k=1}^n$$

Perceptron Camada Única

$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{0}$;
enquanto $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ **faça**
    $\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{w}$;
    para $k \in 1..n$ **faça**
        $y'_k \leftarrow f(\sum(\tilde{\mathbf{p}}_k \cdot \mathbf{w}))$;
        $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + \eta \cdot (y_k - y'_k) \cdot \tilde{\mathbf{p}}_k$;
    fim
fim

Outline

Perceptron Multi-Camadas

Muitos problemas não são linearmente separáveis (por hiperplanos).

Perceptron retroalimentado contém uma camada de entrada e outra de saída de nós, além de uma ou mais camadas escondidas.

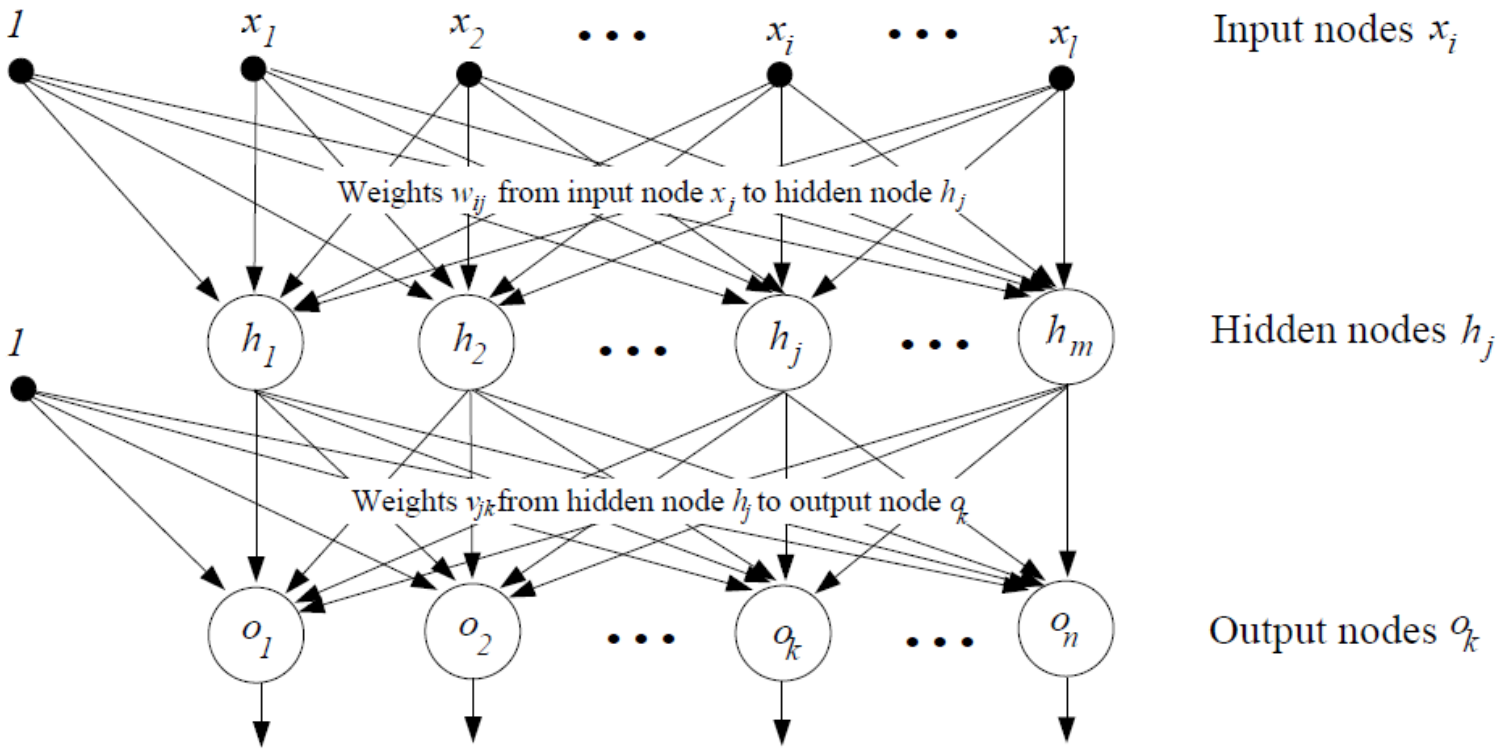
Vamos focar no caso de duas camadas (uma escondida).

Um nó h_j na camada escondida se conecta a um nó x_i na camada de entrada com peso w_{ij} e a um nó o_k na camada de saída com peso v_{jk}.

O padrão a ser classificado é introduzido aos nós de entrada $x_i, 1 \leq i \leq l$ e de lá os dados fluem em sentido único até os nós de saída $o_k, 1 \leq k \leq n$.

Nós de saída podem ter valor 0 ou 1 e portanto 2^n classes podem ser expressas.

Perceptron Multi-Camadas



Perceptron Multi-Camadas

Algoritmo de classificação:

1. Apresentar o padrão $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_l) \in \mathbb{R}^l$ ao perceptron:

$$x_i = p_i, 1 \leq i \leq l.$$

2. Calcular valores de nós na camada escondida por

$$h_j = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\left(w_{0j} + \sum_{i=1}^{l} w_{ij} x_i\right)}}, 1 \leq j \leq m.$$

3. Calcular nós na camada de saída:

$$o_k = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\left(v_{0k} + \sum_{j=1}^{m} v_{jk} h_j\right)}}, 1 \leq k \leq n.$$

4. Cada o_k é limiarizado por algum τ apropriado à aplicação de modo que a classe do objeto de entrada seja representada por um vetor binário $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, em que

$$c_k = \chi_{\geq \tau}(o_k).$$

Perceptron Multi-Camadas

Novamente, temos uma fase de aprendizado chamada de *aprendizado retropropagado*.

Usa um conjunto de treinamento $\{(\mathbf{p}^t, \mathbf{c}^t)\}_{t=1}^{s}$, em que $\mathbf{p}^t \in \mathbb{R}^l$ é um padrão e $\mathbf{c}^t \in \{0,1\}^n$ é a classe verdadeira daquele padrão.

A ida (*forward*) processa o padrão de treinamento e o classifica. A volta (*backward*) faz correções nos pesos com base em medidas de erro.

Perceptron Multi-Camadas

Função de erro:

$$f(c^t, o) = \frac{1}{2}(c^t - o)^2.$$

Objetivo: encontrar pesos v_{jk} e w_{ij} que minimizem f.

Gradiente descendente - pesos entre camada escondida e de saída:

$$v_{jk}(t) = v_{jk}(t-1) + \eta \frac{\partial f}{\partial v_{jk}}.$$

Regra da cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial v_{jk}} = \frac{\partial f}{\partial o_k} \frac{\partial o_k}{\partial v_{jk}}$$

$$= (c_k^t - o_k) o_k (1 - o_k) h_j = \delta_{o_k} \cdot h_j.$$

Perceptron Multi-Camadas

Gradiente descendente - pesos entre camada de entrada e escondida:

$$w_{ij}(t) = w_{ij}(t-1) + \eta \frac{\partial f}{\partial w_{ij}}.$$

Regra da cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial w_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial o_k} \frac{\partial o_k}{\partial h_j} \frac{\partial h_j}{\partial w_{ij}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[(c_k^t - o_k) \cdot o_k(1-o_k) \cdot v_{jk} \cdot h_j(1-h_j) \cdot x_i \right]$$

$$= h_j(1-h_j) \left[\sum_{k=1}^{n} \delta_{o_k} \right] \cdot v_{jk} \cdot p_i^t = \delta_{h_j} \cdot p_i^t.$$

Perceptron Multi-Camadas

1. Inicia pesos com valores aleatórios entre -0.1 e 0.1:

$$w_{ij} = choice([-0.1, 0.1]), 0 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m$$
$$v_{jk} = choice([-0.1, 0.1]), 0 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n.$$

2. Apresenta $\mathbf{p}^t = (p_1^t, p_2^t, \ldots, p_l^t)$ do par de treinamento $(\mathbf{p}^t, \mathbf{c}^t)$ e aplica passos 1, 2 e 3 do algoritmo de classificação.
3. Calcula erros $\delta_{o_k}, 1 \leq k \leq n$ na camada de saída:

$$\delta_{o_k} = o_k(1 - o_k)(c_k^t - o_k),$$

em que $\mathbf{c}^t = (c_1^t, \ldots, c_n^t)$ é a classe correta de $\mathbf{p}^t$ e $(o_1, \ldots, o_n)$ é a saída do perceptron.

4. Calcula erros $\delta_{hj}, 1 \leq l \leq m$ na camada escondida:

$$\delta_{hj} = h_j(1 - h_j) \sum_{k=1}^{n} \delta_{o_k} \cdot v_{jk}.$$

Perceptron Multi-Camadas

5. Seja $v_{jk}(t)$ o valor do peso v_{jk} após apresentação do t-ésimo padrão de treinamento. Os pesos entre a camada escondida e de saída são ajustados por

$$v_{jk}(t) = v_{jk}(t-1) + \eta \cdot \delta_{o_k} \cdot h_j,$$

em que $0 < \eta \leq 1$ determina a taxa de aprendizado.

6. Ajusta os pesos entre a camada escondida e a de entrada:

$$w_{ij}(t) = w_{ij}(t-1) + \eta \cdot \delta_{hj} \cdot p_i^t.$$

7. Repete passos 2-6 para cada elemento do conjunto de treinamento. Cada ciclo é chamado de *época*.

Outline

Perceptron Multi-Camadas - Álgebra

Os valores na camada de entrada e saída são armazenados nas variáveis-imagem $\mathbf{h} \in \{1\} \times \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$. Já os pesos entre a camada de entrada e a escondida são expressos no *template* $\mathbf{w} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{l+1}})^{\mathbb{Z}_{m+1}}$. Tal *template* é inciado por

$$\begin{aligned}
&\mathbf{w}_0(0) = 1 \\
&\mathbf{w}_0(i) = 0, 1 \leq i \leq l \\
&\mathbf{w}_j(i) = \mathit{choice}([-0.1, 0.1]), 0 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m.
\end{aligned}$$

O *template* $\mathbf{v} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{m+1}})^{\mathbb{Z}_n}$ contém os pesos entre a camada escondida e a de saída e é iniciado por

$$\mathbf{v}_j(k) = \mathit{choice}([-0.1, 0.1]), 0 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n.$$

A função de ativação será

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}.$$

Perceptron Multi-Camadas - Álgebra

A partir do conjunto de treinamento $\{(\mathbf{p}^t, \mathbf{c}^t)\}_{t=1}^{s}$, define-se

$$\tilde{\mathbf{p}}^t = (1, p_1^t, \ldots, p_I^t)$$

e os *templates* parametrizados $\mathbf{t}(\mathbf{d}, \mathbf{h}) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{m+1}})^{\mathbb{Z}_n}$ e $\mathbf{u}(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{I+1}})^{\mathbb{Z}_{m+1}}$:

$$\mathbf{t}(\mathbf{d}, \mathbf{h}) = \eta \cdot \mathbf{d}(k) \cdot \mathbf{h}(j), 0 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$$

e

$$\mathbf{u}(\mathbf{d}, \mathbf{p})_0(i) = 0, 0 \leq i \leq I$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{d}, \mathbf{p})_j(i) = \eta \cdot \mathbf{d}(j) \cdot \mathbf{p}(i), 0 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq m.$$

Perceptron Multi-Camadas - Álgebra

O algoritmo de aprendizado em cada época é o seguinte.

---

para $t \in 1..s$ **faça**

$\mathbf{h} \leftarrow f(\tilde{\mathbf{p}}^t \oplus \mathbf{w})$;

$\mathbf{o} \leftarrow f(\mathbf{h} \oplus \mathbf{v})$;

$\mathbf{d_v} \leftarrow \mathbf{o}(\mathbf{1} - \mathbf{o})(\mathbf{c}^t - \mathbf{o})$;

$\mathbf{d_w} \leftarrow \mathbf{h}(\mathbf{1} - \mathbf{h})(\mathbf{d_v} \oplus \mathbf{v}')$;

$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \mathbf{t}(\mathbf{d_v}, \mathbf{h})$;

$\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + \mathbf{u}(\mathbf{d_w}, \tilde{\mathbf{p}}^t)$;

fim

Perceptron Multi-Camadas - Álgebra

Para classificar um padrão $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_I)$, definimos $\tilde{\mathbf{p}} = (1, p_1, \ldots, p_I)$ e a classe obtida será representada na imagem $\mathbf{c}$ gerada pelo seguinte algoritmo:

$\mathbf{h} \leftarrow f(\tilde{\mathbf{p}} \oplus \mathbf{w})$;
$\mathbf{o} \leftarrow f(\mathbf{h} \oplus \mathbf{v})$;
$\mathbf{c} \leftarrow \chi_{\geq\tau}(\mathbf{o})$;
